

*Bestimmung
kosmologischer Parameter
durch Rotverschiebungsstatistik
von Gravitationslinsen*

**Bestimmung
kosmologischer Parameter
durch Rotverschiebungsstatistik
von Gravitationslinsen**

DIPLOMARBEIT
angefertigt an der Hamburger Sternwarte
im Fachbereich Physik der Universität Hamburg
unter Anleitung von Prof. Dr. Sjur Refsdal

vorgelegt von
Phillip King
aus
Tellmer

Hamburg
November 1993

*It is my belief that philosophy must return to cosmology
and to a simple theory of knowledge.
There is at least one philosophical problem
in which all thinking men are interested:
the problem of understanding the world in which we live,
and thus ourselves (who are part of the world) and our knowledge of it.
All science is cosmology, I believe,
and for me the interest of philosophy, no less than of science,
lies solely in its bold attempt to add to our knowledge of the world,
and to the theory of our knowledge of the world.*

Karl R. Popper

Vorbemerkung

Diese Arbeit entstand als Diplomarbeit in Physik an der Universität Hamburg—an der Hamburger Sternwarte in der Arbeitsgruppe „Gravitationslinsen“, geleitet von Prof. Dr. Sjur Refsdal. Ein Teil der Ergebnisse wurde auf dem 31st Liège International Astrophysical Colloquium “Gravitational Lenses in the Universe” in Juni 1993 vorgetragen.

Vorwort

Die Bestimmung kosmologischer Parameter ist ein Thema, das heute genau so aktuell ist wie vor siebzig Jahren. Obwohl die Kosmologie an sich viele Fortschritte seit den Anfängen¹ gemacht hat, ist dieses zentrale Thema, im Gegensatz zu den meisten kontroversen Punkten von früher, nach wie vor durch Unwissen auf der einen Seite und Wünsche und Hoffnungen der Beteiligten auf der anderen gekennzeichnet.

Während die klassischen Methoden (Kapitel 4), obwohl sie zeigen, daß die Bestimmung kosmologischer Parameter prinzipiell möglich ist, wahrscheinlich nicht in der Lage sind, uns endgültige Antworten auf die interessanten Fragen zu geben, bieten sich Gravitationslinsensysteme aus vielen Gründen gerade hierzu an (Kapitel 7). Hier muß man aber, wie eigentlich überall, die Fragen erst so allgemein wie möglich stellen, um zu sehen, was man überhaupt bestimmen kann, statt sich von vornherein auf bestimmte Modelle zu beschränken, sei es weil sie einfacher zu rechnen sind oder weil man sie aus *nichtphysikalischen* Gründen bevorzugt.

In dieser Arbeit hoffe ich so wenig Hitze und so viel Licht wie möglich auf diese komplizierte Thematik zu werfen.

¹Diese ganze Arbeit handelt von der Kosmologie im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie; „die Anfänge“ sind also die frühen Arbeiten von Einstein [Einstein 17], de Sitter [de Sitter 17a, de Sitter 17b, de Sitter 17c], Lemaitre [Lemaitre 31a, Lemaitre 31b], Friedmann [Friedmann 22, Friedmann 24], Eddington [Eddington 30] u.s.w.

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung	vii
Vorwort	ix
Einleitung	1
A. Kosmologie	5
1. Grundlagen	7
a. Kosmologisches Prinzip	7
b. Robertson-Walker-Metrik	8
c. Allgemeine Relativitätstheorie	9
Zusammenfassung	11
2. Gleichungen	13
a. Friedmann-Lemaître-Gleichungen	13
b. Beobachtbare Größen	14
Zusammenfassung	18
3. Entfernungen	19
a. Entfernungen im statischen euklidischen Raum	19
b. Verallgemeinerte Entfernungen	21
c. Zusammenhänge zwischen verschiedenen Entfernungen	23
d. Entfernungen im inhomogenen Universum	24
Zusammenfassung	25
4. Klassische Beobachtende Kosmologie	27
a. H_0	27
b. q_0	28
c. Ω_0	30
d. Weltalter	31
e. Der gegenwärtige Stand aus meiner Sicht	31
Zusammenfassung	33
5. Mögliche Weltmodelle	35
a. „Unmittelbare“ Einschränkung einzelner Parameter	35
b. Einschränkungen von Parameterkombinationen	37
c. Klassifizierung	40
d. M_2 -Modelle	42
Zusammenfassung	42

B.	Gravitationslinsentheorie	43
6.	Allgemeines	45
	a. Historisches	45
	b. Grundlagen	46
	c. Die Linsengleichung	46
	Zusammenfassung	50
7.	Gravitationslinsen und Kosmologie	51
	a. Die Laufzeitdifferenz und H_0	51
	b. Die Laufzeitdifferenz und andere kosmologische Parameter	52
	c. Statistische Ansätze	52
	Zusammenfassung	55
8.	Diskussion der in dieser Arbeit verwendeten Modelle	57
	a. Kurzbeschreibung der Modelle	57
	b. Näherungsmodelle	57
	Zusammenfassung	60
C.	Statistik	61
9.	Optische Tiefe	63
	a. Definition	63
	b. Normierung	66
	c. Auswahleffekte	67
	Zusammenfassung	69
10.	Relative Wahrscheinlichkeit	71
	a. Konzept	71
	b. Berechnung	72
	Zusammenfassung	73
D.	Ergebnisse und Diskussion	75
11.	Beobachtungsdaten	77
	a. Auswahlkriterien	77
	b. Klassifizierung bekannter Linsensysteme	77
	Zusammenfassung	78
12.	Auswertung von Beobachtungsdaten	85
	a. Einfluß verschiedener Parameter und qualitative Erwartun-	
	gen	85
	b. Untersuchungen durch numerische Rechnungen: Vorge-	
	hensweise	86
	c. Untersuchungen durch numerische Rechnungen: Ergebnisse	88
	Zusammenfassung	91
13.	Vergleich mit anderen Arbeiten	95
	a. Alle Modelle	95
	b. η -Parameter	96
	c. Verteilung	97
	d. Auswahleffekte	97
	e. Entwicklungseffekte	98

<i>Inhaltsverzeichnis</i>	xiii
f. Räumliche Verteilung	98
Zusammenfassung	98
14. Zusammenfassung und Ausblick	101
Anhänge	103
1. Herleitung des Ausdrucks für die optische Tiefe	105
2. Programme	109
Literaturverzeichnis	111
Danksagung	121
Erklärung	123

Einleitung

*The epigraph is among the most delightful of scholarly habits...
Part of the fun... is turning a source to unexpected use.*

Mary-Claire van Leunen, *A Handbook for Scholars*

Refsdal [Refsdal 64b] diskutierte schon 1964 die Möglichkeit, mit Hilfe von Gravitationslinsen kosmologische Parameter zu bestimmen, und zwar über den Lichtlaufzeitunterschied zwischen verschiedenen Bildern der Quelle. Diese Methode, vor allem in bezug auf die Bestimmung von H_0 , wurde ausführlich durch Borgeest [Borgeest 82] beschrieben. H_0 läßt sich leicht¹ bestimmen; der Einfluß anderer kosmologischer Parameter ist jedoch ein Effekt zweiter Ordnung, was diese Methode interessant für die Bestimmung von H_0 macht, jedoch nicht für die übrigen Parameter des Weltmodells. (Dies wurde auch bereits 1964 von Refsdal erwähnt.) Kayser hat auch gezeigt [Kayser 82, Kayser & Refsdal 83], daß dieser Effekt, der es im Prinzip möglich macht (falls H_0 bekannt ist), eine bestimmte Schar von Weltmodellen auszuschließen, praktisch ohne Bedeutung ist, so lange nicht genaue Information über den Grad der Homogenität vorhanden ist, da der η -Parameter, der angibt, welcher Bruchteil der Masse im Kosmos gleichmäßig verteilt ist ($\eta = 1$: volle Homogenität, $\eta = 0$: alle Materie in kompakten Objekten verteilt) einen viel größeren Einfluß als die anderen Parameter des Weltmodells hat (so lange man nur Weltmodelle betrachtet, die nicht aus anderen Gründen ausgeschlossen sind).

Da die klassischen Methoden zur Bestimmung kosmologischer Parameter (Kapitel 4) uns wahrscheinlich nicht viel weiter bringen werden, lohnt es sich zu untersuchen, in wie weit die Linsengalaxienrotverschiebungsstatistik uns ermöglicht, auf das Weltmodell zu schließen. Diese Methode bietet einige Vorteile:²

- Man kann ohne Kenntnis von H_0 auf die anderen Parameter schließen.
- Der Einfluß des η -Parameters ist klein gegenüber dem Einfluß der anderen Parameter des Weltmodells.
- Die Ergebnisse sind relativ unabhängig von Feinheiten des Linsenmodells.
- Es besteht eine realistische Chance, in naher Zukunft die Beobachtungsdaten erheblich zu verbessern—man kann aber bereits jetzt

¹Theoretisch. Praktisch spielen Unsicherheiten des Linsenmodells eine erhebliche Rolle, so wie die Bestimmung des Laufzeitunterschiedes (*time delay*), da intrinsische Variabilität nicht leicht von anderen Variabilitätsquellen, z.B. *microlensing*, zu trennen ist, und da der Einfluß der ungleichmäßig verteilten Beobachtungszeiten zusätzliche Schwierigkeiten (sogenanntes *windowing*) mit sich bringt.

²außer in den 1. und 3. Punkten gegenüber den klassischen Methoden; außer in dem 5. Punkt gegenüber der *time-delay*-Methode

schon Ergebnisse erhalten, die vergleichbar mit anderen Methoden sind.

- Man zählt und mißt Rotverschiebungen—ist also befreit von der größten Unsicherheit der Beobachtenden Kosmologie, den Entfernungsbestimmungen.

In *erster Näherung* geht man folgendermaßen vor: Für eine gegebene Kosmologie berechnet man die Wahrscheinlichkeit für mehrfach abgebildete Quasare pro z_d -Intervall und vergleicht diese Vorhersage mit den Beobachtungen. Die Wahrscheinlichkeit hängt von der Zahl der Linsen pro z_d -Intervall und von dem Wirkungsquerschnitt (Fläche innerhalb des Einstein-Ringes) einer Linse ab. Ersteres hängt von der heutigen Zahl (Normierung!), und dem kosmologischen Modell ab; letzteres von der Masse und der Massenverteilung der Linsen³ so wie der Größe $\frac{D_d D_{ds}}{D_s}$, die auch vom kosmologischen Modell abhängt, ab. Ein realistischeres Modell muß Entwicklungseffekte der Linsen so wie die wirkliche Linsenverteilung, sprich Haufen und Superhaufen bei Galaxien, berücksichtigen. Wichtig für den Vergleich mit Beobachtung ist natürlich die Zahl der Systeme, die tatsächlich beobachtet wird. Die zunächst berechnete Zahl wird verkleinert durch den durch Beobachtung bestimmten Mindestabstand der Bilder, realistische Galaxienmodelle (endliche Kernradien statt singulärer isothermer Sphären), Grenz(helligkeits)entfernungen der Linsen⁴ und vergrößert durch den sogenannten *amplification bias*.

Man könnte zunächst vermuten, daß es auch andere Größen gibt, z.B. den Bildabstand, die durch ihre Statistik Auskunft über das Weltmodell geben könnten. Es ist aber gezeigt worden, daß die Verteilung der typischen Bildabstände in z_d nur sehr schwach vom kosmologischen Modell abhängt [FFKT 92, S. 9–13].

Eine solche Untersuchung sollte folgenden Punkten Rechnung tragen:⁵

alle Modelle Es sollten alle Weltmodelle betrachtet werden, die nicht aus anderen Gründen ausgeschlossen werden.

η -Parameter Verschiedene η -Werte sollen betrachtet werden.

Verteilung Man sollte bei der Analyse der Beobachtungsdaten nicht nur die Gesamtzahl der Systeme, sondern auch ihre z_d -Verteilung betrachten, da man so zusätzliche Aussagen machen kann, obwohl die Zahl der Systeme sehr klein sein mag. (Siehe [Kochanek 92].)

Auswahleffekte Wichtig für den Vergleich mit Beobachtung ist, daß man „korrigierte“ Verteilungen berechnet, in denen alle Auswahleffekte und Beobachtungsungenauigkeiten berücksichtigt werden.

Entwicklungseffekte Jede realistische Betrachtung muß den Einfluß der zeitlichen Entwicklung der Linsen zumindest abschätzen.

Räumliche Verteilung Bei der Betrachtung von Galaxien als Linsen schränkt man den Umfang und Anwendbarkeit der Untersuchung ein, wenn man nur isolierte Galaxien betrachtet.

³Die Linsen haben nicht alle die gleiche Masse; man muß natürlich zunächst die Berechnung für eine Einheitsmasse durchführen und dann über die Massenfunktion integrieren.

⁴Diese hängen auch vom kosmologischen Modell ab.

⁵Siehe Kapitel 13 für eine Diskussion darüber, in wie weit diese Punkte in dieser Arbeit und in anderen Arbeiten berücksichtigt worden sind.

Die ersten vier Möglichkeiten zu berücksichtigen, ist zwar mathematisch und/oder numerisch aufwendiger, bietet aber prinzipiell nichts Neues gegenüber einer einfachen Betrachtung. Die Entwicklungseffekte zu berücksichtigen macht die Sache komplizierter, weil man hier eine zusätzliche Unsicherheit hineinbringt (oder einen zusätzlichen freien Parameter hat); die Vorgehensweise bleibt aber gleich. Die größte Schwierigkeit aber ist, eine realistische räumliche Verteilung der Galaxien zu berücksichtigen, da man hier auf andere, aufwendigere Methoden zurückgreifen muß.

Der Aufbau dieser Arbeit ist wie folgt: Teil A stellt die nötigen Voraussetzungen bezüglich Kosmologie dar; in Teil B werden die Grundlagen der Gravitationslinsentheorie, die für diese Arbeit wichtig sind, dargestellt. Teil C beschreibt die Theorie, die als Grundlage für die Rechnungen dient. In Teil D werden die Ergebnisse erläutert und mit den Ergebnissen anderer Arbeiten zu diesem Thema verglichen. Im wesentlichen stellen die ersten 2 Teile bereits Bekanntes dar, allerdings nicht vollständig, sondern in Hinblick auf die spätere Anwendung in dieser Arbeit. Die letzten 2 Teile, obwohl manche Konzepte auf bereits veröffentlichte Ideen anderer Wissenschaftler beruhen, stellen zum größten Teil von mir gewonnene Ergebnisse dar.

Teil A

Kosmologie

*Cosmology... restrains the aberrations
of the mere undisciplined imagination.*

Alfred North Whitehead

Kapitel 1

Grundlagen

Ubi materia, ibi geometria!

Johannes Kepler

a. Kosmologisches Prinzip

The less one knows about the universe, the easier it is to explain.

Léon Brunschwig

i. Ideale Formulierung

Ist das Universum homogen und isotrop, so läßt es sich erheblich leichter beschreiben. Inwieweit dies erfüllt ist, ist noch nicht klar. Natürlich hilft eine Vereinfachung einer mathematischen Beschreibung nicht, wenn dies der Wirklichkeit nicht entspricht; ist eine solche Vereinfachung jedoch eine Näherung, deren Abweichung von der Wirklichkeit zumindest abgeschätzt werden kann, kann sie uns die Beschreibung erheblich erleichtern, in manchen Fällen ja erst möglich machen.

Man beobachtet keine Homogenität, weil es Entwicklungseffekte gibt; man sieht Gegenstände, die weit weg sind, in dem Zustand, in dem sie waren, als das Licht (oder andere „Beobachtungsmittel“) ausgestrahlt wurde. Man beobachtet jedoch Isotropie, und aus lokaler Isotropie folgt Homogenität, wenn man annimmt, daß wir in keiner bevorzugten Lage sind (Kopernikanisches Prinzip).

Als *Kosmologisches Prinzip* bezeichnet man eben diese Aussage: das Universum ist homogen und isotrop, das heißt, jeder Beobachter sieht das gleiche Bild vom Universum. Alle Örter sind gleich.¹ Das bedeutet, daß das, was wir beobachten, allgemeine Gültigkeit hat; wir können unsere Beobachtungen extrapolieren und auf die Struktur des ganzen Universums durch Beobachtung eines kleinen Ausschnittes schließen. (Siehe [Harrison, Kapitel 13] für eine gute Darstellung dieses Sachverhalts.)

In dieser Arbeit, wenn nicht anders bemerkt, setze ich voraus, daß das Universum (mit den unten besprochenen Einschränkungen) homogen und isotrop ist.

¹Nimmt man zusätzlich an, daß auch alle Zeiten gleich sind, so spricht man vom *Vollkommenen Kosmologischen Prinzip*. Siehe [Bondi, Kapitel II] für eine gute Diskussion der Kosmologischen Prinzipien, derer Bedeutungen, Nützlichkeiten und Anwendungsgebiete.

ii. Realistische Formulierung

Als „selbstverständlich“ gelten folgende Einschränkungen des Kosmologischen Prinzips:

- Das Kosmologische Prinzip ist nur bei Maßstäben anzuwenden, die „groß genug“ sind.
- Das Kosmologische Prinzip gilt nur für „fundamentale Beobachter“, also nur für die Beobachter, die sich, relativ zu dem Substratum, in Ruhe befinden.

Es ist im Prinzip denkbar, daß es keine Skala gibt, an der das Kosmologische Prinzip gültig ist; das Universum könnte z.B. hierarchisch organisiert sein. Ist dies nicht der Fall, dann gibt es eine Skala, oberhalb derer das Universum als homogen und isotrop betrachtet werden kann. So lange man sich nur für Effekte interessiert, die sich auf dieser Skala abspielen, ist es meist vertretbar, das Universum so zu betrachten, als ob es *streng* dem Kosmologischen Prinzip folgte.² Das Kosmologische Prinzip ist in diesem Fall als Näherung zu betrachten, deren Abweichungen von der Wirklichkeit quantitativ erfaßt werden können. (Für eine Diskussion anderer möglicher Deutungen, siehe, nochmals, [Bondi, Kapitel II].)

Im Idealfall bezeichnet man als *Substratum* die gleichverteilte Materie. Man betrachtet das Universum also so, als ob alle Materie so verteilt wäre. Obwohl lokale Abweichungen vernachlässigbar sind, indem sie keine zu große Störung darstellen, darf natürlich eine Aussage, die von der idealen Verteilung ausgeht, nicht auf einen Beobachter angewendet werden, der sich relativ zu dem Substratum bewegt. Es ist klar, daß ein Beobachter, der nicht in Ruhe ist, allein durch (speziell)relativistische Effekte keine Isotropie wahrnimmt. Dies trifft nicht auf die fundamentalen Beobachter zu. Zusätzlich kann man für die fundamentalen Beobachter eine bevorzugte Zeit, die sogenannte „kosmische Zeit“, die für alle „gleichmäßig abläuft“, definieren [Weyl 23]. Das Kosmologische Prinzip und das Vorhandensein von Entwicklungseffekten reichen (im Prinzip) aus, um eine kosmische Zeit durch Beobachtungsvorschriften meßbar zu machen.

b. Robertson-Walker-Metrik

*He had bought a large map representing the sea
Without the least vestige of land:
And the crew were much pleased when they found it to be
A map they could all understand
‘What’s the good of Mercator’s North Poles and Equators,
Tropics, Zones, and Meridian Lines?’
So the Bellman would cry: and the crew would reply
‘They are merely conventional signs!’
‘Other maps are such shapes, with their islands and capes!
But we’ve got our brave Captain to thank’
(So the crew would protest) ‘that he’s bought us the best—
A perfect and absolute blank!’
Lewis Carroll, *The Hunting of the Snark**

²Eine wichtige Ausnahme ist die Ausbreitung von Licht, die auch von lokalen Eigenschaften der Materieverteilung abhängen kann. Siehe hierzu Kapitel 3 Abschnitt d.

i. Plausibilitätserklärung durch das Kosmologische Prinzip

Wie kann man mathematisch ein Universum beschreiben, das dem Kosmologischen Prinzip gehorcht? Die einzig mögliche zeitliche Entwicklung ist ein räumlich gleichmäßiges Ausdehnen oder Schrumpfen. Das Universum, vollkommen homogen und isotrop, ist also strukturlos und lediglich durch einen Skalenfaktor charakterisiert, der sich mit der Zeit ändern kann. Dies ist anschaulich klar, ist aber auch durch Robertson und Walker [Robertson 35, Walker 36] streng mathematisch bewiesen worden.

ii. Linienelement und Definition von Symbolen

Das Linienelement in einem homogenen und isotropen Universum ist gegeben durch

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{d\sigma^2}{(1 - k\sigma^2)} + \sigma^2 d\theta^2 + \sigma^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (1.1)$$

wobei die Größen folgende Bedeutungen haben

s Vierdimensionaler Abstand	[Länge]
c Lichtgeschwindigkeit	$\left[\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} \right]$
t Zeit	[Zeit]
R Skalenfaktor	[Länge]
σ „Radialkoordinate“	[dimensionslos]
k Krümmungskonstante	[dimensionslos]
θ Winkelkoordinate	[dimensionslos]
ϕ Winkelkoordinate	[dimensionslos]

(Es gibt keine einheitliche Schreibweise auf diesem Gebiet.)

c. Allgemeine Relativitätstheorie

From my point of view one cannot arrive, by way of theory, at any at least somewhat reliable results in the field of cosmology, if one makes no use of the principle of general relativity.

Albert Einstein

i. Näherungen

Es würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, mehr als unbedingt nötig zur Allgemeinen Relativitätstheorie zu erwähnen. Siehe [Berry] für das Minimum, das man für Kosmologie braucht, [Sexl & Urbantke] für eine gründliche Behandlung der Kosmologie im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie oder [MTW] für eine vollständige Darstellung der Allgemeinen Relativitätstheorie sowie eine gute, knappe Darstellung der allgemein relativistischen Kosmologie.

Wichtig für das Verständnis dieser Arbeit in Bezug auf kosmologische Modelle ist die Tatsache, daß die Symmetrieeigenschaften, die aus dem Kosmologischen Prinzip bzw. aus der Robertson-Walker-Metrik folgen, es

ermöglichen, die allgemein relativistische Beschreibung der zeitlichen Entwicklung des Universums auf zwei Gleichungen (die in Kapitel 2 erläutert werden) zu reduzieren, die auch (mit einer mehr oder weniger *ad hoc* aber durch Vergleich mit den genauen Ergebnissen aus einer strengen Behandlung doch zu rechtfertigender Umdeutung einiger Größen) durch die sogenannte Newton'sche Kosmologie³ verstanden werden können. Dies ist vielleicht nicht all so erstaunlich, denn das Kosmologische Prinzip gestattet es uns, ein Gebiet zu betrachten, das klein genug ist, daß alle relativen Bewegungen $\ll c$ sind, und die Tatsache, daß man eine wirklich *homogene* Massenverteilung betrachtet, gewährleistet (mit realistischen Dichten), daß in diesem Gebiet nur schwache Gravitationsfelder vorkommen. (Man hat es also mit dem Newton'schen Grenzfall zu tun.)

Wenn man aber die Ablenkung des Lichtes betrachtet, dann muß man etwas mehr Allgemeine Relativitätstheorie berücksichtigen, denn selbst für $v \ll c$ und schwache, statische Felder wird das Licht um das zweifache abgelenkt verglichen mit dem, was man nach der Newton'schen Theorie erwarten würde.⁴ Aber für die Beschreibung des Gravitationslinseneffektes (Teil B) braucht man aus der Allgemeinen Relativitätstheorie nur den „Faktor 2“ gegenüber der Newton'schen Theorie.

Wo Newton'sche Theorie überhaupt nicht benutzt werden kann, ist in der Herleitung der Zusammenhänge verschiedener Größen miteinander, wo sowohl die Ausbreitung elektromagnetischer Strahlung als auch die zeitliche Entwicklung des Universums als ganzes eine Rolle spielen (Kapitel 3); hier kommt man um eine allgemein relativistische Behandlung nicht herum; es reicht jedoch für das Verständnis dieser Arbeit nur „Anschauliches“ vorauszusetzen, das sich aus den Friedmann-Lemaître-Gleichungen ergibt.

ii. Mögliche Weltmodelle

Eine genauere Beschreibung möglicher Weltmodelle findet man in den gängigen Lehrbüchern über Kosmologie; hier erwähne ich nur einige Tatsachen, die zeigen, daß das vermeintliche „Wissen“ über das kosmologische Modell oft nicht von bleibender Gültigkeit ist. (Hier soll nur mein Eindruck geschildert werden; in Kapitel 2 werden alle Terme genau definiert.)

