

*Bestimmung  
kosmologischer Parameter  
durch Rotverschiebungsstatistik  
von Gravitationslinsen*



**Bestimmung  
kosmologischer Parameter  
durch Rotverschiebungsstatistik  
von Gravitationslinsen**

**DIPLOMARBEIT  
angefertigt an der Hamburger Sternwarte  
im Fachbereich Physik der Universität Hamburg  
unter Anleitung von Prof. Dr. Sjur Refsdal**

vorgelegt von  
Phillip King  
aus  
Tellmer

Hamburg  
November 1993



*It is my belief that philosophy must return to cosmology  
and to a simple theory of knowledge.  
There is at least one philosophical problem  
in which all thinking men are interested:  
the problem of understanding the world in which we live,  
and thus ourselves (who are part of the world) and our knowledge of it.  
All science is cosmology, I believe,  
and for me the interest of philosophy, no less than of science,  
lies solely in its bold attempt to add to our knowledge of the world,  
and to the theory of our knowledge of the world.*

Karl R. Popper



# Vorbemerkung

Diese Arbeit entstand als Diplomarbeit in Physik an der Universität Hamburg—an der Hamburger Sternwarte in der Arbeitsgruppe „Gravitationslinsen“, geleitet von Prof. Dr. Sjur Refsdal. Ein Teil der Ergebnisse wurde auf dem 31<sup>st</sup> Liège International Astrophysical Colloquium “Gravitational Lenses in the Universe” in Juni 1993 vorgetragen.





# Vorwort

Die Bestimmung kosmologischer Parameter ist ein Thema, das heute genau so aktuell ist wie vor siebzig Jahren. Obwohl die Kosmologie an sich viele Fortschritte seit den Anfängen<sup>1</sup> gemacht hat, ist dieses zentrale Thema, im Gegensatz zu den meisten kontroversen Punkten von früher, nach wie vor durch Unwissen auf der einen Seite und Wünsche und Hoffnungen der Beteiligten auf der anderen gekennzeichnet.

Während die klassischen Methoden (Kapitel 4), obwohl sie zeigen, daß die Bestimmung kosmologischer Parameter prinzipiell möglich ist, wahrscheinlich nicht in der Lage sind, uns endgültige Antworten auf die interessanten Fragen zu geben, bieten sich Gravitationslinsensysteme aus vielen Gründen gerade hierzu an (Kapitel 7). Hier muß man aber, wie eigentlich überall, die Fragen erst so allgemein wie möglich stellen, um zu sehen, was man überhaupt bestimmen kann, statt sich von vornherein auf bestimmte Modelle zu beschränken, sei es weil sie einfacher zu rechnen sind oder weil man sie aus *nichtphysikalischen* Gründen bevorzugt.

In dieser Arbeit hoffe ich so wenig Hitze und so viel Licht wie möglich auf diese komplizierte Thematik zu werfen.

---

<sup>1</sup>Diese ganze Arbeit handelt von der Kosmologie im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie; „die Anfänge“ sind also die frühen Arbeiten von Einstein [Einstein 17], de Sitter [de Sitter 17a, de Sitter 17b, de Sitter 17c], Lemaitre [Lemaitre 31a, Lemaitre 31b], Friedmann [Friedmann 22, Friedmann 24], Eddington [Eddington 30] u.s.w.



# Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung	vii
Vorwort	ix
Einleitung	1
<b>A. Kosmologie</b>	<b>5</b>
<b>1. Grundlagen</b>	<b>7</b>
a. Kosmologisches Prinzip . . . . .	7
b. Robertson-Walker-Metrik . . . . .	8
c. Allgemeine Relativitätstheorie . . . . .	9
Zusammenfassung . . . . .	11
<b>2. Gleichungen</b>	<b>13</b>
a. Friedmann-Lemaître-Gleichungen . . . . .	13
b. Beobachtbare Größen . . . . .	14
Zusammenfassung . . . . .	18
<b>3. Entfernungen</b>	<b>19</b>
a. Entfernungen im statischen euklidischen Raum . . . . .	19
b. Verallgemeinerte Entfernungen . . . . .	21
c. Zusammenhänge zwischen verschiedenen Entfernungen . . . . .	23
d. Entfernungen im inhomogenen Universum . . . . .	24
Zusammenfassung . . . . .	25
<b>4. Klassische Beobachtende Kosmologie</b>	<b>27</b>
a. $H_0$ . . . . .	27
b. $q_0$ . . . . .	28
c. $\Omega_0$ . . . . .	30
d. Weltalter . . . . .	31
e. Der gegenwärtige Stand aus meiner Sicht . . . . .	31
Zusammenfassung . . . . .	33
<b>5. Mögliche Weltmodelle</b>	<b>35</b>
a. „Unmittelbare“ Einschränkung einzelner Parameter . . . . .	35
b. Einschränkungen von Parameterkombinationen . . . . .	37
c. Klassifizierung . . . . .	40
d. $M_2$ -Modelle . . . . .	42
Zusammenfassung . . . . .	42

<b>B.</b>	<b>Gravitationslinsentheorie</b>	<b>43</b>
6.	<b>Allgemeines</b>	<b>45</b>
	a. Historisches . . . . .	45
	b. Grundlagen . . . . .	46
	c. Die Linsengleichung . . . . .	46
	Zusammenfassung . . . . .	50
7.	<b>Gravitationslinsen und Kosmologie</b>	<b>51</b>
	a. Die Laufzeitdifferenz und $H_0$ . . . . .	51
	b. Die Laufzeitdifferenz und andere kosmologische Parameter	52
	c. Statistische Ansätze . . . . .	52
	Zusammenfassung . . . . .	55
8.	<b>Diskussion der in dieser Arbeit verwendeten Modelle</b>	<b>57</b>
	a. Kurzbeschreibung der Modelle . . . . .	57
	b. Näherungsmodelle . . . . .	57
	Zusammenfassung . . . . .	60
<b>C.</b>	<b>Statistik</b>	<b>61</b>
9.	<b>Optische Tiefe</b>	<b>63</b>
	a. Definition . . . . .	63
	b. Normierung . . . . .	66
	c. Auswahleffekte . . . . .	67
	Zusammenfassung . . . . .	69
10.	<b>Relative Wahrscheinlichkeit</b>	<b>71</b>
	a. Konzept . . . . .	71
	b. Berechnung . . . . .	72
	Zusammenfassung . . . . .	73
<b>D.</b>	<b>Ergebnisse und Diskussion</b>	<b>75</b>
11.	<b>Beobachtungsdaten</b>	<b>77</b>
	a. Auswahlkriterien . . . . .	77
	b. Klassifizierung bekannter Linsensysteme . . . . .	77
	Zusammenfassung . . . . .	78
12.	<b>Auswertung von Beobachtungsdaten</b>	<b>85</b>
	a. Einfluß verschiedener Parameter und qualitative Erwartun-	
	gen . . . . .	85
	b. Untersuchungen durch numerische Rechnungen: Vorge-	
	hensweise . . . . .	86
	c. Untersuchungen durch numerische Rechnungen: Ergebnisse	88
	Zusammenfassung . . . . .	91
13.	<b>Vergleich mit anderen Arbeiten</b>	<b>95</b>
	a. Alle Modelle . . . . .	95
	b. $\eta$ -Parameter . . . . .	96
	c. Verteilung . . . . .	97
	d. Auswahleffekte . . . . .	97
	e. Entwicklungseffekte . . . . .	98

<i>Inhaltsverzeichnis</i>	xiii
f. Räumliche Verteilung . . . . .	98
Zusammenfassung . . . . .	98
<b>14. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>101</b>
<b>Anhänge</b>	<b>103</b>
1. Herleitung des Ausdrucks für die optische Tiefe	105
2. Programme	109
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>111</b>
<b>Danksagung</b>	<b>121</b>
<b>Erklärung</b>	<b>123</b>



# Einleitung

*The epigraph is among the most delightful of scholarly habits. . . .  
Part of the fun. . . is turning a source to unexpected use.*

Mary-Claire van Leunen, *A Handbook for Scholars*

Refsdal [Refsdal 64b] diskutierte schon 1964 die Möglichkeit, mit Hilfe von Gravitationslinsen kosmologische Parameter zu bestimmen, und zwar über den Lichtlaufzeitunterschied zwischen verschiedenen Bildern der Quelle. Diese Methode, vor allem in bezug auf die Bestimmung von  $H_0$ , wurde ausführlich durch Borgeest [Borgeest 82] beschrieben.  $H_0$  läßt sich leicht<sup>1</sup> bestimmen; der Einfluß anderer kosmologischer Parameter ist jedoch ein Effekt zweiter Ordnung, was diese Methode interessant für die Bestimmung von  $H_0$  macht, jedoch nicht für die übrigen Parameter des Weltmodells. (Dies wurde auch bereits 1964 von Refsdal erwähnt.) Kayser hat auch gezeigt [Kayser 82, Kayser & Refsdal 83], daß dieser Effekt, der es im Prinzip möglich macht (falls  $H_0$  bekannt ist), eine bestimmte Schar von Weltmodellen auszuschließen, praktisch ohne Bedeutung ist, so lange nicht genaue Information über den Grad der Homogenität vorhanden ist, da der  $\eta$ -Parameter, der angibt, welcher Bruchteil der Masse im Kosmos gleichmäßig verteilt ist ( $\eta = 1$ : volle Homogenität,  $\eta = 0$ : alle Materie in kompakten Objekten verteilt) einen viel größeren Einfluß als die anderen Parameter des Weltmodells hat (so lange man nur Weltmodelle betrachtet, die nicht aus anderen Gründen ausgeschlossen sind).

Da die klassischen Methoden zur Bestimmung kosmologischer Parameter (Kapitel 4) uns wahrscheinlich nicht viel weiter bringen werden, lohnt es sich zu untersuchen, in wie weit die Linsengalaxienrotverschiebungsstatistik uns ermöglicht, auf das Weltmodell zu schließen. Diese Methode bietet einige Vorteile:<sup>2</sup>

- Man kann ohne Kenntnis von  $H_0$  auf die anderen Parameter schließen.
- Der Einfluß des  $\eta$ -Parameters ist klein gegenüber dem Einfluß der anderen Parameter des Weltmodells.
- Die Ergebnisse sind relativ unabhängig von Feinheiten des Linsenmodells.
- Es besteht eine realistische Chance, in naher Zukunft die Beobachtungsdaten erheblich zu verbessern—man kann aber bereits jetzt

---

<sup>1</sup>Theoretisch. Praktisch spielen Unsicherheiten des Linsenmodells eine erhebliche Rolle, so wie die Bestimmung des Laufzeitunterschiedes (*time delay*), da intrinsische Variabilität nicht leicht von anderen Variabilitätsquellen, z.B. *microlensing*, zu trennen ist, und da der Einfluß der ungleichmäßig verteilten Beobachtungszeiten zusätzliche Schwierigkeiten (sogenanntes *windowing*) mit sich bringt.

<sup>2</sup>außer in den 1. und 3. Punkten gegenüber den klassischen Methoden; außer in dem 5. Punkt gegenüber der *time-delay*-Methode

schon Ergebnisse erhalten, die vergleichbar mit anderen Methoden sind.

- Man zählt und mißt Rotverschiebungen—ist also befreit von der größten Unsicherheit der Beobachtenden Kosmologie, den Entfernungsbestimmungen.

In *erster Näherung* geht man folgendermaßen vor: Für eine gegebene Kosmologie berechnet man die Wahrscheinlichkeit für mehrfach abgebildete Quasare pro  $z_d$ -Intervall und vergleicht diese Vorhersage mit den Beobachtungen. Die Wahrscheinlichkeit hängt von der Zahl der Linsen pro  $z_d$ -Intervall und von dem Wirkungsquerschnitt (Fläche innerhalb des Einstein-Ringes) einer Linse ab. Ersteres hängt von der heutigen Zahl (Normierung!), und dem kosmologischen Modell ab; letzteres von der Masse und der Massenverteilung der Linsen<sup>3</sup> so wie der Größe  $\frac{D_d D_{ds}}{D_s}$ , die auch vom kosmologischen Modell abhängt, ab. Ein realistischeres Modell muß Entwicklungseffekte der Linsen so wie die wirkliche Linsenverteilung, sprich Haufen und Superhaufen bei Galaxien, berücksichtigen. Wichtig für den Vergleich mit Beobachtung ist natürlich die Zahl der Systeme, die tatsächlich beobachtet wird. Die zunächst berechnete Zahl wird verkleinert durch den durch Beobachtung bestimmten Mindestabstand der Bilder, realistische Galaxienmodelle (endliche Kernradien statt singulärer isothermer Sphären), Grenz(helligkeits)entfernungen der Linsen<sup>4</sup> und vergrößert durch den sogenannten *amplification bias*.

Man könnte zunächst vermuten, daß es auch andere Größen gibt, z.B. den Bildabstand, die durch ihre Statistik Auskunft über das Weltmodell geben könnten. Es ist aber gezeigt worden, daß die Verteilung der typischen Bildabstände in  $z_d$  nur sehr schwach vom kosmologischen Modell abhängt [FFKT 92, S. 9–13].

Eine solche Untersuchung sollte folgenden Punkten Rechnung tragen:<sup>5</sup>

**alle Modelle** Es sollten alle Weltmodelle betrachtet werden, die nicht aus anderen Gründen ausgeschlossen werden.

**$\eta$ -Parameter** Verschiedene  $\eta$ -Werte sollen betrachtet werden.

**Verteilung** Man sollte bei der Analyse der Beobachtungsdaten nicht nur die Gesamtzahl der Systeme, sondern auch ihre  $z_d$ -Verteilung betrachten, da man so zusätzliche Aussagen machen kann, obwohl die Zahl der Systeme sehr klein sein mag. (Siehe [Kochanek 92].)

**Auswahleffekte** Wichtig für den Vergleich mit Beobachtung ist, daß man „korrigierte“ Verteilungen berechnet, in denen alle Auswahleffekte und Beobachtungsungenauigkeiten berücksichtigt werden.

**Entwicklungseffekte** Jede realistische Betrachtung muß den Einfluß der zeitlichen Entwicklung der Linsen zumindest abschätzen.

**Räumliche Verteilung** Bei der Betrachtung von Galaxien als Linsen schränkt man den Umfang und Anwendbarkeit der Untersuchung ein, wenn man nur isolierte Galaxien betrachtet.

<sup>3</sup>Die Linsen haben nicht alle die gleiche Masse; man muß natürlich zunächst die Berechnung für eine Einheitsmasse durchführen und dann über die Massenfunktion integrieren.

<sup>4</sup>Diese hängen auch vom kosmologischen Modell ab.

<sup>5</sup>Siehe Kapitel 13 für eine Diskussion darüber, in wie weit diese Punkte in dieser Arbeit und in anderen Arbeiten berücksichtigt worden sind.



Die ersten vier Möglichkeiten zu berücksichtigen, ist zwar mathematisch und/oder numerisch aufwendiger, bietet aber prinzipiell nichts Neues gegenüber einer einfachen Betrachtung. Die Entwicklungseffekte zu berücksichtigen macht die Sache komplizierter, weil man hier eine zusätzliche Unsicherheit hineinbringt (oder einen zusätzlichen freien Parameter hat); die Vorgehensweise bleibt aber gleich. Die größte Schwierigkeit aber ist, eine realistische räumliche Verteilung der Galaxien zu berücksichtigen, da man hier auf andere, aufwendigere Methoden zurückgreifen muß.

Der Aufbau dieser Arbeit ist wie folgt: Teil A stellt die nötigen Voraussetzungen bezüglich Kosmologie dar; in Teil B werden die Grundlagen der Gravitationslinsentheorie, die für diese Arbeit wichtig sind, dargestellt. Teil C beschreibt die Theorie, die als Grundlage für die Rechnungen dient. In Teil D werden die Ergebnisse erläutert und mit den Ergebnissen anderer Arbeiten zu diesem Thema verglichen. Im wesentlichen stellen die ersten 2 Teile bereits Bekanntes dar, allerdings nicht vollständig, sondern in Hinblick auf die spätere Anwendung in dieser Arbeit. Die letzten 2 Teile, obwohl manche Konzepte auf bereits veröffentlichte Ideen anderer Wissenschaftler beruhen, stellen zum größten Teil von mir gewonnene Ergebnisse dar.



# Teil A

# Kosmologie

*Cosmology... restrains the aberrations  
of the mere undisciplined imagination.*

Alfred North Whitehead



# Kapitel 1

## Grundlagen

*Ubi materia, ibi geometria!*

Johannes Kepler

### a. Kosmologisches Prinzip

*The less one knows about the universe, the easier it is to explain.*

Léon Brunschwig

#### i. Ideale Formulierung

Ist das Universum homogen und isotrop, so läßt es sich erheblich leichter beschreiben. Inwieweit dies erfüllt ist, ist noch nicht klar. Natürlich hilft eine Vereinfachung einer mathematischen Beschreibung nicht, wenn dies der Wirklichkeit nicht entspricht; ist eine solche Vereinfachung jedoch eine Näherung, deren Abweichung von der Wirklichkeit zumindest abgeschätzt werden kann, kann sie uns die Beschreibung erheblich erleichtern, in manchen Fällen ja erst möglich machen.

Man beobachtet keine Homogenität, weil es Entwicklungseffekte gibt; man sieht Gegenstände, die weit weg sind, in dem Zustand, in dem sie waren, als das Licht (oder andere „Beobachtungsmittel“) ausgestrahlt wurde. Man beobachtet jedoch Isotropie, und aus lokaler Isotropie folgt Homogenität, wenn man annimmt, daß wir in keiner bevorzugten Lage sind (Kopernikanisches Prinzip).

Als *Kosmologisches Prinzip* bezeichnet man eben diese Aussage: das Universum ist homogen und isotrop, das heißt, jeder Beobachter sieht das gleiche Bild vom Universum. Alle Örter sind gleich.<sup>1</sup> Das bedeutet, daß das, was wir beobachten, allgemeine Gültigkeit hat; wir können unsere Beobachtungen extrapolieren und auf die Struktur des ganzen Universums durch Beobachtung eines kleinen Ausschnittes schließen. (Siehe [Harrison, Kapitel 13] für eine gute Darstellung dieses Sachverhalts.)

In dieser Arbeit, wenn nicht anders bemerkt, setze ich voraus, daß das Universum (mit den unten besprochenen Einschränkungen) homogen und isotrop ist.

---

<sup>1</sup>Nimmt man zusätzlich an, daß auch alle Zeiten gleich sind, so spricht man vom *Vollkommenen Kosmologischen Prinzip*. Siehe [Bondi, Kapitel II] für eine gute Diskussion der Kosmologischen Prinzipien, derer Bedeutungen, Nützlichkeiten und Anwendungsgebiete.