Einstein [Einstein 17] war der erste, der die Allgemeine Relativitätstheorie auf das Problem der Kosmologie anwendete. Zu seiner Überraschung, weil man damals das Universum für statisch hielt, fand er keine Lösungen, die statisch waren (außer für den nicht realistischen Fall verschwindender Dichte), und führte deshalb die kosmologische Konstante Λ ein, die eine der Schwerkraft entgegengerichtete Kraft darstellt und eine statische Lösung ermöglicht. Das statische, geschlossene Universum mit nichtverschwindender Dichte und (notwendigerweise) der Λ -Kraft wird als „Einstein'sches Universum“ bezeichnet. Dies war also das erste allgemein relativistische Weltmodell überhaupt. Obwohl durch Beobachtungen *ein-*

³Siehe, z.B. [McCrea & Milne 34], [Bondi, Kapitel IX], [Berry, Kapitel 7] oder [Harrison, Kapitel 14].

⁴Wenn man überhaupt etwas erwartet. Die Newton'sche Theorie ist nicht sehr klar in diesem Punkt, und die Vorstellungen, die man gebraucht, um die Hälfte des richtigen Wertes zu erhalten ($v_{\text{Licht}} = c$ im Unendlichen, Beschleunigung des Lichtes im Gravitationsfeld) sind sicher nicht richtig, vor allem wenn man die konstante Lichtgeschwindigkeit voraussetzt und eine verschwindende Ruhemasse des Photons. Man wird an das Bohr'sche Atommodell oder die Rutherford'sche Streuformel erinnert, die „zufällig“ dieselben Ergebnisse (in ihren Anwendungsbereichen) liefern als eine exakte quantenmechanische Behandlung. Hier liefert die Newton'sche Theorie „zufällig“ die Hälfte des richtigen Wertes.

deutig widerlegt, bildet es immer noch einen interessanten Grenzfall, der für die Klassifizierung aller möglichen Modelle nützlich ist.

Als Einstein erfuhr, daß Beobachter die Expansion des Universums entdeckt hatten, ließ er die kosmologische Konstante fallen. Später vertrat er die Ansicht, daß $\Lambda \equiv 0$ sein muß. Er war auch der Ansicht, daß das Mach'sche Prinzip (die Trägheit einer Masse ist durch die Massenverteilung im Universum *vollständig* bestimmt) nur ein endliches Universum zuläßt, was bedeutet (wegen Einschränkungen, die aus der Homogenität und Isotropie folgen), daß der 3-dimensionale Raum eine positive Krümmung hat ($k = 1$) und so eine Hyperkugel darstellt [Einstein 31]. Dieses Modell mit $\Lambda = 0$ und $k = 1$ [MTW, Box 27.4] wurde lange bevorzugt, weil es zeitlich geschlossen ist⁵ und keine kosmologische Konstante enthält.

Noch später machte Einstein zusammen mit de Sitter den Vorschlag [Einstein & de Sitter 32], daß man, bis Genaueres bekannt ist, der Einfachheit halber das Universum mit $\Lambda = 0$ und $k = 0$ als Modell unseres Universums nehmen sollte. Dieses Modell hat die Eigenschaft, daß viele Berechnungen erheblich einfacher sind und daß die Größen Ω und q (in Kapitel 2 definiert) zeitlich konstant sind, was sonst nur bei Modellen ohne Materie sowie statischen Modellen der Fall ist [Stabell & Refsdal 66].

Friedmann [Friedmann 22, Friedmann 24] war der erste, der alle möglichen Modelle untersuchte, und Lemaître [Lemaître 27, Lemaître 31a, Lemaître 31b] der erste, der die relativistische Kosmologie in Zusammenhang mit (damaliger) aktueller Astrophysik diskutierte. Lemaître schlug ein Modell mit $\Lambda > 0$ und $k = +1$ vor, was aber nicht statisch war und ein Weltalter zuläßt, was erheblich länger als die Hubble-Zeit sein kann. Eddington schlug ein ähnliches Modell vor, was jedoch nicht als Urknall entsteht sondern ab einer endlichen Größe (entsprechend dem statischen Zustand des Einstein'schen statischen Modells) expandiert, damit der Anfang „not too aesthetically abrupt“ sei—dies zeigt, welche große Rolle subjektive Vorlieben selbst bei großen Astronomen spielen können.

Eine Zeit lang waren zeitlich geschlossene Urknall-Modelle beliebt, z.T. nur wegen subjektiver Vorlieben. Heute werden Modelle mit $k = 0$ (zumindest im Rahmen der Beobachtungsgenauigkeit) von vielen erwartet, weil dies aus Theorien des inflationären Universums folgt. Viele erwarten, daß $\Omega \geq 1$ sein soll, um Strukturbildung zu verstehen.

Ich werde nur die Weltmodelle nicht betrachten, die aus gesichertem Wissen heraus als nicht möglich gelten. Vor allem wenn die Lebensdauer des aktuellen kanonischen Modells sehr kurz ist, lohnt es sich, eine möglichst allgemeine Betrachtung zu machen.

Zusammenfassung

- Aus der (an großen Skalen) beobachteten Isotropie des Universums und der vernünftigen Annahme, daß wir nicht an einem bevorzugten Ort sind, schließen wir, daß das Universum (auf großen Skalen) homogen ist, und damit auch von *jedem* Punkt aus betrachtet isotrop. Homogenität und universelle Isotropie erlauben uns, das Universum erheblich einfacher zu beschreiben.
- Die Robertson-Walker-Metrik ist die mathematische Schreibweise für diese einfache Beschreibung: die einzige mögliche zeitliche Änderung

⁵Die *zeitliche* Abgeschlossenheit folgt aus der *räumlichen* Abgeschlossenheit nur für $\Lambda = 0$.

im Universum ist ein gleichmäßiges Ausdehnen oder Schrumpfen.

- Die Allgemeine Relativitätstheorie ist die richtige Theorie, um ein Universum zu beschreiben, das von langreichweitigen Kräften beherrscht wird. Sie bestätigt die Beschreibung durch die Robertson-Walker-Metrik, beschreibt die Ausbreitung von Licht auf die richtige Art und Weise und erlaubt die Aufstellung von mehreren, durch lediglich 3 Parameter bestimmten Weltmodellen. Im Laufe der letzten Jahrzehnte wurden immer wieder andere Weltmodelle aus verschiedenen Gründen bevorzugt.

Kapitel 2

Gleichungen

Things are as they are because they were as they were.

Thomas Gold

a. Friedmann-Lemaître-Gleichungen¹

Ausgangspunkt für die Berechnung kosmologischer Modelle in dieser Arbeit sind die Friedmann-Lemaître-Gleichungen

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - Kc^2 \quad (2.1)$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.2)$$

wobei G die Gravitationskonstante, ρ die Materiedichte und $K = \frac{k}{R^2}$ ist. (Die anderen Größen sind bereits in Kapitel 1 Abschnitt b Punkt ii definiert worden.)

Diese Gleichungen enthalten keinen Druckterm. Da nach der Relativitätstheorie Druck als Energieform eine Schwerkraft erzeugt, ist er für diese dynamischen Gleichungen wichtig;² es ist aber eine gute Näherung, den Druck zu vernachlässigen, da die entsprechend Dichte des Strahlungsdruckes ($\rho_{\text{Strahlung}} = \frac{3p}{c^2}$, wo p der Strahlungsdruck ist) nur etwa ein Tausendstel der Materiedichte beträgt [Berry, S. 143]³ und der Gasdruck im Universum für kosmologische Zwecke vernachlässigt werden kann. Da $\rho_{\text{Strahlung}} \sim R^{-4}$ und $\rho_{\text{Materie}} \sim R^{-3}$, spielt der Strahlungsdruck eine größere Rolle bei kleinem R , also in der Frühphase unseres (expandierenden) Universums. (Hat man heute ein Verhältnis von $\frac{\rho_{\text{Materie}}}{\rho_{\text{Strahlung}}}$ von ≈ 1000 , dann waren beide Dichten gleich wichtig bei $z \approx 1000$. Da Gl. 2.1 und 2.2 selbst bei $\frac{\rho_{\text{Materie}}}{\rho_{\text{Strahlung}}} = \frac{1}{24}$ ihre Gültigkeit noch besitzen [Feige 92, S. 141], [Matravers & Aziz 88], ist es für diese Arbeit, die ausschließlich Effekte bei $z \leq 10$ betrachtet, sicher keine Fehlerquelle, wenn man Gl. 2.1 und 2.2 statt der genaueren Gleichungen [mit Drucktermen] benutzt.)

¹Gute Herleitungen im Rahmen der Newton'schen Kosmologie findet man bei [Berry, Kapitel 7] und [Harrison, Kapitel 14]. [Berry] gibt auch eine „anschauliche allgemein relativistische Herleitung“ an.

²Ein zusätzlicher Druck im Universum, ob Gas- oder Strahlungsdruck oder eine andere Form, führt also dazu, daß ein expandierendes Universum *stärker* abgebremst wird.

³Da Berry die Materiedichte eher *unterschätzt*, ist diese Näherung auf jeden Fall angebracht.

i. Andere Gleichungen

Wichtig für das Lösen der Friedmann-Lemaître-Gleichungen ist die Materieerhaltung

$$\rho(t) = \frac{\rho_0 R_0^3}{R^3(t)} \quad (2.3)$$

wobei $\rho_0 \equiv \rho(t_0)$ und der Index 0 bedeutet (wie auch im Rest dieser Arbeit) den heutigen Wert. (ρ_0 und R_0 sind, wie unten erläutert wird, beobachtbare Größen.)

Die Größe $\frac{\dot{R}}{R}$ wird auch als Krümmung der *Raumzeit* bezeichnet, während k die Krümmung des *Raumes* angibt (die eigentliche Krümmung ist $K := \frac{k}{R^2}$).⁴

ii. Friedmann-Lemaître-Gleichungen: Lösungen⁵

Aus Gl. 2.1, 2.2 und 2.3 folgen die Gleichungen

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3R} + \frac{\Lambda R^2}{3} - kc^2} \quad (2.4)$$

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G \rho R_0^3}{3R^2} + \frac{\Lambda R}{3} \quad (2.5)$$

Diese zwei Gleichungen bestimmen die Dynamik des Universums. Da man 5 Größen hat (R , \dot{R} , \ddot{R} , ρ und Λ) und zwei Gleichungen, die sie untereinander verknüpfen (Gl. 2.1, Gl. 2.2), sind 3 Größen nötig, um ein Weltmodell vollständig zu charakterisieren.⁶

b. Beobachtbare Größen

*Every statement in physics
has to state relations between observable quantities.*

Ernst Mach

i. Definitionen

Die Größen R , \dot{R} , \ddot{R} , Λ , k und, je nach dem, wie man die Dichte mißt, eventuell auch ρ , kann man nicht unmittelbar beobachten. Deshalb hat man in der Beobachteten Kosmologie normalerweise mit Größen zu tun, die

⁴Siehe [Berry, Kapitel 4.3 und 7.1] für die entsprechenden Definitionen und Beweise.

⁵Siehe auch, z.B., [Bondi, Kapitel IX].

⁶Da Λ eine Konstante ist, braucht man einen zusätzlichen Parameter, falls man nicht nur das Weltmodell, sondern auch den Zeitpunkt (z.B. den heutigen) bestimmen will. Benutzt man beobachtbare Größen (Abschnitt b), dann tritt dieses Problem nicht auf, denn diese sind alle i.a. zeitabhängig. (Sowohl hier als auch in Abschnitt b tritt der Parameter k auf; er ist aber kein freier Parameter, denn

$$k = \frac{R^2}{c^2} \left(4\pi G \rho - \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \left(\frac{-\ddot{R}R}{R^2} + 1 \right) \right)$$

k läßt sich natürlich auch durch die entsprechenden beobachtbaren Größen ausdrücken (siehe Gl. 2.8.)

man etwas unmittelbarer beobachten kann:

$$\begin{aligned} H &:= \frac{\dot{R}}{R} \\ q &:= \frac{-\ddot{R}R}{R^2} \equiv \frac{\ddot{R}}{RH^2} \\ \lambda &:= \frac{\Lambda}{3H^2} \\ \Omega &:= \frac{\rho}{\rho_{\text{krit}}} \equiv \frac{8\pi G\rho}{3H^2} \end{aligned}$$

Diese Größen wurden aus folgenden Gründen eingeführt (bis auf weiteres sind die erwähnten Größen stets Größen, die *jetzt* beobachtet werden. Die entsprechenden Indizes (z.B. H_0 statt H) habe ich der Übersichtlichkeit halber hier weggelassen):

H

Für *kleine Rotverschiebungen* ist die „Fluchtgeschwindigkeit“, die man aus der Dopplerformel⁷ erhält ($\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} =: z$, wo λ die Wellenlänge ist und z die Rotverschiebung), $\sim D_p$, und die Leuchtkraftentfernung $\sim D_p$, so daß der Quotient aus diesen zwei *beobachtbaren Größen* $\sim \frac{\dot{R}}{R}$ ist. Diese Größe, $\frac{\dot{R}}{R}$, ist nichts anderes als der Hubble-Parameter H , die den Zusammenhang (*bei kleinen Rotverschiebungen!*) zwischen Entfernung und Fluchtgeschwindigkeit angibt. (Siehe Kapitel 3 für eine Diskussion der hier erwähnten (und anderen) Entfernungen.) Man kann also den *absoluten* Wert von \dot{R} nicht messen, wohl aber den *relativen* ($\frac{\dot{R}}{R}$).

q

Die Größe q kann man aus den selben Beobachtungen ermitteln, die man zur Bestimmung von H benutzt (siehe, z.B., [Berry, Kapitel 6] oder [MTW, Kapitel 29.4 und Box 29.4] sowie Kapitel 4). Die Größe q ist, wie λ , Ω , und k dimensionslos. Das negative Vorzeichen in der Definition kommt daher, daß manche *a priori* eine Verzögerung statt einer Beschleunigung erwarten.

λ

Λ , in Gegensatz zu R , \dot{R} und \ddot{R} (k ist bereits normiert, konstant und dimensionslos), ist eine Konstante.⁸ Entscheidend für das Weltmodell ist jedoch das Vorzeichen, was auch bei λ das gleiche ist, oder aber (bei $k = 1$) das Verhältnis zu Λ_{krit} . Da Λ_{krit} aber von beobachtbaren Größen abhängt, ist es nützlich, verschiedene Weltmodelle in Bezug auf λ zu diskutieren, wenn man versucht, das Weltmodell aus heutigen Beobachtungen zu ermitteln. Die Größe λ ist auch im allgemeinen keine Konstante, so daß man durch 3 beobachtbare Größen das Weltmodell einschließlich Zeitpunkt vollständig charakterisieren kann. Außerdem bietet die Tatsache, daß nur H nicht dimensionslos ist, die Möglichkeit, alle dimensionsbehaftete Größen mit H zu normieren (was auch deshalb nützlich ist, weil in den meisten Fällen H genauer als die anderen Parameter bekannt ist).

⁷Die kosmologische Rotverschiebung ist keine Dopplerverschiebung! Siehe hierzu [Harrison, Kapitel 11] und [Harrison 93].

⁸In allen Modellen, die in dieser Arbeit betrachtet werden. Für kosmologische Modelle mit einem zeitabhängigen Λ -Term siehe, z.B., [Ratra & Quillen 92].

Ω

Für das Weltmodell mit $\Lambda = 0$ und $k = 0$ (Einstein-de Sitter-Modell) erhält man aus Gl. 2.1 und 2.2 den Ausdruck

$$\rho = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Da

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \dot{R} = 0$$

kann man ρ_{krit} definieren

$$\rho_{\text{krit}} = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

so daß (für $\Lambda = 0!!$) für $\rho > \rho_{\text{krit}}$, \dot{R} eine Nullstelle bei $R = R_{\text{max}}$ hat ($k = +1$; das Universum kollabiert also) und für $\rho < \rho_{\text{krit}}$, $\lim_{R \rightarrow \infty} \dot{R} > 0$ ($k = -1$; das Universum dehnt sich immer weiter aus). Deshalb die Bezeichnung *kritische Dichte*. Um diesen Sachverhalt in dimensionslosen Größen auszudrücken, führt man $\Omega := \frac{\rho}{\rho_{\text{krit}}} \equiv \frac{8\pi G \rho}{3H^2}$ ein. (Etwas irreführend ist, daß man auch von Ω bei Modellen mit $\Lambda \neq 0$ spricht, wo die *kritische* Dichte gar keine Bedeutung hat.⁹) Es ist auch sinnvoll, eine zu H^{-2} proportionale Dichte zu definieren, denn die Dichte, die man mit den *meisten* Methoden mißt, ist proportional zu H^{-2} : Wenn man Massen aus dem Virialsatz bestimmt, dann ist

$$M \approx \frac{v^2 x}{G} \sim x$$

wo x die charakteristische Länge ist und v die Geschwindigkeit. Weil

$$\rho = \frac{M}{V} \sim \frac{M}{x^3} \sim \frac{1}{x^2}$$

ist, und (da man von allen kosmologischen Größen Rotverschiebungen am genauesten messen kann) Längen meist in Einheiten von $\frac{c}{H}$ gemessen werden, erhält man

$$\rho \sim H^2$$

so, daß schließlich

$$\frac{\rho}{H^2}$$

statt ρ die eigentliche Beobachtungsgröße ist. Da $\Omega = \frac{8\pi G \rho}{3H^2}$ ist, sich also nur um einen konstanten Faktor von $\frac{\rho}{H^2}$ unterscheidet, kann man sagen, daß man Ω statt ρ beobachtet.

⁹Früher war die Größe $\sigma := \frac{4\pi G \rho}{3H^2}$ üblich (siehe, z.B., [Stabell & Refsdal 66]), die einfach als dimensionsloser Parameter eingeführt wurde. Sicher, σ und Ω unterscheiden sich lediglich um den Faktor 2, aber die Assoziation mit der kritischen Dichte kommt bei σ gar nicht erst auf, was von Vorteil ist, wenn man auch Modellen mit $\Lambda \neq 0$ betrachtet. In dieser Arbeit benutze ich trotzdem Ω , weil es den Vergleich mit anderen Arbeiten auf diesem Gebiet (siehe Anhang Kapitel 13) erleichtert und (wichtiger) weil σ bereits für $\frac{v}{R}$ in der Robertson-Walker-Metrik benutzt wird (Kapitel 1 Abschnitt ii), als Bezeichnung für eine Geschwindigkeitsdispersion, als allgemeine Bezeichnung für einen Wirkungsquerschnitt und außerdem in der Gravitationslinsenphysik als Bezeichnung für die Flächenmassendichte.

ii. Gleichungen

Für den Rest der Arbeit sind die Größen mit Index „0“ (z.B. H_0) die heutigen Werte der allgemeinen Größen (ohne Index) (die immer gemeint sind, falls kein Index vorhanden sind).

Aus Gl. 2.4 folgt

$$kc^2 = R^2 H^2 (4\pi G\rho - H^2(q+1)) \quad (2.6)$$

oder, unter Berücksichtigung von Punkt i

$$kc^2 = R^2 H^2 (\Omega + \lambda - 1) \quad (2.7)$$

daraus folgt

$$k = \text{sign}(\Omega + \lambda - 1) \quad (2.8)$$

Man kann auch den Krümmungsradius R berechnen:

$$R = \frac{c}{H} \frac{1}{\sqrt{\Omega + \lambda - 1}} \quad (2.9)$$

Für $k = 0$ ist R erwartungsgemäß unendlich; in diesem Fall *definiert* man

$$R := \frac{c}{H} \quad (2.10)$$

das in diesem Fall nur als Maßfaktor dient. So läßt sich die wichtige Konstante R_0 berechnen:

$$R_0 := \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_0 + \lambda_0 - 1}} \quad (2.11)$$

für $k \neq 0$. (Für $k = 0$ ist natürlich $R_0 = \frac{c}{H_0}$.)

Wenn man die oben definierten Größen in Gl. 2.4 bzw. 2.5 einsetzt, erhält man

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R} - R_0^2 H_0^2 (\Omega_0 + \lambda_0 - 1) + \lambda_0 H_0^2 R^2} \quad (2.12)$$

bzw.

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G\rho_0 R_0^3}{3R^2} + \lambda_0 H_0^2 R \quad (2.13)$$

Führt man ein $x := \frac{R}{R_0}$, so bekommt man

$$\dot{x} = \sqrt{H_0^2 \left(\frac{\Omega_0}{x} - \Omega_0 + 1 - \lambda_0 (1 - x^2) \right)} \quad (2.14)$$

bzw.

$$\ddot{x} = -\frac{1}{2} H_0^2 \left(\frac{\Omega_0}{x^2} - 2\lambda_0 x \right) \quad (2.15)$$

Mit $z := \frac{R_0}{R} - 1$ erhält man die Gleichung

$$\dot{z} = \sqrt{H_0^2 \left((\Omega_0 z + 1) (1 + z)^2 - \lambda_0 (z^2 + 2z) \right) (1 + z)^2} \quad (2.16)$$

die die Grundlage für die Berechnung der meisten beobachtbaren kosmologischen Größen als Funktion von z darstellt.¹⁰

¹⁰Eine etwas ausführlichere Herleitung dieser Gleichungen findet man in [Feige 92].

Die Lichtlaufzeit zwischen z_1 und z_2 ist gegeben durch

$$t_{12} = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dt}{dz} dz \quad (2.17)$$

wobei $z_i := z(t_i)$. Mit $\frac{dt}{dz}$ aus Gl. 2.16, erhält man

$$t_{12} = \frac{1}{H_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{P(z)}} \frac{1}{1+z} dz \quad (2.18)$$

wo $P(z) = (z+1)^2(\Omega_0 z + 1 - \lambda_0) + \lambda_0$. Dieser Ausdruck berechnet also die Lichtlaufzeit als Funktion der Rotverschiebungen und des durch beobachtbare Größen beschriebenen Weltmodells. Der Winkel χ (Kapitel 3 Abschnitt b Punkt) ist gegeben durch

$$\chi_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{c}{R} dt = \int_{z_1}^{z_2} \frac{c}{R} \frac{dt}{dz} dz = \frac{1}{H_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{c(1+z)}{R_0} \frac{1}{\sqrt{P(z)}} \frac{1}{1+z} dz \quad (2.19)$$

bzw.

$$\chi_{12} = \frac{c}{H_0 R_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{P(z)}} dz \quad (2.20)$$

Abgesehen von den konstanten Faktoren, die für die richtige Dimensionierung sorgen, ist der einzige Unterschied zwischen den Ausdrücken für $t(z)$ und $\chi(z)$ der Faktor $1+z$, der dadurch zustandekommt, weil χ von dem *heutigen* Krümmungsradius R_0 abhängt; t hängt von der durchlaufenen Strecke ab, der in dem entsprechenden z -Intervall $\sim R(z)$ ist.

Ein wichtiges Ergebnis dieser Rechnungen ist der allgemeiner Ausdruck für das Alter des Universums

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{P(z)}} \frac{1}{1+z} dz \quad (2.21)$$

Qualitativ sieht man sofort, daß $P(z)$ steigt mit steigendem λ .

Zusammenfassung

- Die Friedmann-Lemaître-Gleichungen folgen aus der allgemeinen Relativitätstheorie mit den Einschränkungen des kosmologischen Prinzips und beschreiben die Dynamik des Universums. Für unsere Zwecke ist es nicht nötig, Druckterme zu berücksichtigen. Die Materieerhaltung macht es möglich, die Funktionen $\frac{\dot{R}}{R}$ und $\frac{\ddot{R}}{R}$ in Abhängigkeit von 2 unabhängigen Parametern auszudrücken, nämlich Λ und ρ_0 . (Zur vollständigen Festlegung des Weltmodells braucht man eine dritte Größe, etwa den Wert von $\frac{\dot{R}}{R}$ heute.)
- Es ist wichtig, die theoretisch hergeleiteten Friedmann-Lemaître-Gleichungen auf beobachtbare Größen zurückzuführen, damit es möglich wird, aus Beobachtungen das Weltmodell zu bestimmen.

Kapitel 3

Entfernungen

*Zeit, Raum, Ort und Bewegung definiere ich nicht,
weil alle damit vertraut sind.*

Isaac Newton

Entfernungen spielen eine sehr wichtige Rolle in der Kosmologie. Weil das Universum nicht euklidisch ($k = 0$) sein muß, und weil das Universum im allgemeinen sich mit der Zeit ausdehnt oder in sich zusammenfällt, hängt der Wert, den man für eine Entfernung erhält, von der Definition ab: Entfernungen, die *per definitionem* im statischen euklidischen Fall gleich sind, sind im allgemeinen in der Kosmologie verschieden. Weil nicht alle Entfernungen meßbar sind (manchmal ist sogar nur die Rotverschiebung bekannt), sind Zusammenhänge zwischen verschiedenen definierten Entfernungen desselben Objektes (und der Zusammenhang mit der Rotverschiebung) von äußerster Bedeutung.