## ii. Realistische Formulierung

Als „selbstverständlich“ gelten folgende Einschränkungen des Kosmologischen Prinzips:

- Das Kosmologische Prinzip ist nur bei Maßstäben anzuwenden, die „groß genug“ sind.
- Das Kosmologische Prinzip gilt nur für „fundamentale Beobachter“, also nur für die Beobachter, die sich, relativ zu dem Substratum, in Ruhe befinden.

Es ist im Prinzip denkbar, daß es keine Skala gibt, an der das Kosmologische Prinzip gültig ist; das Universum könnte z.B. hierarchisch organisiert sein. Ist dies nicht der Fall, dann gibt es eine Skala, oberhalb derer das Universum als homogen und isotrop betrachtet werden kann. So lange man sich nur für Effekte interessiert, die sich auf dieser Skala abspielen, ist es meist vertretbar, das Universum so zu betrachten, als ob es *streng* dem Kosmologischen Prinzip folgte.<sup>2</sup> Das Kosmologische Prinzip ist in diesem Fall als Näherung zu betrachten, deren Abweichungen von der Wirklichkeit quantitativ erfaßt werden können. (Für eine Diskussion anderer möglicher Deutungen, siehe, nochmals, [Bondi, Kapitel II].)

Im Idealfall bezeichnet man als *Substratum* die gleichverteilte Materie. Man betrachtet das Universum also so, als ob alle Materie so verteilt wäre. Obwohl lokale Abweichungen vernachlässigbar sind, indem sie keine zu große Störung darstellen, darf natürlich eine Aussage, die von der idealen Verteilung ausgeht, nicht auf einen Beobachter angewendet werden, der sich relativ zu dem Substratum bewegt. Es ist klar, daß ein Beobachter, der nicht in Ruhe ist, allein durch (speziell)relativistische Effekte keine Isotropie wahrnimmt. Dies trifft nicht auf die fundamentalen Beobachter zu. Zusätzlich kann man für die fundamentalen Beobachter eine bevorzugte Zeit, die sogenannte „kosmische Zeit“, die für alle „gleichmäßig abläuft“, definieren [Weyl 23]. Das Kosmologische Prinzip und das Vorhandensein von Entwicklungseffekten reichen (im Prinzip) aus, um eine kosmische Zeit durch Beobachtungsvorschriften meßbar zu machen.

## b. Robertson-Walker-Metrik

*He had bought a large map representing the sea  
Without the least vestige of land:  
And the crew were much pleased when they found it to be  
A map they could all understand  
‘What’s the good of Mercator’s North Poles and Equators,  
Tropics, Zones, and Meridian Lines?’  
So the Bellman would cry: and the crew would reply  
‘They are merely conventional signs!  
‘Other maps are such shapes, with their islands and capes!  
But we’ve got our brave Captain to thank’  
(So the crew would protest) ‘that he’s bought us the best—  
A perfect and absolute blank!’  
Lewis Carroll, *The Hunting of the Snark**

<sup>2</sup>Eine wichtige Ausnahme ist die Ausbreitung von Licht, die auch von lokalen Eigenschaften der Materieverteilung abhängen kann. Siehe hierzu Kapitel 3 Abschnitt d.

## i. Plausibilitätserklärung durch das Kosmologische Prinzip

Wie kann man mathematisch ein Universum beschreiben, das dem Kosmologischen Prinzip gehorcht? Die einzig mögliche zeitliche Entwicklung ist ein räumlich gleichmäßiges Ausdehnen oder Schrumpfen. Das Universum, vollkommen homogen und isotrop, ist also strukturlos und lediglich durch einen Skalenfaktor charakterisiert, der sich mit der Zeit ändern kann. Dies ist anschaulich klar, ist aber auch durch Robertson und Walker [Robertson 35, Walker 36] streng mathematisch bewiesen worden.

## ii. Linienelement und Definition von Symbolen

Das Linienelement in einem homogenen und isotropen Universum ist gegeben durch

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left( \frac{d\sigma^2}{(1 - k\sigma^2)} + \sigma^2 d\theta^2 + \sigma^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (1.1)$$

wobei die Größen folgende Bedeutungen haben

$s$ Vierdimensionaler Abstand	[Länge]
$c$ Lichtgeschwindigkeit	$\left[ \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} \right]$
$t$ Zeit	[Zeit]
$R$ Skalenfaktor	[Länge]
$\sigma$ „Radialkoordinate“	[dimensionslos]
$k$ Krümmungskonstante	[dimensionslos]
$\theta$ Winkelkoordinate	[dimensionslos]
$\phi$ Winkelkoordinate	[dimensionslos]

(Es gibt keine einheitliche Schreibweise auf diesem Gebiet.)

## c. Allgemeine Relativitätstheorie

*From my point of view one cannot arrive, by way of theory, at any at least somewhat reliable results in the field of cosmology, if one makes no use of the principle of general relativity.*

Albert Einstein

## i. Näherungen

Es würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, mehr als unbedingt nötig zur Allgemeinen Relativitätstheorie zu erwähnen. Siehe [Berry] für das Minimum, das man für Kosmologie braucht, [Sexl & Urbantke] für eine gründliche Behandlung der Kosmologie im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie oder [MTW] für eine vollständige Darstellung der Allgemeinen Relativitätstheorie sowie eine gute, knappe Darstellung der allgemein relativistischen Kosmologie.

Wichtig für das Verständnis dieser Arbeit in Bezug auf kosmologische Modelle ist die Tatsache, daß die Symmetrieeigenschaften, die aus dem Kosmologischen Prinzip bzw. aus der Robertson-Walker-Metrik folgen, es

ermöglichen, die allgemein relativistische Beschreibung der zeitlichen Entwicklung des Universums auf zwei Gleichungen (die in Kapitel 2 erläutert werden) zu reduzieren, die auch (mit einer mehr oder weniger *ad hoc* aber durch Vergleich mit den genauen Ergebnissen aus einer strengen Behandlung doch zu rechtfertigender Umdeutung einiger Größen) durch die sogenannte Newton'sche Kosmologie<sup>3</sup> verstanden werden können. Dies ist vielleicht nicht all so erstaunlich, denn das Kosmologische Prinzip gestattet es uns, ein Gebiet zu betrachten, das klein genug ist, daß alle relativen Bewegungen  $\ll c$  sind, und die Tatsache, daß man eine wirklich *homogene* Massenverteilung betrachtet, gewährleistet (mit realistischen Dichten), daß in diesem Gebiet nur schwache Gravitationsfelder vorkommen. (Man hat es also mit dem Newton'schen Grenzfall zu tun.)

Wenn man aber die Ablenkung des Lichtes betrachtet, dann muß man etwas mehr Allgemeine Relativitätstheorie berücksichtigen, denn selbst für  $v \ll c$  und schwache, statische Felder wird das Licht um das zweifache abgelenkt verglichen mit dem, was man nach der Newton'schen Theorie erwarten würde.<sup>4</sup> Aber für die Beschreibung des Gravitationslinseneffektes (Teil B) braucht man aus der Allgemeinen Relativitätstheorie nur den „Faktor 2“ gegenüber der Newton'schen Theorie.

Wo Newton'sche Theorie überhaupt nicht benutzt werden kann, ist in der Herleitung der Zusammenhänge verschiedener Größen miteinander, wo sowohl die Ausbreitung elektromagnetischer Strahlung als auch die zeitliche Entwicklung des Universums als ganzes eine Rolle spielen (Kapitel 3); hier kommt man um eine allgemein relativistische Behandlung nicht herum; es reicht jedoch für das Verständnis dieser Arbeit nur „Anschauliches“ vorauszusetzen, das sich aus den Friedmann-Lemaître-Gleichungen ergibt.

## ii. Mögliche Weltmodelle

Eine genauere Beschreibung möglicher Weltmodelle findet man in den gängigen Lehrbüchern über Kosmologie; hier erwähne ich nur einige Tatsachen, die zeigen, daß das vermeintliche „Wissen“ über das kosmologische Modell oft nicht von bleibender Gültigkeit ist. (Hier soll nur mein Eindruck geschildert werden; in Kapitel 2 werden alle Terme genau definiert.)

Einstein [Einstein 17] war der erste, der die Allgemeine Relativitätstheorie auf das Problem der Kosmologie anwendete. Zu seiner Überraschung, weil man damals das Universum für statisch hielt, fand er keine Lösungen, die statisch waren (außer für den nicht realistischen Fall verschwindender Dichte), und führte deshalb die kosmologische Konstante  $\Lambda$  ein, die eine der Schwerkraft entgegengerichtete Kraft darstellt und eine statische Lösung ermöglicht. Das statische, geschlossene Universum mit nichtverschwindender Dichte und (notwendigerweise) der  $\Lambda$ -Kraft wird als „Einstein'sches Universum“ bezeichnet. Dies war also das erste allgemein relativistische Weltmodell überhaupt. Obwohl durch Beobachtungen *ein-*

<sup>3</sup>Siehe, z.B. [McCrea & Milne 34], [Bondi, Kapitel IX], [Berry, Kapitel 7] oder [Harrison, Kapitel 14].

<sup>4</sup>Wenn man überhaupt etwas erwartet. Die Newton'sche Theorie ist nicht sehr klar in diesem Punkt, und die Vorstellungen, die man gebraucht, um die Hälfte des richtigen Wertes zu erhalten ( $v_{\text{Licht}} = c$  im Unendlichen, Beschleunigung des Lichtes im Gravitationsfeld) sind sicher nicht richtig, vor allem wenn man die konstante Lichtgeschwindigkeit voraussetzt und eine verschwindende Ruhemasse des Photons. Man wird an das Bohr'sche Atommodell oder die Rutherford'sche Streuformel erinnert, die „zufällig“ dieselben Ergebnisse (in ihren Anwendungsbereichen) liefern als eine exakte quantenmechanische Behandlung. Hier liefert die Newton'sche Theorie „zufällig“ die Hälfte des richtigen Wertes.



*deutig* widerlegt, bildet es immer noch einen interessanten Grenzfall, der für die Klassifizierung aller möglichen Modelle nützlich ist.

Als Einstein erfuhr, daß Beobachter die Expansion des Universums entdeckt hatten, ließ er die kosmologische Konstante fallen. Später vertrat er die Ansicht, daß  $\Lambda \equiv 0$  sein muß. Er war auch der Ansicht, daß das Mach'sche Prinzip (die Trägheit einer Masse ist durch die Massenverteilung im Universum *vollständig* bestimmt) nur ein endliches Universum zuläßt, was bedeutet (wegen Einschränkungen, die aus der Homogenität und Isotropie folgen), daß der 3-dimensionale Raum eine positive Krümmung hat ( $k = 1$ ) und so eine Hyperkugel darstellt [Einstein 31]. Dieses Modell mit  $\Lambda = 0$  und  $k = 1$  [MTW, Box 27.4] wurde lange bevorzugt, weil es zeitlich geschlossen ist<sup>5</sup> und keine kosmologische Konstante enthält.

Noch später machte Einstein zusammen mit de Sitter den Vorschlag [Einstein & de Sitter 32], daß man, bis Genaueres bekannt ist, der Einfachheit halber das Universum mit  $\Lambda = 0$  und  $k = 0$  als Modell unseres Universums nehmen sollte. Dieses Modell hat die Eigenschaft, daß viele Berechnungen erheblich einfacher sind und daß die Größen  $\Omega$  und  $q$  (in Kapitel 2 definiert) zeitlich konstant sind, was sonst nur bei Modellen ohne Materie sowie statischen Modellen der Fall ist [Stabell & Refsdal 66].

Friedmann [Friedmann 22, Friedmann 24] war der erste, der alle möglichen Modelle untersuchte, und Lemaître [Lemaître 27, Lemaître 31a, Lemaître 31b] der erste, der die relativistische Kosmologie in Zusammenhang mit (damaliger) aktueller Astrophysik diskutierte. Lemaître schlug ein Modell mit  $\Lambda > 0$  und  $k = +1$  vor, was aber nicht statisch war und ein Weltalter zuläßt, was erheblich länger als die Hubble-Zeit sein kann. Eddington schlug ein ähnliches Modell vor, was jedoch nicht als Urknall entsteht sondern ab einer endlichen Größe (entsprechend dem statischen Zustand des Einstein'schen statischen Modells) expandiert, damit der Anfang „not too aesthetically abrupt“ sei—dies zeigt, welche große Rolle subjektive Vorlieben selbst bei großen Astronomen spielen können.

Eine Zeit lang waren zeitlich geschlossene Urknall-Modelle beliebt, z.T. nur wegen subjektiver Vorlieben. Heute werden Modelle mit  $k = 0$  (zumindest im Rahmen der Beobachtungsgenauigkeit) von vielen erwartet, weil dies aus Theorien des inflationären Universums folgt. Viele erwarten, daß  $\Omega \geq 1$  sein soll, um Strukturbildung zu verstehen.

Ich werde nur die Weltmodelle nicht betrachten, die aus gesichertem Wissen heraus als nicht möglich gelten. Vor allem wenn die Lebensdauer des aktuellen kanonischen Modells sehr kurz ist, lohnt es sich, eine möglichst allgemeine Betrachtung zu machen.

## Zusammenfassung

- Aus der (an großen Skalen) beobachteten Isotropie des Universums und der vernünftigen Annahme, daß wir nicht an einem bevorzugten Ort sind, schließen wir, daß das Universum (auf großen Skalen) homogen ist, und damit auch von *jedem* Punkt aus betrachtet isotrop. Homogenität und universelle Isotropie erlauben uns, das Universum erheblich einfacher zu beschreiben.
- Die Robertson-Walker-Metrik ist die mathematische Schreibweise für diese einfache Beschreibung: die einzige mögliche zeitliche Änderung

<sup>5</sup>Die *zeitliche* Abgeschlossenheit folgt aus der *räumlichen* Abgeschlossenheit nur für  $\Lambda = 0$ .

im Universum ist ein gleichmäßiges Ausdehnen oder Schrumpfen.

- Die Allgemeine Relativitätstheorie ist die richtige Theorie, um ein Universum zu beschreiben, das von langreichweitigen Kräften beherrscht wird. Sie bestätigt die Beschreibung durch die Robertson-Walker-Metrik, beschreibt die Ausbreitung von Licht auf die richtige Art und Weise und erlaubt die Aufstellung von mehreren, durch lediglich 3 Parameter bestimmten Weltmodellen. Im Laufe der letzten Jahrzehnte wurden immer wieder andere Weltmodelle aus verschiedenen Gründen bevorzugt.

# Kapitel 2

## Gleichungen

*Things are as they are because they were as they were.*

Thomas Gold

### a. Friedmann-Lemaître-Gleichungen<sup>1</sup>

Ausgangspunkt für die Berechnung kosmologischer Modelle in dieser Arbeit sind die Friedmann-Lemaître-Gleichungen

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - Kc^2 \quad (2.1)$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.2)$$

wobei  $G$  die Gravitationskonstante,  $\rho$  die Materiedichte und  $K = \frac{k}{R^2}$  ist. (Die anderen Größen sind bereits in Kapitel 1 Abschnitt b Punkt ii definiert worden.)

Diese Gleichungen enthalten keinen Druckterm. Da nach der Relativitätstheorie Druck als Energieform eine Schwerkraft erzeugt, ist er für diese dynamischen Gleichungen wichtig;<sup>2</sup> es ist aber eine gute Näherung, den Druck zu vernachlässigen, da die entsprechend Dichte des Strahlungsdruckes ( $\rho_{\text{Strahlung}} = \frac{3p}{c^2}$ , wo  $p$  der Strahlungsdruck ist) nur etwa ein Tausendstel der Materiedichte beträgt [Berry, S. 143]<sup>3</sup> und der Gasdruck im Universum für kosmologische Zwecke vernachlässigt werden kann. Da  $\rho_{\text{Strahlung}} \sim R^{-4}$  und  $\rho_{\text{Materie}} \sim R^{-3}$ , spielt der Strahlungsdruck eine größere Rolle bei kleinem  $R$ , also in der Frühphase unseres (expandierenden) Universums. (Hat man heute ein Verhältnis von  $\frac{\rho_{\text{Materie}}}{\rho_{\text{Strahlung}}}$  von  $\approx 1000$ , dann waren beide Dichten gleich wichtig bei  $z \approx 1000$ . Da Gl. 2.1 und 2.2 selbst bei  $\frac{\rho_{\text{Materie}}}{\rho_{\text{Strahlung}}} = \frac{1}{24}$  ihre Gültigkeit noch besitzen [Feige 92, S. 141], [Matravers & Aziz 88], ist es für diese Arbeit, die ausschließlich Effekte bei  $z \leq 10$  betrachtet, sicher keine Fehlerquelle, wenn man Gl. 2.1 und 2.2 statt der genaueren Gleichungen [mit Drucktermen] benutzt.)

<sup>1</sup>Gute Herleitungen im Rahmen der Newton'schen Kosmologie findet man bei [Berry, Kapitel 7] und [Harrison, Kapitel 14]. [Berry] gibt auch eine „anschauliche allgemein relativistische Herleitung“ an.

<sup>2</sup>Ein zusätzlicher Druck im Universum, ob Gas- oder Strahlungsdruck oder eine andere Form, führt also dazu, daß ein expandierendes Universum *stärker* abgebremst wird.

<sup>3</sup>Da Berry die Materiedichte eher *unterschätzt*, ist diese Näherung auf jeden Fall angebracht.

## i. Andere Gleichungen

Wichtig für das Lösen der Friedmann-Lemaître-Gleichungen ist die Materieerhaltung

$$\rho(t) = \frac{\rho_0 R_0^3}{R^3(t)} \quad (2.3)$$

wobei  $\rho_0 \equiv \rho(t_0)$  und der Index 0 bedeutet (wie auch im Rest dieser Arbeit) den heutigen Wert. ( $\rho_0$  und  $R_0$  sind, wie unten erläutert wird, beobachtbare Größen.)

Die Größe  $\frac{\ddot{R}}{R}$  wird auch als Krümmung der *Raumzeit* bezeichnet, während  $k$  die Krümmung des *Raumes* angibt (die eigentliche Krümmung ist  $K := \frac{k}{R^2}$ ).<sup>4</sup>

## ii. Friedmann-Lemaître-Gleichungen: Lösungen<sup>5</sup>

Aus Gl. 2.1, 2.2 und 2.3 folgen die Gleichungen

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3R} + \frac{\Lambda R^2}{3} - kc^2} \quad (2.4)$$

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G \rho R_0^3}{3R^2} + \frac{\Lambda R}{3} \quad (2.5)$$

Diese zwei Gleichungen bestimmen die Dynamik des Universums. Da man 5 Größen hat ( $R$ ,  $\dot{R}$ ,  $\ddot{R}$ ,  $\rho$  und  $\Lambda$ ) und zwei Gleichungen, die sie untereinander verknüpfen (Gl. 2.1, Gl. 2.2), sind 3 Größen nötig, um ein Weltmodell vollständig zu charakterisieren.<sup>6</sup>

## b. Beobachtbare Größen

*Every statement in physics  
has to state relations between observable quantities.*

Ernst Mach

### i. Definitionen

Die Größen  $R$ ,  $\dot{R}$ ,  $\ddot{R}$ ,  $\Lambda$ ,  $k$  und, je nach dem, wie man die Dichte mißt, eventuell auch  $\rho$ , kann man nicht unmittelbar beobachten. Deshalb hat man in der Beobachteten Kosmologie normalerweise mit Größen zu tun, die

<sup>4</sup>Siehe [Berry, Kapitel 4.3 und 7.1] für die entsprechenden Definitionen und Beweise.

<sup>5</sup>Siehe auch, z.B., [Bondi, Kapitel IX].

<sup>6</sup>Da  $\Lambda$  eine Konstante ist, braucht man einen zusätzlichen Parameter, falls man nicht nur das Weltmodell, sondern auch den Zeitpunkt (z.B. den heutigen) bestimmen will. Benutzt man beobachtbare Größen (Abschnitt b), dann tritt dieses Problem nicht auf, denn diese sind alle i.a. zeitabhängig. (Sowohl hier als auch in Abschnitt b tritt der Parameter  $k$  auf; er ist aber kein freier Parameter, denn

$$k = \frac{R^2}{c^2} \left( 4\pi G \rho - \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \left( \frac{-\ddot{R}R}{R^2} + 1 \right) \right)$$

$k$  läßt sich natürlich auch durch die entsprechenden beobachtbaren Größen ausdrücken (siehe Gl. 2.8.)

man etwas unmittelbarer beobachten kann:

$$\begin{aligned} H &:= \frac{\dot{R}}{R} \\ q &:= \frac{-\ddot{R}R}{R^2} \equiv \frac{\ddot{R}}{RH^2} \\ \lambda &:= \frac{\Lambda}{3H^2} \\ \Omega &:= \frac{\rho}{\rho_{\text{krit}}} \equiv \frac{8\pi G\rho}{3H^2} \end{aligned}$$

Diese Größen wurden aus folgenden Gründen eingeführt (bis auf weiteres sind die erwähnten Größen stets Größen, die *jetzt* beobachtet werden. Die entsprechenden Indizes (z.B.  $H_0$  statt  $H$ ) habe ich der Übersichtlichkeit halber hier weggelassen):

### $H$

Für *kleine Rotverschiebungen* ist die „Fluchtgeschwindigkeit“, die man aus der Dopplerformel<sup>7</sup> erhält ( $\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} =: z$ , wo  $\lambda$  die Wellenlänge ist und  $z$  die Rotverschiebung),  $\sim D_p$ , und die Leuchtkraftentfernung  $\sim D_p$ , so daß der Quotient aus diesen zwei *beobachtbaren Größen*  $\sim \frac{\dot{R}}{R}$  ist. Diese Größe,  $\frac{\dot{R}}{R}$ , ist nichts anderes als der Hubble-Parameter  $H$ , die den Zusammenhang (*bei kleinen Rotverschiebungen!*) zwischen Entfernung und Fluchtgeschwindigkeit angibt. (Siehe Kapitel 3 für eine Diskussion der hier erwähnten (und anderen) Entfernungen.) Man kann also den *absoluten* Wert von  $\dot{R}$  nicht messen, wohl aber den *relativen* ( $\frac{\dot{R}}{R}$ ).

### $q$

Die Größe  $q$  kann man aus den selben Beobachtungen ermitteln, die man zur Bestimmung von  $H$  benutzt (siehe, z.B., [Berry, Kapitel 6] oder [MTW, Kapitel 29.4 und Box 29.4] sowie Kapitel 4). Die Größe  $q$  ist, wie  $\lambda$ ,  $\Omega$ , und  $k$  dimensionslos. Das negative Vorzeichen in der Definition kommt daher, daß manche *a priori* eine Verzögerung statt einer Beschleunigung erwarten.

### $\lambda$

$\Lambda$ , in Gegensatz zu  $R$ ,  $\dot{R}$  und  $\ddot{R}$  ( $k$  ist bereits normiert, konstant und dimensionslos), ist eine Konstante.<sup>8</sup> Entscheidend für das Weltmodell ist jedoch das Vorzeichen, was auch bei  $\lambda$  das gleiche ist, oder aber (bei  $k = 1$ ) das Verhältnis zu  $\Lambda_{\text{krit}}$ . Da  $\Lambda_{\text{krit}}$  aber von beobachtbaren Größen abhängt, ist es nützlich, verschiedene Weltmodelle in Bezug auf  $\lambda$  zu diskutieren, wenn man versucht, das Weltmodell aus heutigen Beobachtungen zu ermitteln. Die Größe  $\lambda$  ist auch im allgemeinen keine Konstante, so daß man durch 3 beobachtbare Größen das Weltmodell einschließlich Zeitpunkt vollständig charakterisieren kann. Außerdem bietet die Tatsache, daß nur  $H$  nicht dimensionslos ist, die Möglichkeit, alle dimensionsbehaftete Größen mit  $H$  zu normieren (was auch deshalb nützlich ist, weil in den meisten Fällen  $H$  genauer als die anderen Parameter bekannt ist).

<sup>7</sup>Die kosmologische Rotverschiebung ist keine Dopplerverschiebung! Siehe hierzu [Harrison, Kapitel 11] und [Harrison 93].

<sup>8</sup>In allen Modellen, die in dieser Arbeit betrachtet werden. Für kosmologische Modelle mit einem zeitabhängigen  $\Lambda$ -Term siehe, z.B., [Ratra & Quillen 92].

$\Omega$

Für das Weltmodell mit  $\Lambda = 0$  und  $k = 0$  (Einstein-de Sitter-Modell) erhält man aus Gl. 2.1 und 2.2 den Ausdruck

$$\rho = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Da

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \dot{R} = 0$$

kann man  $\rho_{\text{krit}}$  definieren

$$\rho_{\text{krit}} = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

so daß (für  $\Lambda = 0!!$ ) für  $\rho > \rho_{\text{krit}}$ ,  $\dot{R}$  eine Nullstelle bei  $R = R_{\text{max}}$  hat ( $k = +1$ ; das Universum kollabiert also) und für  $\rho < \rho_{\text{krit}}$ ,  $\lim_{R \rightarrow \infty} \dot{R} > 0$  ( $k = -1$ ; das Universum dehnt sich immer weiter aus). Deshalb die Bezeichnung *kritische Dichte*. Um diesen Sachverhalt in dimensionslosen Größen auszudrücken, führt man  $\Omega := \frac{\rho}{\rho_{\text{krit}}} \equiv \frac{8\pi G \rho}{3H^2}$  ein. (Etwas irreführend ist, daß man auch von  $\Omega$  bei Modellen mit  $\Lambda \neq 0$  spricht, wo die *kritische* Dichte gar keine Bedeutung hat.<sup>9</sup>) Es ist auch sinnvoll, eine zu  $H^{-2}$  proportionale Dichte zu definieren, denn die Dichte, die man mit den *meisten* Methoden mißt, ist proportional zu  $H^{-2}$ : Wenn man Massen aus dem Virialsatz bestimmt, dann ist

$$M \approx \frac{v^2 x}{G} \sim x$$

wo  $x$  die charakteristische Länge ist und  $v$  die Geschwindigkeit. Weil

$$\rho = \frac{M}{V} \sim \frac{M}{x^3} \sim \frac{1}{x^2}$$

ist, und (da man von allen kosmologischen Größen Rotverschiebungen am genauesten messen kann) Längen meist in Einheiten von  $\frac{c}{H}$  gemessen werden, erhält man

$$\rho \sim H^2$$

so, daß schließlich

$$\frac{\rho}{H^2}$$

statt  $\rho$  die eigentliche Beobachtungsgröße ist. Da  $\Omega = \frac{8\pi G \rho}{3H^2}$  ist, sich also nur um einen konstanten Faktor von  $\frac{\rho}{H^2}$  unterscheidet, kann man sagen, daß man  $\Omega$  statt  $\rho$  beobachtet.

<sup>9</sup>Früher war die Größe  $\sigma := \frac{4\pi G \rho}{3H^2}$  üblich (siehe, z.B., [Stabell & Refsdal 66]), die einfach als dimensionsloser Parameter eingeführt wurde. Sicher,  $\sigma$  und  $\Omega$  unterscheiden sich lediglich um den Faktor 2, aber die Assoziation mit der kritischen Dichte kommt bei  $\sigma$  gar nicht erst auf, was von Vorteil ist, wenn man auch Modellen mit  $\Lambda \neq 0$  betrachtet. In dieser Arbeit benutze ich trotzdem  $\Omega$ , weil es den Vergleich mit anderen Arbeiten auf diesem Gebiet (siehe Anhang Kapitel 13) erleichtert und (wichtiger) weil  $\sigma$  bereits für  $\frac{v}{R}$  in der Robertson-Walker-Metrik benutzt wird (Kapitel 1 Abschnitt ii), als Bezeichnung für eine Geschwindigkeitsdispersion, als allgemeine Bezeichnung für einen Wirkungsquerschnitt und außerdem in der Gravitationslinsenphysik als Bezeichnung für die Flächenmassendichte.

## ii. Gleichungen

Für den Rest der Arbeit sind die Größen mit Index „0“ (z.B.  $H_0$ ) die heutigen Werte der allgemeinen Größen (ohne Index) (die immer gemeint sind, falls kein Index vorhanden sind).

Aus Gl. 2.4 folgt

$$kc^2 = R^2 H^2 (4\pi G \rho - H^2(q + 1)) \quad (2.6)$$

oder, unter Berücksichtigung von Punkt i

$$kc^2 = R^2 H^2 (\Omega + \lambda - 1) \quad (2.7)$$

daraus folgt

$$k = \text{sign}(\Omega + \lambda - 1) \quad (2.8)$$

Man kann auch den Krümmungsradius  $R$  berechnen:

$$R = \frac{c}{H} \frac{1}{\sqrt{\Omega + \lambda - 1}} \quad (2.9)$$

Für  $k = 0$  ist  $R$  erwartungsgemäß unendlich; in diesem Fall *definiert* man

$$R := \frac{c}{H} \quad (2.10)$$

das in diesem Fall nur als Maßfaktor dient. So läßt sich die wichtige Konstante  $R_0$  berechnen:

$$R_0 := \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_0 + \lambda_0 - 1}} \quad (2.11)$$

für  $k \neq 0$ . (Für  $k = 0$  ist natürlich  $R_0 = \frac{c}{H_0}$ .)

Wenn man die oben definierten Größen in Gl. 2.4 bzw. 2.5 einsetzt, erhält man

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3R} - R_0^2 H_0^2 (\Omega_0 + \lambda_0 - 1) + \lambda_0 H_0^2 R^2} \quad (2.12)$$

bzw.

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G \rho_0 R_0^3}{3R^2} + \lambda_0 H_0^2 R \quad (2.13)$$

Führt man ein  $x := \frac{R}{R_0}$ , so bekommt man

$$\dot{x} = \sqrt{H_0^2 \left( \frac{\Omega_0}{x} - \Omega_0 + 1 - \lambda_0 (1 - x^2) \right)} \quad (2.14)$$

bzw.

$$\ddot{x} = -\frac{1}{2} H_0^2 \left( \frac{\Omega_0}{x^2} - 2\lambda_0 x \right) \quad (2.15)$$

Mit  $z := \frac{R_0}{R} - 1$  erhält man die Gleichung

$$\dot{z} = \sqrt{H_0^2 \left( (\Omega_0 z + 1) (1 + z)^2 - \lambda_0 (z^2 + 2z) \right) (1 + z)^2} \quad (2.16)$$

die die Grundlage für die Berechnung der meisten beobachtbaren kosmologischen Größen als Funktion von  $z$  darstellt.<sup>10</sup>

<sup>10</sup>Eine etwas ausführlichere Herleitung dieser Gleichungen findet man in [Feige 92].

Die Lichtlaufzeit zwischen  $z_1$  und  $z_2$  ist gegeben durch

$$t_{12} = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dt}{dz} dz \quad (2.17)$$

wobei  $z_i := z(t_i)$ . Mit  $\frac{dt}{dz}$  aus Gl. 2.16, erhält man

$$t_{12} = \frac{1}{H_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{P(z)}} \frac{1}{1+z} dz \quad (2.18)$$

wo  $P(z) = (z+1)^2(\Omega_0 z + 1 - \lambda_0) + \lambda_0$ . Dieser Ausdruck berechnet also die Lichtlaufzeit als Funktion der Rotverschiebungen und des durch beobachtbare Größen beschriebenen Weltmodells. Der Winkel  $\chi$  (Kapitel 3 Abschnitt b Punkt) ist gegeben durch

$$\chi_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{c}{R} dt = \int_{z_1}^{z_2} \frac{c}{R} \frac{dt}{dz} dz = \frac{1}{H_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{c(1+z)}{R_0} \frac{1}{\sqrt{P(z)}} \frac{1}{1+z} dz \quad (2.19)$$

bzw.

$$\chi_{12} = \frac{c}{H_0 R_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{P(z)}} dz \quad (2.20)$$

Abgesehen von den konstanten Faktoren, die für die richtige Dimensionierung sorgen, ist der einzige Unterschied zwischen den Ausdrücken für  $t(z)$  und  $\chi(z)$  der Faktor  $1+z$ , der dadurch zustandekommt, weil  $\chi$  von dem *heutigen* Krümmungsradius  $R_0$  abhängt;  $t$  hängt von der durchlaufenen Strecke ab, der in dem entsprechenden  $z$ -Intervall  $\sim R(z)$  ist.

Ein wichtiges Ergebnis dieser Rechnungen ist der allgemeiner Ausdruck für das Alter des Universums

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{P(z)}} \frac{1}{1+z} dz \quad (2.21)$$

Qualitativ sieht man sofort, daß  $P(z)$  steigt mit steigendem  $\lambda$ .

## Zusammenfassung

- Die Friedmann-Lemaître-Gleichungen folgen aus der allgemeinen Relativitätstheorie mit den Einschränkungen des kosmologischen Prinzips und beschreiben die Dynamik des Universums. Für unsere Zwecke ist es nicht nötig, Druckterme zu berücksichtigen. Die Materieerhaltung macht es möglich, die Funktionen  $\frac{\dot{R}}{R}$  und  $\frac{\ddot{R}}{R}$  in Abhängigkeit von 2 unabhängigen Parametern auszudrücken, nämlich  $\Lambda$  und  $\rho_0$ . (Zur vollständigen Festlegung des Weltmodells braucht man eine dritte Größe, etwa den Wert von  $\frac{\dot{R}}{R}$  heute.)
- Es ist wichtig, die theoretisch hergeleiteten Friedmann-Lemaître-Gleichungen auf beobachtbare Größen zurückzuführen, damit es möglich wird, aus Beobachtungen das Weltmodell zu bestimmen.



# Kapitel 3

## Entfernungen

*Zeit, Raum, Ort und Bewegung definiere ich nicht,  
weil alle damit vertraut sind.*

Isaac Newton

Entfernungen spielen eine sehr wichtige Rolle in der Kosmologie. Weil das Universum nicht euklidisch ( $k = 0$ ) sein muß, und weil das Universum im allgemeinen sich mit der Zeit ausdehnt oder in sich zusammenfällt, hängt der Wert, den man für eine Entfernung erhält, von der Definition ab: Entfernungen, die *per definitionem* im statischen euklidischen Fall gleich sind, sind im allgemeinen in der Kosmologie verschieden. Weil nicht alle Entfernungen meßbar sind (manchmal ist sogar nur die Rotverschiebung bekannt), sind Zusammenhänge zwischen verschiedenen definierten Entfernungen desselben Objektes (und der Zusammenhang mit der Rotverschiebung) von äußerster Bedeutung.

Zunächst werden über *Meßvorschriften* verschiedene Entfernungen für den statischen euklidischen Fall definiert, und dann werden Verallgemeinerungen für den allgemeinen kosmologischen Fall betrachtet. In diesem Kapitel sind alle Winkel als klein zu betrachten ( $\beta \approx \sin \beta \approx \tan \beta$ ).

### a. Entfernungen im statischen euklidischen Raum

*Absolute space, in its own nature,  
without relation to anything external,  
remains always similar and immovable.*

Isaac Newton

Im statischen euklidischen Raum sind die folgenden Entfernungen natürlich alle gleich; wichtig ist, daß man versteht, wie eine *Entfernung* aus einer *Meßvorschrift* folgt, denn im allgemeinen kosmologischen Fall ist die Meßvorschrift wichtig, weil sie von beobachtbaren Größen abhängt.

#### i. Metrische Entfernung

Die einfachste Vorstellung einer Entfernung ist wahrscheinlich die der metrischen Entfernung (*proper distance*), die einer physikalischen Messung mit einem Längenmaß entspricht: man zählt einfach die Längenintervalle oder,

in allgemeiner Form

$$D_p = \int_0^D dx \quad (3.1)$$

wo  $dx$  das Längenintervall angibt. (Der Betrachter ist bei 0 und das Objekt befindet sich in der Entfernung  $D$ ; hier ist  $D$  als Koordinate in einem metrischen Raum zu verstehen.)

## ii. Koordinatenentfernung

Die Koordinatenentfernung  $r$  (*coordinate distance*) berechnet sich aus

$$r = R\sigma \quad (3.2)$$

wobei  $\sigma := \frac{r}{R}$ . Die Größe  $r$  ist eine *dimensionslose Entfernung* und  $R$  einen *Skalenfaktor*. Dies erscheint trivial; der Sinn einer solchen Definition wird in Abschnitt b klar.

## iii. Winkelgrößenentfernung

Weiß man die wahre Ausdehnung eines Objektes, und mißt man die scheinbare Ausdehnung, dann kann man die Winkelgrößenentfernung (*angular size distance*) berechnen: Aus

$$\beta := \frac{x}{D} \quad (3.3)$$

wobei  $x$  die Ausdehnung des Objektes ist und  $\beta$  der gemessener Winkel, der dem scheinbaren Durchmesser entspricht, folgt

$$D = \frac{x}{\beta} \quad (3.4)$$

## iv. Helligkeitsentfernung

Weiß man die wahre Helligkeit eines Objektes, und mißt man die scheinbare Helligkeit, dann kann man die Helligkeitsentfernung (*luminosity distance*) berechnen: Aus

$$l = \frac{L}{4\pi D_L^2} \quad (3.5)$$

wo  $l$  die scheinbare und  $L$  die absolute Leuchtkraft ist, folgt

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}} \quad (3.6)$$

## v. Lichtlaufzeitentfernung

Weil fast alle Information von Objekten in kosmologischer Entfernung uns durch Licht (oder andere elektromagnetische Strahlung) erreicht, und weil die Lichtgeschwindigkeit eine wichtige Rolle in der Relativitätstheorie spielt, ist es manchmal sinnvoll, eine Lichtlaufzeitentfernung (*light travel time distance*) zu definieren:

$$D_\gamma := ct_\gamma \quad (3.7)$$

wobei  $t_\gamma = t_0 - t_e$  die Zeit zwischen Aussenden und Empfangen des Lichtes ist.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Die Indizes „0“ und „e“ beziehen sich auf den jetzigen Zeitpunkt bzw. auf den Zeitpunkt der Emission, und werden in diesem Sinne im Rest dieser Arbeit verwendet.