Zunächst werden über *Meßvorschriften* verschiedene Entfernungen für den statischen euklidischen Fall definiert, und dann werden Verallgemeinerungen für den allgemeinen kosmologischen Fall betrachtet. In diesem Kapitel sind alle Winkel als klein zu betrachten ($\beta \approx \sin \beta \approx \tan \beta$).

a. Entfernungen im statischen euklidischen Raum

*Absolute space, in its own nature,
without relation to anything external,
remains always similar and immovable.*

Isaac Newton

Im statischen euklidischen Raum sind die folgenden Entfernungen natürlich alle gleich; wichtig ist, daß man versteht, wie eine *Entfernung* aus einer *Meßvorschrift* folgt, denn im allgemeinen kosmologischen Fall ist die Meßvorschrift wichtig, weil sie von beobachtbaren Größen abhängt.

i. Metrische Entfernung

Die einfachste Vorstellung einer Entfernung ist wahrscheinlich die der metrischen Entfernung (*proper distance*), die einer physikalischen Messung mit einem Längenmaß entspricht: man zählt einfach die Längenintervalle oder,

in allgemeiner Form

$$D_p = \int_0^D dx \quad (3.1)$$

wo dx das Längenintervall angibt. (Der Betrachter ist bei 0 und das Objekt befindet sich in der Entfernung D ; hier ist D als Koordinate in einem metrischen Raum zu verstehen.)

ii. Koordinatenentfernung

Die Koordinatenentfernung r (*coordinate distance*) berechnet sich aus

$$r = R\sigma \quad (3.2)$$

wobei $\sigma := \frac{r}{R}$. Die Größe r ist eine *dimensionslose Entfernung* und R einen *Skalenfaktor*. Dies erscheint trivial; der Sinn einer solchen Definition wird in Abschnitt b klar.

iii. Winkelgrößenentfernung

Weiß man die wahre Ausdehnung eines Objektes, und mißt man die scheinbare Ausdehnung, dann kann man die Winkelgrößenentfernung (*angular size distance*) berechnen: Aus

$$\beta := \frac{x}{D} \quad (3.3)$$

wobei x die Ausdehnung des Objektes ist und β der gemessener Winkel, der dem scheinbaren Durchmesser entspricht, folgt

$$D = \frac{x}{\beta} \quad (3.4)$$

iv. Helligkeitsentfernung

Weiß man die wahre Helligkeit eines Objektes, und mißt man die scheinbare Helligkeit, dann kann man die Helligkeitsentfernung (*luminosity distance*) berechnen: Aus

$$l = \frac{L}{4\pi D_L^2} \quad (3.5)$$

wo l die scheinbare und L die absolute Leuchtkraft ist, folgt

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}} \quad (3.6)$$

v. Lichtlaufzeitentfernung

Weil fast alle Information von Objekten in kosmologischer Entfernung uns durch Licht (oder andere elektromagnetische Strahlung) erreicht, und weil die Lichtgeschwindigkeit eine wichtige Rolle in der Relativitätstheorie spielt, ist es manchmal sinnvoll, eine Lichtlaufzeitentfernung (*light travel time distance*) zu definieren:

$$D_\gamma := ct_\gamma \quad (3.7)$$

wobei $t_\gamma = t_0 - t_e$ die Zeit zwischen Aussenden und Empfangen des Lichtes ist.¹

¹Die Indizes „0“ und „e“ beziehen sich auf den jetzigen Zeitpunkt bzw. auf den Zeitpunkt der Emission, und werden in diesem Sinne im Rest dieser Arbeit verwendet.

b. Verallgemeinerte Entfernungen

In diesem Abschnitt beziehen sich alle Bemerkungen auf den allgemeinen kosmologischen Fall. Zusätzlich wird angenommen, daß alle Gegenstände sich mit dem Substratum bewegen ($\dot{\sigma} = \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$).

i. Metrische Entfernung

Die metrische Entfernung ist nicht beobachtbar, denn die Vorstellung, auf die sie beruht (Messung mit einem starren Maßstab) sich nicht realisieren läßt. Sie ist jedoch sehr wichtig, denn die Allgemeine Relativitätstheorie, die als Grundlage der Kosmologie dient, basiert auf dieser Definition von Entfernung; alle anderen Entfernungen sind prinzipiell (nicht aber praktisch) zweitrangig. Um „näher an der Beobachtung zu sein“ wäre es vielleicht sinnvoll, eine Theorie zu erstellen, die eine andere Definition von Entfernung als Ausgangspunkt verwendet; dies ist aber noch nicht gelungen. (Siehe [Bondi, S. 68–70] für eine Diskussion dieses wichtigen Punktes.) Mit Hilfe der Robertson-Walker-Metrik läßt sich die metrische Entfernung² wie folgt definieren:

$$D_p = R(t) \int_0^x d\chi \quad (3.8)$$

bzw.

$$D_p = R(t) \times \begin{cases} \operatorname{arcsinh} \sigma & \text{für } k = -1 \\ \sigma & \text{für } k = 0 \\ \operatorname{arcsin} \sigma & \text{für } k = +1 \end{cases} \quad (3.9)$$

wobei die Größen dieselbe Bedeutung wie in Kapitel 1 Abschnitt ii haben. Die Angabe einer metrischen Entfernung zwischen zwei Gegenständen benötigt natürlich auch die Angabe des Zeitpunktes.

ii. Koordinatenentfernung

Die Koordinatenentfernung wurde oben als $r = R\sigma$ definiert; diese Definition wird allgemein gültig, wenn man σ mit der Koordinate σ und R mit dem Skalenfaktor der Robertson-Walker-Metrik identifiziert. Die metrische Entfernung D_p ist nur für $k = 0$ mit r identisch. Die metrische Entfernung (zwischen Mittelpunkt und Oberfläche) entspricht anschaulich dem Radius einer Kugel. Ist r eine Entfernung, die über einen Winkel definiert wird, dann ist $r \neq D_p$ für $k \neq 0$, denn die Winkel verhalten sich auf nichteuklidische Weise: die Summe der Winkel eines Dreiecks ist dann nicht π , sondern $> \pi$ für $k = +1$ bzw. $< \pi$ für $k = -1$, wobei der Grad der Abweichung von der Größe des Dreiecks (bezogen auf den Krümmungsradius) abhängt. Weil man in der Praxis meist Größen mißt, die mit Winkeln bzw. mit Kugeloberflächen zu tun haben, *definiert* man r als „Radius“ der Kugel. Es ist ein sehr wichtiger Punkt, daß Entfernungen, die über einen Winkel definiert sind, zu r und nicht zu D_p proportional sind. Die Größe r ist also deshalb wichtig, weil die meisten beobachtbaren Entfernungen sich nur um Faktoren wie $(1+z)^n$ bzw. R_0 von r unterscheiden; ist man also in der Lage, r für ein bestimmtes kosmologisches Modell sozusagen als „Grundentfernung“ zu berechnen, dann sind die meisten übrigen Entfernungen durch leichte Umformungen zu berechnen.

² „As will be seen later this concept leads in cosmology to the mathematically well-defined but physically somewhat nebulous picture of the ‘absolute distance’ between ‘simultaneous events’.“ [Bondi, S. 69]

iii. Winkelgrößenentfernung

Bei der Winkelgrößenentfernung hat man es mit einer Entfernung zu tun, die über einen Winkel definiert ist, demzufolge muß man D in der Definition in Abschnitt a mit $R_e\sigma$ identifizieren:

$$D := R_e\sigma \quad (3.10)$$

bzw., unter der Berücksichtigung der Definition von z ,

$$D := \frac{R_0\sigma}{1+z} \quad (3.11)$$

Man muß R_e statt R_0 verwenden, denn der Winkel, um den es geht, wird durch die Ausdehnung des Gegenstandes und r_e bestimmt. Winkel bleiben natürlich bei einem gleichmäßigen Ausdehnen oder Schrumpfen des Universums erhalten. Die Winkelgrößenentfernung spielt eine wichtige Rolle in der Gravitationslinsentheorie (Teil B).

iv. Helligkeitsentfernung

Die Helligkeitsentfernung muß zu R_0 statt zu R_e proportional sein, denn der Raumwinkel, um den es hier geht, wird durch das Verhältnis von L zu l bestimmt, und entscheidend für l ist die Kugeloberfläche, die durch $l = \text{konstant}$ *jetzt* definiert wird. Es kommt aber noch etwas dazu: tatsächlich ist die Helligkeitsentfernung gegeben durch

$$D_L = R_0\sigma(1+z) \quad (3.12)$$

bzw.

$$D_L = \frac{R_0^2\sigma}{R_e} \quad (3.13)$$

Der Faktor $1+z$ in der Entfernung entsteht, weil der Fluß im Vergleich zum statischen Fall um den Faktor $(1+z)^2$ abgeschwächt wird, und zwar aus folgenden Gründen³:

- (1) Die Strahlung kommt beim Beobachter rotverschoben an, und, da $W = \frac{hc}{\lambda}$ (W ist die Energie eines Lichtquants, h das Planck'sche Wirkungsquantum und λ die Wellenlänge) und $1+z \equiv \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}$, eine Rotverschiebung von z bewirkt eine Abschwächung des (*bolometrischen!*⁴ Flusses um den Faktor $(1+z)$.
- (2) Betrachtet man die Rotverschiebung als eine Verringerung der Zahl der Wellenberge, die pro Zeitintervall den Beobachter erreichen, so ist klar, daß diese Verringerung auch *für die Lichtquanten selbst* gelten muß.

Man erhält also insgesamt eine Verringerung des Flusses um den Faktor $(1+z)^2$, was einem Faktor von $(1+z)$ in der Entfernung entspricht. Da die meiste Information über Entfernungen von kosmologischen Objekten mittelbar oder unmittelbar aus ihren Helligkeiten stammt, spielt die Helligkeitsentfernung eine besondere Rolle in der Kosmologie.

³Der Anschaulichkeit halber wird hier für $z > 0$ argumentiert; das Ergebnis gilt aber entsprechend für Blauverschiebungen mit $z < 0$ und Verstärkung des Flusses.

⁴Betrachtet man den Fluß *in einem bestimmten Wellenlängenbereich*, dann hat man einen *zusätzlichen* Faktor $(1+z)$ wegen der Dehnung des Wellenlängenbereiches. Dies, zusammen mit der Tatsache, daß das Spektrum der Quelle nicht in allen Wellenlängenbereichen gleich hell ist, bildet die sogenannte *K-Korrektur*.

v. Lichtlaufzeitentfernung

Die Lichtlaufzeitentfernung ct ist anschaulich klar; die Zeit t ist gegeben durch

$$t = \int_{R_e}^{R_0} \frac{dR}{A(R)} \quad (3.14)$$

wobei $A(R)$ die rechte Seite von Gl. 2.4 ist. Die Lichtlaufzeitentfernung ist besonders wichtig in der Behandlung von kosmologischen Horizonten [Harrison, Kapitel 19]

c. Zusammenhänge zwischen verschiedenen Entfernungen

*The principle of strategy is, having one thing,
to know a thousand things.*

Nusashi

i. Begründung (Beobachtbarkeit)

Wie am Anfang dieses Kapitels bereits bemerkt, sind Zusammenhänge zwischen verschiedenen Entfernungen besonders wichtig, weil es sehr selten vorkommt, daß man mehrere Entfernungen beim selben Objekt beobachten kann. Manchmal hat man nur die Rotverschiebungen, und deshalb ist es besonders wichtig, die Abhängigkeit der verschiedenen Entfernungen von der Rotverschiebung zu kennen. Besonders beim Vergleich zwischen Theorie und Beobachtung in der Kosmologie sind die Abhängigkeiten beobachtbarer Größen von der Rotverschiebung wichtig, denn $z = \frac{R_0}{R_e} - 1$ und enthält so Information über die zeitliche Entwicklung des Universums.

ii. Gleichungen

Wie in Abschnitt ii schon bemerkt, ist die Größe r besonders wichtig, denn, bis auf die Lichtlaufzeitentfernung, unterscheiden sich alle anderen Entfernungen und r lediglich um leicht zu berechnende Faktoren voneinander. Die einzige zusätzliche Schwierigkeit besteht in der Mehrdeutigkeit: zu einem Wert von r gibt es für $k > 0$ mehrere Werte einiger Entfernungen, manchmal sogar unendlich viele.

Die Gleichungen Gl. 2.11, 2.18 und 2.20 ermöglichen die Berechnungen der Lichtlaufzeitentfernung (ct) und der metrischen Entfernung D_p ($\equiv R_0\chi$) als Funktion der Rotverschiebungen z_1 und z_2 und des kosmologischen Modells (gegeben durch H_0 , Ω_0 und λ_0). Aus χ ergibt sich r :

$$r = R \times \begin{cases} \sinh \chi & \text{für } k = -1 \\ \chi & \text{für } k = 0 \\ \sin \chi & \text{für } k = +1 \end{cases} \quad (3.15)$$

Bei der Winkelgrößenentfernung, wie oben bemerkt, spielt die Entfernung zur Zeit des Aussendens des Lichtes die entscheidende Rolle, denn Winkel bleiben bei einer gleichmäßigen Ausdehnung des Universums erhalten. Es ist also

$$D_{xy} = R_y \sigma_{xy} = \frac{R_0 \sigma_{xy}}{1+z} \quad (3.16)$$

Betrachtet man die umgekehrte Entfernung, wie manchmal in der Gravitationslinsentheorie nötig, so ist

$$D_{yx} = R_0 \sigma_{xy} = D_{xy}(1+z) \quad (3.17)$$

Der heutige Abstand ist entscheidend bei der Helligkeitsentfernung, was einen Faktor $1+z$ gegenüber D_{xy} ausmacht; zusätzlich hat man den Effekt, daß der *Fluß* um den Faktor $(1+z)^2$ abgeschwächt wird, wie oben beschrieben wurde. Dies macht einen zweiten Faktor $1+z$ in der Entfernung aus, also

$$D_L = R_0 \sigma_{xy}(1+z) \quad (3.18)$$

Daraus folgt die Beziehung

$$D_L = D_{xy}(1+z)^2 \quad (3.19)$$

Dies bedeutet, daß die Flächenhelligkeit kosmologisch entfernter Objekte $\sim (1+z)^{-4}$ ist.

d. Entfernungen im inhomogenen Universum

In Abschnitt b wurde noch angenommen, entsprechend dem kosmologischen Prinzip, daß die Materie im Universum gleichmäßig verteilt ist. Sicher, wenn dies streng genommen der Fall wäre, dann wäre es unmöglich, überhaupt etwas zu beobachten; die Entfernungsdefinitionen setzen aber eigentlich nur voraus, daß Beobachter und beobachteter Gegenstand die lokale Materieverteilung nicht meßbar beeinflussen. Für die Beobachtende Kosmologie ist aber diese Einschränkung zu stark, denn (je nach Weltmodell) es ist durchaus möglich, daß die beobachteten Gegenstände (Galaxien, Quasare usw.) fast alle Materie im Universum beinhalten.

Wenn man annimmt, daß, obwohl es zwar lokale Verdichtungen von Materie gibt, das Universum im Großen doch dem kosmologischen Prinzip folgt, dann läßt sich die Lichtausbreitung in erster Näherung wie folgt beschreiben.

Das Universum hat eine mittlere Dichte ρ_0 , die sich aus zwei Anteilen zusammensetzt

- (1) gleichmäßig⁵ verteilte Materie, die den Bruchteil η der Gesamtmaterie des Universums darstellt
- (2) Materie, die in kompakten Objekten verteilt ist, die den Bruchteil $1-\eta$ der Gesamtmaterie darstellt

Innerhalb des Lichtkegels, aus dessen Öffnungswinkel man eine Entfernung ableitet, befinden sich keine kompakten Objekte;⁶ die mittlere Dichte ist hier also $\eta\rho_0$. Außerhalb des Lichtkegels ist die mittlere Dichte ρ_0 . (Es wird natürlich vorausgesetzt, daß das Volumen des Lichtkegels vernachlässigbar ist gegenüber dem Volumen der entsprechenden Kugel.) Die kompakten Objekte sollen sich weit genug von dem Lichtkegel entfernt befinden, so daß man die gesamte Materie durch eine verschmierte Massenverteilung der mittleren Dichte ρ_0 beschreiben kann—Effekte einzelner Objekte sind

⁵ verglichen mit den Maßstäben, die für die Lichtausbreitung eine Rolle spielen

⁶Man beachte die Definition von „kompakt“ in diesem Zusammenhang; siehe [Weinberg 76].

unbeobachtbar. Falls sich ein kompaktes Objekt doch am Rande bzw. innerhalb des Lichtkegels befindet, so wird es explizit durch den Gravitationslinseneffekt berücksichtigt (siehe Teil B).

Das Problem entspricht also dem Gravitationslinseneffekt einer Scheibe konstanter Dichte (Kapitel 6 Abschnitt iii) in der Ebene (Kleinwinkelnäherung!), die durch die Phase der Lichtwelle definiert ist, jedoch muß man hier die Dichte der Scheibe als negativ ansetzen, denn interessant ist das Verhältnis der Dichten inner- und außerhalb des Lichtkegels. Anschaulich ist sofort klar, daß eine *kleinere* lokale Dichte zu einem *Divergieren* der Lichtstrahlen (verglichen mit dem homogenen Fall) und dadurch zu einer *Vergrößerung* der durch den Öffnungswinkel des Kegels definierten Entfernung führt. [Kayser 85] gibt eine gute Beschreibung des Sachverhaltes an, und leitet eine Differentialgleichung für die Winkelgrößenentfernung D in Abhängigkeit von den Rotverschiebungen der Quelle (z_y) und einer durch die Phase definierte Position (z_x) (die im allgemeinen Fall natürlich nicht bei $z = 0$ liegen muß). Die Differentialgleichung lautet

$$D'' + \left(\frac{2}{v} + \frac{g'(v)}{g(v)} \right) D' + \frac{3\Omega_0\eta}{2} \frac{v}{g^2(v)} D = 0 \quad (3.20)$$

wobei $g(v) = \sqrt{\Omega_0 v^3 + (\Omega_0 + \lambda_0 - 1)v^2 + \lambda_0}$, $v = 1 + z$ und die Entfernung in Einheiten von $\frac{c}{H_0}$ gemessen wird. Da diese Gleichung nicht analytisch gelöst werden kann, ist die quantitative Betrachtung nichthomogener Weltmodelle schwieriger als die der entsprechenden homogenen Modelle. (Da ich sehr viel Gebrauch hiervon machen mußte, programmierte ich ein schnelles Lösungsverfahren basierend auf der Bulirsch-Stoer-Methode, jedoch mit Extrapolation mittels Polynome statt der üblichen rationalen Funktionen. Hierzu wurden u.a. Unterprogramme von [PFTF] benutzt. Die Entwicklung und das Testen des Programms hat mehrere Wochen Zeit in Anspruch genommen, war aber eine notwendige Voraussetzung für die Durchführung dieser Arbeit und kann natürlich für andere Arbeiten in Zusammenhang mit kosmologischen Entfernungen benutzt werden.)

Entfernungen, die durch die Ausbreitung von Licht gemessen werden, also die Winkelgrößenentfernung D und die Helligkeitsentfernung D_L , müssen mit Hilfe von Gl. 3.20 berechnet werden.⁷ Entfernungen hingegen, die sich auf die globale Dynamik des Universums beziehen, also die metrische Entfernung D_P , die Koordinatenentfernung r und die Lichtlaufzeitentfernung, sind unabhängig von η , also im homogenen und inhomogenen Universum gleich.

Zusammenfassung

- Im statischen euklidischen Raum ist es möglich, über Meßvorschriften verschiedene Entfernungen zu definieren.
- Im allgemeinen kosmologischen Fall, wo der Raum weder statisch noch euklidisch sein muß, hängt die Entfernung eines Objektes davon ab, wie man sie mißt.
- Da meistens nur eine Entfernung beobachtbar ist, oder gar nur die Rotverschiebung, sind die Zusammenhänge verschiedener Entfernungen miteinander und mit der Rotverschiebung sehr wichtig.

⁷Die in Abschnitt c hergeleiteten Zusammenhänge gelten entsprechend. (Siehe [SEF, S. 141].)

- Für realistische Weltmodelle muß man lokale Inhomogenitäten berücksichtigen, obwohl das Universum als Ganzes noch durch das kosmologische Prinzip beschreibbar ist.

Kapitel 4

Klassische Beobachtende Kosmologie

In diesem Kapitel sollen nur *kurz* die klassischen Methoden zur Bestimmung kosmologischer Größen vorgestellt werden, mit besonderem Blick auf die Genauigkeit der Methoden.

a. H_0

Historisch gesehen ist die Beobachtungsgröße H_0 das Verhältnis zwischen der Rotverschiebung, ausgedrückt als Geschwindigkeit (cz), und der Entfernung, meist als Leuchtkraftentfernung gemessen.¹ Dies ist der Grund, weshalb man meistens z gegen m (als Entfernungsmaß) aufträgt, obwohl z eher die unabhängige Variable ist. Da man historisch meist mit kleinen z -Werten zu tun hatte, und weil exakte Lösungen erst nach der Entwicklung der Beobachtungsmethoden gefunden wurden, macht man meistens eine Reihenentwicklung für z als Funktion von m :

$$m = M + 25 - 5 \log_{10} H_0 + 5 \log_{10} cz + 1,086(1 - q_0 z) + \dots \quad (4.1)$$

wobei m die scheinbare und M die absolute Helligkeit ist. (Der Faktor 1,086 ist eigentlich $\frac{2,5}{\ln 10}$.) Die Hubble-Konstante bestimmt man also aus dem Schnittpunkt dieser Funktion mit der z -Achse. (Siehe, z.B., [Berry, S. 112] für eine Erläuterung.)

Genau so wie es eine m - z -Beziehung gibt, gibt es eine zwischen z und den Winkeldurchmessern von Objekten, die man entsprechend für die Bestimmung von H_0 verwenden kann.

Für H_0 findet man Werte zwischen 30 und 110 $\frac{\text{km}}{\text{s Mpc}}$ ². Bemerkenswert ist, daß die Werte nicht gleichmäßig über das Intervall verteilt sind, sondern

¹Es soll hier noch einmal ausdrücklich betont werden, daß dieses durch Beobachtung gefundene Hubble-Gesetz nicht das gleiche ist wie das theoretische Expansionsgesetz, das man aus der Robertson-Walker-Metrik herleitet (Gl. 1.1). Aus dieser Metrik kann man auf D_p und \dot{D}_p , also auf zwei nicht beobachtbare Größen, schließen. Lediglich für kleine Rotverschiebungen, wie in Kapitel 2 Abschnitt b erläutert, gibt es eine gewisse Übereinstimmung zwischen dem beobachteten Hubble-Gesetz und dem theoretischen Expansionsgesetz. Eine ausführliche Behandlung dieses Themas findet man bei Harrison [Harrison, Harrison 93].

²Im folgenden werden Werte von H_0 , wenn nicht anders bemerkt, in diesen Einheiten angegeben.

sich um Werte um 45 bzw. 85 häufen. Der Wert scheint davon abzuhängen, wer die Untersuchung macht, und es kommt durchaus vor, daß verschiedene Gruppen verschiedene Werte *aus denselben Daten* erhalten.

Bei der Bestimmung der Hubble-Konstanten aus der oben beschriebenen Methode (mit Helligkeiten) müssen sowohl die z - als auch die m -Werte korrigiert werden. Die z -Korrektur, die dadurch zustandekommt, weil die Erde sich um die Sonne dreht, die Sonne sich um das galaktische Zentrum dreht, die Galaxis eine Eigenbewegung hat usw. ist relativ unproblematisch, denn unsere Geschwindigkeit bezogen auf das „Substratum“ läßt sich relativ leicht aus der Dipolanisotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung berechnen.

Schwieriger ist die Korrektur für m ; abgesehen von Entwicklungseffekten, die wahrscheinlich doch bei kleinen z -Werten vernachlässigt werden dürfen, muß man die in Kapitel 3 Abschnitt iv beschriebene K -Korrektur berücksichtigen, die Wissen über die spektrale Energieverteilung voraussetzt. Hinzu kommen Korrekturen für Absorption. Ein weiterer Punkt ist der sogenannte „Malmquist bias“, der dadurch zustandekommt, daß die „Standardkerzen“ in der Praxis eine Helligkeitsverteilung haben. Weil man fast immer mit flußbegrenzten Samples arbeiten muß, führt dies dazu, daß man bei größeren Entfernungen nur noch die helleren Objekte sieht, so daß die aus den Beobachtungen hergeleitete Durchschnittshelligkeit größer ist als die tatsächliche.

Bei der Beobachtung von Winkeldurchmessern hat man weder die K -Korrektur noch muß man Absorption berücksichtigen. (Es sei denn, der Winkeldurchmesser ist mit der Helligkeit auf eine Art und Weise korreliert, die Auswahleffekte verursacht.) Das Vorhandensein eines Effekts, der dem Malmquist bias entspricht, hängt stark von der Art der beobachteten Objekten sowie der Definition der Winkelgröße ab.

Aber das Hauptproblem bei diesen Methoden liegt in der Tatsache, daß man für die Eichung eine Vielzahl von Standardkerzen benötigt, die alle mit eigenen Unsicherheiten verbunden sind.

b. q_0

Aus der Abweichung von Gl. 4.1 von einer Geraden kann man q_0 bestimmen: für $q_0 = 1$ erwartet man die Gerade, für andere Werte eine entsprechende Abweichung. Dasselbe kann man auch für die Winkeldurchmesser tun; dies ist in letzter Zeit von verstärktem Interesse, da Kellermann [Kellerman 93] behauptet, Beobachtungen an *von Entwicklungseffekten unabhängigen Objekten* benutzen zu können, um q_0 zu bestimmen.