## b. Verallgemeinerte Entfernungen

In diesem Abschnitt beziehen sich alle Bemerkungen auf den allgemeinen kosmologischen Fall. Zusätzlich wird angenommen, daß alle Gegenstände sich mit dem Substratum bewegen ( $\dot{\sigma} = \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ ).

### i. Metrische Entfernung

Die metrische Entfernung ist nicht beobachtbar, denn die Vorstellung, auf die sie beruht (Messung mit einem starren Maßstab) sich nicht realisieren läßt. Sie ist jedoch sehr wichtig, denn die Allgemeine Relativitätstheorie, die als Grundlage der Kosmologie dient, basiert auf dieser Definition von Entfernung; alle anderen Entfernungen sind prinzipiell (nicht aber praktisch) zweitrangig. Um „näher an der Beobachtung zu sein“ wäre es vielleicht sinnvoll, eine Theorie zu erstellen, die eine andere Definition von Entfernung als Ausgangspunkt verwendet; dies ist aber noch nicht gelungen. (Siehe [Bondi, S. 68–70] für eine Diskussion dieses wichtigen Punktes.) Mit Hilfe der Robertson-Walker-Metrik läßt sich die metrische Entfernung<sup>2</sup> wie folgt definieren:

$$D_p = R(t) \int_0^x d\chi \quad (3.8)$$

bzw.

$$D_p = R(t) \times \begin{cases} \operatorname{arcsinh} \sigma & \text{für } k = -1 \\ \sigma & \text{für } k = 0 \\ \operatorname{arcsin} \sigma & \text{für } k = +1 \end{cases} \quad (3.9)$$

wobei die Größen dieselbe Bedeutung wie in Kapitel 1 Abschnitt ii haben. Die Angabe einer metrischen Entfernung zwischen zwei Gegenständen benötigt natürlich auch die Angabe des Zeitpunktes.

### ii. Koordinatenentfernung

Die Koordinatenentfernung wurde oben als  $r = R\sigma$  definiert; diese Definition wird allgemein gültig, wenn man  $\sigma$  mit der Koordinate  $\sigma$  und  $R$  mit dem Skalenfaktor der Robertson-Walker-Metrik identifiziert. Die metrische Entfernung  $D_p$  ist nur für  $k = 0$  mit  $r$  identisch. Die metrische Entfernung (zwischen Mittelpunkt und Oberfläche) entspricht anschaulich dem Radius einer Kugel. Ist  $r$  eine Entfernung, die über einen Winkel definiert wird, dann ist  $r \neq D_p$  für  $k \neq 0$ , denn die Winkel verhalten sich auf nichteuklidische Weise: die Summe der Winkel eines Dreiecks ist dann nicht  $\pi$ , sondern  $> \pi$  für  $k = +1$  bzw.  $< \pi$  für  $k = -1$ , wobei der Grad der Abweichung von der Größe des Dreiecks (bezogen auf den Krümmungsradius) abhängt. Weil man in der Praxis meist Größen mißt, die mit Winkeln bzw. mit Kugeloberflächen zu tun haben, *definiert* man  $r$  als „Radius“ der Kugel. Es ist ein sehr wichtiger Punkt, daß Entfernungen, die über einen Winkel definiert sind, zu  $r$  und nicht zu  $D_p$  proportional sind. Die Größe  $r$  ist also deshalb wichtig, weil die meisten beobachtbaren Entfernungen sich nur um Faktoren wie  $(1+z)^n$  bzw.  $R_0$  von  $r$  unterscheiden; ist man also in der Lage,  $r$  für ein bestimmtes kosmologisches Modell sozusagen als „Grundentfernung“ zu berechnen, dann sind die meisten übrigen Entfernungen durch leichte Umformungen zu berechnen.

<sup>2</sup> „As will be seen later this concept leads in cosmology to the mathematically well-defined but physically somewhat nebulous picture of the ‘absolute distance’ between ‘simultaneous events’.“ [Bondi, S. 69]

### iii. Winkelgrößenentfernung

Bei der Winkelgrößenentfernung hat man es mit einer Entfernung zu tun, die über einen Winkel definiert ist, demzufolge muß man  $D$  in der Definition in Abschnitt a mit  $R_e\sigma$  identifizieren:

$$D := R_e\sigma \quad (3.10)$$

bzw., unter der Berücksichtigung der Definition von  $z$ ,

$$D := \frac{R_0\sigma}{1+z} \quad (3.11)$$

Man muß  $R_e$  statt  $R_0$  verwenden, denn der Winkel, um den es geht, wird durch die Ausdehnung des Gegenstandes und  $r_e$  bestimmt. Winkel bleiben natürlich bei einem gleichmäßigen Ausdehnen oder Schrumpfen des Universums erhalten. Die Winkelgrößenentfernung spielt eine wichtige Rolle in der Gravitationslinsentheorie (Teil B).

### iv. Helligkeitsentfernung

Die Helligkeitsentfernung muß zu  $R_0$  statt zu  $R_e$  proportional sein, denn der Raumwinkel, um den es hier geht, wird durch das Verhältnis von  $L$  zu  $l$  bestimmt, und entscheidend für  $l$  ist die Kugeloberfläche, die durch  $l = \text{konstant}$  *jetzt* definiert wird. Es kommt aber noch etwas dazu: tatsächlich ist die Helligkeitsentfernung gegeben durch

$$D_L = R_0\sigma(1+z) \quad (3.12)$$

bzw.

$$D_L = \frac{R_0^2\sigma}{R_e} \quad (3.13)$$

Der Faktor  $1+z$  in der Entfernung entsteht, weil der Fluß im Vergleich zum statischen Fall um den Faktor  $(1+z)^2$  abgeschwächt wird, und zwar aus folgenden Gründen<sup>3</sup>:

- (1) Die Strahlung kommt beim Beobachter rotverschoben an, und, da  $W = \frac{hc}{\lambda}$  ( $W$  ist die Energie eines Lichtquants,  $h$  das Planck'sche Wirkungsquantum und  $\lambda$  die Wellenlänge) und  $1+z \equiv \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}$ , eine Rotverschiebung von  $z$  bewirkt eine Abschwächung des (*bolometrischen*)<sup>4</sup> Flusses um den Faktor  $(1+z)$ .
- (2) Betrachtet man die Rotverschiebung als eine Verringerung der Zahl der Wellenberge, die pro Zeitintervall den Beobachter erreichen, so ist klar, daß diese Verringerung auch *für die Lichtquanten selbst* gelten muß.

Man erhält also insgesamt eine Verringerung des Flusses um den Faktor  $(1+z)^2$ , was einem Faktor von  $(1+z)$  in der Entfernung entspricht. Da die meiste Information über Entfernungen von kosmologischen Objekten mittelbar oder unmittelbar aus ihren Helligkeiten stammt, spielt die Helligkeitsentfernung eine besondere Rolle in der Kosmologie.

<sup>3</sup>Der Anschaulichkeit halber wird hier für  $z > 0$  argumentiert; das Ergebnis gilt aber entsprechend für Blauverschiebungen mit  $z < 0$  und Verstärkung des Flusses.

<sup>4</sup>Betrachtet man den Fluß *in einem bestimmten Wellenlängenbereich*, dann hat man einen *zusätzlichen* Faktor  $(1+z)$  wegen der Dehnung des Wellenlängenbereiches. Dies, zusammen mit der Tatsache, daß das Spektrum der Quelle nicht in allen Wellenlängenbereichen gleich hell ist, bildet die sogenannte *K-Korrektur*.

## v. Lichtlaufzeitentfernung

Die Lichtlaufzeitentfernung  $ct$  ist anschaulich klar; die Zeit  $t$  ist gegeben durch

$$t = \int_{R_e}^{R_0} \frac{dR}{A(R)} \quad (3.14)$$

wobei  $A(R)$  die rechte Seite von Gl. 2.4 ist. Die Lichtlaufzeitentfernung ist besonders wichtig in der Behandlung von kosmologischen Horizonten [Harrison, Kapitel 19]

## c. Zusammenhänge zwischen verschiedenen Entfernungen

*The principle of strategy is, having one thing,  
to know a thousand things.*

Nusashi

### i. Begründung (Beobachtbarkeit)

Wie am Anfang dieses Kapitels bereits bemerkt, sind Zusammenhänge zwischen verschiedenen Entfernungen besonders wichtig, weil es sehr selten vorkommt, daß man mehrere Entfernungen beim selben Objekt beobachten kann. Manchmal hat man nur die Rotverschiebungen, und deshalb ist es besonders wichtig, die Abhängigkeit der verschiedenen Entfernungen von der Rotverschiebung zu kennen. Besonders beim Vergleich zwischen Theorie und Beobachtung in der Kosmologie sind die Abhängigkeiten beobachtbarer Größen von der Rotverschiebung wichtig, denn  $z = \frac{R_0}{R_e} - 1$  und enthält so Information über die zeitliche Entwicklung des Universums.

### ii. Gleichungen

Wie in Abschnitt ii schon bemerkt, ist die Größe  $r$  besonders wichtig, denn, bis auf die Lichtlaufzeitentfernung, unterscheiden sich alle anderen Entfernungen und  $r$  lediglich um leicht zu berechnende Faktoren voneinander. Die einzige zusätzliche Schwierigkeit besteht in der Mehrdeutigkeit: zu einem Wert von  $r$  gibt es für  $k > 0$  mehrere Werte einiger Entfernungen, manchmal sogar unendlich viele.

Die Gleichungen Gl. 2.11, 2.18 und 2.20 ermöglichen die Berechnungen der Lichtlaufzeitentfernung ( $ct$ ) und der metrischen Entfernung  $D_p$  ( $\equiv R_0\chi$ ) als Funktion der Rotverschiebungen  $z_1$  und  $z_2$  und des kosmologischen Modells (gegeben durch  $H_0$ ,  $\Omega_0$  und  $\lambda_0$ ). Aus  $\chi$  ergibt sich  $r$ :

$$r = R \times \begin{cases} \sinh \chi & \text{für } k = -1 \\ \chi & \text{für } k = 0 \\ \sin \chi & \text{für } k = +1 \end{cases} \quad (3.15)$$

Bei der Winkelgrößenentfernung, wie oben bemerkt, spielt die Entfernung zur Zeit des Aussendens des Lichtes die entscheidende Rolle, denn Winkel bleiben bei einer gleichmäßigen Ausdehnung des Universums erhalten. Es ist also

$$D_{xy} = R_y \sigma_{xy} = \frac{R_0 \sigma_{xy}}{1+z} \quad (3.16)$$

Betrachtet man die umgekehrte Entfernung, wie manchmal in der Gravitationslinsentheorie nötig, so ist

$$D_{yx} = R_0 \sigma_{xy} = D_{xy}(1+z) \quad (3.17)$$

Der heutige Abstand ist entscheidend bei der Helligkeitsentfernung, was einen Faktor  $1+z$  gegenüber  $D_{xy}$  ausmacht; zusätzlich hat man den Effekt, daß der *Fluß* um den Faktor  $(1+z)^2$  abgeschwächt wird, wie oben beschrieben wurde. Dies macht einen zweiten Faktor  $1+z$  in der Entfernung aus, also

$$D_L = R_0 \sigma_{xy}(1+z) \quad (3.18)$$

Daraus folgt die Beziehung

$$D_L = D_{xy}(1+z)^2 \quad (3.19)$$

Dies bedeutet, daß die Flächenhelligkeit kosmologisch entfernter Objekte  $\sim (1+z)^{-4}$  ist.

## d. Entfernungen im inhomogenen Universum

In Abschnitt b wurde noch angenommen, entsprechend dem kosmologischen Prinzip, daß die Materie im Universum gleichmäßig verteilt ist. Sicher, wenn dies streng genommen der Fall wäre, dann wäre es unmöglich, überhaupt etwas zu beobachten; die Entfernungsdefinitionen setzen aber eigentlich nur voraus, daß Beobachter und beobachteter Gegenstand die lokale Materieverteilung nicht meßbar beeinflussen. Für die Beobachtende Kosmologie ist aber diese Einschränkung zu stark, denn (je nach Weltmodell) es ist durchaus möglich, daß die beobachteten Gegenstände (Galaxien, Quasare usw.) fast alle Materie im Universum beinhalten.

Wenn man annimmt, daß, obwohl es zwar lokale Verdichtungen von Materie gibt, das Universum im Großen doch dem kosmologischen Prinzip folgt, dann läßt sich die Lichtausbreitung in erster Näherung wie folgt beschreiben.

Das Universum hat eine mittlere Dichte  $\rho_0$ , die sich aus zwei Anteilen zusammensetzt

- (1) gleichmäßig<sup>5</sup> verteilte Materie, die den Bruchteil  $\eta$  der Gesamtmaterie des Universums darstellt
- (2) Materie, die in kompakten Objekten verteilt ist, die den Bruchteil  $1-\eta$  der Gesamtmaterie darstellt

Innerhalb des Lichtkegels, aus dessen Öffnungswinkel man eine Entfernung ableitet, befinden sich keine kompakten Objekte;<sup>6</sup> die mittlere Dichte ist hier also  $\eta\rho_0$ . Außerhalb des Lichtkegels ist die mittlere Dichte  $\rho_0$ . (Es wird natürlich vorausgesetzt, daß das Volumen des Lichtkegels vernachlässigbar ist gegenüber dem Volumen der entsprechenden Kugel.) Die kompakten Objekte sollen sich weit genug von dem Lichtkegel entfernt befinden, so daß man die gesamte Materie durch eine verschmierte Massenverteilung der mittleren Dichte  $\rho_0$  beschreiben kann—Effekte einzelner Objekte sind

<sup>5</sup> verglichen mit den Maßstäben, die für die Lichtausbreitung eine Rolle spielen

<sup>6</sup>Man beachte die Definition von „kompakt“ in diesem Zusammenhang; siehe [Weinberg 76].

unbeobachtbar. Falls sich ein kompaktes Objekt doch am Rande bzw. innerhalb des Lichtkegels befindet, so wird es explizit durch den Gravitationslinseneffekt berücksichtigt (siehe Teil B).

Das Problem entspricht also dem Gravitationslinseneffekt einer Scheibe konstanter Dichte (Kapitel 6 Abschnitt iii) in der Ebene (Kleinwinkelnäherung!), die durch die Phase der Lichtwelle definiert ist, jedoch muß man hier die Dichte der Scheibe als negativ ansetzen, denn interessant ist das Verhältnis der Dichten inner- und außerhalb des Lichtkegels. Anschaulich ist sofort klar, daß eine *kleinere* lokale Dichte zu einem *Divergieren* der Lichtstrahlen (verglichen mit dem homogenen Fall) und dadurch zu einer *Vergrößerung* der durch den Öffnungswinkel des Kegels definierten Entfernung führt. [Kayser 85] gibt eine gute Beschreibung des Sachverhaltes an, und leitet eine Differentialgleichung für die Winkelgrößenentfernung  $D$  in Abhängigkeit von den Rotverschiebungen der Quelle ( $z_y$ ) und einer durch die Phase definierte Position ( $z_x$ ) (die im allgemeinen Fall natürlich nicht bei  $z = 0$  liegen muß). Die Differentialgleichung lautet

$$D'' + \left( \frac{2}{v} + \frac{g'(v)}{g(v)} \right) D' + \frac{3\Omega_0\eta}{2} \frac{v}{g^2(v)} D = 0 \quad (3.20)$$

wobei  $g(v) = \sqrt{\Omega_0 v^3 + (\Omega_0 + \lambda_0 - 1)v^2 + \lambda_0}$ ,  $v = 1 + z$  und die Entfernung in Einheiten von  $\frac{c}{H_0}$  gemessen wird. Da diese Gleichung nicht analytisch gelöst werden kann, ist die quantitative Betrachtung nichthomogener Weltmodelle schwieriger als die der entsprechenden homogenen Modelle. (Da ich sehr viel Gebrauch hiervon machen mußte, programmierte ich ein schnelles Lösungsverfahren basierend auf der Bulirsch-Stoer-Methode, jedoch mit Extrapolation mittels Polynome statt der üblichen rationalen Funktionen. Hierzu wurden u.a. Unterprogramme von [PFTF] benutzt. Die Entwicklung und das Testen des Programms hat mehrere Wochen Zeit in Anspruch genommen, war aber eine notwendige Voraussetzung für die Durchführung dieser Arbeit und kann natürlich für andere Arbeiten in Zusammenhang mit kosmologischen Entfernungen benutzt werden.)

Entfernungen, die durch die Ausbreitung von Licht gemessen werden, also die Winkelgrößenentfernung  $D$  und die Helligkeitsentfernung  $D_L$ , müssen mit Hilfe von Gl. 3.20 berechnet werden.<sup>7</sup> Entfernungen hingegen, die sich auf die globale Dynamik des Universums beziehen, also die metrische Entfernung  $D_P$ , die Koordinatenentfernung  $r$  und die Lichtlaufzeitentfernung, sind unabhängig von  $\eta$ , also im homogenen und inhomogenen Universum gleich.

## Zusammenfassung

- Im statischen euklidischen Raum ist es möglich, über Meßvorschriften verschiedene Entfernungen zu definieren.
- Im allgemeinen kosmologischen Fall, wo der Raum weder statisch noch euklidisch sein muß, hängt die Entfernung eines Objektes davon ab, wie man sie mißt.
- Da meistens nur eine Entfernung beobachtbar ist, oder gar nur die Rotverschiebung, sind die Zusammenhänge verschiedener Entfernungen miteinander und mit der Rotverschiebung sehr wichtig.

<sup>7</sup>Die in Abschnitt c hergeleiteten Zusammenhänge gelten entsprechend. (Siehe [SEF, S. 141].)

- Für realistische Weltmodelle muß man lokale Inhomogenitäten berücksichtigen, obwohl das Universum als Ganzes noch durch das kosmologische Prinzip beschreibbar ist.



## Kapitel 4

# Klassische Beobachtende Kosmologie

In diesem Kapitel sollen nur *kurz* die klassischen Methoden zur Bestimmung kosmologischer Größen vorgestellt werden, mit besonderem Blick auf die Genauigkeit der Methoden.

### a. $H_0$

Historisch gesehen ist die Beobachtungsgröße  $H_0$  das Verhältnis zwischen der Rotverschiebung, ausgedrückt als Geschwindigkeit ( $cz$ ), und der Entfernung, meist als Leuchtkraftentfernung gemessen.<sup>1</sup> Dies ist der Grund, weshalb man meistens  $z$  gegen  $m$  (als Entfernungsmaß) aufträgt, obwohl  $z$  eher die unabhängige Variable ist. Da man historisch meist mit kleinen  $z$ -Werten zu tun hatte, und weil exakte Lösungen erst nach der Entwicklung der Beobachtungsmethoden gefunden wurden, macht man meistens eine Reihenentwicklung für  $z$  als Funktion von  $m$ :

$$m = M + 25 - 5 \log_{10} H_0 + 5 \log_{10} cz + 1,086(1 - q_0 z) + \dots \quad (4.1)$$

wobei  $m$  die scheinbare und  $M$  die absolute Helligkeit ist. (Der Faktor 1,086 ist eigentlich  $\frac{2,5}{\ln 10}$ .) Die Hubble-Konstante bestimmt man also aus dem Schnittpunkt dieser Funktion mit der  $z$ -Achse. (Siehe, z.B., [Berry, S. 112] für eine Erläuterung.)

Genau so wie es eine  $m$ - $z$ -Beziehung gibt, gibt es eine zwischen  $z$  und den Winkeldurchmessern von Objekten, die man entsprechend für die Bestimmung von  $H_0$  verwenden kann.

Für  $H_0$  findet man Werte zwischen 30 und 110  $\frac{\text{km}}{\text{s Mpc}}$ <sup>2</sup>. Bemerkenswert ist, daß die Werte nicht gleichmäßig über das Intervall verteilt sind, sondern

---

<sup>1</sup>Es soll hier noch einmal ausdrücklich betont werden, daß dieses durch Beobachtung gefundene Hubble-Gesetz nicht das gleiche ist wie das theoretische Expansionsgesetz, das man aus der Robertson-Walker-Metrik herleitet (Gl. 1.1). Aus dieser Metrik kann man auf  $D_p$  und  $\dot{D}_p$ , also auf zwei nicht beobachtbare Größen, schließen. Lediglich für kleine Rotverschiebungen, wie in Kapitel 2 Abschnitt b erläutert, gibt es eine gewisse Übereinstimmung zwischen dem beobachteten Hubble-Gesetz und dem theoretischen Expansionsgesetz. Eine ausführliche Behandlung dieses Themas findet man bei Harrison [Harrison, Harrison 93].

<sup>2</sup>Im folgenden werden Werte von  $H_0$ , wenn nicht anders bemerkt, in diesen Einheiten angegeben.

sich um Werte um 45 bzw. 85 häufen. Der Wert scheint davon abzuhängen, wer die Untersuchung macht, und es kommt durchaus vor, daß verschiedene Gruppen verschiedene Werte *aus denselben Daten* erhalten.

Bei der Bestimmung der Hubble-Konstanten aus der oben beschriebenen Methode (mit Helligkeiten) müssen sowohl die  $z$ - als auch die  $m$ -Werte korrigiert werden. Die  $z$ -Korrektur, die dadurch zustandekommt, weil die Erde sich um die Sonne dreht, die Sonne sich um das galaktische Zentrum dreht, die Galaxis eine Eigenbewegung hat usw. ist relativ unproblematisch, denn unsere Geschwindigkeit bezogen auf das „Substratum“ läßt sich relativ leicht aus der Dipolanisotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung berechnen.

Schwieriger ist die Korrektur für  $m$ ; abgesehen von Entwicklungseffekten, die wahrscheinlich doch bei kleinen  $z$ -Werten vernachlässigt werden dürfen, muß man die in Kapitel 3 Abschnitt iv beschriebene  $K$ -Korrektur berücksichtigen, die Wissen über die spektrale Energieverteilung voraussetzt. Hinzu kommen Korrekturen für Absorption. Ein weiterer Punkt ist der sogenannte „Malmquist bias“, der dadurch zustandekommt, daß die „Standardkerzen“ in der Praxis eine Helligkeitsverteilung haben. Weil man fast immer mit flußbegrenzten Samples arbeiten muß, führt dies dazu, daß man bei größeren Entfernungen nur noch die helleren Objekte sieht, so daß die aus den Beobachtungen hergeleitete Durchschnittshelligkeit größer ist als die tatsächliche.

Bei der Beobachtung von Winkeldurchmessern hat man weder die  $K$ -Korrektur noch muß man Absorption berücksichtigen. (Es sei denn, der Winkeldurchmesser ist mit der Helligkeit auf eine Art und Weise korreliert, die Auswahleffekte verursacht.) Das Vorhandensein eines Effekts, der dem Malmquist bias entspricht, hängt stark von der Art der beobachteten Objekten sowie der Definition der Winkelgröße ab.

Aber das Hauptproblem bei diesen Methoden liegt in der Tatsache, daß man für die Eichung eine Vielzahl von Standardkerzen benötigt, die alle mit eigenen Unsicherheiten verbunden sind.

## b. $q_0$

Aus der Abweichung von Gl. 4.1 von einer Geraden kann man  $q_0$  bestimmen: für  $q_0 = 1$  erwartet man die Gerade, für andere Werte eine entsprechende Abweichung. Dasselbe kann man auch für die Winkeldurchmesser tun; dies ist in letzter Zeit von verstärktem Interesse, da Kellermann [Kellerman 93] behauptet, Beobachtungen an *von Entwicklungseffekten unabhängigen Objekten* benutzen zu können, um  $q_0$  zu bestimmen.

Heute ist man der Ansicht, daß es auf die oben beschriebene Art nicht möglich ist,  $q_0$  zu bestimmen, weil die  $q_0$ -abhängigen Effekte erst bei verhältnismäßig großen  $z$ -Werten auftreten. Weil hohe  $z$ -Werte mit großen Rückblickzeiten verbunden sind, erreicht man bei hohen  $z$ -Werten Stadien der Galaxienentwicklung, die so weit zurückliegen, daß die Galaxien sich von ihrer heutigen Form genug unterscheiden, um  $q_0$ -Effekte unbeobachtbar zu machen. Es scheint auch nicht der Fall zu sein, daß in absehbarer Zeit die Galaxienentwicklung genau genug verstanden werden wird, um für diese Effekte korrigieren zu können. (Siehe aber [Sandage & Tammann 93].)

Alle Bemerkungen in dem letzten Abschnitt beziehen sich verstärkt auf die Bestimmung von  $q_0$ , denn diese erfordert, daß man Objekte bei höherem  $z$  beobachten muß. Zusätzlich spielt der  $\eta$ -Parameter hier eine Rolle (vernachlässigbar bei der Bestimmung von  $H_0$ ), wie Abb. 4-1 zeigt.

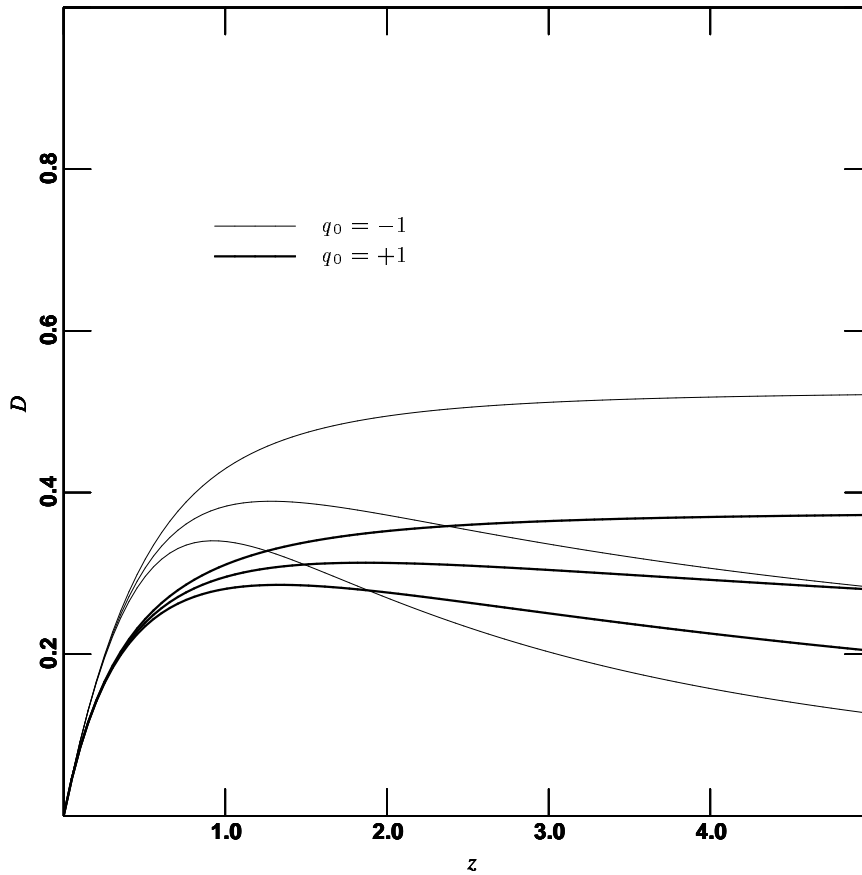


Abbildung 4-1. Einfluß von  $\eta$  auf die Bestimmung von  $q_0$ .

Geplottet ist der Winkelgrößenentfernung in Einheiten der Hubble-Länge  $\frac{c}{H_0}$  als Funktion von  $z$  für verschiedene Weltmodelle. Für jede Kurvenschar sind die  $\eta$ -Werte, von oben, 0,  $\frac{1}{2}$  und 1. Für alle Kurven ist  $\Omega = 1$ . Hier sieht man, daß der Einfluß von  $\eta$  größer ist als der von  $q_0$  für größere  $z$ -Werte in „typischen“ Weltmodellen.

Alle Untersuchungen, die versuchen, durch die Abhängigkeit einer Entfernung von  $z$  das Weltmodell zu bestimmen, werden mehr oder weniger von dem  $\eta$ -Parameter beeinflusst.  $\eta$  ist nicht vergleichbar mit den anderen kosmologischen Parametern, denn  $\eta$  kann für verschiedene Objekte unterschiedlich sein. Ohne Auswahleffekte vollständig zu verstehen wird man nicht einmal die Hoffnung haben können, daß „ $\eta$  im Mittel 1 ist“, was eine Hilfe bei statistischen Untersuchungen sein sollte, denn zwei entgegengesetzte Auswahleffekte sind möglich:

- (1) Ein flußbegrenztes Sample bevorzugt Objekte, die intrinsisch heller sind. Dadurch könnten Objekte, für die  $\eta > 1$  gilt, bevorzugt werden. Dies wäre zu erwarten, wenn es viel Materie gibt, die weder absorbiert noch leuchtend ist und, obwohl (kosmologisch gesehen) nicht gleich verteilt, nicht kompakt genug ist, um explizit durch einen Gravitationslinseneffekt berücksichtigt zu werden.
- (2) Untersucht man Objekte, z.B. Feldgalaxien, die, um Rotverschiebungs-, Helligkeits- und/oder Winkelgrößenmessungen zu erleichtern,

bevorzugt in das Sample hineingenommen werden, wenn sie mehr oder weniger allein am Himmel stehen, dann könnten Objekte, für die  $\eta < 1$  gilt, bevorzugt werden. Dies wäre zu erwarten, wenn der Großteil der Materie sich in kompakten Objekten befindet, die entweder leuchten oder absorbieren oder beides.

In dieser Arbeit wird  $\eta$  wo nötig berücksichtigt. Obwohl kein freier kosmologischer Parameter in dem Sinne, gibt eine Betrachtung für verschiedene  $\eta$ -Werte zwischen 0 und 1 in der Gravitationslinsenphysik eine Abschätzung für die Unsicherheit.

### c. $\Omega_0$

Im Prinzip ist es möglich,  $\Omega_0$  aus der  $m$ - $z$ -Beziehung bzw. aus der entsprechenden Beziehung für Winkeldurchmesser zu bestimmen, aber dies ist in der Praxis nicht möglich, da  $\Omega_0$ -abhängige Terme erst in dritter Ordnung auftreten.

$\Omega_0$  bestimmt man, in dem man die lokale Dichte (meist modulo  $H_0^{-2}$ ) mißt, z.B. durch Galaxienzählungen gekoppelt mit Abschätzungen über die Masse der Galaxien. (Siehe, z.B., [Berry, S. 15–17].) (Wie in Kapitel 2 erläutert, beobachtet man bei „unmittelbaren“ Dichtemessungen meistens eher  $\Omega_0$  als  $\rho_0$ .) Man kann mit dieser Methode die *Gesamtmasse* bestimmen, die mit leuchtender Masse *eng gekoppelt* ist. Ein entsprechendes Verfahren bei Galaxienhaufen funktioniert analog. Im allgemeinen findet man mit solchen Methoden, daß die Dichte mit der Größe des betrachteten Gebietes wächst.<sup>3</sup>

Was man aber mit diesen Methoden nur schwieriger bestimmen kann, ist die Dichte gleichmäßig verteilter dunkler Materie. Es gibt Methoden, die obere Grenzen für die Dichte *bestimmter Arten* gleichmäßig verteilter dunkler Materie angeben, aber es ist nicht möglich, eine Obergrenze für *alle* Sorten anzugeben.

Obwohl die Strahlungsdichte heute vernachlässigbar ist (Kapitel 2), ist es trotzdem möglich, daß Dichten, die aus der heutigen Strahlungsdichte abgeleitet werden können, für kosmologische Zwecke erheblich sein können. Es ist z.B. möglich, die Dichte von Neutrinos aus der Strahlungsdichte abzuleiten—hier die Beziehung (ohne Beweis):

$$n_{\nu_i + \bar{\nu}_i} \approx \frac{3}{11} n_\gamma \quad (4.2)$$

wobei

$$n_\gamma \approx 20,4 \times T_\gamma^3 \approx 4,15 \times 10^8 \text{ m}^{-3} \quad (4.3)$$

Die Zahl  $n_\gamma$  ist die heutige Photonzahldichte und  $T_\gamma$  die Temperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung. (Siehe, z.B., [Weinberg].) Haben Neutrinos eine endliche Ruhemasse, dann ist es möglich, daß sie einen erheblichen Anteil an  $\Omega_0$  ausmachen. (Bei einer solchen Dichtebestimmung mißt man tatsächlich die Dichte und nicht  $\frac{\rho_0}{H_0^2}$ .)

Es gibt Methoden, mit denen man  $\Omega_0$  bestimmen kann (z.B. Galaxienzählungen) aber auch welche, die eigentlich  $\rho_0$  bestimmen; dazwischen muß man sorgfältig unterscheiden. Aus Galaxienzählungen, die die dynamische (statt leuchtende) Masse zugrundelegen, kommt man auf  $\Omega_0$ -Werte

<sup>3</sup>Dies kann man verstehen dadurch, daß dynamische Methoden die Materie nicht messen können, die auf Skalen größer als die typische Länge des betrachteten Systems gleichmäßig verteilt ist. Siehe hierzu, z.B., [Narlikar & Padmanabhan 91].

in der Größenordnung von  $0,1 \dots 0,25$ . Dichtemessungen ergeben einen Wert von

$$\Omega_0 h_0^2 \approx 0,014 \dots 0,026. \quad (4.4)$$

Dies entspricht

$$\rho_0 \approx 2,6 \dots 4,9 \times 10^{-28} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (4.5)$$

(Siehe, z.B., [Narlikar & Padmanabhan 91] für eine zusammenfassende Beschreibung verschiedener Methoden zur Dichtebestimmung.)

Oben wurde erläutert, warum es schwierig ist, aus z.B. der  $m$ - $z$ -Beziehung  $\Omega_0$  zu bestimmen. Solche Methoden sind aber wünschenswert, weil sie  $\Omega_0$  sozusagen global bestimmen. Methoden, die versuchen,  $\Omega_0$  an kleineren Skalen zu beobachten, haben im allgemeinen das Problem, daß sie von der genaueren Materieverteilung nicht unabhängig sind. So kann man meist nur *Untergrenzen* für  $\Omega_0$  setzen. Unmittelbare Obergrenzen für  $\Omega_0$  hingegen lassen sich kaum bestimmen.

## d. Weltalter

*[The universe must] have aged sufficiently  
for there to exist elements other than hydrogen.  
It is well-known that carbon is required to make physicists.*

Robert Henry Dicke

Das Weltalter hängt von  $\lambda_0$ ,  $\Omega_0$  und  $H_0$  ab (Gl. 2.21). Da man durch verschiedene Überlegungen Untergrenzen für das Weltalter angeben kann, ist es möglich, manche Parameterkombinationen auszuschließen. (Siehe Abb. 5-1.)

Die strengsten Untergrenzen kommen von Untersuchungen über das Alter von Kugelsternhaufen,<sup>4</sup> wo man heute von einem Alter von  $\approx 17 \times 10^9$  a [Catelan & Pacheco 92] ausgeht.<sup>5</sup> Die Obergrenze für das Weltalter ist also dies plus die notwendige Zeit für die Entstehung der Kugelsternhaufen, also vielleicht eine Milliarde Jahre mehr.

Durch das Alter der ältesten uns bekannten Objekten kann man natürlich nur Untergrenzen für das Weltalter setzen. Genauere Angaben, sprich Ober- und Untergrenzen, sind nur möglich, wenn man eine Theorie der Entstehung von Objekten hat. Meistens jedoch sind diese Unsicherheiten vergleichbar mit den Unsicherheiten in den anderen kosmologischen Parametern.

## e. Der gegenwärtige Stand aus meiner Sicht

Wegen der sehr umfangreichen Literatur zu diesem Thema ist eine objektive Beurteilung kaum möglich. Hier möchte ich nur meine subjektiven Eindrücke vermitteln, denn sie waren eine wichtige Motivation für diese Arbeit.

<sup>4</sup>nach neuen Erkenntnissen vielleicht von dem *galactic bulge*, die eventuell noch älter ist [Lee 92]

<sup>5</sup>Es gibt aber neuere Hinweise, daß dieser Wert nach unten korrigiert werden muß [Sandage 93b].

i.  $H_0$ 

Seit den ersten Abschätzungen durch Lemaître und Hubble ist der Wert von  $H_0$  von etwa 600 bis auf Werte zwischen 30 und 110 gefallen. Meist waren diese Korrekturen eine Folge von Verbesserungen in der Eichung der Entfernungsskala. Je höher die Hubble-Konstante, desto kleiner ist das Weltalter für gleiche  $\lambda_0$ - und  $\Omega_0$ -Werte. (Für gleiche  $H_0$ - und  $\Omega_0$ -Werte steigt das Weltalter mit  $\lambda_0$ ; für gleiche  $H_0$ - und  $\lambda_0$ -Werte fällt das Weltalter mit  $\Omega_0$ .) Wichtig in diesem Zusammenhang ist die Tatsache, daß selbst die niedrigsten  $H_0$ -Werte, die heute gemessen werden, kaum verträglich sind mit einem realistischen Wert für das Alter der ältesten Kugelsternhaufen, wenn  $\lambda = 0$  sein soll. Es gibt erhebliche theoretische Vorurteile (*theoretical prejudices*), die manche Wissenschaftler dazu führen,  $\lambda = 0$  zu setzen, obwohl man dies nicht durch Beobachtung verifiziert hat. Es gibt deshalb zweifelsohne bei manchen Wissenschaftlern eine Vorliebe für  $\lambda_0 = 0$ . (Obwohl  $\lambda \neq 0$  aus einer größeren Hubble-Konstanten folgt (bei einem realistischen Alter der ältesten Kugelsternhaufen selbst für  $\Omega_0 = 0$ ), ist der umgekehrte Fall nicht wahr: ein niedrigere Wert für  $H_0$  bedeutet nicht, daß  $\lambda = 0$  sein muß, sondern ist nur damit verträglich. Dies weist noch einmal auf die Wichtigkeit von Verfahren hin, die einen kosmologischen Parameter bestimmen können, ohne Wissen über einen anderen voraussetzen zu müssen.)