Heute ist man der Ansicht, daß es auf die oben beschriebene Art nicht möglich ist, q_0 zu bestimmen, weil die q_0 -abhängigen Effekte erst bei verhältnismäßig großen z -Werten auftreten. Weil hohe z -Werte mit großen Rückblickzeiten verbunden sind, erreicht man bei hohen z -Werten Stadien der Galaxienentwicklung, die so weit zurückliegen, daß die Galaxien sich von ihrer heutigen Form genug unterscheiden, um q_0 -Effekte unbeobachtbar zu machen. Es scheint auch nicht der Fall zu sein, daß in absehbarer Zeit die Galaxienentwicklung genau genug verstanden werden wird, um für diese Effekte korrigieren zu können. (Siehe aber [Sandage & Tammann 93].)

Alle Bemerkungen in dem letzten Abschnitt beziehen sich verstärkt auf die Bestimmung von q_0 , denn diese erfordert, daß man Objekte bei höherem z beobachten muß. Zusätzlich spielt der η -Parameter hier eine Rolle (vernachlässigbar bei der Bestimmung von H_0), wie Abb. 4-1 zeigt.

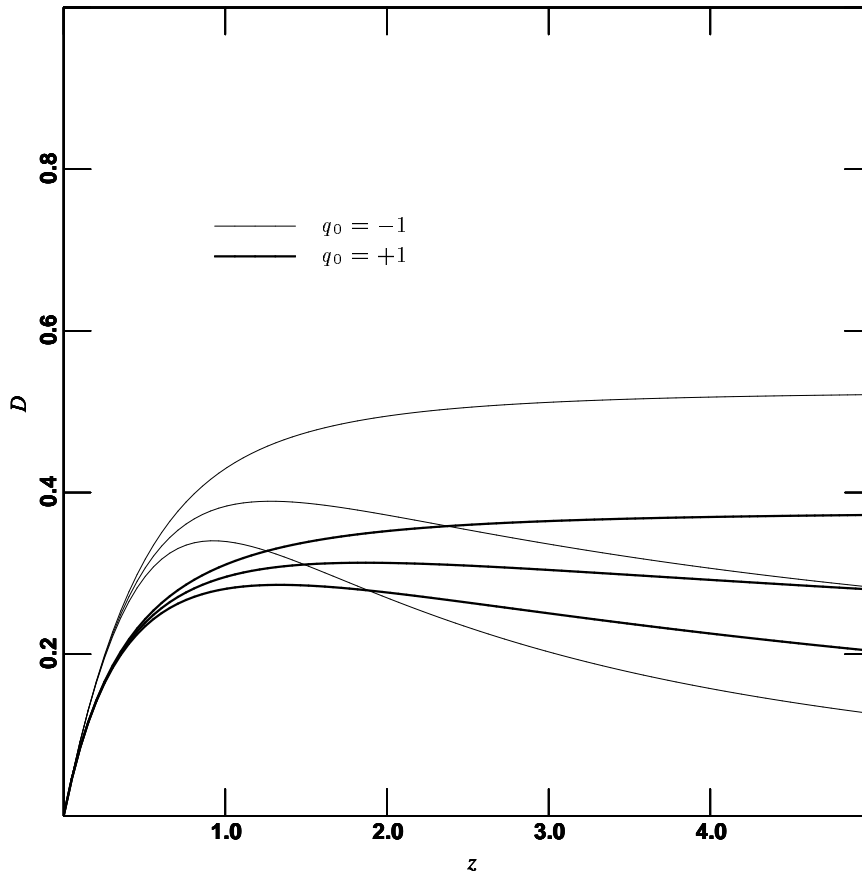


Abbildung 4-1. Einfluß von η auf die Bestimmung von q_0 .
 Geplottet ist der Winkelgrößenentfernung in Einheiten der Hubble-Länge $\frac{c}{H_0}$ als Funktion von z für verschiedene Weltmodelle. Für jede Kurvenschar sind die η -Werte, von oben, 0, $\frac{1}{2}$ und 1. Für alle Kurven ist $\Omega = 1$. Hier sieht man, daß der Einfluß von η größer ist als der von q_0 für größere z -Werte in „typischen“ Weltmodellen.

Alle Untersuchungen, die versuchen, durch die Abhängigkeit einer Entfernung von z das Weltmodell zu bestimmen, werden mehr oder weniger von dem η -Parameter beeinflusst. η ist nicht vergleichbar mit den anderen kosmologischen Parametern, denn η kann für verschiedene Objekte unterschiedlich sein. Ohne Auswahleffekte vollständig zu verstehen wird man nicht einmal die Hoffnung haben können, daß „ η im Mittel 1 ist“, was eine Hilfe bei statistischen Untersuchungen sein sollte, denn zwei entgegengesetzte Auswahleffekte sind möglich:

- (1) Ein flußbegrenztes Sample bevorzugt Objekte, die intrinsisch heller sind. Dadurch könnten Objekte, für die $\eta > 1$ gilt, bevorzugt werden. Dies wäre zu erwarten, wenn es viel Materie gibt, die weder absorbiert noch leuchtend ist und, obwohl (kosmologisch gesehen) nicht gleich verteilt, nicht kompakt genug ist, um explizit durch einen Gravitationslinseneffekt berücksichtigt zu werden.
- (2) Untersucht man Objekte, z.B. Feldgalaxien, die, um Rotverschiebungs-, Helligkeits- und/oder Winkelgrößenmessungen zu erleichtern,

bevorzugt in das Sample hineingenommen werden, wenn sie mehr oder weniger allein am Himmel stehen, dann könnten Objekte, für die $\eta < 1$ gilt, bevorzugt werden. Dies wäre zu erwarten, wenn der Großteil der Materie sich in kompakten Objekten befindet, die entweder leuchten oder absorbieren oder beides.

In dieser Arbeit wird η wo nötig berücksichtigt. Obwohl kein freier kosmologischer Parameter in dem Sinne, gibt eine Betrachtung für verschiedene η -Werte zwischen 0 und 1 in der Gravitationslinsenphysik eine Abschätzung für die Unsicherheit.

c. Ω_0

Im Prinzip ist es möglich, Ω_0 aus der m - z -Beziehung bzw. aus der entsprechenden Beziehung für Winkeldurchmesser zu bestimmen, aber dies ist in der Praxis nicht möglich, da Ω_0 -abhängige Terme erst in dritter Ordnung auftreten.

Ω_0 bestimmt man, in dem man die lokale Dichte (meist modulo H_0^{-2}) mißt, z.B. durch Galaxienzählungen gekoppelt mit Abschätzungen über die Masse der Galaxien. (Siehe, z.B., [Berry, S. 15–17].) (Wie in Kapitel 2 erläutert, beobachtet man bei „unmittelbaren“ Dichtemessungen meistens eher Ω_0 als ρ_0 .) Man kann mit dieser Methode die *Gesamtmasse* bestimmen, die mit leuchtender Masse *eng gekoppelt* ist. Ein entsprechendes Verfahren bei Galaxienhaufen funktioniert analog. Im allgemeinen findet man mit solchen Methoden, daß die Dichte mit der Größe des betrachteten Gebietes wächst.³

Was man aber mit diesen Methoden nur schwieriger bestimmen kann, ist die Dichte gleichmäßig verteilter dunkler Materie. Es gibt Methoden, die obere Grenzen für die Dichte *bestimmter Arten* gleichmäßig verteilter dunkler Materie angeben, aber es ist nicht möglich, eine Obergrenze für *alle* Sorten anzugeben.

Obwohl die Strahlungsdichte heute vernachlässigbar ist (Kapitel 2), ist es trotzdem möglich, daß Dichten, die aus der heutigen Strahlungsdichte abgeleitet werden können, für kosmologische Zwecke erheblich sein können. Es ist z.B. möglich, die Dichte von Neutrinos aus der Strahlungsdichte abzuleiten—hier die Beziehung (ohne Beweis):

$$n_{\nu_i + \bar{\nu}_i} \approx \frac{3}{11} n_\gamma \quad (4.2)$$

wobei

$$n_\gamma \approx 20,4 \times T_\gamma^3 \approx 4,15 \times 10^8 \text{m}^{-3} \quad (4.3)$$

Die Zahl n_γ ist die heutige Photonenzahlendichte und T_γ die Temperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung. (Siehe, z.B., [Weinberg].) Haben Neutrinos eine endliche Ruhemasse, dann ist es möglich, daß sie einen erheblichen Anteil an Ω_0 ausmachen. (Bei einer solchen Dichtebestimmung mißt man tatsächlich die Dichte und nicht $\frac{\rho_0}{H_0^2}$.)

Es gibt Methoden, mit denen man Ω_0 bestimmen kann (z.B. Galaxienzählungen) aber auch welche, die eigentlich ρ_0 bestimmen; dazwischen muß man sorgfältig unterscheiden. Aus Galaxienzählungen, die die dynamische (statt leuchtende) Masse zugrundelegen, kommt man auf Ω_0 -Werte

³Dies kann man verstehen dadurch, daß dynamische Methoden die Materie nicht messen können, die auf Skalen größer als die typische Länge des betrachteten Systems gleichmäßig verteilt ist. Siehe hierzu, z.B., [Narlikar & Padmanabhan 91].

in der Größenordnung von $0,1 \dots 0,25$. Dichtemessungen ergeben einen Wert von

$$\Omega_0 h_0^2 \approx 0,014 \dots 0,026. \quad (4.4)$$

Dies entspricht

$$\rho_0 \approx 2,6 \dots 4,9 \times 10^{-28} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (4.5)$$

(Siehe, z.B., [Narlikar & Padmanabhan 91] für eine zusammenfassende Beschreibung verschiedener Methoden zur Dichtebestimmung.)

Oben wurde erläutert, warum es schwierig ist, aus z.B. der m - z -Beziehung Ω_0 zu bestimmen. Solche Methoden sind aber wünschenswert, weil sie Ω_0 sozusagen global bestimmen. Methoden, die versuchen, Ω_0 an kleineren Skalen zu beobachten, haben im allgemeinen das Problem, daß sie von der genaueren Materieverteilung nicht unabhängig sind. So kann man meist nur *Untergrenzen* für Ω_0 setzen. Unmittelbare Obergrenzen für Ω_0 hingegen lassen sich kaum bestimmen.

d. Weltalter

*[The universe must] have aged sufficiently
for there to exist elements other than hydrogen.
It is well-known that carbon is required to make physicists.*

Robert Henry Dicke

Das Weltalter hängt von λ_0 , Ω_0 und H_0 ab (Gl. 2.21). Da man durch verschiedene Überlegungen Untergrenzen für das Weltalter angeben kann, ist es möglich, manche Parameterkombinationen auszuschließen. (Siehe Abb. 5-1.)

Die strengsten Untergrenzen kommen von Untersuchungen über das Alter von Kugelsternhaufen,⁴ wo man heute von einem Alter von $\approx 17 \times 10^9$ a [Catelan & Pacheco 92] ausgeht.⁵ Die Obergrenze für das Weltalter ist also dies plus die notwendige Zeit für die Entstehung der Kugelsternhaufen, also vielleicht eine Milliarde Jahre mehr.

Durch das Alter der ältesten uns bekannten Objekten kann man natürlich nur Untergrenzen für das Weltalter setzen. Genauere Angaben, sprich Ober- und Untergrenzen, sind nur möglich, wenn man eine Theorie der Entstehung von Objekten hat. Meistens jedoch sind diese Unsicherheiten vergleichbar mit den Unsicherheiten in den anderen kosmologischen Parametern.

e. Der gegenwärtige Stand aus meiner Sicht

Wegen der sehr umfangreichen Literatur zu diesem Thema ist eine objektive Beurteilung kaum möglich. Hier möchte ich nur meine subjektiven Eindrücke vermitteln, denn sie waren eine wichtige Motivation für diese Arbeit.

⁴nach neuen Erkenntnissen vielleicht von dem *galactic bulge*, die eventuell noch älter ist [Lee 92]

⁵Es gibt aber neuere Hinweise, daß dieser Wert nach unten korrigiert werden muß [Sandage 93b].

i. H_0

Seit den ersten Abschätzungen durch Lemaître und Hubble ist der Wert von H_0 von etwa 600 bis auf Werte zwischen 30 und 110 gefallen. Meist waren diese Korrekturen eine Folge von Verbesserungen in der Eichung der Entfernungsskala. Je höher die Hubble-Konstante, desto kleiner ist das Weltalter für gleiche λ_0 - und Ω_0 -Werte. (Für gleiche H_0 - und Ω_0 -Werte steigt das Weltalter mit λ_0 ; für gleiche H_0 - und λ_0 -Werte fällt das Weltalter mit Ω_0 .) Wichtig in diesem Zusammenhang ist die Tatsache, daß selbst die niedrigsten H_0 -Werte, die heute gemessen werden, kaum verträglich sind mit einem realistischen Wert für das Alter der ältesten Kugelsternhaufen, wenn $\lambda = 0$ sein soll. Es gibt erhebliche theoretische Vorurteile (*theoretical prejudices*), die manche Wissenschaftler dazu führen, $\lambda = 0$ zu setzen, obwohl man dies nicht durch Beobachtung verifiziert hat. Es gibt deshalb zweifelsohne bei manchen Wissenschaftlern eine Vorliebe für $\lambda_0 = 0$. (Obwohl $\lambda \neq 0$ aus einer größeren Hubble-Konstanten folgt (bei einem realistischen Alter der ältesten Kugelsternhaufen selbst für $\Omega_0 = 0$), ist der umgekehrte Fall nicht wahr: ein niedrigere Wert für H_0 bedeutet nicht, daß $\lambda = 0$ sein muß, sondern ist nur damit verträglich. Dies weist noch einmal auf die Wichtigkeit von Verfahren hin, die einen kosmologischen Parameter bestimmen können, ohne Wissen über einen anderen voraussetzen zu müssen.)

Beschränkt man sich auf Hinweise aus Beobachtung, ist ein hoher Wert für H_0 nicht deshalb unannehmbar, weil er $\lambda > 0$ als Folge hat. Wohl aber ist ein kosmologisches Modell, das ein Weltalter kleiner als das Alter einiger beobachteten Gegenstände als Folge hat, als unmöglich zu bezeichnen.

ii. q_0

Schon das Vorzeichen in der Definition von q_0 (Kapitel 2 Abschnitt b) zeigt, daß viele Wissenschaftler *a priori* $q_0 > 0$ erwarten, was immer der Fall ist bei $\lambda_0 = 0$. (Auch hier sei bemerkt, daß der umgekehrte Fall nicht wahr ist; aus $q_0 > 0$ folgt nicht unbedingt, daß $\lambda_0 = 0$ ist, aber ersteres ist mit letzterem verträglich.) Wie oben erläutert, ist es kaum möglich, q_0 „unmittelbar“ zu beobachten; man kann aber natürlich den Wert für q_0 in einem bestimmten kosmologischen Modell berechnen. Es ist lediglich möglich, aus klassischen Beobachtungen sehr extreme Werte für q_0 auszuschließen (diejenigen, die schon bei kleinen z -Werten beobachtbar wären).

iii. Ω_0

Das einzige, was man über den Wert von Ω_0 sagen kann, ist, daß $\Omega_0 \geq \Omega_{0,\text{gal}}$, was „unmittelbar“ beobachtet wird, sein muß. Obergrenzen, die unabhängig vom kosmologischen Modell sind, sind kaum aus Beobachtungen anzugeben—wenn man unbekannte Arten dunkler Materie zuläßt, kann man auch aus theoretischen Überlegungen heraus kaum etwas sagen. Wie bei q_0 kann man lediglich extrem große⁶ Werte, die bei kleinem z bemerkbar wären, ausschließen.

Messungen von ρ_0 , mit sowohl Unter- als auch Obergrenzen, statt Ω_0 dürften recht zuverlässig sein.

⁶Extrem *kleine* Werte können nicht wegen *globalen* Beobachtungen (m - z -Diagramm usw.) ausgeschlossen werden—sogar $\Omega_0 = 0$ wäre mit denen verträglich.

iv. Weltalter

Genauer bekannt als die Werte für H_0 , q_0 , λ_0 und Ω_0 ist eine Untergrenze für das Weltalter, die sich aus dem Alter der ältesten uns bekannten Gegenstände, nämlich der ältesten Kugelsternhaufen,⁷ ergibt. Meines Erachtens soll eine konservative Abschätzung dieses Wertes als Bedingung für ein annehmbares Weltmodell genommen und die (unsichereren) Parameter durch kosmologische Beobachtungen bestimmt werden statt umgekehrt.

Zusammenfassung

- Im Prinzip kann man aus „klassischen“ Beobachtungen *alle* kosmologischen Parameter— H_0 , λ_0 , Ω_0 und η bestimmen.
- Man hat eine Unsicherheit von mindestens einem Faktor 2 in den beobachteten Werten aller Parameter.
- Das Weltalter kennt man recht gut; man kann vielleicht in Zukunft H_0 mit einer Genauigkeit von 10% festlegen, aber es scheint aussichtslos, λ_0 und Ω_0 genau genug zu bestimmen, um z.B. quantitative Aussagen über die Funktion $R(t)$ machen zu können.
- Man braucht eine Methode, die *alle* kosmologischen Parameter bestimmen läßt und zwar so, daß man außer relativ sicherem Wissen nichts voraussetzen muß.

⁷ bzw. noch älterer Sterne im *galactic bulge*

Kapitel 5

Mögliche Weltmodelle

Bevor Rechnungen durchgeführt werden können, muß der sinnvolle Bereich im Parameterraum definiert werden. Zunächst werden „unmittelbare“ Einschränkungen¹ einzelner Parameter erläutert, und dann Einschränkungen, die sich auf bestimmte Kombinationen von Parametern beziehen, diskutiert. So erhält man einen Bereich im Parameterraum, außerhalb dessen nur unmögliche Weltmodelle existieren. Streng genommen ist es also ausreichend, Weltmodelle in diesem Bereich miteinander zu vergleichen. Um zu sehen, inwieweit mein Verfahren zu Einschränkungen führt, die vergleichbar mit denen der klassischen Methoden sind, wird ein größerer als der physikalisch mögliche Bereich des Parameterraumes betrachtet. Eine Ausnahme bilden Einschränkungen, die sich für M_2 -Modelle ergeben. (Diese, im Englischen auch „bounce models“ genannt, haben keinen Urknall, sondern kontrahieren aus dem Unendlichen auf einen minimalen Radius und expandieren dann wieder. Die Bezeichnung bezieht sich auf die Klassifizierung in [Stabell & Refsdal 66].)

a. „Unmittelbare“ Einschränkung einzelner Parameter

i. λ_0

Theoretisch kann λ_0 jeden Wert annehmen. Aus Beobachtung weiß man, daß $|\Lambda|$ klein genug sein muß, um keine beobachtbaren Effekte auf die Dynamik von kleinen Galaxienhaufen (die beobachteten Systeme mit der kleinsten Dichte) zu haben, denn Abweichungen von einem allein durch Schwerkraft bestimmten dynamischen Verhalten werden nicht beobachtet. Hieraus ergibt sich die Ungleichung [MTW, S. 411]

$$|\rho_{\text{Vakuum}}| = \left| \frac{\Lambda}{8\pi G} \right| < \rho_{\text{Haufen}} \quad (5.1)$$

Für $\rho_{\text{Haufen}} \approx 3 \times 10^{-26} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times h^2$ erhält man die Bedingung²

$$|\Lambda| < 8\pi G \rho_{\text{Haufen}} \approx 5 \times 10^{-35} \cdot h^2 \quad (5.2)$$

¹Die Grenzen, die ich hier setze, sind natürlich etwas zu weit gesteckt, aber für Vergleiche sinnvoll.

²In der Praxis wird die Dichte in Einheiten von $\frac{1}{h^2}$ gemessen; siehe Kapitel 2 Abschnitt b.

Die entsprechende Bedingung für λ_0 ist

$$|\lambda_0| < 1,8 \quad (5.3)$$

Man hat eigentlich eine Bedingung für $|\Lambda|$ in Abhängigkeit von ρ_{Haufen} , aber da man in der Praxis die Dichten in Einheiten von $\frac{1}{h^2}$ mißt, ergibt sich eine Bedingung für $|\lambda_0|$. Diese ist die einzige unmittelbare Einschränkung für λ_0 , die ich überhaupt kenne. Angesichts der Tatsache, daß die Dynamik von Galaxienhaufen keinesfalls vollständig verstanden ist, ist diese Einschränkung mit Vorsicht zu genießen— $|\lambda_0|$ könnte viel größer sein und möglicherweise eine Rolle bei der Dynamik von Galaxienhaufen spielen. Betrachtet man Systeme, z.B. das Sonnensystem, wo man auf keinen Fall sonst unerklärliche Abweichungen von der Newton'schen bzw. Einstein'schen Gravitationstheorie beobachtet, dann ist die Obergrenze für $|\lambda_0|$ um mehrere Zehnerpotenzen höher. Diese Abschätzung ist aber trotzdem wichtig, denn selbst mit diesem Wert ($|\lambda_0| < 2$), der eher eine Untergrenze darstellt bezüglich der „unmittelbaren“ Messung von λ_0 , ist man nicht in der Lage, eine Schar von Weltmodellen³ auszuschließen. Ich werde davon ausgehen, daß man keine unmittelbaren Grenzen für λ_0 hat.

ii. Ω_0

Aus Beobachtungen weiß man, daß

$$\Omega_{0,\text{Galaxien}} \approx 0,05 \quad (5.4)$$

wobei dies eher eine Unterschätzung ist. (Diese Zahl erhält man, in dem man die Zahl der Galaxien einer Masse pro Volumen⁴ mißt und multipliziert mit der *dynamischen* Masse der Galaxien; anschließend muß man natürlich über die Massenfunktion integrieren.) Weil $\Omega_{0,\text{Galaxien}}$ eine Untergrenze ist, gilt:

$$\Omega_0 > 0,05 \quad (5.5)$$

iii. η

Der η -Parameter gibt den Bruchteil der Materie an, die so verteilt ist, daß sie sich im Lichtkegel einer betrachteten Quelle eines Gravitationslinsensystems befindet. Manchmal wird η mit dem Anteil „gleichmäßig verteilter Materie“ gleichgesetzt; $1 - \eta$ ist dann der Anteil der Materie in „kompakten Objekten“. Wichtig ist die Definition von „kompakt“ in diesem Zusammenhang;⁵ schwarze Löcher kleiner Masse, die „kosmologisch gleich verteilt“ sind, sind keine „kompakten Objekte“, während sehr dünne galaktische Halos durchaus nicht zur „gleichmäßig verteilten Materie“ gerechnet werden können. Über alle Sehstrahlen gemittelt muß $\eta = 1$ sein, *wenn man alle „Gravitationslinseneffekte“ mitberücksichtigt*. Am besten wäre es, für jedes betrachtete Gravitationslinsensystem einen η -Wert anzugeben, denn er ist wichtig für die Berechnung der Winkelgrößenentfernungen D_{ij} . Eine statistische Untersuchung mit einem, mit zum Weltmodell gehörendem, η -Parameter mag zunächst etwas zweifelhaft erscheinen, wenn η über alle Richtungen gemittelt = 1 sein soll, aber bei Gravitationslinsensystemen

³beschrieben durch das Vorzeichen von k und λ_0 bzw. das Verhältnis zu $\lambda_{0,\text{krit}}$ bei $k = +1$

⁴Da Entfernungen i.a. in Einheiten von $\frac{1}{h}$ gemessen werden, hat man eine Bedingung für Ω_0 statt für ρ .

⁵Siehe, z.B., [Weinberg 76].

wird die Deflektormasse ja explizit berücksichtigt, so daß $\eta < 1$ sein muß. Wieviel kleiner hängt von der Art und Verteilung der Materie im Universum ab; *a priori* kann man im Rahmen der Beobachtungsgenauigkeit jedoch keine Aussage machen, also

$$0 < \eta < 1 \quad (5.6)$$

iv. H_0

Es würde viel zu weit führen, verschiedene Methoden zur Bestimmung der Hubble-Konstanten und die möglichen Gründe für ihre widersprüchlichen Ergebnisse zu erläutern. Theoretisch kann H_0 alle Werte annehmen. In unserem Universum ist H_0 bestimmt positiv; zumindest gibt es darüber keinen Streit. Fast alle Astronomen, die sich auf dem Gebiet auskennen, wären sicher mit der Aussage einverstanden, daß H_0 irgendwo im folgenden Bereich liegt:

$$30 < H_0 < 110 \quad (5.7)$$

wo H_0 in den üblichen Einheiten $\frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$ gemessen wird. Um Vergleiche zu erleichtern, definiert man

$$h := \frac{H_0}{100 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}}$$

Der heutige Stand ist also, daß

$$0,3 < h < 1,1 \quad (5.8)$$

b. Einschränkungen von Parameterkombinationen

i. λ_0 und h

Identifiziert man Λ mit der Vakuumenergiedichte, dann sollte es möglich sein, von ersten Prinzipien her $\Lambda = 3H_0^2\lambda_0$ zu berechnen. Obwohl es schon Ansätze gibt,⁶ ist es nicht möglich, auf diese Art und Weise den Wertebereich für Λ einzuschränken. (Man könnte höchstens vermuten, *wenn dies die einzige Quelle der kosmologischen Konstante ist*, daß $\Lambda > 0$ sein sollte.)

ii. Ω_0 und η

Es gibt 2 Extremfälle bezüglich η :

- (1) Die ganze Materie ist konzentriert in Galaxien.
- (2) Fast die ganze Materie (bis auf die in Galaxien) ist fein verteilt.

Im ersten Fall ist es nur wichtig, daß die Materie mit den sichtbaren Galaxien zusammenhängt; selbstverständlich muß nicht die ganze Materie leuchtend sein, was man ja auch aus Beobachtung bezüglich des dynamischen Verhaltens von Galaxien weiß. Der zweite Fall entspräche z.B. einem Universum, in dem $\Omega_{0,\text{Galaxien}}$ nur einen sehr kleiner Bruchteil von Ω_0 ist; z.B. $\Omega_0 \approx 1$ und die restliche Materie besteht aus (gleichmäßig verteilten) Neutrinos mit endlicher Ruhemasse. Der erste Fall liefert $\eta = 0$, denn Galaxien werden durch den Gravitationslinseneffekt explizit berücksichtigt. Weil der Bruchteil $\Omega_{0,\text{Galaxien}}$ auf jeden Fall als kompakt anzusehen ist,

⁶Siehe hierzu [MTW, S. 412].

erhält man eine weitere Einschränkung des Parameterraumes. Es muß also gelten

$$\Omega_0 \geq \frac{\Omega_{0,\text{Galaxien}}}{1 - \eta} \quad (5.9)$$

bzw.

$$\eta \leq \frac{\Omega_0 - \Omega_{0,\text{Galaxien}}}{\Omega_0} = 1 - \frac{\Omega_{0,\text{Galaxien}}}{\Omega_0} \quad (5.10)$$

iii. Ω_0 und h

Da die physikalische Dichte $\rho_0 \sim \Omega_0 h^2$ ist, kann man Werte für diese Parameterkombination aus einer gemessenen ρ_0 ableiten. Wie in Kapitel 2 Abschnitt b bereits erklärt, mißt man in der Praxis auf kosmologischen Skalen fast immer Ω_0 und nicht ρ bzw. $\Omega_0 h^2$. Die Theorie der Elementenentstehung jedoch erlaubt eine Berechnung des Parameters $\tilde{\eta}$, der wie folgt definiert ist:

$$\tilde{\eta} := \frac{\text{Zahldichte der Baryonen}}{\text{Zahldichte der Photonen}} \quad (5.11)$$

als Funktionen der beobachteten Verhältnisse verschiedene Nuklide.⁷ Da die Zahldichte der Photonen sich aus der gemessenen Temperatur der Hintergrundstrahlung ergibt [Dar 90],⁸ läßt sich durch die bekannte Protonenmasse die heutige Baryonendichte ρ_{Baryonen} bestimmen. Man erhält

$$\rho_{\text{Baryonen}} \approx 2,6 \dots 4,9 \times 10^{-28} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (5.12)$$

bzw.

$$0,014 < \Omega_0 h^2 < 0,026 \quad (5.13)$$

(Für $0,3 < h < 1,1$ erhält man einen Wert für $\Omega_{0,\text{Baryonen}}$ zwischen 0,012 und 0,289. Dies ist zu vergleichen mit Gl. 5.5; nur für kleine h -Werte wäre ein Universum ohne nichtbaryonische Materie verträglich mit den aus Rotationskurven abgeschätzten Galaxienmassen.) Da $\rho_0 \geq \rho_{0,\text{Baryonen}}$ sein muß, erhält man folgende Ungleichung:

$$\Omega_0 h^2 \geq 0,014 \quad (5.14)$$

iv. λ_0 , Ω_0 und h

In Kapitel 2 wurde einen Ausdruck für das Weltalter hergeleitet (Gl. 2.21), der von den Parametern λ_0 , Ω_0 und H_0 abhängt. Es ist sicher möglich, eine Untergrenze für das Weltalter anzugeben; dies ist einfach das Alter der ältesten bekannten Objekte. Lange Zeit hielt man die ältesten Kugelsternhaufen für die ältesten Objekte, aber nach neuen Erkenntnissen gibt es vielleicht noch ältere Objekte [Lee 92]. Für $\lambda_0 = 0$ gilt, je größer h bzw. Ω_0 desto kleiner ist t_0 . Im Grenzfall $\Omega_0 = 0$ ist $t_0 = \frac{1}{H_0}$, für $\Omega_0 = 1$ ist $t_0 = \frac{2}{3H_0}$. Für $h = 1$ ist $\frac{1}{H_0} \approx 9,8 \times 10^9$ a. Selbst wenn man keine Mindestzeit für die Entstehung der ältesten Sterne berücksichtigt, dann ist $h > 0,65$ unverträglich mit einem Mindestalter von 15 Milliarden Jahren, selbst für $\Omega_0 = 0$.⁹ Wegen des geschätzten Alters der ältesten Kugelsternhaufen, muß man, um $\lambda_0 = 0$ zu retten, entweder einen niedrigen Wert für

⁷Siehe, z.B., [MRRS, S. 993].

⁸Alle anderen Photonen liefern einen vernachlässigbaren Beitrag.

⁹Glaubt man an $\Omega_0 = 1$, entweder weil man, z.B. wegen der Theorie der Inflation, an $k = 0$ glaubt (und zusätzlich an $\lambda_0 = 0$) oder weil man $\Omega_0 \geq 1$ braucht, um Strukturbildung zu verstehen [Longair 93], dann ist die Situation noch schwieriger.

die Hubble-Konstante haben oder das Alter der ältesten Objekte herabsetzen. Sandage, der seit langem einen kleinen Wert für H_0 mißt und jetzt 42 als den besten Wert sieht [Sandage 93b], braucht selbst für diesen kleinen Wert eine Korrektur nach unten für das Alter der ältesten Kugelsternhaufen, um $\Omega_0 \geq 1$ zu erreichen, was gewünscht wird, um die Strukturbildung im Universum zu verstehen [Longair 93]. Solche Korrekturen der Altersbestimmung der Kugelsternhaufen mögen aus anderen Gründen (z.B. um eine Helligkeit von RR-Lyrae-Sternen zu haben, die extragalaktische Entfernungen im Einklang mit anderen Methoden liefert [Sandage 93b]) nötig sein, aber es gibt jetzt Hinweise, daß es vielleicht noch ältere Sterne gibt [Lee 92]. Obwohl ein hoher Wert für die Hubble-Konstante zusammen mit einem alten Universum $\lambda_0 > 0$ erforderlich macht, ist das Umgekehrte nicht unbedingt der Fall: Ein jüngeres Universum oder ein kleiner Wert für H_0 ist *verträglich* mit $\lambda_0 = 0$, so lange Ω_0 nicht zu groß ist, aber kein Beweis dafür. Ein Beweis für λ_0 praktisch = 0 hätte man erst dann, wenn man, wie Sandage heute [Sandage 93b], nicht nur eine Untergrenze für das Weltalter hat, sondern auch eine Obergrenze, und einen Hinweis darauf, daß der entsprechende Wert für Ω_0 erfüllt ist.

Ich werde daß Weltalter als nach oben hin offen betrachten und ein eher untertriebenes Mindestalter voraussetzen von

$$t_0 > 13 \times 10^9 \text{ a} \quad (5.15)$$

v. λ_0 , Ω_0 und η

Die Winkelgrößenentfernung D hat ein Maximum in manchen Weltmodellen; mit anderen Worten, der Winkeldurchmesser eines „Standardstabes“ hat ein Minimum bei einem bestimmten z -Wert. Wie in Kapitel 4 diskutiert, ist es nicht praktisch, durch die Untersuchung von scheinbaren Größen in Abhängigkeit von z kosmologische Parameter zu bestimmen. Prinzipiell könnte man aber trotzdem manche Weltmodelle ausschließen durch das Nichtvorhandensein eines Minimums des Winkeldurchmessers, aber selbst dies ist aus praktischen Gründen nicht möglich.

Da D_L meist $\geq D(1+z)^2$ (je nach dem, ob man eine bolometrische Helligkeit mißt oder nicht, K -Korrekturen anbringt, Entwicklungseffekte berücksichtigt usw.), ist der entsprechende Effekt für D_L , was zu einer minimalen Helligkeit einer Standardkerze führt, nicht so ausgeprägt. Es ist aber vielleicht trotzdem möglich, durch das Nichtvorhandensein eines solchen Minimums, manche Weltmodelle auszuschließen.

Es kommt jedoch hinzu, daß das Auftreten eines Maximums in D bzw. D_L von η abhängt; bei $\eta = 0$ gibt es für *kein* Weltmodell ein Maximum. Da η sowohl nicht bekannt ist als auch genau genommen von dem betrachteten System abhängt, bedeutet das Nichtauftreten eines Maximums nicht unbedingt, daß bestimmte Weltmodelle nicht möglich sind. Wie Weinberg klargelegt hat [Weinberg 76], muß η „im Durchschnitt“ = 1 sein. (Da man Fälle mit $\eta > 1$ in der Gravitationslinsenphysik meist als expliziten Gravitationslinseneffekt berücksichtigt, wird der η -Parameter hier zwischen 0 und 1 liegen.) Dies ist nur dann erfüllt, wenn man auch „Gravitationslinsenobjekte“, z.B. „luminous arcs“, in statistische Untersuchungen aufnimmt, die den Winkeldurchmesser oder scheinbare Helligkeit von Objekten betrachten, und wenn man keine η -abhängige Auswahleffekte hat (siehe Kapitel 4 Abschnitt b). Ein Maximum in D bei einem z -Wert, wo man die Objekte noch sehen kann, würde man nicht unbedingt merken, wegen der praktischen Unsicherheiten in der Messung von Winkeldurchmes-

sern. Ein Maximum in D_L jedoch wäre leichter festzustellen, z.B. durch Galaxienzählungen, obwohl solche Modelle auch verhältnismäßig lange Lichtlaufzeiten haben können (Lemaître-Modell), was die Berücksichtigung von Entwicklungseffekten nötig macht.

Eine Darstellung von z_{Maximum} , also von dem z -Wert, wo ein solches Maximum auftritt, in Abhängigkeit vom Weltmodell,¹⁰ findet man bei [RSdL 67]. Tritt das Maximum bei einem so kleinen z -Wert auf, daß man Entwicklungseffekte und η -abhängige Auswahleffekte vernachlässigen kann, dann erlaubt einem die Tatsache, daß man so etwas nicht beobachtet, die Möglichkeit, ein Gebiet des Parameterraumes auszuschließen. Für $z_{\text{Maximum}} < 1$ ist der Wert von z_{Maximum} fast unabhängig von σ ; es ist also möglich, eine untere Grenze von q_0 anzugeben. Eine sehr weit gesteckte Abschätzung der Untergrenze für q_0 liefert

$$q_0 > -5 \quad (5.16)$$

c. Klassifizierung

Obwohl ich meistens λ_0 und Ω_0 als freie Parameter benutze, ist die Darstellung durch die Parameter $\sigma_0 = \frac{\Omega_0}{2}$ und $q_0 = \frac{\Omega_0}{2} - \lambda_0$ völlig äquivalent. (q_0 ist aus historischen Gründen eher eine „Beobachtungsgröße“, λ_0 eher eine theoretische.) Stabell und Refsdal haben gezeigt [Stabell & Refsdal 66], daß alle allgemein relativistische Weltmodelle, die dem Kosmologischen Prinzip gehorchen, sich vollständig durch die Parameter σ_0 und q_0 beschreiben lassen. (Praktisch hat diese Betrachtungsweise den Vorteil, daß sich $\sigma_{0,\text{krit}}$, das eine Rolle entsprechend $\lambda_{0,\text{krit}}$ spielt, leichter als $\lambda_{0,\text{krit}}$ berechnen läßt.) Hat man ein endliches Gebiet in der σ_0 - q_0 -Ebene, so gibt es einen entsprechenden Gebiet in der λ_0 - Ω_0 -Ebene. Ein Vergleich mit den Berechnungen von Refsdal *et. al* [Stabell & Refsdal 66, RSdL 67] zeigt, daß man ein solches endliches Gebiet durch folgende Bedingungen erhält:

- eine Untergrenze für Ω_0
- ein Mindestweltalter
- eine Untergrenze für q_0

Dieses Gebiet habe ich in der λ_0 - Ω_0 -Ebene dargestellt, mit den oben erläuterten Werten der 3 Bedingungen. Dieses Gebiet ist eigentlich schon zu groß, denn die Bedingungen sind absichtlich nicht streng—eine genauere Betrachtung würde das Gebiet der möglichen Weltmodelle verkleinern können. Das Gebiet gibt also an, welche Weltmodelle auch im Zweifelsfall verträglich sind mit dem heutigen Kenntnisstand. Dies ist also das interessante Gebiet; wie anfangs erwähnt, betrachte ich absichtlich mehr Weltmodelle, nämlich den ganzen in Abb. 5-1 dargestellten Bereich, um zu sehen, inwieweit mein Verfahren ähnliche Einschränkungen wie die der klassischen Verfahren liefert. Als wahrscheinliche Weltmodelle sind aber diejenigen mit hoher relativer Wahrscheinlichkeit innerhalb des Gebiets der möglichen Modelle anzusehen.

¹⁰für $\eta = 1$ in der σ_0 - q_0 -Ebene

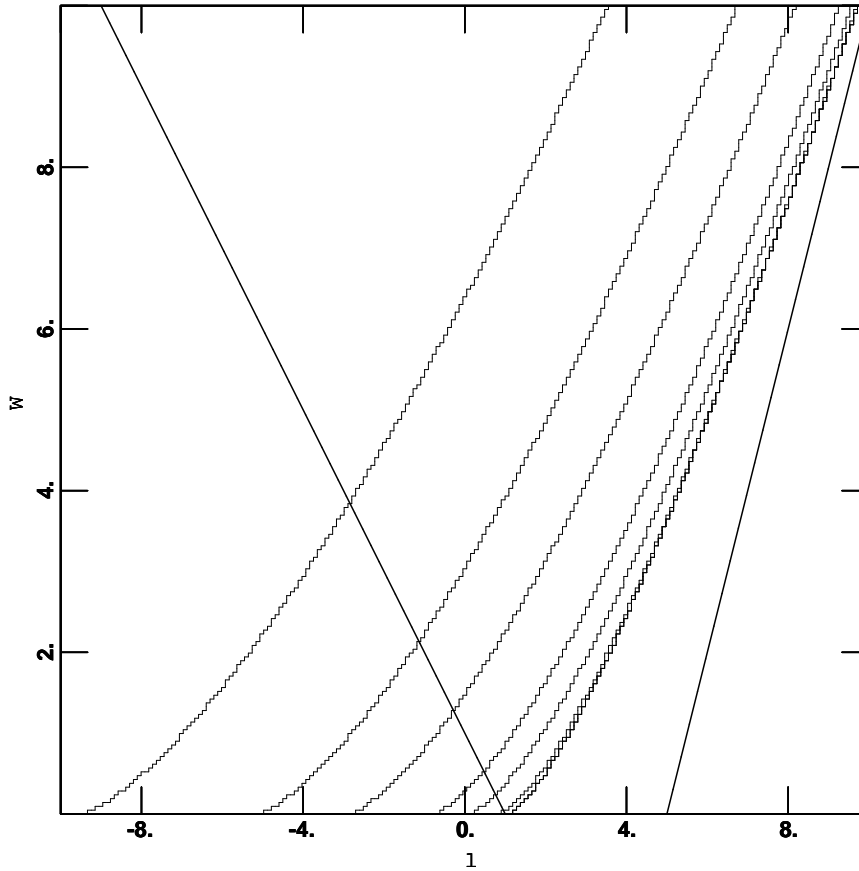


Abbildung 5-1. Bereich der möglichen Weltmodelle

Die sieben Kurven stellen, von links nach rechts, $ht_0=4, 5, 6, 8, 10$ und $16 \times 10^9 \text{a}$ sowie $z_{\max} = 5$ dar; mögliche Weltmodelle müssen rechts von dem entsprechenden ht_0 -Kurve und links von der z_{\max} -Kurve liegen. Die Gerade rechts entspricht $q_0 = -5$; mögliche Weltmodelle müssen links davon liegen. Zur Orientierung ist die Gerade $k = 0$ (negative Steigung) eingetragen. (Da man eine Obergrenze für Ω_0 von ≈ 10 hat, ist praktisch gesehen die Untergrenze für Ω_0 im Rahmen meiner Auflösung = 0.)

d. M_2 -Modelle

i. z_{\max}

Ein besonderes Problem gibt es für die sogenannten M_2 -Modelle, also solche mit $k = +1$, $\lambda_0 > \lambda_{0,\text{krit}}$ und $q_0 < 0$ —es ist hier nicht möglich, die „unmöglichen“ Weltmodelle zu betrachten, denn falls $z_s > z_{\max}$ sind z -abhängige Größen, z.B. Entfernungen, nicht definiert. Man muß also von vornherein allen Weltmodellen die Wahrscheinlichkeit 0 zuordnen, die ein z_{\max} haben, was kleiner ist als der größte z_s -Wert der betrachteten Systeme. Dies ist aber kein großer Verlust, denn die Bezeichnung dieser Modelle als unmöglich basiert lediglich auf die Messung einer Rotverschiebung, ist also—unter der Voraussetzung, daß die gemessene Rotverschiebung kosmologisch ist—überhaupt nicht von Unsicherheiten begleitet.

In der Ω_0 - λ_0 -Ebene hat man natürlich auch ein Gebiet in dem z_{\max} kleiner ist als der größte beobachtete z -Wert überhaupt (≈ 5) aber größer als der größte z_s -Wert der betrachteten Systeme, der den Bereich der wirklich möglichen Modelle weiter einschränkt. Aber der Unterschied zwischen diesen Einschränkungen ist sehr klein, denn z_{\max} fällt sehr schnell von ∞ (Grenze zwischen M_2 - und anderen Modellen) auf Werte < 1 ab; dies geschieht mehr oder weniger senkrecht zu Kurven konstanten Weltalters.¹¹

ii. Berücksichtigung von M_2 -Modellen bei den Ergebnissen

Für das benutzte Sample von Gravitationslinsensystemen wird der größte z_s -Wert ermittelt; alle Weltmodelle, die einen z_{\max} -Wert haben, der kleiner als dieser Wert ist, bekommen die Wahrscheinlichkeit 0 zugeordnet.

Zusammenfassung

- Die Betrachtung einzelner Parameter liefert nur bei H_0 wirkliche Einschränkungen.
- Vor allem durch das Weltalter ist es möglich, eine große Schar von Weltmodellen auszuschließen.
- Alle Einschränkungen zusammen definieren einen Mindestgebiet in der Ω_0 - λ_0 -Ebene für meine Untersuchung.
- Es gibt auch durch den größten beobachteten z -Wert überhaupt eine Einschränkung des Parameterraumes, aber, im Gegensatz zu anderen Einschränkungen, kann der größte Teil dieses unmöglichen Gebietes von vornherein nicht betrachtet werden.

¹¹In 5-1 ist die Kurve für $z_{\max} = 5$ praktisch von der für $ht_0 = 16$, die ein $z_{\max} = \infty$ hat, nicht zu unterscheiden.

Teil B

Gravitationslinsentheorie

*Do not Bodies act upon Light at a distance,
and by their action bend its Rays;
and is not this action strongest at the least distance?*

Isaac Newton, *Opticks*

Kapitel 6

Allgemeines

What is now proved was once only imagin'd.

William Blake

Hier werden nur wichtige Ergebnisse der Gravitationslinsentheorie, die für diese Arbeit wichtig sind, kurz und skizzenhaft dargestellt. Es wäre überflüssig, Bekanntes zu wiederholen. Eine ausführlichere Einführung *mit Referenzen* (der Übersichtlichkeit hier nicht immer angegeben) findet man, z.B., bei [SEF].

a. Historisches

*All my best thoughts
were stolen by the ancients.*

Ralph Waldo Emerson

i. Newton'sche Theorie

Obwohl es nicht eindeutig möglich ist, kann man die Lichtablenkung im Rahmen der Newton'schen Theorie als Streuproblem behandeln; man erhält für den Ablenkwinkel eines Lichtstrahls an einer Punktmasse für kleine Winkel asymptotisch¹ den Wert

$$\alpha = -\frac{2GM}{c^2 b} \quad (6.1)$$

wobei G die Gravitationskonstante, M die Masse der Punktmasse, c die Lichtgeschwindigkeit und b der Impaktparameter ist. Nach einem bekannten Satz der Newton'schen Theorie gilt dies auch für beliebige kugelsymmetrische Massenverteilungen, wo M nun die Masse innerhalb b ist. Soldner scheint der erste zu sein, der dieses Ergebnis zur Berechnung der Änderungen von Sternpositionen benutzte.

¹Man kann einen Winkel nur zwischen zwei (auch infinitesimal kurzen, natürlich) Geraden definieren. Diese sind hier die Ausbreitungsrichtungen des Lichtstrahls im Unendlichen vor und nach der Ablenkung.

ii. Einstein'sche Theorie

Einstein erhielt mit Hilfe seiner allgemeinen Relativitätstheorie den korrekten Wert²

$$\alpha = -\frac{4GM}{c^2 b} \quad (6.2)$$

den man *sehr* anschaulich so verstehen kann: Die Schwerkraft verursacht nicht nur eine Krümmung des Raumes, die der Newton'schen Schwerkraft entspricht und sozusagen die Hälfte des richtigen Wertes verursacht, sondern auch eine Verlangsamung der Zeit, die die lokale Lichtgeschwindigkeit (für einen äußeren Beobachter) herabsetzt und dadurch (wie bei optischen Medien mit Brechungsindex $n > 1$) eine weitere Ablenkung bewirkt. (Einstein erhielt 1907 die Hälfte des richtigen Wertes—unter der Annahme, daß der 3-dimensionale Raum flach ist, berechnete er sozusagen den zweiten, durch Zeitverlangsamung verursachten, Effekt.)

Alle „lokale“ Gravitationslinsentheorie, die in dieser Arbeit vorkommt, braucht nur diesen „Faktor 2“ gegenüber dem Newton'schen Ergebnis.

b. Grundlagen

Refsdal [Refsdal 64a, Refsdal 64b, Refsdal 66a, Refsdal 66b, Refsdal 70], nach Vorarbeit durch Lodge, Eddington, Chwolson, Mandl, Einstein, Tikhov, Zwicky, Klimov und Liebes, legte die theoretischen Grundlagen fast aller wichtigen Aspekte der Gravitationslinsentheorie systematisch dar:

- Bestimmung der Linsenmasse
- Helligkeitsänderung durch Verstärkung (Vergrößerung der Fläche bei konstanter Flächenhelligkeit)
- Verzerrung von ausgedehnten Quellen
- Bestimmung der Hubble-Konstanten
- Bestimmung des kosmologischen Modells durch den Korrekturterm beim *time delay*
- Parallaxeneffekt
- Einfluß eines nichthomogenen kosmologischen Modells

Besonders wichtig dabei war der Beweis, daß es für alle praktischen Zwecke vollkommen ausreicht, geometrische Optik zu benutzen.

c. Die Linsengleichung

i. Statischer euklidischer Fall für Punktmasse und -Quelle

Weil die Strecke, in der das Licht merklich abgelenkt wird, sehr kurz ist verglichen mit dem Gesamtweg, und weil die Quellengröße vergleichbar klein ist, kann man sich auf die Betrachtung dreier *Ebenen* beschränken: die Quellenebene (*source plane*), Linsenebene (*deflektor plane*) und Beobachterebene (*observer plane*). Die Entfernungen werden ausgedrückt durch

²Hier gelten die Bedingungen kleine Ablenkwinkel ($\alpha \ll 1$) schwache ($\frac{2GM}{c^2} \ll b$) und statische ($v \ll c$) Felder.