Beschränkt man sich auf Hinweise aus Beobachtung, ist ein hoher Wert für  $H_0$  nicht deshalb unannehmbar, weil er  $\lambda > 0$  als Folge hat. Wohl aber ist ein kosmologisches Modell, das ein Weltalter kleiner als das Alter einiger beobachteten Gegenstände als Folge hat, als unmöglich zu bezeichnen.

ii.  $q_0$ 

Schon das Vorzeichen in der Definition von  $q_0$  (Kapitel 2 Abschnitt b) zeigt, daß viele Wissenschaftler *a priori*  $q_0 > 0$  erwarten, was immer der Fall ist bei  $\lambda_0 = 0$ . (Auch hier sei bemerkt, daß der umgekehrte Fall nicht wahr ist; aus  $q_0 > 0$  folgt nicht unbedingt, daß  $\lambda_0 = 0$  ist, aber ersteres ist mit letzterem verträglich.) Wie oben erläutert, ist es kaum möglich,  $q_0$  „unmittelbar“ zu beobachten; man kann aber natürlich den Wert für  $q_0$  in einem bestimmten kosmologischen Modell berechnen. Es ist lediglich möglich, aus klassischen Beobachtungen sehr extreme Werte für  $q_0$  auszuschließen (diejenigen, die schon bei kleinen  $z$ -Werten beobachtbar wären).

iii.  $\Omega_0$ 

Das einzige, was man über den Wert von  $\Omega_0$  sagen kann, ist, daß  $\Omega_0 \geq \Omega_{0,\text{gal}}$ , was „unmittelbar“ beobachtet wird, sein muß. Obergrenzen, die unabhängig vom kosmologischen Modell sind, sind kaum aus Beobachtungen anzugeben—wenn man unbekannte Arten dunkler Materie zuläßt, kann man auch aus theoretischen Überlegungen heraus kaum etwas sagen. Wie bei  $q_0$  kann man lediglich extrem große<sup>6</sup> Werte, die bei kleinem  $z$  bemerkbar wären, ausschließen.

Messungen von  $\rho_0$ , mit sowohl Unter- als auch Obergrenzen, statt  $\Omega_0$  dürften recht zuverlässig sein.

<sup>6</sup>Extrem *kleine* Werte können nicht wegen *globalen* Beobachtungen ( $m$ - $z$ -Diagramm usw.) ausgeschlossen werden—sogar  $\Omega_0 = 0$  wäre mit denen verträglich.

#### iv. Weltalter

Genauer bekannt als die Werte für  $H_0$ ,  $q_0$ ,  $\lambda_0$  und  $\Omega_0$  ist eine Untergrenze für das Weltalter, die sich aus dem Alter der ältesten uns bekannten Gegenstände, nämlich der ältesten Kugelsternhaufen,<sup>7</sup> ergibt. Meines Erachtens soll eine konservative Abschätzung dieses Wertes als Bedingung für ein annehmbares Weltmodell genommen und die (unsichereren) Parameter durch kosmologische Beobachtungen bestimmt werden statt umgekehrt.

### Zusammenfassung

- Im Prinzip kann man aus „klassischen“ Beobachtungen *alle* kosmologischen Parameter— $H_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $\Omega_0$  und  $\eta$  bestimmen.
- Man hat eine Unsicherheit von mindestens einem Faktor 2 in den beobachteten Werten aller Parameter.
- Das Weltalter kennt man recht gut; man kann vielleicht in Zukunft  $H_0$  mit einer Genauigkeit von 10% festlegen, aber es scheint aussichtslos,  $\lambda_0$  und  $\Omega_0$  genau genug zu bestimmen, um z.B. quantitative Aussagen über die Funktion  $R(t)$  machen zu können.
- Man braucht eine Methode, die *alle* kosmologischen Parameter bestimmen läßt und zwar so, daß man außer relativ sicherem Wissen nichts voraussetzen muß.

---

<sup>7</sup> bzw. noch älterer Sterne im *galactic bulge*





# Kapitel 5

## Mögliche Weltmodelle

Bevor Rechnungen durchgeführt werden können, muß der sinnvolle Bereich im Parameterraum definiert werden. Zunächst werden „unmittelbare“ Einschränkungen<sup>1</sup> einzelner Parameter erläutert, und dann Einschränkungen, die sich auf bestimmte Kombinationen von Parametern beziehen, diskutiert. So erhält man einen Bereich im Parameterraum, außerhalb dessen nur unmögliche Weltmodelle existieren. Streng genommen ist es also ausreichend, Weltmodelle in diesem Bereich miteinander zu vergleichen. Um zu sehen, inwieweit mein Verfahren zu Einschränkungen führt, die vergleichbar mit denen der klassischen Methoden sind, wird ein größerer als der physikalisch mögliche Bereich des Parameterraumes betrachtet. Eine Ausnahme bilden Einschränkungen, die sich für  $M_2$ -Modelle ergeben. (Diese, im Englischen auch „bounce models“ genannt, haben keinen Urknall, sondern kontrahieren aus dem Unendlichen auf einen minimalen Radius und expandieren dann wieder. Die Bezeichnung bezieht sich auf die Klassifizierung in [Stabell & Refsdal 66].)

### a. „Unmittelbare“ Einschränkung einzelner Parameter

#### i. $\lambda_0$

Theoretisch kann  $\lambda_0$  jeden Wert annehmen. Aus Beobachtung weiß man, daß  $|\Lambda|$  klein genug sein muß, um keine beobachtbaren Effekte auf die Dynamik von kleinen Galaxienhaufen (die beobachteten Systeme mit der kleinsten Dichte) zu haben, denn Abweichungen von einem allein durch Schwerkraft bestimmten dynamischen Verhalten werden nicht beobachtet. Hieraus ergibt sich die Ungleichung [MTW, S. 411]

$$|\rho_{\text{Vakuum}}| = \left| \frac{\Lambda}{8\pi G} \right| < \rho_{\text{Haufen}} \quad (5.1)$$

Für  $\rho_{\text{Haufen}} \approx 3 \times 10^{-26} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times h^2$  erhält man die Bedingung<sup>2</sup>

$$|\Lambda| < 8\pi G \rho_{\text{Haufen}} \approx 5 \times 10^{-35} \cdot h^2 \quad (5.2)$$

<sup>1</sup>Die Grenzen, die ich hier setze, sind natürlich etwas zu weit gesteckt, aber für Vergleiche sinnvoll.

<sup>2</sup>In der Praxis wird die Dichte in Einheiten von  $\frac{1}{h^2}$  gemessen; siehe Kapitel 2 Abschnitt b.

Die entsprechende Bedingung für  $\lambda_0$  ist

$$|\lambda_0| < 1,8 \quad (5.3)$$

Man hat eigentlich eine Bedingung für  $|\Lambda|$  in Abhängigkeit von  $\rho_{\text{Haufen}}$ , aber da man in der Praxis die Dichten in Einheiten von  $\frac{1}{h^2}$  mißt, ergibt sich eine Bedingung für  $|\lambda_0|$ . Diese ist die einzige unmittelbare Einschränkung für  $\lambda_0$ , die ich überhaupt kenne. Angesichts der Tatsache, daß die Dynamik von Galaxienhaufen keinesfalls vollständig verstanden ist, ist diese Einschränkung mit Vorsicht zu genießen— $|\lambda_0|$  könnte viel größer sein und möglicherweise eine Rolle bei der Dynamik von Galaxienhaufen spielen. Betrachtet man Systeme, z.B. das Sonnensystem, wo man auf keinen Fall sonst unerklärliche Abweichungen von der Newton'schen bzw. Einstein'schen Gravitationstheorie beobachtet, dann ist die Obergrenze für  $|\lambda_0|$  um mehrere Zehnerpotenzen höher. Diese Abschätzung ist aber trotzdem wichtig, denn selbst mit diesem Wert ( $|\lambda_0| < 2$ ), der eher eine Untergrenze darstellt bezüglich der „unmittelbaren“ Messung von  $\lambda_0$ , ist man nicht in der Lage, eine Schar von Weltmodellen<sup>3</sup> auszuschließen. Ich werde davon ausgehen, daß man keine unmittelbaren Grenzen für  $\lambda_0$  hat.

## ii. $\Omega_0$

Aus Beobachtungen weiß man, daß

$$\Omega_{0,\text{Galaxien}} \approx 0,05 \quad (5.4)$$

wobei dies eher eine Unterschätzung ist. (Diese Zahl erhält man, in dem man die Zahl der Galaxien einer Masse pro Volumen<sup>4</sup> mißt und multipliziert mit der *dynamischen* Masse der Galaxien; anschließend muß man natürlich über die Massenfunktion integrieren.) Weil  $\Omega_{0,\text{Galaxien}}$  eine Untergrenze ist, gilt:

$$\Omega_0 > 0,05 \quad (5.5)$$

## iii. $\eta$

Der  $\eta$ -Parameter gibt den Bruchteil der Materie an, die so verteilt ist, daß sie sich im Lichtkegel einer betrachteten Quelle eines Gravitationslinsensystems befindet. Manchmal wird  $\eta$  mit dem Anteil „gleichmäßig verteilter Materie“ gleichgesetzt;  $1 - \eta$  ist dann der Anteil der Materie in „kompakten Objekten“. Wichtig ist die Definition von „kompakt“ in diesem Zusammenhang;<sup>5</sup> schwarze Löcher kleiner Masse, die „kosmologisch gleich verteilt“ sind, sind keine „kompakten Objekte“, während sehr dünne galaktische Halos durchaus nicht zur „gleichmäßig verteilten Materie“ gerechnet werden können. Über alle Sehstrahlen gemittelt muß  $\eta = 1$  sein, *wenn man alle „Gravitationslinseneffekte“ mitberücksichtigt*. Am besten wäre es, für jedes betrachtete Gravitationslinsensystem einen  $\eta$ -Wert anzugeben, denn er ist wichtig für die Berechnung der Winkelgrößenentfernungen  $D_{ij}$ . Eine statistische Untersuchung mit einem, mit zum Weltmodell gehörendem,  $\eta$ -Parameter mag zunächst etwas zweifelhaft erscheinen, wenn  $\eta$  über alle Richtungen gemittelt = 1 sein soll, aber bei Gravitationslinsensystemen

<sup>3</sup>beschrieben durch das Vorzeichen von  $k$  und  $\lambda_0$  bzw. das Verhältnis zu  $\lambda_{0,\text{krit}}$  bei  $k = +1$

<sup>4</sup>Da Entfernungen i.a. in Einheiten von  $\frac{1}{h}$  gemessen werden, hat man eine Bedingung für  $\Omega_0$  statt für  $\rho$ .

<sup>5</sup>Siehe, z.B., [Weinberg 76].

wird die Deflektormasse ja explizit berücksichtigt, so daß  $\eta < 1$  sein muß. Wieviel kleiner hängt von der Art und Verteilung der Materie im Universum ab; *a priori* kann man im Rahmen der Beobachtungsgenauigkeit jedoch keine Aussage machen, also

$$0 < \eta < 1 \quad (5.6)$$

#### iv. $H_0$

Es würde viel zu weit führen, verschiedene Methoden zur Bestimmung der Hubble-Konstanten und die möglichen Gründe für ihre widersprüchlichen Ergebnisse zu erläutern. Theoretisch kann  $H_0$  alle Werte annehmen. In unserem Universum ist  $H_0$  bestimmt positiv; zumindest gibt es darüber keinen Streit. Fast alle Astronomen, die sich auf dem Gebiet auskennen, wären sicher mit der Aussage einverstanden, daß  $H_0$  irgendwo im folgenden Bereich liegt:

$$30 < H_0 < 110 \quad (5.7)$$

wo  $H_0$  in den üblichen Einheiten  $\frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$  gemessen wird. Um Vergleiche zu erleichtern, definiert man

$$h := \frac{H_0}{100 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}}$$

Der heutige Stand ist also, daß

$$0,3 < h < 1,1 \quad (5.8)$$

## b. Einschränkungen von Parameterkombinationen

### i. $\lambda_0$ und $h$

Identifiziert man  $\Lambda$  mit der Vakuumenergiedichte, dann sollte es möglich sein, von ersten Prinzipien her  $\Lambda = 3H_0^2\lambda_0$  zu berechnen. Obwohl es schon Ansätze gibt,<sup>6</sup> ist es nicht möglich, auf diese Art und Weise den Wertebereich für  $\Lambda$  einzuschränken. (Man könnte höchstens vermuten, *wenn dies die einzige Quelle der kosmologischen Konstante ist*, daß  $\Lambda > 0$  sein sollte.)

### ii. $\Omega_0$ und $\eta$

Es gibt 2 Extremfälle bezüglich  $\eta$ :

- (1) Die ganze Materie ist konzentriert in Galaxien.
- (2) Fast die ganze Materie (bis auf die in Galaxien) ist fein verteilt.

Im ersten Fall ist es nur wichtig, daß die Materie mit den sichtbaren Galaxien zusammenhängt; selbstverständlich muß nicht die ganze Materie leuchtend sein, was man ja auch aus Beobachtung bezüglich des dynamischen Verhaltens von Galaxien weiß. Der zweite Fall entspräche z.B. einem Universum, in dem  $\Omega_{0,\text{Galaxien}}$  nur einen sehr kleiner Bruchteil von  $\Omega_0$  ist; z.B.  $\Omega_0 \approx 1$  und die restliche Materie besteht aus (gleichmäßig verteilten) Neutrinos mit endlicher Ruhemasse. Der erste Fall liefert  $\eta = 0$ , denn Galaxien werden durch den Gravitationslinseneffekt explizit berücksichtigt. Weil der Bruchteil  $\Omega_{0,\text{Galaxien}}$  auf jeden Fall als kompakt anzusehen ist,

<sup>6</sup>Siehe hierzu [MTW, S. 412].

erhält man eine weitere Einschränkung des Parameterraumes. Es muß also gelten

$$\Omega_0 \geq \frac{\Omega_{0,\text{Galaxien}}}{1 - \eta} \quad (5.9)$$

bzw.

$$\eta \leq \frac{\Omega_0 - \Omega_{0,\text{Galaxien}}}{\Omega_0} = 1 - \frac{\Omega_{0,\text{Galaxien}}}{\Omega_0} \quad (5.10)$$

### iii. $\Omega_0$ und $h$

Da die physikalische Dichte  $\rho_0 \sim \Omega_0 h^2$  ist, kann man Werte für diese Parameterkombination aus einer gemessenen  $\rho_0$  ableiten. Wie in Kapitel 2 Abschnitt b bereits erklärt, mißt man in der Praxis auf kosmologischen Skalen fast immer  $\Omega_0$  und nicht  $\rho$  bzw.  $\Omega_0 h^2$ . Die Theorie der Elementenentstehung jedoch erlaubt eine Berechnung des Parameters  $\tilde{\eta}$ , der wie folgt definiert ist:

$$\tilde{\eta} := \frac{\text{Zahldichte der Baryonen}}{\text{Zahldichte der Photonen}} \quad (5.11)$$

als Funktionen der beobachteten Verhältnisse verschiedene Nuklide.<sup>7</sup> Da die Zahldichte der Photonen sich aus der gemessenen Temperatur der Hintergrundstrahlung ergibt [Dar 90],<sup>8</sup> läßt sich durch die bekannte Protonenmasse die heutige Baryonendichte  $\rho_{\text{Baryonen}}$  bestimmen. Man erhält

$$\rho_{\text{Baryonen}} \approx 2,6 \dots 4,9 \times 10^{-28} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (5.12)$$

bzw.

$$0,014 < \Omega_0 h^2 < 0,026 \quad (5.13)$$

(Für  $0,3 < h < 1,1$  erhält man einen Wert für  $\Omega_{0,\text{Baryonen}}$  zwischen 0,012 und 0,289. Dies ist zu vergleichen mit Gl. 5.5; nur für kleine  $h$ -Werte wäre ein Universum ohne nichtbaryonische Materie verträglich mit den aus Rotationskurven abgeschätzten Galaxienmassen.) Da  $\rho_0 \geq \rho_{0,\text{Baryonen}}$  sein muß, erhält man folgende Ungleichung:

$$\Omega_0 h^2 \geq 0,014 \quad (5.14)$$

### iv. $\lambda_0$ , $\Omega_0$ und $h$

In Kapitel 2 wurde einen Ausdruck für das Weltalter hergeleitet (Gl. 2.21), der von den Parametern  $\lambda_0$ ,  $\Omega_0$  und  $H_0$  abhängt. Es ist sicher möglich, eine Untergrenze für das Weltalter anzugeben; dies ist einfach das Alter der ältesten bekannten Objekte. Lange Zeit hielt man die ältesten Kugelsternhaufen für die ältesten Objekte, aber nach neuen Erkenntnissen gibt es vielleicht noch ältere Objekte [Lee 92]. Für  $\lambda_0 = 0$  gilt, je größer  $h$  bzw.  $\Omega_0$  desto kleiner ist  $t_0$ . Im Grenzfall  $\Omega_0 = 0$  ist  $t_0 = \frac{1}{H_0}$ , für  $\Omega_0 = 1$  ist  $t_0 = \frac{2}{3H_0}$ . Für  $h = 1$  ist  $\frac{1}{H_0} \approx 9,8 \times 10^9$  a. Selbst wenn man keine Mindestzeit für die Entstehung der ältesten Sterne berücksichtigt, dann ist  $h > 0,65$  unverträglich mit einem Mindestalter von 15 Milliarden Jahren, selbst für  $\Omega_0 = 0$ .<sup>9</sup> Wegen des geschätzten Alters der ältesten Kugelsternhaufen, muß man, um  $\lambda_0 = 0$  zu retten, entweder einen niedrigen Wert für

<sup>7</sup>Siehe, z.B., [MRRS, S. 993].

<sup>8</sup>Alle anderen Photonen liefern einen vernachlässigbaren Beitrag.