D_{od} , D_{os} und D_{ds} , wobei die ersten beiden allgemein als D_d bzw. D_s abgekürzt werden (ein fehlender erster Index ist immer ein o). Positionen in der Linsenebene bezeichnet man mit den Koordinaten x und y , in der Quellenebene mit ξ und η und in der Beobachterebene mit ξ' und η' bzw. mit den 2-dimensionalen Vektoren \vec{z} , $\vec{\zeta}$ und $\vec{\zeta}'$. Für kleine Winkel liefert einfache Geometrie die Linsengleichung³

$$\vec{\zeta}' = -\frac{D_d}{D_{ds}}\vec{\zeta} + \frac{D_s}{D_{ds}}\vec{z} + D_d\vec{\alpha}(\vec{z}) \quad (6.3)$$

bzw.

$$\vec{\zeta} = -\frac{D_{ds}}{D_d}\vec{\zeta}' + \frac{D_s}{D_d}\vec{z} + D_{ds}\vec{\alpha}(\vec{z}) \quad (6.4)$$

wobei $D_{ij} \equiv D_{ji}$. Für die spätere Betrachtung wichtig ist der Fall $\vec{\zeta}' = \vec{0}$ (Beobachter auf der optischen Achse). Hier lautet die Bildposition

$$\vec{\zeta} = \frac{D_s}{D_d}\vec{z} + D_{ds}\vec{\alpha}(\vec{z}) \quad (6.5)$$

Hängt $|\vec{\alpha}|$ nur von $|\vec{z}|$ ab und ist $\vec{\alpha} \parallel \vec{z}$ —dies entspricht einer radialsymmetrischen Massenverteilung—dann, für den Fall $\vec{\zeta} = \vec{0}$, erhält man eine Gleichung für \vec{z} :

$$\vec{z} = -\frac{D_d D_{ds}}{D_s}\vec{\alpha}(\vec{z}) \quad (6.6)$$

Diese Punkte bilden einen Kreis um die optische Achse, den sogenannten „Einsteinring“. Der Winkelradius des Einsteinringes ist demnach

$$\theta_{\text{Einstein}} = \frac{D_{ds}}{D_s}\alpha \quad (6.7)$$

wobei $\alpha = |\vec{\alpha}|$. Setzt man α aus Gl. 6.2 in diese Gleichung ein, erhält man

$$\theta_{\text{Einstein}} = \frac{D_{ds}}{D_s} \frac{4GM}{c^2 b} \quad (6.8)$$

Da aber $b = \theta D_d$, erhält man durch Einsetzen

$$\theta_{\text{Einstein}} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s}} \quad (6.9)$$

Manchmal ist es hilfreich, die Linsengleichung in Winkelkoordinaten zu schreiben:

$$\vec{\theta}'_s = \vec{\theta} + \vec{\alpha}^* \quad (6.10)$$

wo $\vec{\theta}'_s := \frac{\vec{\zeta}'}{D_s}$, $\vec{\theta} := \frac{\vec{z}}{D_d}$ und $\vec{\alpha}^* := \frac{D_{ds}}{D_s}\vec{\alpha}$. Setzt man α aus Gl. 6.2 ein, erhält man

$$\vec{\theta}'_s = \vec{\theta} \pm \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s}} \quad (6.11)$$

so daß es in allgemeinen 2 Bilder gibt. (Für $\vec{\theta} = 0$ erhält man natürlich wieder die Gleichung für den Einsteinring.) In der Wirklichkeit hat man natürlich nicht mit Punktquellen zu tun, sondern mit Quellen endlicher Größe. Sucht man nach Punkten in der Quellenebene innerhalb eines Quellenradius (der natürlich viel kleiner als die Beobachtungsauflösung sein kann), für die die Linsengleichung erfüllt ist, dann erhält man zwei Scharen von Lösungen. Das Verhältnis der Zahl der jeweiligen Lichtstrahlen

³Siehe, z.B., (in etwas anderer Notation) [SEF, S. 168].

(gleichmäßig in der Linsenebene verteilt) der beiden Bilder ergibt die relative Verstärkung. Ohne Beweis⁴ sei hier bemerkt, daß für eine Punktmasse die relative Verstärkung ≈ 1 nur für eine Quellenposition innerhalb des durch Gl. 6.7 definierten Kreises ist, so daß *die Größe des Einsteinringes den Bereich angibt, in dem beobachtbare Doppelbilder möglich sind*. Es ist daher naheliegend für statistische Untersuchungen einen *Wirkungsquerschnittes πa^2 für Mehrfachbilder* zu definieren, wobei a gegeben ist durch

$$a := \theta_{\text{Einstein}} D_d \quad (6.12)$$

Für die Punktmassenlinse ist also $a \sim \sqrt{M}$ bzw. hängt der Wirkungsquerschnitt *linear* von der Masse ab. Das bedeutet, wenn man über die Linsenmassenfunktion integriert, daß die *Massenverteilung* keine Rolle für die totale optische Tiefe spielt, so lange man die endliche Beobachtungsgenauigkeit vernachlässigen darf.

ii. Statischer euklidischer Fall für die singuläre isotherme Sphäre

Eine wichtige Massenverteilung ist die der singulären isothermen Sphäre, denn sie gilt als erste Näherung für die Massenverteilung elliptischer Galaxien. Dies wird durch Beobachtung bestätigt, ist aber auch theoretisch zu verstehen, denn die singuläre isotherme Sphäre erzeugt ein Potential, in dem die Massenelemente sich bewegen müssen, um wiederum eine singuläre isotherme Sphäre als Massenverteilung zu erzeugen. Das Potential ist also selbstkonsistent [Binney & Tremaine].

Die Massenverteilung der singulären isothermen Sphäre (SIS) lautet

$$\rho(r) = \frac{v^2}{2\pi G r^2} \quad (6.13)$$

wobei r der Abstand vom Mittelpunkt ist, v die 1-dimensionale Geschwindigkeitsdispersion und G die Gravitationskonstante. (Siehe, z.B. [Binney & Tremaine].) Hieraus folgt für die (projizierte) Flächenmasseendichte Σ

$$\Sigma(b) = \frac{v^2}{2Gb} \quad (6.14)$$

wobei b ($\neq r$!) mit dem Impaktparameter in Gl. 6.2 gleichgesetzt werden kann. Entscheidend für die Lichtablenkung ist die Masse innerhalb b (Symmetrie beachten!), die gegeben ist durch

$$M(b) = \int_0^{2\pi} \int_0^b \Sigma(b) b db d\phi = \frac{\pi v^2 b}{G} \quad (6.15)$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gl. 6.2, so erhält man

$$\alpha = 4\pi \frac{v^2}{c^2} \quad (6.16)$$

Bemerkenswert an diesem Ergebnis ist, daß *der Betrag des Ablenkungswinkels von dem Impaktparameter unabhängig ist*, und natürlich auch konstant.

⁴Siehe, z.B. [SEF, S. 36–37]

iii. Scheibe konstanter Dichte

Eine andere Massenverteilung, die wichtig ist (siehe Kapitel 3 Abschnitt d), ist die Scheibe konstanter Flächenmassendichte. Hier ist die (2-dimensionale) Massendichte konstant, also

$$\Sigma(\vec{z}) = \text{konstant} \quad (6.17)$$

wobei Σ die (2-dimensionale) Flächenmassendichte ist. Damit ist, mit $\vec{\zeta} = \vec{\zeta}' = \vec{0}$,

$$\alpha = - \int_{\vec{0}}^{\vec{z}} \frac{4G\Sigma(\vec{z})}{c^2 z} dz \quad (6.18)$$

Entscheidend für die Ablenkung ist die Masse innerhalb des Impaktparameters, $m(z)$, wo $z = |\vec{z}|$. Da aber

$$m(z) = \Sigma\pi z^2 \quad (6.19)$$

ist und aus Symmetriegründen der Betrag der Ablenkung an der Stelle z nur vom Abstand von der optischen Achse abhängt und entlang der Verbindungslinie zwischen beiden zeigt, ist

$$\alpha = - \frac{4\pi G\Sigma}{c^2} \vec{z} \quad (6.20)$$

Der Ablenkwinkel ist also *proportional* zu dem Abstand von der optischen Achse und zeigt auf diese zu. Dies entspricht einer normalen Sammellinse. Für den Fall *negativer* Flächenmassendichte (bezogen auf einen Hintergrund, der nicht = 0 ist) erhält man eine Ablenkung, die von der optischen Achse wegzeigt und für die Divergenz (verglichen mit dem homogenen Fall) der Lichtstrahlen in einem inhomogenen Universum ($\eta < 1$) verantwortlich ist. Man kann leicht sehen, daß solche Entfernungen *größer* sind als die entsprechenden Entfernungen in einem homogenen Universum, aber die genaue Abweichung hängt sowohl vom Weltmodell als auch von den Rotverschiebungen ab (Kapitel 3 Abschnitt d).

iv. Verallgemeinerung für kosmologische Entfernungen

Die bisherigen Betrachtungen gelten für den statischen euklidischen Fall. Bei fast allen Anwendungen des Gravitationslinseneffekts hat man aber mit kosmologischen Entfernungen zu tun. Weil man auf Entfernungen angewiesen ist, die über Winkelgrößen definiert sind, sind die richtigen Entfernungen die Winkelgrößenentfernungen (*angular size distances*). Im kosmologischen Fall muß man also Gl. 6.3 wie folgt schreiben:

$$\vec{\zeta}' = - \frac{D_{do}}{D_{ds}} \vec{\zeta} + \frac{D_{so}}{D_{ds}} \vec{z} + D_{do} \vec{\alpha}(\vec{z}) \quad (6.21)$$

weil $D_{ij} \neq D_{ji}$. Berücksichtigt man, wie in Kapitel 3 gezeigt, die Beziehung $D_{ij} = D_{ji} \frac{1+z_i}{1+z_j}$, kann man die Linsengleichung für den allgemeinen kosmologischen Fall so schreiben:

$$\vec{\zeta}' = \left(- \frac{D_d}{D_{ds}} \vec{\zeta} + \frac{D_s}{D_{ds}} \vec{z} + D_d \vec{\alpha}(\vec{z}) \right) (1 + z_d) \quad (6.22)$$

Die einzige Änderung ist der $1 + z_d$ Term. Die Gleichung für $\vec{\zeta}$

$$\vec{\zeta} = - \frac{D_{ds}}{D_d} \vec{\zeta}' + \frac{D_s}{D_d} \vec{z} + D_{ds} \vec{\alpha}(\vec{z}) \quad (6.23)$$

ändert ihre Form nicht.⁵ Für $\vec{\zeta}^i = 0$ erhält man schließlich, wie oben gezeigt,

$$\vec{\zeta} = \frac{D_s}{D_d} \vec{z} + D_{ds} \vec{\alpha}(\vec{z}) \quad (6.24)$$

Der Ausdruck für die Größe des Einsteinringes

$$\theta_{\text{Einstein}} = \frac{D_{ds}}{D_s} \alpha \quad (6.25)$$

ist ebenfalls unverändert.

Zusammenfassung

- Die Lichtablenkung einer Punktmasse läßt sich leicht beschreiben. Dies ist im Rahmen der geometrischen Optik möglich, und erlaubt die Definition eines Wirkungsquerschnittes für die Erzeugung von Mehrfachbildern.
- Man kann den Ausdruck für eine Punktmasse über eine beliebige Massenverteilung integrieren. Bei der singulären isothermen Sphäre, die aus anderen Gründen als plausibles Galaxienmodell bevorzugt wird, ergibt sich ein *konstanter Ablenkwinkel, der unabhängig von der Quellenposition ist*.
- Eine Scheibe konstanter Dichte hat einen Ablenkwinkel proportional zu der Entfernung zur optischen Achse, also wie eine herkömmliche Sammellinse.
- Man kann die Linsengleichung für kosmologische Entfernungen verallgemeinern. Dabei sind die richtigen Entfernungen die Winkelgrößenentfernungen (*angular size distances*).

⁵Dies ist zunächst vielleicht nicht klar, denn aus Symmetriegründen könnte man vielleicht erwarten, daß die D_d - bzw. D_{od} - Terme D_{do} heißen sollten. Die Situation ist aber nicht vollkommen symmetrisch, da die Ausbreitungsrichtung des Lichtes festgelegt ist—uns interessiert hier nicht, was ein Beobachter bei $z = z_s$ sieht.

Kapitel 7

Gravitationslinsen und Kosmologie¹

a. Die Laufzeitdifferenz und H_0

i. Ausgangspunkt

Die Linsengleichung (Gl. 6.10) beinhaltet nur dimensionslose Größen, wenn die Entfernungen D_{ij} , wie üblich, in Einheiten der Hubble-Konstanten ausgedrückt werden. Weil bis jetzt alle Beobachtungsgrößen dimensionslos sind, ist es unmöglich, eine absolute Skalierung vorzunehmen. Es gibt aber doch eine dimensionsbehaftete Größe, die man messen kann, nämlich den Laufzeitunterschied zwischen mehreren Bildern einer Quelle, und man kann im Prinzip dadurch die absolute Skalierung bestimmen, die dann die Linsenentfernung ergibt. Da die Rotverschiebung bekannt ist,² kann man so die Hubble-Konstante bestimmen [Refsdal 66a, Borgeest 83, Borgeest 85].

ii. Ergebnisse

Man muß natürlich ein mehr oder weniger eindeutiges Modell für das Gravitationslinsensystem haben, bei dem man die Laufzeitdifferenz mißt. Zur Zeit ist dies wahrscheinlich nur (bedingt) für den Doppelquasar 0957 + 561 der Fall. Man kommt auf Werte zwischen 40 und 110, was zunächst nichts bringt gegenüber den klassischen Methoden, aber dies ist trotzdem ein gewaltiger Beweis dafür, daß es weder in der Gravitationslinsentheorie noch in der klassischen theoretischen Kosmologie große Unsicherheiten gibt. (Siehe hierzu auch [SEF, Abschnitt 2.5.9].) Angesichts der Tatsache, daß diese Methode einen völlig anderen Ansatz darstellt, ist es beruhigend, daß die Übereinstimmung so groß ist (was natürlich die klassischen Methoden bestätigt).

¹In den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels werden die entsprechenden Themen nur kurz vorgestellt. Für ausführlichere Darstellungen, siehe, z.B. [Refsdal 64b, Borgeest 85, Kayser 82, Kayser & Refsdal 83].

²Sie muß natürlich auch klein genug sein, daß man „im linearen Bereich“ ist und so das einfache, vom kosmologischen Modell unabhängige, Hubble-Gesetz anwenden kann.

iii. Vor- und Nachteile

Der Vorteil dieser Methode ist, daß sie sich auf *ein* System bezieht, während fast alle anderen Methoden, zumindest in der Praxis, statistischer Natur sind. Sie ist auch, wie schon 1964 von Refsdal erwähnt, unabhängig von Entwicklungseffekten. Der Nachteil bei dieser Methode ist die Messung der Laufzeitdifferenz selbst. Die meisten Quasare, die als Quellen dienen, sind intrinsisch nicht besonders variabel. Zusätzlich gibt es das Problem der Unregelmäßigkeit der Beobachtungszeiten und die Möglichkeit, daß die Variabilität nicht intrinsisch, sondern durch *microlensing* verursacht sein kann. Diese Methode wird also in den nächsten Jahren wahrscheinlich keinen besseren Wert für H_0 liefern. Nötig ist ein viel häufigeres Beobachten, so daß man sowohl mehr oder weniger lückenlose Lichtkurven hat als auch die Möglichkeit, *microlensing* zu erkennen. Auch wichtig ist, daß man mehrere Systeme beobachtet.

b. Die Laufzeitdifferenz und andere kosmologische Parameter

i. Ausgangspunkt

Die Laufzeitdifferenz hängt in erster Ordnung von der Hubble-Konstanten ab; erst in zweiter Ordnung spielen die anderen kosmologischen Parameter eine Rolle. Kennt man die Hubble-Konstante aus anderen Gründen, und hat man Beobachtungen und Modelle, die genau genug sind, kann man im Prinzip Aussagen über das kosmologische Modell machen; bei mehreren Systemen ist dies sogar ohne Kenntnis von H_0 möglich [Refsdal 66a, Kayser 82, Kayser & Refsdal 83].

ii. Ergebnisse

Man kann heute nicht einmal versuchsweise diese Methode anwenden.

iii. Vor- und Nachteile

Bei bekannter Hubble-Konstante hat man auch hier den Vorteil, daß die Methode sich auf *ein* System bezieht. Auf jeden Fall ist sie unabhängig von Entwicklungseffekten. Es gibt zwei prinzipielle Nachteile dieser Methode der Bestimmung kosmologischer Parameter. Der erste ist, daß das kosmologische Modell nur eine „Störung zweiter Ordnung“ ist. Der zweite ist, daß der Einfluß des η -Parameters i.a. viel größer ist als der der „interessanteren“ kosmologischen Parameter λ_0 und Ω_0 [Kayser 82, Kayser & Refsdal 83].

c. Statistische Ansätze

i. Einleitung

Wovon hängt die Zahl der beobachteten Gravitationslinsensysteme mehrfach abgebildeter Quellen (im folgenden „Mehrfachquellen“) ab? Für ein z_d -Intervall bei festem z_s , bekannter Quellenhelligkeit und bekannter Galaxienmasse und -art hängt dies von der Zahl der Galaxien dieser Masse und dieses Typs in diesem z -Intervall sowie von dem Wirkungsquerschnitt einer

solchen Galaxie ab.³ Interessant ist, daß *beide Faktoren von dem kosmologischen Modell abhängen und zwar so, daß sie sich für viele Modelle gegenseitig verstärken.*

Um auf die Gesamtzahl zu kommen, muß man über die Massenfunktionen der verschiedenen Galaxientypen integrieren,⁴ über die verschiedenen Galaxientypen summieren, über die Leuchtkraftfunktion der Quellen (die von z_s abhängt) integrieren (gegebenenfalls getrennt für verschiedene Quellentypen und anschließend über alle Typen summieren), über z_s integrieren und schließlich über z_d integrieren.

ii. Normierungsprobleme und *amplification bias*

Zunächst fällt auf, daß man wahrscheinlich sehr viele Unsicherheiten durch Normierung hineinbringt. Man hat also mindestens vier Integrale (mehr, falls man die Leuchtkraftfunktion für Galaxien bzw. Quellen in mehrere typenabhängige Leuchtkraftfunktionen aufspaltet), die alle natürlich normiert werden müssen. Hinzu kommt, daß viele Größen (Entfernungen, Volumenelemente für Zahlendichten usw.) in Einheiten von (Potenzen von) H_0 gemessen werden, so daß unsere Unsicherheit hinsichtlich der Hubble-Konstanten sich hier bemerkbar macht.⁵

Ein anderes Problem ist, daß wir die wahre Quasarleuchtkraftfunktion nicht kennen. Es ist möglich, daß die beobachtete Leuchtkraftfunktion erheblich von dem statistischen Gravitationslinseneffekt beeinflusst ist [Turner 80]. Um den *amplification bias* berücksichtigen zu können, muß man aber die wahre Leuchtkraftfunktion kennen. Es herrscht nicht einmal Übereinstimmung bezüglich der *beobachteten* Quasarleuchtkraftfunktion, wie der Widerspruch verschiedener Arbeiten zu diesem Thema zeigt [BSP 88, Hawkins & Veron 93].

Beide dieser Tatsachen waren wichtige Gründe für mich, mich auf Größen zu konzentrieren, die unabhängig von der Quasarleuchtkraftfunktion sind.

iii. Bildabstand

Der Vollständigkeit halber sei hier erwähnt, daß der Bildabstand prinzipiell benutzt werden kann, um verschiedene kosmologische Modelle voneinander zu unterscheiden [Paczynski & Gorski 81, Alcock & Anderson 86, GPL 89, TOG 84], aber die Unterschiede sind viel zu klein, um in der Praxis angewendet zu werden [FFKT 92, Kochanek 92].

iv. Kosmische Hintergrundstrahlung

Im Prinzip ist die Größe der durch den statistischen Gravitationslinseneffekt verursachten Anisotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung weltmodellabhängig, aber dieser Effekt ist zu klein, um beobachtet zu werden [FFKT 92].⁶

³ gewichtet mit der Beobachtungswahrscheinlichkeit; dazu mehr später

⁴ und dabei beachten, daß man scheinbare Helligkeiten statt Massen beobachtet

⁵ Es kommt natürlich darauf an, welche Größen man in welchen Einheiten betrachtet und ob die Normierungsgrößen absolut oder bezogen auf H_0 bestimmt worden sind.

⁶ [FFKT 92] haben zunächst nach Größen gesucht, die sowohl stark vom Weltmodell als auch schwach von „uninteressanten“ Unsicherheiten abhängen. Ihrer Ansicht nach ist die hohe beobachtete Häufigkeit von Quasar-Galaxien-Assoziationen auch nicht mit Weltmodellen mit großen λ_0 -Werten zu erklären, aber die Komplexität dieses Gebietes macht die pauschale Aussage, daß man aus solchen beobachteten Überhäufigkeiten nichts

v. Linsengalaxienrotverschiebungsstatistik

Es ist sicher ein guter Brauch in der Beobachtenden Kosmologie, so viele *Beobachtungsgrößen* und so wenige theoretische Annahmen wie möglich zu benutzen. Fragt man nach der *Wahrscheinlichkeitsverteilung in z_d* , also die Wahrscheinlichkeit, wenn eine Mehrfachquelle vorliegt, bei einem bestimmten z_d eine Linsengalaxie zu finden, wenn folgende Beobachtungsgrößen vorliegen

- Rotverschiebung der Quelle z_s
- Bildabstand $\Delta\theta$
- Galaxientyp

so findet man, daß diese Größe stark von dem kosmologischen Modell abhängt [TOG 84, Kochanek 92, FFKT 92, Krauss & White 92a]. Sowohl die über z_d integrierte Gesamtwahrscheinlichkeit als auch die Form der Kurve der differentiellen Wahrscheinlichkeit hängt stark vom kosmologischen Modell ab. Die Gesamtwahrscheinlichkeit hängt natürlich auch von der oben beschriebenen Unsicherheit der Normierung ab, aber die Verteilung in z_d ist unabhängig davon.

Umgekehrt kann man die Wahrscheinlichkeit berechnen, daß ein bestimmtes kosmologisches Modell der Wirklichkeit entspricht, wenn die Rotverschiebungen einiger Linsengalaxien bekannt sind. Das ist der Gegenstand der Arbeit. Die theoretischen Grundlagen werden in Teil C aufgezeigt.

Alle bisher hierzu veröffentlichten Arbeiten [TOG 84, Kochanek 92, FFKT 92, Krauss & White 92a, Jaroszyński 92] haben sich dabei darauf beschränkt, kosmologische Modelle mit $\lambda_0 = 0$ und/oder $k = 0$ (oder sogar, natürlich als Grenzfall gedacht, $\Omega_0 = 0$) zu betrachten. Die Voraussetzung $\lambda_0 = 0$ wird (wenn überhaupt) meistens damit begründet, daß man dies der Einfachheit halber annimmt oder daß man ästhetische Gründe für die Annahme hat. Es ist sicher nicht gerechtfertigt, „der Einfachheit halber“ $\lambda_0 = 0$ anzunehmen, denn es handelt sich hierbei keinesfalls um eine *Näherung* sondern um eine *Vereinfachung*—es ist sogar der Fall, daß die optische Tiefe von allen kosmologischen Parametern am stärksten⁷ von λ_0 abhängt. Meine persönlichen Gründe, nicht aus ästhetischen Gründen $\lambda_0 = 0$ zu setzen, habe ich bereits erwähnt (Kapitel 1 Abschnitt c Punkt ii).

Es wird auch manchmal $k = 0$ vorausgesetzt, weil in letzter Zeit $k = 0$ als wahrscheinlich erscheint als Folge von inflationären Modellen.

Zweifelsohne aber sind die vom kosmologischen Modell abhängigen Größen, die man berechnen muß, erheblich leichter zu berechnen, wenn einer (oder mehrere) der Spezialfälle (λ_0 , Ω_0 oder $k = 0$) vorliegt. Selbst wenn man keine integrierte, sondern nur die differentielle, optische Tiefe betrachtet, machen sich Rechenschwierigkeiten besonders bei der Berechnung der Winkelgrößenentfernungen bemerkbar. Für die Spezialfälle gibt es einfache analytische Formeln; für den allgemeinen Fall sind diese halb-analytisch mit modernen Methoden schnell zu berechnen [Feige 92], aber der entsprechende Formalismus scheint wenig verbreitet zu sein. Läßt man die Bedingung $\eta = 1$ fallen, dann sind Winkelgrößen- und Leuchtkraftentfernungen i.a. nicht analytisch gegeben. Zum Glück hat Kayser [Kayser 85]

über das Weltmodell lernen kann, unmöglich.

⁷Dies wird in Kapitel 12 quantifiziert.

eine Differentialgleichung hergeleitet, die relativ leicht wirksam numerisch zu implementieren ist, die also eine wichtige Voraussetzung für das Gelingen dieser Arbeit gewesen ist.

Was mein Vorhaben also von bisherigen auf diesem Gebiet unterscheidet [TOG 84, Kochanek 92, FFKT 92, Krauss & White 92a, Jaroszyński 92] sind im wesentlichen folgende Punkte:

alle Modelle Statt nur einige Beispielm Modelle zu rechnen, versuche ich den gesamten, aus anderen Gründen als realistisch anzusehenden, Parameterraum dicht genug zu untersuchen, daß alle wesentlichen Effekte gesehen werden.

η -Paramete Dabei beschränke ich mich nicht auf homogene Weltmodelle.

Verteilung Ich betrachte die Verteilung der Linsengalaxien in z_d , nicht die Gesamtzahl der Gravitationslinsen, weil dies ein vergleichbar gutes wenn nicht besseres Maß für die Bestimmung des Weltmodells aus Gravitationslinsenstatistik ist, und weil man bei der Betrachtung dieser Größe erheblich weniger Unsicherheit durch wenig bekannte Normierungsfaktoren hat, die immer eine Rolle spielen, wenn man integrierte Größen betrachtet. Außer [Kochanek 92] konzentrieren sich die meisten Untersuchungen (z.B. [Surdej *et.al.* 93]) auf integrierte Größen.

Auswahleffekte Ich versuche ansatzweise für endliche Beobachtungsgenauigkeit zu korrigieren. Dies ist weniger wichtig als bei der Betrachtung integrierter Größen, aber, wie ich zeigen werde, kann trotzdem zu erheblicher Verfälschung des Ergebnisses führen.

Konsistenz Ich überprüfe, ob die von mir betrachteten Weltmodelle mit anderen Kenntnissen (z.B. über das Weltalter) vereinbar sind.

Später (Kapitel 9) werde ich zeigen, daß Entwicklungseffekte nicht so störend sind wie bei Methoden der klassischen Beobachtenden Kosmologie.

Zusammenfassung

- In Prinzip reicht eine Messung der Laufzeitdifferenz aus, um aus Beobachtungen und einem plausiblen Modell eines Gravitationslinsensystems die Hubble-Konstante zu bestimmen. Zur Zeit überwiegen praktische Schwierigkeiten, aber die grobe Übereinstimmung zeigt die Macht solcher nicht klassischen Methoden zur Bestimmung kosmologischer Parameter, die durch ihre Unabhängigkeit zusätzlich eine Bestätigung des gesamten theoretischen Rahmens geben.
- Außer H_0 kann man in Prinzip λ_0 , Ω_0 und η bestimmen, aber dies setzt (meistens) Kenntnis über H_0 voraus, ist lediglich ein Effekt zweiter Ordnung und liefert mehr Auskunft über η als über die „interessanteren“ Parameter.
- Obwohl viele statistische Ansätze von vornherein wenig geeignet sind, um kosmologische Parameter zu bestimmen während andere z.Z. wegen zusätzliche Unsicherheiten ausscheiden, sieht die Linsengalaxienrotverschiebungsstatistik vielversprechend aus. Besonders wichtig hierbei ist sowohl die Unabhängigkeit von Normierungsproblemen als auch der geringe Einfluß von Entwicklungs- und Auswahleffekten.

Kapitel 8

Diskussion der in dieser Arbeit verwendeten Modelle

a. Kurzbeschreibung der Modelle

i. Quasare

Für die Zwecke dieser Arbeit reicht es vollkommen aus, Quasare als Punktquellen zu betrachten. Für praktische Zwecke ist es nützlich, daß sie meist durch ihre Farben bzw. Spektren von den Linsengalaxien zu unterscheiden sind. Wichtig ist auch, daß es eine Möglichkeit gibt, ihre Rotverschiebungen zu messen. Der Formalismus gilt aber allgemein; er ist nicht auf Quasare beschränkt. Es ist also kein Problem, wenn die Quelle kein Quasar, sondern ein anderes Objekt, z.B. eine Galaxie, ist. Eine aufgelöste Struktur der Quelle ist ebenfalls kein Problem, solange man etwas wie einen Bildabstand definieren kann.

ii. Galaxien

Galaxien werden als singuläre isotherme Sphären modelliert. Es ist auch wichtig, ihre Rotverschiebungen messen und natürlich sie durch Farben bzw. Spektren von den Quellen unterscheiden zu können. Es wird angenommen, daß die Schechter-Leuchtkraftfunktion, die noch als z -unabhängig angenommen wird, die Wirklichkeit gut beschreibt und daß Leuchtkraft und Geschwindigkeitsdispersion durch die Faber-Jackson- bzw. Tully-Fisher-Beziehung verknüpft sind.

b. Näherungsmodelle

i. Unterscheidung zwischen Näherung und Vereinfachung

In einer Arbeit wie dieser, wo der Schwerpunkt auf Kosmologie liegt, ist es natürlich unmöglich, alle Feinheiten der Galaxien- bzw. Quasarphysik

berücksichtigen zu können. Deshalb betrachte ich absichtlich Größen, die stärker von der Kosmologie abhängen. Um überhaupt in einer vernünftigen Zeit zu Ergebnissen zu kommen, muß ich natürlich Näherungen machen. Ich hoffe dabei, Vereinfachungen vermieden zu haben, die einen qualitativen Einfluß auf die Ergebnisse hätten. Näherungen sollen kleine Abweichungen darstellen, die entweder gut abgeschätzt werden können bzw. vernachlässigbar sind gegenüber einer Genauigkeit, die ausreicht, um interessante Ergebnisse zu bekommen (also in dieser Arbeit vergleichbar mit der Genauigkeit anderer Methoden zur Bestimmung des Weltmodells).

ii. Ergebnisse verschiedener Untersuchungen zu Näherungen

In diesem Abschnitt versuche ich, meine Näherungen zu rechtfertigen.

Galaxien: endliche Kernradien

Eine singuläre isotherme Sphäre ist aus zwei Gründen ein unrealistisches Modell für eine Galaxie:

- (1) Die Gesamtmasse divergiert für $d \rightarrow \infty$
- (2) Die Flächenmassendichte divergiert für $d \rightarrow 0$

wobei d der Abstand vom Zentrum ist. Der erste Punkt bereitet gar keine Schwierigkeit (unter Voraussetzung der Kugelsymmetrie), denn entscheidend für die Ablenkung ist lediglich die Masse *innerhalb* des Impaktparameters. Ein Abschneiden bei $d > a$ wird also überhaupt nicht bemerkt [SEF, Abschnitt 8.1.4].

Der zweite Punkt ist etwas problematischer, denn eine Abweichung von der singulären isothermen Sphäre in dem Kernbereich, wo sich ein Großteil der für die Ablenkung verantwortlichen Masse befindet, wirkt sich mit Sicherheit auf die Größe des Einsteinrings aus. Dieser Punkt ist *sehr* ausführlich von Krauss und White untersucht worden [Krauss & White 92a], mit dem erfreulichen Ergebnis, daß man relativ leicht für den Effekt eines endlichen Kernradius korrigieren kann, denn der Nettoeffekt ist eine Verkleinerung der integrierten optischen Tiefe für große (realistische) z_s -Werte um einen Faktor $\approx 2,5$ – 3 *unabhängig von der genauen Leuchtkraft-Kernradius-Beziehung*. Noch viel wichtiger ist die Tatsache, daß die differentielle optische Tiefe *so gut wie vollständig unabhängig von der Form der Leuchtkraft-Kernradius-Beziehung* ist. (Dies gilt sowohl für $\eta = 0$ als auch für $\eta = 1$.) Insbesondere ist die Annahme $r_{\text{Kern}} = 0$ (abgesehen von der in diesem Zusammenhang uninteressanten Normierung) genau so gut wie jede andere. Der endliche Kernradius, der alle Berechnungen erheblich schwieriger macht, macht sich lediglich als zusätzlicher Normierungsfaktor bemerkbar. Das heißt, wenn man sich für die integrierte optische Tiefe interessiert, hat man eine Verkleinerung um einen Faktor ≈ 3 mit einer Unsicherheit, die viel kleiner ist als die anderer Normierungsfaktoren. Betrachtet man, so wie ich in dieser Arbeit, die differentielle Verteilung, dann *spielt der endliche Kernradius überhaupt keine Rolle* [Krauss & White 92a, Figure 11].¹

¹Krauss und White haben lediglich $k = 0$ Modelle betrachtet, aber man kann davon ausgehen, daß der Effekt für alle kosmologische Modelle gilt, denn er ist ein lokaler Effekt (hat mit der Massenverteilung der Galaxien zu tun), während die Unterschiede für verschiedene Kosmologien durch das Volumenelement sowie durch Unterschiede des Wirkungsquerschnittes als Folge der Unterschiede in den Entfernungen D_{ij} zustandekommen.

Galaxien: Abweichung von der Kugelsymmetrie

Eine singuläre isotherme Sphäre als Linse erzeugt grundsätzlich nur zwei Bilder; viele bekannte Gravitationslinsensysteme besitzen aber mehr als zwei Bilder.² Dies kann verhältnismäßig leicht bei fast allen Linsenmodellen durch eine kleine Störung der Symmetrie erzeugt werden (siehe, z.B. [Narayan & Wallington 92]). Es ist jedoch eine erlaubte Näherung für diese Arbeit, die Linsengalaxien als kugelsymmetrisch zu betrachten, denn interessant ist nicht die Zahl der Bilder sondern der Bildabstand. Wir haben gesehen, daß der Bildabstand für eine singuläre isotherme Sphäre dem Radius des Einsteinringes entspricht; hat man mehrere Bilder, dann (für kleine Symmetriestörungen, wie beobachtet werden) entspricht der Abstand der Bilder voneinander in etwa dem Radius des Einsteinringes [Narayan & Wallington 92].

Galaxien: verschiedene Typen

Es gibt natürlich außer elliptischen Galaxien auch andere Galaxientypen. Die Massenverteilung in elliptischen Galaxien (vor allem wenn man Näherungen machen darf) ist einfach genug, um eine ausführliche statistische Betrachtung möglich zu machen. Irreguläre Galaxien sind wohl zu klein, um beobachtbare Mehrfachquellen zu erzeugen, und die Massenverteilung einer Spiralgalaxie kann vielleicht auch in erster Näherung als singuläre isotherme Sphäre betrachtet werden (was zu den beobachteten flachen Rotationskurven führt). Man hat lediglich einen anderen Exponenten in der Masse-Leuchtkraft-Beziehung. Es zeigt sich aber, daß die Zahl der Spirale als Linsengalaxien verhältnismäßig klein sein sollte [FFKT 92, Krauss & White 92a, Kochanek 92], so daß die Statistik auf jeden Fall von elliptischen Galaxien dominiert wird.

Galaxien: Entwicklungseffekte

Entwicklungseffekte sind der Hauptgrund, weshalb die klassischen Methoden der Beobachtenden Kosmologie höchstens H_0 , nicht aber die anderen kosmologischen Parameter, bestimmen können [Sandage 93b]. Dies liegt daran, daß die Effekte der anderen Parameter sich erst bei hohem z bemerkbar machen, und daß die *Helligkeit* der beobachteten Objekte eine große Rolle spielt. Da ich Linsengalaxien bei verhältnismäßig kleinen Rotverschiebungen betrachte,³ sind von vornherein Entwicklungseffekte weniger wichtig. Entscheidend ist aber für diese Untersuchung die *Masse*, nicht die *Helligkeit*, der Linsengalaxien. (Die Helligkeit spielt nur eine Rolle, indem sie entscheidet, bis zu welcher Rotverschiebung eine Galaxie beobachtet

²Ist der Kernradius > 0 , dann gibt es ein drittes Bild, das sich im Mittelpunkt der Linse befindet und eine Verstärkung < 1 besitzt. Für einen unendlich kleinen Kernradius ist die relative Helligkeit dieses Bildes $= 0$. Im allgemeinen gilt, daß Linsen mit Singularitäten (Punktmasse, SIS) eine *gerade* Zahl von Bildern erzeugen, Linsen ohne Singularitäten eine *ungerade* Zahl; ist die Linse im Rahmen der Beobachtungsgenauigkeit singulär, dann ist das „zusätzliche“ Bild meist viel zu schwach, um beobachtet zu werden. Die Tatsache, daß man meist eine gerade Bildzahl beobachtet, ist also ein Hinweis darauf, daß Galaxienkernradien sehr klein sein müssen.

³Sowohl meine Methode als auch die klassischen Methoden verlangen, daß man die Rotverschiebungen der Galaxien kennt. Da ich Feldgalaxien betrachte, und nicht z.B. die hellsten Mitglieder eines Haufens, können Rotverschiebungen nur bei kleinerem z gemessen werden. Hinzu kommt, daß der verstärkte Quasar meist heller als die Galaxie ist, so daß die Helligkeit der Galaxie noch größer sein muß als bei einer Rotverschiebungsmessung einer isolierten Galaxie, was bedeutet (wenn alles andere gleich bleibt), daß die Rotverschiebung kleiner ist.

bzw. ihre Rotverschiebung gemessen werden kann.) Da *Massevolution* auf jeden Fall weniger ausgeprägt ist als *Leuchtkraftevolution*, zumindest bei Feldgalaxien mit kleinen Rotverschiebungen, dürfte die Störung durch Entwicklungseffekte für diese Arbeit vernachlässigbar sein.

Galaxien: realistische Leuchtkraftfunktion

Es ist sicher nicht richtig, daß alle Galaxien sich durch eine Schechter-Leuchtkraftfunktion beschreiben lassen; es gibt verschiedene Leuchtkraftfunktionen für Haufen- und Feldgalaxien sowie für verschiedene Galaxientypen [BST 88]. Es ist aber für diese Arbeit keine zu grobe Näherung, elliptische (und Spiral-) Feldgalaxien durch die Schechter-Leuchtkraftfunktion zu beschreiben. Die Leuchtkraftfunktion ist deshalb wichtig, weil sie (in Verbindung mit der Faber-Jackson- bzw. Tully-Fisher-Beziehung) Auskunft über die relative Häufigkeit von Galaxien verschiedener Masse gibt. Die *genaue* Form der Verteilung ist weniger wichtig als die Tatsache, daß die Anzahl der Galaxien sehr schnell mit zunehmender Masse abnimmt.

Dies ist qualitativ anders als die Unsicherheiten der integrierten Linsenstatistik, die durch die unbekannt Form der Quasarleuchtkraftfunktion zustandekommen, denn ein „Knick“, wie bei [BSP 88], hätte sehr große Auswirkungen auf die integrierte Linsenstatistik.

Galaxien: dunkle Materie

Entscheidend für diese Untersuchung ist die Annahme, daß die Geschwindigkeitsdispersion (der leuchtenden Materie) der Galaxie Auskunft über die Masse, die für die Lichtablenkung verantwortlich ist, gibt. Es ist aber nicht zwingend, daß die Geschwindigkeitsdispersion aller Materie der Galaxie mit der der leuchtenden Materie übereinstimmen muß. Insbesondere wäre ein massives Halo, was ausgedehnter als die leuchtende Materie ist, eine um den Faktor $\sqrt{1,5}$ höhere Geschwindigkeitsdispersion als die beobachtete fordern [TOG 84, Gott 77]. Für die Fälle, die er betrachtet hat, hat Kochanek [Kochanek 92] gezeigt, daß der Einfluß des kosmologischen Modells viel größer ist als der des Massenmodells. Dies ist auch ein lokaler Effekt, wie ein endlicher Kernradius, so daß die Abweichungen des Modells von der Wirklichkeit wohl nicht vom kosmologischen Modell abhängig sind.

Galaxien: Masse-Leuchtkraft-Beziehungen

Sicher sind die Tully-Fisher- bzw. Faber-Jackson-Beziehungen nur Näherungen, aber der Fehler, der durch die Benutzung dieser empirischen Beziehungen verursacht wird, ist sicher eine der kleinsten Unsicherheiten.

Zusammenfassung

- Quasare (oder andere Quellen) dienen dieser Arbeit nur als entfernte Quellen. Es ist nicht nötig, mehr Wissen über sie voranzusetzen.
- Für diese Arbeit braucht man Galaxienmodelle, die analytisch zu behandeln sind, aber die Unsicherheiten dieser „üblichen Näherungen“ sind klein genug, um das Ergebnis nicht wesentlich zu verfälschen. (Eine Unsicherheit um einen Faktor 2 ist keine große Unsicherheit in der Kosmologie.) Ich modelliere Galaxien als singuläre isotherme Sphären

Teil C

Statistik

*Statistics is not a branch of mathematics.
Press et.al., Numerical Recipes*

Kapitel 9

Optische Tiefe

a. Definition

i. Voraussetzungen

Unter dem Begriff „optische Tiefe“ verstehe ich eine dimensionslose Größe, die die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Mehrfachbildern angibt. Der Begriff ist nicht wohl definiert innerhalb der Gravitationslinsentheorie [SEF, S. 39 (Fußnote)]; meine Definition stimmt mit der von [SEF] überein: „...the fraction of the sky covered by the Einstein circles of all lenses between us and sources at a specified distance“. Voraussetzungen für die Berechnung sind, daß es keine Überlappungen der Wirkungsquerschnitte einzelner Galaxien gibt, weder bei gleichem z_d ¹ noch bei verschiedenem z_d .²

ii. Gleichungen

Man kann diese Definition der optischen Tiefe $d\tau$ wie folgt quantifizieren:

$$d\tau = \frac{\text{„wirksame Fläche für Mehrfachbilder“}}{\text{Gesamtfläche}}$$

die gegeben ist durch

$$\frac{(\text{Zahl der Galaxien}) \times (\text{wirksame Fläche einer Galaxie})}{\text{Gesamtfläche}}$$

In einem z_d -Intervall ist dies

$$\frac{(\text{Zahl der Galaxien pro Volumen}) \times dl \times (\text{wirksame Fläche einer Galaxie})}{\text{Gesamtfläche}}$$

wobei dl ein Längenelement der *Lichtlaufzeitentfernung* ist.³ Man muß also folgenden Ausdruck berechnen können, die die optische Tiefe *für eine feste*

¹ Dies entspräche einer komplizierteren Linse; in dieser Arbeit betrachte ich *einzelne Galaxien* als Linsen. (Dies bedeutet auch, daß ich nur Feldgalaxien betrachte, also keine Systeme, wo z.B. ein Galaxienhaufen eine wesentliche Rolle spielt, wie beim Doppelquasar 0957 + 561.)

² Dies entspräche einer Mehrfachablenkung; ich betrachte nur Systeme, wo die Linse sich in einer Ebene befindet.

³ Dies entspricht einem Längenelement der metrischen Entfernung bei $z = z_d$ zu der Zeit, als sich das Licht hier befand; siehe Kapitel 3.

Galaxienmasse angibt:⁴

$$d\tau = n_0(1 + z_d)^3 \pi a^2 c dt \quad (9.1)$$

wobei n_0 die Zahlendichte der entsprechenden Galaxien bei $x = 0$ ist, πa^2 der Wirkungsquerschnitt einer Galaxie und $c dt$ das Längenelement der Lichtlaufzeitentfernung angibt. Der Faktor $(1 + z_d)^3$ berücksichtigt die durch die Expansion des Universums verursachte Abnahme der Zahlendichte.⁵

Aus Gl. 6.16 folgt, daß die Größe πa^2 für die singuläre isotherme Sphäre gegeben ist durch

$$\pi a^2 = 16\pi^3 \left(\frac{v}{c}\right)^4 \left(\frac{D_d D_{ds}}{D_s}\right)^2 \quad (9.2)$$

Die Größe dt ist in Kapitel 2 zu finden:

$$dt = \frac{1}{H_0} \frac{1}{1 + z_d} \frac{1}{\sqrt{P(z_d)}} dz_d \quad (9.3)$$

wo $P(z_d) = (1 + z_d)^2(\Omega_0 z_d + 1 - \lambda_0) + \lambda_0$. Damit lautet der Ausdruck für die optische Tiefe für die Erzeugung von Mehrfachbildern durch singuläre isotherme Sphären:

$$\frac{d\tau}{dz_d} = n_0(1 + z_d)^3 16\pi^3 \left(\frac{v}{c}\right)^4 \left(\frac{D_d D_{ds}}{D_s}\right)^2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{1 + z_d} \frac{1}{\sqrt{P(z_d)}} \quad (9.4)$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von H_0 , denn n_0 wird üblicherweise in Einheiten von $\left(\frac{H_0}{c}\right)^3$ gemessen, die Entfernungen D_{xy} in Einheiten von $\frac{c}{H_0}$ aus den Rotverschiebungen berechnet.

In dieser Arbeit benutze ich den Ansatz Kochaneks [Kochanek 92]: für welche Weltmodelle stimmen die beobachteten Linsengalaxienrotverschiebungen mit der theoretisch berechneten Verteilung am besten überein? Man betrachtet wirkliche Systeme, also mit beobachteten Rotverschiebungen z_d und z_s , Abstand der Bilder $2a$ und Linsengalaxientyp. Gl. 9.4 gibt die optische Tiefe für eine feste Galaxienmasse an; hält man den Bildabstand konstant, dann hängt die entsprechende Galaxienmasse (berechnet aus der Geschwindigkeitsdispersion v) von z_d ab. Beobachtungen [Schechter 76] liefern folgende Leuchtkraftfunktion für Galaxien:

$$\frac{dn}{dL} = \frac{n^*}{L^*} \left(\frac{L}{L^*}\right)^\alpha \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right) \quad (9.5)$$

n ist die Zahl der Galaxien und L die Leuchtkraft; n^* und L^* sind Normierungsgrößen. (Ich verwende den Wert $\alpha = -1, 1$ von [EEP 88]) Die Leuchtkraft mit der Geschwindigkeitsdispersion v durch die Faber-Jackson- bzw. Tully-Fisher-Beziehung [Faber & Jackson 76, Tully & Fisher 77] gegeben ist:

$$\left(\frac{L}{L^*}\right) = \left(\frac{v}{v^*}\right)^\gamma \quad (9.6)$$

mit $\gamma = 4$ für elliptische und S0-Galaxien und $\gamma = 2.6$ für Spirale. v^* ist die Geschwindigkeitsdispersion einer L^* -Galaxie; ich verwende $v^* = 276 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ für

⁴Siehe, z.B. [FFKT 92].

⁵Hier werden Entwicklungseffekte vernachlässigt.

elliptische Galaxien, $v_* = 252 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ für S0-Galaxien⁶ und $v_* = 144 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ für Spirale. (Diese Werte stammen aus einer Analyse mehrerer Arbeiten zur Linsenstatistik [TOG 84, Krauss & White 92a, Jaroszyński 92, Kochanek 92]. Hierbei muß man, neben offensichtlichen Druckfehlern, beachten, daß bei manchen der Parameter $(1,5)^{\frac{1}{2}}$ schon in der Definition der Geschwindigkeitsdispersion berücksichtigt worden ist bzw. daß manche Autoren die *beobachtete* Geschwindigkeitsdispersion und andere die der gesamten Materie meinen; der Faktor $(1,5)^{\frac{1}{2}}$ spielt nur bei elliptischen Galaxien eine Rolle—dies ist in manchen Arbeiten unklar. (Man muß auch zwischen der *Rotationsgeschwindigkeit* und der *Geschwindigkeitsdispersion* einer Spiralgalaxie unterscheiden.) Meine Werte sind also konsistent mit allen Arbeiten zur Linsenstatistik wenn man diese Punkte berücksichtigt. Die genauen Werte sind aber nicht entscheidend; dies wurde für die Weltmodelle, die er betrachtet hat, von Kochanek gezeigt [Kochanek 92].

Drückt man v bzw. n_0 durch L aus, erhält man

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial z_d \partial \frac{L}{L_*}} = n_*(1+z_d)^2 16\pi^3 \left(\frac{v_*}{c}\right)^4 \left(\frac{L}{L_*}\right)^{\alpha+\frac{4}{\gamma}} \left(\frac{D_d D_{ds}}{D_s}\right)^2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{P(z_d)}} \exp\left(-\frac{L}{L_*}\right) \quad (9.7)$$

(Siehe auch [Kochanek 92].)

Um die optische Tiefe als Funktion von Beobachtungsgrößen zu erhalten, definiert man

$$\hat{a}_* := 4\pi \left(\frac{v_*}{c}\right)^2$$

und

$$\hat{a} := \hat{a}_* \left(\frac{v}{v_*}\right)^2 \frac{D_{ds}}{D_s}$$

Es ist also

$$a = \hat{a} D_d \quad (9.8)$$

\hat{a} ist der Winkelradius des Einsteinringes bzw. die Hälfte des beobachteten Bildabstandes. Macht man eine Variablentransformation von $\frac{L}{L_*}$ zu $\frac{\hat{a}}{\hat{a}_*}$ und integriert über $\delta(\hat{a} - \hat{a}_*)$, erhält man nach einigen umfangreichen aber trivialen Rechnungen⁷ den gewünschten Ausdruck für die optische Tiefe als Funktion von z_d und dem Weltmodell bei bekanntem Bildabstand $2a$, Quellenrotverschiebung z_s und Linsengalaxientyp:

$$\frac{d\tau}{dz_d} = 16\pi^3 n_* \left(\frac{v_*}{c}\right)^4 (1+z_d)^2 \frac{\hat{a}}{\hat{a}_*} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}_*} \frac{D_s}{D_{ds}}\right)^{\frac{\gamma}{2}(1+\alpha)} D_d^2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{(1+z_d)^2(\Omega_0 z_d + 1 - \lambda_0) + \lambda_0}} \exp\left(-\left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}_*} \frac{D_s}{D_{ds}}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\right) \quad (9.9)$$

⁶Bei den elliptischen und S0-Galaxien entsprechen diese Werte *beobachteten* Geschwindigkeitsdispersionen von 225 bzw. $206 \frac{\text{km}}{\text{s}}$; der Unterschied kommt von dem Faktor $\sqrt{1,5}$ —siehe [TOG 84, Gott 77].

⁷Siehe Anhang 1.