<sup>9</sup>Glaubt man an  $\Omega_0 = 1$ , entweder weil man, z.B. wegen der Theorie der Inflation, an  $k = 0$  glaubt (und zusätzlich an  $\lambda_0 = 0$ ) oder weil man  $\Omega_0 \geq 1$  braucht, um Strukturbildung zu verstehen [Longair 93], dann ist die Situation noch schwieriger.

die Hubble-Konstante haben oder das Alter der ältesten Objekte herabsetzen. Sandage, der seit langem einen kleinen Wert für  $H_0$  mißt und jetzt 42 als den besten Wert sieht [Sandage 93b], braucht selbst für diesen kleinen Wert eine Korrektur nach unten für das Alter der ältesten Kugelsternhaufen, um  $\Omega_0 \geq 1$  zu erreichen, was gewünscht wird, um die Strukturbildung im Universum zu verstehen [Longair 93]. Solche Korrekturen der Altersbestimmung der Kugelsternhaufen mögen aus anderen Gründen (z.B. um eine Helligkeit von RR-Lyrae-Sternen zu haben, die extragalaktische Entfernungen im Einklang mit anderen Methoden liefert [Sandage 93b]) nötig sein, aber es gibt jetzt Hinweise, daß es vielleicht noch ältere Sterne gibt [Lee 92]. Obwohl ein hoher Wert für die Hubble-Konstante zusammen mit einem alten Universum  $\lambda_0 > 0$  erforderlich macht, ist das Umgekehrte nicht unbedingt der Fall: Ein jüngeres Universum oder ein kleiner Wert für  $H_0$  ist *verträglich* mit  $\lambda_0 = 0$ , so lange  $\Omega_0$  nicht zu groß ist, aber kein Beweis dafür. Ein Beweis für  $\lambda_0$  praktisch = 0 hätte man erst dann, wenn man, wie Sandage heute [Sandage 93b], nicht nur eine Untergrenze für das Weltalter hat, sondern auch eine Obergrenze, und einen Hinweis darauf, daß der entsprechende Wert für  $\Omega_0$  erfüllt ist.

Ich werde daß Weltalter als nach oben hin offen betrachten und ein eher untertriebenes Mindestalter voraussetzen von

$$t_0 > 13 \times 10^9 \text{ a} \quad (5.15)$$

## v. $\lambda_0$ , $\Omega_0$ und $\eta$

Die Winkelgrößenentfernung  $D$  hat ein Maximum in manchen Weltmodellen; mit anderen Worten, der Winkeldurchmesser eines „Standardstabes“ hat ein Minimum bei einem bestimmten  $z$ -Wert. Wie in Kapitel 4 diskutiert, ist es nicht praktisch, durch die Untersuchung von scheinbaren Größen in Abhängigkeit von  $z$  kosmologische Parameter zu bestimmen. Prinzipiell könnte man aber trotzdem manche Weltmodelle ausschließen durch das Nichtvorhandensein eines Minimums des Winkeldurchmessers, aber selbst dies ist aus praktischen Gründen nicht möglich.

Da  $D_L$  meist  $\geq D(1+z)^2$  (je nach dem, ob man eine bolometrische Helligkeit mißt oder nicht,  $K$ -Korrekturen anbringt, Entwicklungseffekte berücksichtigt usw.), ist der entsprechende Effekt für  $D_L$ , was zu einer minimalen Helligkeit einer Standardkerze führt, nicht so ausgeprägt. Es ist aber vielleicht trotzdem möglich, durch das Nichtvorhandensein eines solchen Minimums, manche Weltmodelle auszuschließen.

Es kommt jedoch hinzu, daß das Auftreten eines Maximums in  $D$  bzw.  $D_L$  von  $\eta$  abhängt; bei  $\eta = 0$  gibt es für *kein* Weltmodell ein Maximum. Da  $\eta$  sowohl nicht bekannt ist als auch genau genommen von dem betrachteten System abhängt, bedeutet das Nichtauftreten eines Maximums nicht unbedingt, daß bestimmte Weltmodelle nicht möglich sind. Wie Weinberg klargelegt hat [Weinberg 76], muß  $\eta$  „im Durchschnitt“ = 1 sein. (Da man Fälle mit  $\eta > 1$  in der Gravitationslinsenphysik meist als expliziten Gravitationslinseneffekt berücksichtigt, wird der  $\eta$ -Parameter hier zwischen 0 und 1 liegen.) Dies ist nur dann erfüllt, wenn man auch „Gravitationslinsenobjekte“, z.B. „luminous arcs“, in statistische Untersuchungen aufnimmt, die den Winkeldurchmesser oder scheinbare Helligkeit von Objekten betrachten, und wenn man keine  $\eta$ -abhängige Auswahleffekte hat (siehe Kapitel 4 Abschnitt b). Ein Maximum in  $D$  bei einem  $z$ -Wert, wo man die Objekte noch sehen kann, würde man nicht unbedingt merken, wegen der praktischen Unsicherheiten in der Messung von Winkeldurchmes-

sern. Ein Maximum in  $D_L$  jedoch wäre leichter festzustellen, z.B. durch Galaxienzählungen, obwohl solche Modelle auch verhältnismäßig lange Lichtlaufzeiten haben können (Lemaître-Modell), was die Berücksichtigung von Entwicklungseffekten nötig macht.

Eine Darstellung von  $z_{\text{Maximum}}$ , also von dem  $z$ -Wert, wo ein solches Maximum auftritt, in Abhängigkeit vom Weltmodell,<sup>10</sup> findet man bei [RSdL 67]. Tritt das Maximum bei einem so kleinen  $z$ -Wert auf, daß man Entwicklungseffekte und  $\eta$ -abhängige Auswahleffekte vernachlässigen kann, dann erlaubt einem die Tatsache, daß man so etwas nicht beobachtet, die Möglichkeit, ein Gebiet des Parameterraumes auszuschließen. Für  $z_{\text{Maximum}} < 1$  ist der Wert von  $z_{\text{Maximum}}$  fast unabhängig von  $\sigma$ ; es ist also möglich, eine untere Grenze von  $q_0$  anzugeben. Eine sehr weit gesteckte Abschätzung der Untergrenze für  $q_0$  liefert

$$q_0 > -5 \quad (5.16)$$

### c. Klassifizierung

Obwohl ich meistens  $\lambda_0$  und  $\Omega_0$  als freie Parameter benutze, ist die Darstellung durch die Parameter  $\sigma_0 = \frac{\Omega_0}{2}$  und  $q_0 = \frac{\Omega_0}{2} - \lambda_0$  völlig äquivalent. ( $q_0$  ist aus historischen Gründen eher eine „Beobachtungsgröße“,  $\lambda_0$  eher eine theoretische.) Stabell und Refsdal haben gezeigt [Stabell & Refsdal 66], daß alle allgemein relativistische Weltmodelle, die dem Kosmologischen Prinzip gehorchen, sich vollständig durch die Parameter  $\sigma_0$  und  $q_0$  beschreiben lassen. (Praktisch hat diese Betrachtungsweise den Vorteil, daß sich  $\sigma_{0,\text{krit}}$ , das eine Rolle entsprechend  $\lambda_{0,\text{krit}}$  spielt, leichter als  $\lambda_{0,\text{krit}}$  berechnen läßt.) Hat man ein endliches Gebiet in der  $\sigma_0$ - $q_0$ -Ebene, so gibt es einen entsprechenden Gebiet in der  $\lambda_0$ - $\Omega_0$ -Ebene. Ein Vergleich mit den Berechnungen von Refsdal *et. al* [Stabell & Refsdal 66, RSdL 67] zeigt, daß man ein solches endliches Gebiet durch folgende Bedingungen erhält:

- eine Untergrenze für  $\Omega_0$
- ein Mindestweltalter
- eine Untergrenze für  $q_0$

Dieses Gebiet habe ich in der  $\lambda_0$ - $\Omega_0$ -Ebene dargestellt, mit den oben erläuterten Werten der 3 Bedingungen. Dieses Gebiet ist eigentlich schon zu groß, denn die Bedingungen sind absichtlich nicht streng—eine genauere Betrachtung würde das Gebiet der möglichen Weltmodelle verkleinern können. Das Gebiet gibt also an, welche Weltmodelle auch im Zweifelsfall verträglich sind mit dem heutigen Kenntnisstand. Dies ist also das interessante Gebiet; wie anfangs erwähnt, betrachte ich absichtlich mehr Weltmodelle, nämlich den ganzen in Abb. 5-1 dargestellten Bereich, um zu sehen, inwieweit mein Verfahren ähnliche Einschränkungen wie die der klassischen Verfahren liefert. Als wahrscheinliche Weltmodelle sind aber diejenigen mit hoher relativer Wahrscheinlichkeit innerhalb des Gebiets der möglichen Modelle anzusehen.

<sup>10</sup>für  $\eta = 1$  in der  $\sigma_0$ - $q_0$ -Ebene

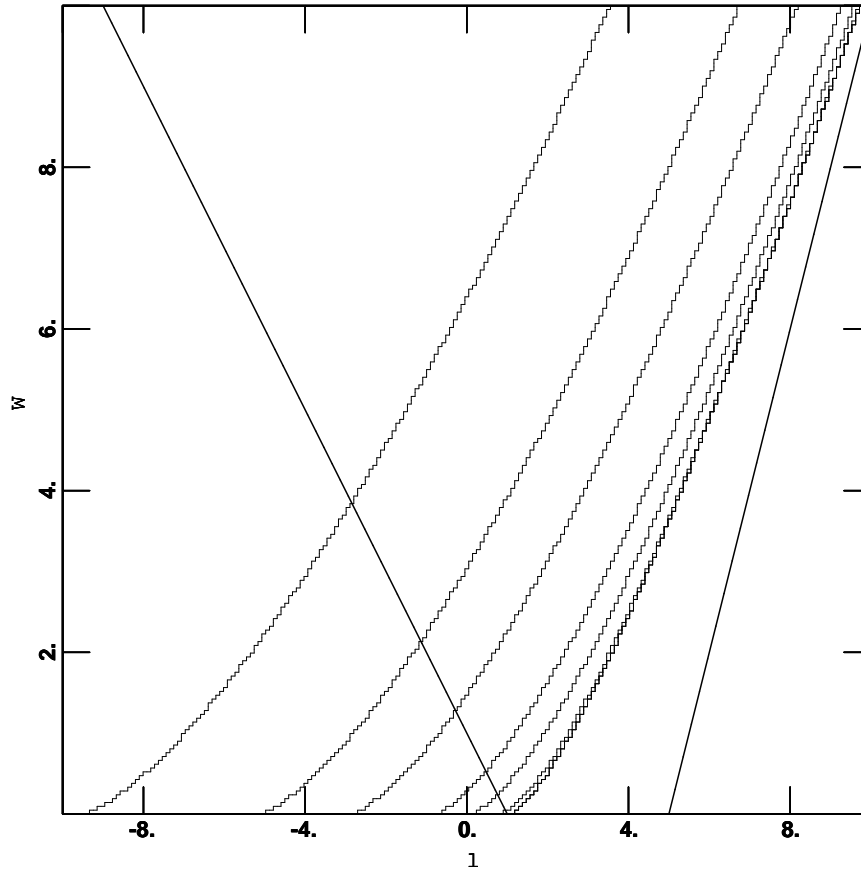


Abbildung 5-1. Bereich der möglichen Weltmodelle

Die sieben Kurven stellen, von links nach rechts,  $ht_0=4, 5, 6, 8, 10$  und  $16 \times 10^9 \text{a}$  sowie  $z_{\max} = 5$  dar; mögliche Weltmodelle müssen rechts von dem entsprechenden  $ht_0$ -Kurve und links von der  $z_{\max}$ -Kurve liegen. Die Gerade rechts entspricht  $q_0 = -5$ ; mögliche Weltmodelle müssen links davon liegen. Zur Orientierung ist die Gerade  $k = 0$  (negative Steigung) eingetragen. (Da man eine Obergrenze für  $\Omega_0$  von  $\approx 10$  hat, ist praktisch gesehen die Untergrenze für  $\Omega_0$  im Rahmen meiner Auflösung = 0.)

## d. $M_2$ -Modelle

### i. $z_{\max}$

Ein besonderes Problem gibt es für die sogenannten  $M_2$ -Modelle, also solche mit  $k = +1$ ,  $\lambda_0 > \lambda_{0,\text{krit}}$  und  $q_0 < 0$ —es ist hier nicht möglich, die „unmöglichen“ Weltmodelle zu betrachten, denn falls  $z_s > z_{\max}$  sind  $z$ -abhängige Größen, z.B. Entfernungen, nicht definiert. Man muß also von vornherein allen Weltmodellen die Wahrscheinlichkeit 0 zuordnen, die ein  $z_{\max}$  haben, was kleiner ist als der größte  $z_s$ -Wert der betrachteten Systeme. Dies ist aber kein großer Verlust, denn die Bezeichnung dieser Modelle als unmöglich basiert lediglich auf die Messung einer Rotverschiebung, ist also—unter der Voraussetzung, daß die gemessene Rotverschiebung kosmologisch ist—überhaupt nicht von Unsicherheiten begleitet.

In der  $\Omega_0$ - $\lambda_0$ -Ebene hat man natürlich auch ein Gebiet in dem  $z_{\max}$  kleiner ist als der größte beobachtete  $z$ -Wert überhaupt ( $\approx 5$ ) aber größer als der größte  $z_s$ -Wert der betrachteten Systeme, der den Bereich der wirklich möglichen Modelle weiter einschränkt. Aber der Unterschied zwischen diesen Einschränkungen ist sehr klein, denn  $z_{\max}$  fällt sehr schnell von  $\infty$  (Grenze zwischen  $M_2$ - und anderen Modellen) auf Werte  $< 1$  ab; dies geschieht mehr oder weniger senkrecht zu Kurven konstanten Weltalters.<sup>11</sup>

### ii. Berücksichtigung von $M_2$ -Modellen bei den Ergebnissen

Für das benutzte Sample von Gravitationslinsensystemen wird der größte  $z_s$ -Wert ermittelt; alle Weltmodelle, die einen  $z_{\max}$ -Wert haben, der kleiner als dieser Wert ist, bekommen die Wahrscheinlichkeit 0 zugeordnet.

## Zusammenfassung

- Die Betrachtung einzelner Parameter liefert nur bei  $H_0$  wirkliche Einschränkungen.
- Vor allem durch das Weltalter ist es möglich, eine große Schar von Weltmodellen auszuschließen.
- Alle Einschränkungen zusammen definieren einen Mindestgebiet in der  $\Omega_0$ - $\lambda_0$ -Ebene für meine Untersuchung.
- Es gibt auch durch den größten beobachteten  $z$ -Wert überhaupt eine Einschränkung des Parameterraumes, aber, im Gegensatz zu anderen Einschränkungen, kann der größte Teil dieses unmöglichen Gebietes von vornherein nicht betrachtet werden.

<sup>11</sup>In 5-1 ist die Kurve für  $z_{\max} = 5$  praktisch von der für  $ht_0 = 16$ , die ein  $z_{\max} = \infty$  hat, nicht zu unterscheiden.



## Teil B

# Gravitationslinsentheorie

*Do not Bodies act upon Light at a distance,  
and by their action bend its Rays;  
and is not this action strongest at the least distance?*

Isaac Newton, *Opticks*



# Kapitel 6

## Allgemeines

*What is now proved was once only imagin'd.*

William Blake

Hier werden nur wichtige Ergebnisse der Gravitationslinsentheorie, die für diese Arbeit wichtig sind, kurz und skizzenhaft dargestellt. Es wäre überflüssig, Bekanntes zu wiederholen. Eine ausführlichere Einführung *mit Referenzen* (der Übersichtlichkeit hier nicht immer angegeben) findet man, z.B., bei [SEF].

### a. Historisches

*All my best thoughts  
were stolen by the ancients.*

Ralph Waldo Emerson

#### i. Newton'sche Theorie

Obwohl es nicht eindeutig möglich ist, kann man die Lichtablenkung im Rahmen der Newton'schen Theorie als Streuproblem behandeln; man erhält für den Ablenkwinkel eines Lichtstrahls an einer Punktmasse für kleine Winkel asymptotisch<sup>1</sup> den Wert

$$\alpha = -\frac{2GM}{c^2 b} \quad (6.1)$$

wobei  $G$  die Gravitationskonstante,  $M$  die Masse der Punktmasse,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und  $b$  der Impaktparameter ist. Nach einem bekannten Satz der Newton'schen Theorie gilt dies auch für beliebige kugelsymmetrische Massenverteilungen, wo  $M$  nun die Masse innerhalb  $b$  ist. Soldner scheint der erste zu sein, der dieses Ergebnis zur Berechnung der Änderungen von Sternpositionen benutzte.

---

<sup>1</sup>Man kann einen Winkel nur zwischen zwei (auch infinitesimal kurzen, natürlich) Geraden definieren. Diese sind hier die Ausbreitungsrichtungen des Lichtstrahls im Unendlichen vor und nach der Ablenkung.

## ii. Einstein'sche Theorie

Einstein erhielt mit Hilfe seiner allgemeinen Relativitätstheorie den korrekten Wert<sup>2</sup>

$$\alpha = -\frac{4GM}{c^2 b} \quad (6.2)$$

den man *sehr* anschaulich so verstehen kann: Die Schwerkraft verursacht nicht nur eine Krümmung des Raumes, die der Newton'schen Schwerkraft entspricht und sozusagen die Hälfte des richtigen Wertes verursacht, sondern auch eine Verlangsamung der Zeit, die die lokale Lichtgeschwindigkeit (für einen äußeren Beobachter) herabsetzt und dadurch (wie bei optischen Medien mit Brechungsindex  $n > 1$ ) eine weitere Ablenkung bewirkt. (Einstein erhielt 1907 die Hälfte des richtigen Wertes—unter der Annahme, daß der 3-dimensionale Raum flach ist, berechnete er sozusagen den zweiten, durch Zeitverlangsamung verursachten, Effekt.)

Alle „lokale“ Gravitationslinsentheorie, die in dieser Arbeit vorkommt, braucht nur diesen „Faktor 2“ gegenüber dem Newton'schen Ergebnis.

## b. Grundlagen

Refsdal [Refsdal 64a, Refsdal 64b, Refsdal 66a, Refsdal 66b, Refsdal 70], nach Vorarbeit durch Lodge, Eddington, Chwolson, Mandl, Einstein, Tikhov, Zwicky, Klimov und Liebes, legte die theoretischen Grundlagen fast aller wichtigen Aspekte der Gravitationslinsentheorie systematisch dar:

- Bestimmung der Linsenmasse
- Helligkeitsänderung durch Verstärkung (Vergrößerung der Fläche bei konstanter Flächenhelligkeit)
- Verzerrung von ausgedehnten Quellen
- Bestimmung der Hubble-Konstanten
- Bestimmung des kosmologischen Modells durch den Korrekturterm beim *time delay*
- Parallaxeneffekt
- Einfluß eines nichthomogenen kosmologischen Modells

Besonders wichtig dabei war der Beweis, daß es für alle praktischen Zwecke vollkommen ausreicht, geometrische Optik zu benutzen.