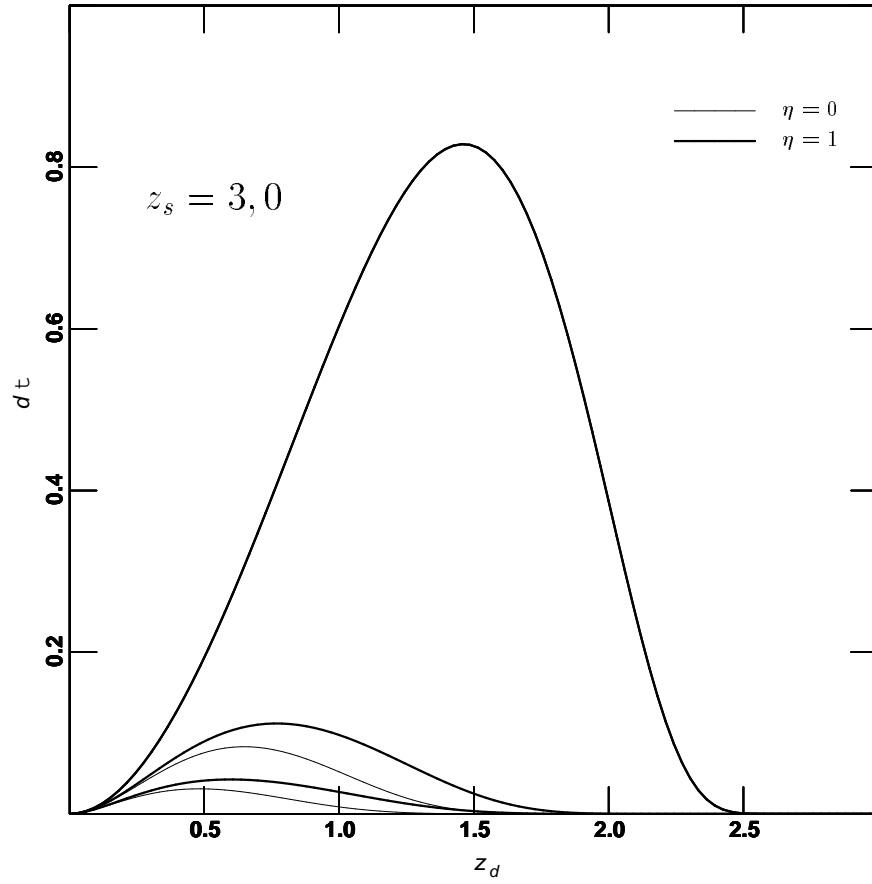


Abbildung 9-1. Beispiele für die Funktion $d\tau(z_d)$
 Dargestellt ist $d\tau(z_d)$ für $(\Omega_0; \lambda_0)$ -Werte von (von unten nach oben) $(1,0;0,0)$, $(0,4;0,7)$ und $(0,0;1,0)$. Deutlich zu sehen ist der schwache Einfluß von η . (Für $\Omega = 0$ spielt der Wert von η natürlich keine Rolle.)

b. Normierung

i. Normierungsfaktoren im strengen Sinne

Da ich mich nur für die Abhängigkeit der optischen Tiefe von z_d und dem Weltmodell und nicht für den absoluten Wert interessiere, kann man eine optische Tiefe $d\tau$ ohne Normierung betrachten:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dz_d} &= (1+z_d)^2 \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}(1+\alpha)} \\ &\quad D_d^2 \frac{1}{\sqrt{(1+z_d)^2(\Omega_0 z_d + 1 - \lambda_0) + \lambda_0}} \\ &\quad \exp\left(-\left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\right) \end{aligned} \quad (9.10)$$

Der Einfluss des kosmologischen Modells steckt in den Entfernungen D_{ij} und in dem Wurzelausdruck. Einige Beispiele gibt Abb. 9-1.

ii. Andere „Normierungsfaktoren“

Die Vorgehensweise, nur die *unnormierte* optische Tiefe zu betrachten, hat den Vorteil, daß Korrekturen, die eine realistischere Physik berücksichtigen und sich nur auf die „Amplitude“ der optischen Tiefe, nicht aber auf die Form der Funktion, auswirken, keine Rolle spielen. Hierzu gehört z.B. der bereits besprochene Effekt endlicher Kernradien (Kapitel 8 Abschnitt ii).

c. Auswahl effekte

i. Spektroskopische Grenzhelligkeit

Ein wichtiger Punkt, der meines Wissens bis jetzt in der Literatur nicht berücksichtigt worden ist, ist, daß Gl. 9.10 nicht immer die Wahrscheinlichkeit angibt, bei dem entsprechenden z_d -Wert eine Linsengalaxie zu finden (für ein bestimmtes Gravitationslinsensystem und für ein festes Weltmodell)—nämlich dann nicht, wenn die scheinbare Helligkeit der bei dem entsprechenden z_d -Wert benötigten Linsengalaxie so schwach ist, daß man aus technischen Gründen bei diesem z_d -Wert überhaupt keine Rotverschiebung *messen* könnte. Vergleicht man, wie ich es in dieser Arbeit tue, die beobachteten z_d -Werte mit der erwarteten Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Weltmodell, um eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit zu machen, daß dieses Weltmodell der Wirklichkeit entspricht, dann bedeutet die Tatsache, daß Weltmodelle, die einen wahrscheinlichsten z_d -Wert bei Rotverschiebungen, die viel größer sind als die beobachteten, vorherzusagen, nicht unbedingt, daß diese Weltmodelle unwahrscheinlich sind—dies könnte vielleicht nur die Tatsache widerspiegeln, daß man bei diesen großen z_d -Werten aus technischen Gründen nicht in der Lage ist, die Rotverschiebungen zu messen.

Aus diesem Grund muß man Gl. 9.10 wie folgt modifizieren:

Für jeden Wert von z_d , für den man $d\tau$ berechnet, muß man $d\tau = 0$ setzen, wenn die scheinbare Helligkeit der bei diesem z_d -Wert benötigten Linsengalaxie nicht ausreicht, um eine Messung der Rotverschiebung zu ermöglichen.

Aus dem Weltmodell, z_d , z_s , Linsengalaxientyp und dem Bildabstand läßt sich die scheinbare Helligkeit m der benötigten Linsengalaxie aus den bereits bekannten Beziehungen und Definitionen wie folgt berechnen:

$$m = M_* - 2,5 \frac{\gamma}{2} \log \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}_*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right) + 5 \log D_L - 5 + K \quad (9.11)$$

wo M_* die absolute Helligkeit einer L_* -Galaxie ist und K die K -Korrektur. (Ich verwende $M_{B*} = -19,9 + 5 \log h$ (siehe [EEP 88]) und ein $(B - R)$ von 1,8 für elliptische Galaxien bzw. 1,3 für Spirale [Peletier]. Ist $m > m_{\text{grenz}}$ dann ist $d\tau = 0$.

In Kapitel 3 wurde gezeigt, daß $D_L = D_d(1 + z_d)^2$; das gilt aber für bolometrische Helligkeiten. Berechnet man Helligkeiten in einem bestimmten Spektralbereich, so hat man einen zusätzlichen Faktor $\sqrt{1 + z_d}$, der berücksichtigt, daß nur der Bruchteil $\frac{1}{z_d}$ des Flusses in dem Spektralbereich im Bezugssystem der Galaxie noch in dem Spektralbereich enthalten ist, wenn das Spektrum rotverschoben wird. Dies ist ein Teil der in Kapitel 3 besprochenen K -Korrektur. Natürlich müßte man auch berücksichtigen, daß die Energieverteilung im Spektrum der Galaxie nicht konstant

ist, also die volle z -abhängige K -Korrektur berücksichtigen. Ich habe die K -Korrekturen von [CWW 80] benutzt.⁸

Da M^* modulo H_0 gemessen wird, spielt unsere Unsicherheit bezüglich der Hubble-Konstanten keine Rolle bei der Berechnung der scheinbaren Helligkeit—in Gl. 9.11 ist D_L gegeben durch $(1+z_d)^2 D_d \frac{c}{H_0}$, so daß

$$\begin{aligned} 5 \log D_L &= 10 \log(1+z_d) + 5 \log D_d + 5 \log c - 5 \log H \\ &= 10 \log(1+z_d) + 5 \log D_d + 5 \log c - 5 \log \left(\frac{100 \text{ km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} \right) - 5 \log h \end{aligned}$$

Die 2 Terme, die von h abhängen, heben sich also bei der Berechnung der scheinbaren Helligkeit nach Gl. 9.11 gegenseitig auf.

Es ist nicht möglich, eine analytische Abschätzung für den Einfluß von m_{grenz} anzugeben. Durch Berechnungen für verschiedene angenommene Werte kann dieser Einfluß gezeigt werden. Die Unterschiede sind aber nicht so groß, wie man vielleicht zunächst vermutet, denn eine Änderung in m_{grenz} wirkt sich nicht unbedingt stark auf die entsprechende Änderung in z_d aus: Die scheinbare Helligkeit als Funktion von z_d ändert sich relativ schnell, zumindest in dem Bereich wo sich m_{grenz} in den meisten Weltmodellen befindet, denn die Masse der benötigten Galaxie nimmt mit steigendem z_d ab. Die durch eine Änderung von m_{grenz} verursachte Änderung in z_d ist also kleiner als für eine feste Galaxienmasse.

Zunächst erscheint es möglich, etwas über die relative Wahrscheinlichkeit eines Weltmodells zu sagen, indem man untersucht, ob der *Bruchteil der Systeme ohne beobachtete Linse* mit der Erwartung für das entsprechende Weltmodell übereinstimmt. Dies ist aber nicht sehr aussagekräftig, denn es ist viel schwieriger, eine Grenzhelligkeit für den *Nachweis einer Linsengalaxie* anzugeben als die Abschätzung der spektralen Grenzhelligkeit m_{grenz} . Hängt m_{grenz} in erster Näherung von der Helligkeit der Galaxie ab, so ist die Grenzhelligkeit für den Nachweis durch Beobachtung durch andere Störfaktoren wie die genaue Geometrie der Bilder, das Seeing, das Flußverhältnis zwischen Bildern und Galaxie usw. viel stärker beeinflusst.

ii. Andere z_d -abhängige Auswahleffekte

Entscheidend für diese Untersuchung ist, daß man nur Systeme betrachtet, die nicht wegen Besonderheiten der jeweiligen Linsengalaxie gefunden worden sind. (Daß man sonst starke Auswahleffekte hätte, ist klar.) Es könnte jedoch trotzdem sein, daß manche z_d -Werte bevorzugt sind, und zwar deshalb, weil sie eine höhere Verstärkung der Quasarbilder haben. Das System würde nicht gefunden worden sein, wenn die Linsengalaxie eine andere Rotverschiebung hätte, weil die Quasarbilder sonst zu schwach sein würden. Es ist leicht, die Verstärkung einer singulären isothermen Sphäre analytisch anzugeben [TOG 84], und im Prinzip könnte man dafür korrigieren, indem man die optische Tiefe auf 0 setzt für die z_d -Bereiche, wo die Verstärkung nicht ausgereicht hätte, um dort die Quelle sichtbar zu machen. Dies habe ich aus zwei Gründen nicht getan:

- Obwohl der Bildabstand relativ stabil ist gegenüber (in der Praxis immer vorhandenen) kleinen Abweichungen von der singulären isothermen Sphäre, gilt dies nicht für die Verstärkung.⁹

⁸ Diese sind tabelliert für verschiedene Galaxientypen, Farben und z -Werte. Als maßgebend für m_{grenz} habe ich die Johnson- R -Helligkeit benutzt. Um die K -Korrektur zu berechnen als Funktion von z habe ich die Werte für den entsprechenden Galaxientyp zwischen den angegebenen z -Werten interpoliert.

⁹ Insbesondere gibt es bei den Fällen mit mehr als zwei Bildern sehr große Verstärkungen als Folge der anderen Kaustikstruktur.

- In der Praxis bestehen Galaxien mindestens zum Teil aus Sternen, was zu einem komplizierten Kaustiknetzwerk führt (*microlensing*) und die maximale Verstärkung herabsetzt [Kunze 90].

Dies bedeutet natürlich, daß man die ganze Wahrheit mit der singulären isothermen Sphäre nicht erfassen kann, aber die Tatsache, daß *microlensing* hohe Verstärkungen erheblich kleiner macht, bedeutet, daß ein möglicher Auswahleffekt durch die z_d -Abhängigkeit der Verstärkung keine zu große Bedeutung hat.

Zusammenfassung

- Man kann einen Ausdruck für die optische Tiefe als Funktion von z_d und dem kosmologischen Modell herleiten, der sonst nur von beobachtbaren Größen eines Systems und von empirisch bestimmten Konstanten abhängt. Die Verteilung der beobachteten z_l -Werte¹⁰ kann dann Auskunft über das Weltmodell liefern.
- Interessiert man sich nur für die Form der $d\tau$ - z_d -Kurve, dann müssen Normierungsfaktoren, die sonst erhebliche Unsicherheiten hineinbringen würden, nicht betrachtet werden.
- Ein wichtiger Effekt ist die Tatsache, daß der z_d -Wert, bis wohin man eine Linsenrotverschiebung messen könnte, meistens viel kleiner als z_s ist, so daß $d\tau$ für größere z_d -Werte = 0 gesetzt werden muß. Ein möglicher Auswahleffekt durch z_d -abhängige Verstärkung wird zum Teil durch *microlensing* aufgehoben.

¹⁰Siehe Fußnote auf S. 71.

Kapitel 10

Relative Wahrscheinlichkeit

*When I was younger, Statistics was the science of large numbers.
Now, it seems to me rapidly to be becoming
the science of no numbers at all.*

Oswald George

a. Konzept

i. Prinzip

Wären alle relevanten Beobachtungsgrößen jedes Gravitationslinsensystems (z_l ,¹ z_s , a , Galaxientyp bzw. γ und m_{grenz}) gleich, dann würde man erwarten, wenn man das Weltmodell kennt, daß $d\tau$ unmittelbar die Wahrscheinlichkeitsdichte in z_d , also die Wahrscheinlichkeit, bei der entsprechenden Rotverschiebung eine Linsengalaxie zu finden, angibt. Wenn man nur der Größenordnung 10 Systeme hat, dann müßte man natürlich das z_d -Intervall zwischen 0 und z_s in die „optimale“ Zahl von Bins einteilen und die Verteilung der beobachteten z_l -Werte bezüglich dieser Bins untersuchen, wobei der z_d -Bereich eines Bins so bestimmt wird, daß das Integral über $d\tau$ von der Untergrenze bis zur Obergrenze jedes bins gleich ist. (Die Fläche unter der Kurve entspricht der Wahrscheinlichkeit.) Man erwartet dann eine Gleichverteilung (im Rahmen der statistischen Streuung) bezüglich dieser Bins. Will man das Weltmodell bestimmen, dann kann man die relative Wahrscheinlichkeit theoretischer Weltmodelle vergleichen, wobei eine größere relative Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß die beobachteten z_l -Werte besser mit der theoretischen Verteilung übereinstimmen.

ii. Praxis

In der Praxis gibt es natürlich eine andere $d\tau(z_d)$ -Funktion für jedes System. Ich berechne also für jedes System eine Zahl n zwischen 0 und 1:

$$n = \frac{\int_0^{z_l} d\tau}{\int_0^{z_s} d\tau} \quad (10.1)$$

¹In dieser Arbeit halte ich mich weitgehend an die Indexkonvention von Refsdal; in vielen Arbeiten wird z_l anstatt Refsdals z_d benutzt. Ich benutze z_d wie in Kapitel 6 definiert, also als allgemeine Bezeichnung für diese Variable; z_l bedeutet hingegen in dieser Arbeit einen *beobachteten Wert einer bestimmten Linsengalaxie*.

Eine Gleichverteilung der Zahlen in dem Intervall $[0, 1]$ erwartet man, wenn man $d\tau$ mit dem der Wirklichkeit entsprechenden Weltmodell berechnet. Weltmodelle, die eine relativ unwahrscheinliche Verteilung erzeugen, stuft man als relativ unwahrscheinlich ein.

b. Berechnung

i. Funktionsweise

Die relative Wahrscheinlichkeit verschiedener Weltmodelle wurde in dieser Arbeit auf folgende Weise berechnet. Für jedes Weltmodell, beschrieben durch die Parameter λ_0 , Ω_0 , η und h , wurde für jedes System eine Zahl zwischen 0 und 1 durch Gl. 10.1 berechnet.² Zur Berechnung der scheinbaren Helligkeit der Linsengalaxie (wichtig für den Vergleich mit m_{grenz}) braucht man zusätzlich die Größen M_* und a_* , wobei $a_* := 4\pi \left(\frac{v_*}{c}\right)^2$. (v_* ist die Geschwindigkeitsdispersion einer L_* -Galaxie und c die Lichtgeschwindigkeit.) Die relative Wahrscheinlichkeit eines Weltmodells ist die relative Wahrscheinlichkeit, daß die mit diesem Weltmodell berechnete Verteilung der Zahlen zwischen 0 und 1 zufällig entstanden sein könnte. Diese relative Wahrscheinlichkeit kann man dann z.B. in der λ_0 - Ω_0 -Ebene darstellen.

Quantitativ läßt sich die relative Wahrscheinlichkeit so ausdrücken: verteilt man k Objekte auf b Bins, und ist $n(i)$ die Zahl der Objekte in dem i -ten Bin, dann ist die Wahrscheinlichkeit gegeben durch

$$W = \prod_{i=1}^b \frac{k! \left(\frac{1}{b}\right)^{n(i)}}{n(i)!} \quad (10.2)$$

(Siehe, z.B. [Moroney].) Da uns die Normierung nicht interessiert, kann man den konstanten Zähler weglassen und nur den Nenner betrachten.

ii. Optimierung

Man hat als freien Parameter die Zahl der Bins. Hat man z.B. 2 Bins, kann man sagen, daß ein Weltmodell, bei dem alle n Systeme in einem Bin fallen, eine *a priori* Wahrscheinlichkeit von $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ hat. Kochanek [Kochanek 92] hat diesen Ansatz verfolgt. Es ist aber klar, daß nur der Median der Verteilung hierbei eine Rolle spielt; Verteilungen, die sich nur durch ihre Standardabweichung und/oder Schiefe unterscheiden, können nicht voneinander unterschieden werden. Auf der anderen Seite, wenn die Zahl der Bins viel größer als die Zahl der Systeme ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß mehr als ein System in ein Bin fällt, verschwindend klein. Ist kein Bin mehrfach besetzt, dann sind alle Verteilungen gleich wahrscheinlich, so daß man aus der beobachteten Verteilung nicht auf das Weltmodell schließen könnte. Intuitiv vermutet man, daß die optimale Zahl der Bins etwa die Zahl der Systeme sein soll. Gleichzeitig dürfen Schlüsse, die aus der Verteilung gezogen werden, nicht von der Zahl der Bins abhängen—es sollte lediglich so sein, daß die *Genauigkeit* der Aussage von der Zahl der Bins abhängt. Um die optimale Binanzahl zu ermitteln, kann man Rechnungen für verschiedene Binanzahlen (um die Zahl der Systeme herum) machen und überprüfen, bei welcher Binanzahl die meiste Struktur zu sehen ist. Ob die

²Für die Berechnung von $d\tau$ braucht man die aus Beobachtung bestimmte Schechter-Leuchtkraft-Funktion und die Faber-Jackson- bzw. Tully-Fisher-Beziehung so wie die Beobachtungsdaten z_l , z_s , a , γ und m_{grenz} von jedem System.

wesentlichen Züge dieser Struktur echt sind kann man dann überprüfen, indem man untersucht, ob sie auch bei anderen Binanzahlen vorhanden sind. Es ist aber auch so klar, daß die optimale Binanzahl einfach die Zahl der Systeme ist.

Ich habe in dieser Arbeit diese Statistik benutzt, denn die Zahl der Systeme, die man betrachten kann, ist sehr klein (siehe Kapitel 11). Wenn man mehr Systeme zur Verfügung hätte, dann wäre es möglich z.B. ein Kolmogorov-Smirnov Test zu benutzen als Maß für die Wahrscheinlichkeit, daß die beobachtete Verteilung der Rotverschiebungen der Linsengalaxien der theoretischen Verteilung eines bestimmten kosmologischen Modells entspricht. Es ist leicht, eine andere Art der Wahrscheinlichkeitsberechnung in die Programme einzubauen, so daß das Verfahren bei Bedarf geändert werden kann bzw. wäre es möglich, verschiedene Methoden der Wahrscheinlichkeitsberechnung zu benutzen. (Siehe auch die Fußnote auf S. 101.)

Zusammenfassung

- Je wahrscheinlicher das Weltmodell, desto größer sollte die Übereinstimmung zwischen den beobachteten z_l -Werten und der mit diesem Weltmodell theoretisch berechneten Verteilung sein.
- Einfache Kombinatorik erlaubt eine Quantifizierung der relativen Wahrscheinlichkeit, die möglichst viel Information der beobachteten Verteilung der z_l -Werte ausnützt.

Teil D

Ergebnisse und Diskussion

*I often say that when you can measure what you are speaking about,
and express it in numbers, you know something about it;
but when you cannot measure it, when you cannot express it in numbers,
your knowledge is of a meagre and unsatisfactory kind:
it may be the beginning of knowledge,
but you have scarcely, in your thoughts, advanced to the stage of science,
whatever the matter may be.*

William Thomson

Kapitel 11

Beobachtungsdaten

a. Auswahlkriterien

Um für diese Untersuchung brauchbar zu sein, muß ein Gravitationslinsensystem folgende Voraussetzungen erfüllen:

- Die Quellenrotverschiebung z_s muß bekannt sein.
- Die Linsenrotverschiebung z_l muß bekannt sein.
- Der Typ der Linsengalaxie muß bekannt sein.
- Ein „Bildabstand“ muß beobachtbar sein.
- Die Linse muß eine isolierte Einzelgalaxie sein.
- Das System darf nicht wegen Besonderheiten der Linsenrotverschiebung gefunden worden sein.

Um einem Weltmodell eine bestimmte relative Wahrscheinlichkeit zuzuordnen, betrachte ich die Wahrscheinlichkeit, daß die beobachteten Linsenrotverschiebungen in dem entsprechenden Weltmodell „zufällig“ entstanden sein könnten. Alle anderen Beobachtungsgrößen werden sozusagen festgehalten; ich betrachte ja die Wahrscheinlichkeitsverteilung in z_d für das Auftreten der Linsengalaxie *für ein festes, bekanntes System*. In so fern spielen Auswahleffekte keine Rolle; es ist nicht *a priori* wahrscheinlicher, die Linse bei bestimmten Rotverschiebungen zu finden—es sei denn, sie wäre zu lichtschwach; dieser Punkt wird berücksichtigt, indem in diesem Fall die optische Tiefe $d\tau = 0$ gesetzt wird.

b. Klassifizierung bekannter Linsensysteme

i. Systeme, die nicht brauchbar sind

Das Einsteinkreuz 2237 + 0305 wurde bei einer Untersuchung von *Galaxien* gefunden; dies ist das einzige System, für das dies zutrifft. Die anderen Systeme sind auch nicht brauchbar, weil die Linse keine isolierte Einzelgalaxie ist, sondern ein Galaxienhaufen oder, wie bei 2016 + 112, mehr als eine „Feldgalaxie“. (Siehe Tabelle 11-1.)

ii. Systeme, die wahrscheinlich nicht brauchbar sind

In diesen Fällen, wo man die Linse nicht sieht, kann man aufgrund des großen Bildabstandes davon ausgehen, daß die Linse wahrscheinlich keine isolierte Einzelgalaxie ist. (Siehe Tabelle 11-2.)

iii. Unsichere Systeme

Bei diesen Systemen ist die Tatsache umstritten, ob sie überhaupt Gravitationslinsen sind. (Siehe Tabelle 11-3.)

iv. Systeme, die brauchbar sein könnten

Es gibt viele Systeme, die geeignet sein würden, wenn man die Rotverschiebungen messen könnte. Bis auf 1104 – 1805, das als letztes System vor Fertigstellung dieser Arbeit entdeckt wurde, haben alle diese Systeme einen großen z_s -Wert (was den wahrscheinlichsten z_d -Wert—unabhängig von der Kosmologie—systematisch zu größeren Rotverschiebungen verschiebt) und/oder einen kleinen Bildabstand (was eine schwächere Linsengalaxie bedeutet). (Siehe Tabelle 11-4.)

v. Brauchbare Systeme

Diese Systeme erfüllen alle Auswahlkriterien. In absehbarer Zeit könnte diese Liste erheblich wachsen, denn viele Systeme können nur deshalb nicht in die Statistik hineingenommen werden, weil ihre Rotverschiebungen (meistens z_l) nicht bekannt sind. (Siehe Tabelle 11-5.)

Zusammenfassung

- Gravitationslinsensysteme werden in das Sample aufgenommen, wenn sie einfach genug sind, um die Statistik anwenden zu können, und wenn genug beobachtbare Größen bekannt sind.
- Obwohl viele, auch bekannte, Systeme ausscheiden, gibt es noch viele, die in das Sample aufgenommen werden könnten, wenn ihre Rotverschiebungen bekannt wären.