## c. Die Linsengleichung

### i. Statischer euklidischer Fall für Punktmasse und -Quelle

Weil die Strecke, in der das Licht merklich abgelenkt wird, sehr kurz ist verglichen mit dem Gesamtweg, und weil die Quellengröße vergleichbar klein ist, kann man sich auf die Betrachtung dreier *Ebenen* beschränken: die Quellenebene (*source plane*), Linsenebene (*deflektor plane*) und Beobachterebene (*observer plane*). Die Entfernungen werden ausgedrückt durch

<sup>2</sup>Hier gelten die Bedingungen kleine Ablenkwinkel ( $\alpha \ll 1$ ) schwache ( $\frac{2GM}{c^2} \ll b$ ) und statische ( $v \ll c$ ) Felder.

$D_{od}$ ,  $D_{os}$  und  $D_{ds}$ , wobei die ersten beiden allgemein als  $D_d$  bzw.  $D_s$  abgekürzt werden (ein fehlender erster Index ist immer ein  $o$ ). Positionen in der Linsenebene bezeichnet man mit den Koordinaten  $x$  und  $y$ , in der Quellenebene mit  $\xi$  und  $\eta$  und in der Beobachterebene mit  $\xi'$  und  $\eta'$  bzw. mit den 2-dimensionalen Vektoren  $\vec{z}$ ,  $\vec{\zeta}$  und  $\vec{\zeta}'$ . Für kleine Winkel liefert einfache Geometrie die Linsengleichung<sup>3</sup>

$$\vec{\zeta}' = -\frac{D_d}{D_{ds}}\vec{\zeta} + \frac{D_s}{D_{ds}}\vec{z} + D_d\vec{\alpha}(\vec{z}) \quad (6.3)$$

bzw.

$$\vec{\zeta} = -\frac{D_{ds}}{D_d}\vec{\zeta}' + \frac{D_s}{D_d}\vec{z} + D_{ds}\vec{\alpha}(\vec{z}) \quad (6.4)$$

wobei  $D_{ij} \equiv D_{ji}$ . Für die spätere Betrachtung wichtig ist der Fall  $\vec{\zeta}' = \vec{0}$  (Beobachter auf der optischen Achse). Hier lautet die Bildposition

$$\vec{\zeta} = \frac{D_s}{D_d}\vec{z} + D_{ds}\vec{\alpha}(\vec{z}) \quad (6.5)$$

Hängt  $|\vec{\alpha}|$  nur von  $|\vec{z}|$  ab und ist  $\vec{\alpha} \parallel \vec{z}$ —dies entspricht einer radialsymmetrischen Massenverteilung—dann, für den Fall  $\vec{\zeta} = \vec{0}$ , erhält man eine Gleichung für  $\vec{z}$ :

$$\vec{z} = -\frac{D_d D_{ds}}{D_s}\vec{\alpha}(\vec{z}) \quad (6.6)$$

Diese Punkte bilden einen Kreis um die optische Achse, den sogenannten „Einsteinring“. Der Winkelradius des Einsteinringes ist demnach

$$\theta_{\text{Einstein}} = \frac{D_{ds}}{D_s}\alpha \quad (6.7)$$

wobei  $\alpha = |\vec{\alpha}|$ . Setzt man  $\alpha$  aus Gl. 6.2 in diese Gleichung ein, erhält man

$$\theta_{\text{Einstein}} = \frac{D_{ds}}{D_s} \frac{4GM}{c^2 b} \quad (6.8)$$

Da aber  $b = \theta D_d$ , erhält man durch Einsetzen

$$\theta_{\text{Einstein}} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s}} \quad (6.9)$$

Manchmal ist es hilfreich, die Linsengleichung in Winkelkoordinaten zu schreiben:

$$\vec{\theta}'_s = \vec{\theta} + \vec{\alpha}^* \quad (6.10)$$

wo  $\vec{\theta}'_s := \frac{\vec{\zeta}'}{D_s}$ ,  $\vec{\theta} := \frac{\vec{z}}{D_d}$  und  $\vec{\alpha}^* := \frac{D_{ds}}{D_s}\vec{\alpha}$ . Setzt man  $\alpha$  aus Gl. 6.2 ein, erhält man

$$\vec{\theta}'_s = \vec{\theta} \pm \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s}} \quad (6.11)$$

so daß es in allgemeinen 2 Bilder gibt. (Für  $\vec{\theta} = 0$  erhält man natürlich wieder die Gleichung für den Einsteinring.) In der Wirklichkeit hat man natürlich nicht mit Punktquellen zu tun, sondern mit Quellen endlicher Größe. Sucht man nach Punkten in der Quellenebene innerhalb eines Quellenradius (der natürlich viel kleiner als die Beobachtungsauflösung sein kann), für die die Linsengleichung erfüllt ist, dann erhält man zwei Scharen von Lösungen. Das Verhältnis der Zahl der jeweiligen Lichtstrahlen

<sup>3</sup>Siehe, z.B., (in etwas anderer Notation) [SEF, S. 168].

(gleichmäßig in der Linsenebene verteilt) der beiden Bilder ergibt die relative Verstärkung. Ohne Beweis<sup>4</sup> sei hier bemerkt, daß für eine Punktmasse die relative Verstärkung  $\approx 1$  nur für eine Quellenposition innerhalb des durch Gl. 6.7 definierten Kreises ist, so daß *die Größe des Einsteinringes den Bereich angibt, in dem beobachtbare Doppelbilder möglich sind*. Es ist daher naheliegend für statistische Untersuchungen einen *Wirkungsquerschnittes  $\pi a^2$  für Mehrfachbilder* zu definieren, wobei  $a$  gegeben ist durch

$$a := \theta_{\text{Einstein}} D_d \quad (6.12)$$

Für die Punktmassenlinse ist also  $a \sim \sqrt{M}$  bzw. hängt der Wirkungsquerschnitt *linear* von der Masse ab. Das bedeutet, wenn man über die Linsenmassenfunktion integriert, daß die *Massenverteilung* keine Rolle für die totale optische Tiefe spielt, so lange man die endliche Beobachtungsgenauigkeit vernachlässigen darf.

## ii. Statischer euklidischer Fall für die singuläre isotherme Sphäre

Eine wichtige Massenverteilung ist die der singulären isothermen Sphäre, denn sie gilt als erste Näherung für die Massenverteilung elliptischer Galaxien. Dies wird durch Beobachtung bestätigt, ist aber auch theoretisch zu verstehen, denn die singuläre isotherme Sphäre erzeugt ein Potential, in dem die Massenelemente sich bewegen müssen, um wiederum eine singuläre isotherme Sphäre als Massenverteilung zu erzeugen. Das Potential ist also selbstkonsistent [Binney & Tremaine].

Die Massenverteilung der singulären isothermen Sphäre (SIS) lautet

$$\rho(r) = \frac{v^2}{2\pi G r^2} \quad (6.13)$$

wobei  $r$  der Abstand vom Mittelpunkt ist,  $v$  die 1-dimensionale Geschwindigkeitsdispersion und  $G$  die Gravitationskonstante. (Siehe, z.B. [Binney & Tremaine].) Hieraus folgt für die (projizierte) Flächenmasseendichte  $\Sigma$

$$\Sigma(b) = \frac{v^2}{2Gb} \quad (6.14)$$

wobei  $b$  ( $\neq r$ !) mit dem Impaktparameter in Gl. 6.2 gleichgesetzt werden kann. Entscheidend für die Lichtablenkung ist die Masse innerhalb  $b$  (Symmetrie beachten!), die gegeben ist durch

$$M(b) = \int_0^{2\pi} \int_0^b \Sigma(b) b db d\phi = \frac{\pi v^2 b}{G} \quad (6.15)$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gl. 6.2, so erhält man

$$\alpha = 4\pi \frac{v^2}{c^2} \quad (6.16)$$

Bemerkenswert an diesem Ergebnis ist, daß *der Betrag des Ablenkungswinkels von dem Impaktparameter unabhängig ist*, und natürlich auch konstant.

<sup>4</sup>Siehe, z.B. [SEF, S. 36–37]

### iii. Scheibe konstanter Dichte

Eine andere Massenverteilung, die wichtig ist (siehe Kapitel 3 Abschnitt d), ist die Scheibe konstanter Flächenmassendichte. Hier ist die (2-dimensionale) Massendichte konstant, also

$$\Sigma(\vec{z}) = \text{konstant} \quad (6.17)$$

wobei  $\Sigma$  die (2-dimensionale) Flächenmassendichte ist. Damit ist, mit  $\vec{\zeta} = \vec{\zeta}' = \vec{0}$ ,

$$\alpha = - \int_{\vec{0}}^{\vec{z}} \frac{4G\Sigma(\vec{z})}{c^2 z} dz \quad (6.18)$$

Entscheidend für die Ablenkung ist die Masse innerhalb des Impaktparameters,  $m(z)$ , wo  $z = |\vec{z}|$ . Da aber

$$m(z) = \Sigma\pi z^2 \quad (6.19)$$

ist und aus Symmetriegründen der Betrag der Ablenkung an der Stelle  $z$  nur vom Abstand von der optischen Achse abhängt und entlang der Verbindungslinie zwischen beiden zeigt, ist

$$\alpha = - \frac{4\pi G\Sigma}{c^2} \vec{z} \quad (6.20)$$

Der Ablenkwinkel ist also *proportional* zu dem Abstand von der optischen Achse und zeigt auf diese zu. Dies entspricht einer normalen Sammellinse. Für den Fall *negativer* Flächenmassendichte (bezogen auf einen Hintergrund, der nicht = 0 ist) erhält man eine Ablenkung, die von der optischen Achse wegzeigt und für die Divergenz (verglichen mit dem homogenen Fall) der Lichtstrahlen in einem inhomogenen Universum ( $\eta < 1$ ) verantwortlich ist. Man kann leicht sehen, daß solche Entfernungen *größer* sind als die entsprechenden Entfernungen in einem homogenen Universum, aber die genaue Abweichung hängt sowohl vom Weltmodell als auch von den Rotverschiebungen ab (Kapitel 3 Abschnitt d).

### iv. Verallgemeinerung für kosmologische Entfernungen

Die bisherigen Betrachtungen gelten für den statischen euklidischen Fall. Bei fast allen Anwendungen des Gravitationslinseneffekts hat man aber mit kosmologischen Entfernungen zu tun. Weil man auf Entfernungen angewiesen ist, die über Winkelgrößen definiert sind, sind die richtigen Entfernungen die Winkelgrößenentfernungen (*angular size distances*). Im kosmologischen Fall muß man also Gl. 6.3 wie folgt schreiben:

$$\vec{\zeta}' = - \frac{D_{do}}{D_{ds}} \vec{\zeta} + \frac{D_{so}}{D_{ds}} \vec{z} + D_{do} \vec{\alpha}(\vec{z}) \quad (6.21)$$

weil  $D_{ij} \neq D_{ji}$ . Berücksichtigt man, wie in Kapitel 3 gezeigt, die Beziehung  $D_{ij} = D_{ji} \frac{1+z_i}{1+z_j}$ , kann man die Linsengleichung für den allgemeinen kosmologischen Fall so schreiben:

$$\vec{\zeta}' = \left( - \frac{D_d}{D_{ds}} \vec{\zeta} + \frac{D_s}{D_{ds}} \vec{z} + D_d \vec{\alpha}(\vec{z}) \right) (1 + z_d) \quad (6.22)$$

Die einzige Änderung ist der  $1 + z_d$  Term. Die Gleichung für  $\vec{\zeta}$

$$\vec{\zeta} = - \frac{D_{ds}}{D_d} \vec{\zeta}' + \frac{D_s}{D_d} \vec{z} + D_{ds} \vec{\alpha}(\vec{z}) \quad (6.23)$$

ändert ihre Form nicht.<sup>5</sup> Für  $\vec{\zeta}^i = 0$  erhält man schließlich, wie oben gezeigt,

$$\vec{\zeta} = \frac{D_s}{D_d} \vec{z} + D_{ds} \vec{\alpha}(\vec{z}) \quad (6.24)$$

Der Ausdruck für die Größe des Einsteinringes

$$\theta_{\text{Einstein}} = \frac{D_{ds}}{D_s} \alpha \quad (6.25)$$

ist ebenfalls unverändert.

## Zusammenfassung

- Die Lichtablenkung einer Punktmasse läßt sich leicht beschreiben. Dies ist im Rahmen der geometrischen Optik möglich, und erlaubt die Definition eines Wirkungsquerschnittes für die Erzeugung von Mehrfachbildern.
- Man kann den Ausdruck für eine Punktmasse über eine beliebige Massenverteilung integrieren. Bei der singulären isothermen Sphäre, die aus anderen Gründen als plausibles Galaxienmodell bevorzugt wird, ergibt sich ein *konstanter Ablenkwinkel, der unabhängig von der Quellenposition ist*.
- Eine Scheibe konstanter Dichte hat einen Ablenkwinkel proportional zu der Entfernung zur optischen Achse, also wie eine herkömmliche Sammellinse.
- Man kann die Linsengleichung für kosmologische Entfernungen verallgemeinern. Dabei sind die richtigen Entfernungen die Winkelgrößenentfernungen (*angular size distances*).

---

<sup>5</sup>Dies ist zunächst vielleicht nicht klar, denn aus Symmetriegründen könnte man vielleicht erwarten, daß die  $D_d$ - bzw.  $D_{od}$ - Terme  $D_{do}$  heißen sollten. Die Situation ist aber nicht vollkommen symmetrisch, da die Ausbreitungsrichtung des Lichtes festgelegt ist—uns interessiert hier nicht, was ein Beobachter bei  $z = z_s$  sieht.



# Kapitel 7

## Gravitationslinsen und Kosmologie<sup>1</sup>

### a. Die Laufzeitdifferenz und $H_0$

#### i. Ausgangspunkt

Die Linsengleichung (Gl. 6.10) beinhaltet nur dimensionslose Größen, wenn die Entfernungen  $D_{ij}$ , wie üblich, in Einheiten der Hubble-Konstanten ausgedrückt werden. Weil bis jetzt alle Beobachtungsgrößen dimensionslos sind, ist es unmöglich, eine absolute Skalierung vorzunehmen. Es gibt aber doch eine dimensionsbehaftete Größe, die man messen kann, nämlich den Laufzeitunterschied zwischen mehreren Bildern einer Quelle, und man kann im Prinzip dadurch die absolute Skalierung bestimmen, die dann die Linsenentfernung ergibt. Da die Rotverschiebung bekannt ist,<sup>2</sup> kann man so die Hubble-Konstante bestimmen [Refsdal 66a, Borgeest 83, Borgeest 85].

#### ii. Ergebnisse

Man muß natürlich ein mehr oder weniger eindeutiges Modell für das Gravitationslinsensystem haben, bei dem man die Laufzeitdifferenz mißt. Zur Zeit ist dies wahrscheinlich nur (bedingt) für den Doppelquasar 0957 + 561 der Fall. Man kommt auf Werte zwischen 40 und 110, was zunächst nichts bringt gegenüber den klassischen Methoden, aber dies ist trotzdem ein gewaltiger Beweis dafür, daß es weder in der Gravitationslinsentheorie noch in der klassischen theoretischen Kosmologie große Unsicherheiten gibt. (Siehe hierzu auch [SEF, Abschnitt 2.5.9].) Angesichts der Tatsache, daß diese Methode einen völlig anderen Ansatz darstellt, ist es beruhigend, daß die Übereinstimmung so groß ist (was natürlich die klassischen Methoden bestätigt).

---

<sup>1</sup>In den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels werden die entsprechenden Themen nur kurz vorgestellt. Für ausführlichere Darstellungen, siehe, z.B. [Refsdal 64b, Borgeest 85, Kayser 82, Kayser & Refsdal 83].

<sup>2</sup>Sie muß natürlich auch klein genug sein, daß man „im linearen Bereich“ ist und so das einfache, vom kosmologischen Modell unabhängige, Hubble-Gesetz anwenden kann.

### iii. Vor- und Nachteile

Der Vorteil dieser Methode ist, daß sie sich auf *ein* System bezieht, während fast alle anderen Methoden, zumindest in der Praxis, statistischer Natur sind. Sie ist auch, wie schon 1964 von Refsdal erwähnt, unabhängig von Entwicklungseffekten. Der Nachteil bei dieser Methode ist die Messung der Laufzeitdifferenz selbst. Die meisten Quasare, die als Quellen dienen, sind intrinsisch nicht besonders variabel. Zusätzlich gibt es das Problem der Unregelmäßigkeit der Beobachtungszeiten und die Möglichkeit, daß die Variabilität nicht intrinsisch, sondern durch *microlensing* verursacht sein kann. Diese Methode wird also in den nächsten Jahren wahrscheinlich keinen besseren Wert für  $H_0$  liefern. Nötig ist ein viel häufigeres Beobachten, so daß man sowohl mehr oder weniger lückenlose Lichtkurven hat als auch die Möglichkeit, *microlensing* zu erkennen. Auch wichtig ist, daß man mehrere Systeme beobachtet.

## b. Die Laufzeitdifferenz und andere kosmologische Parameter

### i. Ausgangspunkt

Die Laufzeitdifferenz hängt in erster Ordnung von der Hubble-Konstanten ab; erst in zweiter Ordnung spielen die anderen kosmologischen Parameter eine Rolle. Kennt man die Hubble-Konstante aus anderen Gründen, und hat man Beobachtungen und Modelle, die genau genug sind, kann man im Prinzip Aussagen über das kosmologische Modell machen; bei mehreren Systemen ist dies sogar ohne Kenntnis von  $H_0$  möglich [Refsdal 66a, Kayser 82, Kayser & Refsdal 83].

### ii. Ergebnisse

Man kann heute nicht einmal versuchsweise diese Methode anwenden.

### iii. Vor- und Nachteile

Bei bekannter Hubble-Konstante hat man auch hier den Vorteil, daß die Methode sich auf *ein* System bezieht. Auf jeden Fall ist sie unabhängig von Entwicklungseffekten. Es gibt zwei prinzipielle Nachteile dieser Methode der Bestimmung kosmologischer Parameter. Der erste ist, daß das kosmologische Modell nur eine „Störung zweiter Ordnung“ ist. Der zweite ist, daß der Einfluß des  $\eta$ -Parameters i.a. viel größer ist als der der „interessanteren“ kosmologischen Parameter  $\lambda_0$  und  $\Omega_0$  [Kayser 82, Kayser & Refsdal 83].

## c. Statistische Ansätze

### i. Einleitung

Wovon hängt die Zahl der beobachteten Gravitationslinsensysteme mehrfach abgebildeter Quellen (im folgenden „Mehrfachquellen“) ab? Für ein  $z_d$ -Intervall bei festem  $z_s$ , bekannter Quellenhelligkeit und bekannter Galaxienmasse und -art hängt dies von der Zahl der Galaxien dieser Masse und dieses Typs in diesem  $z$ -Intervall sowie von dem Wirkungsquerschnitt einer

solchen Galaxie ab.<sup>3</sup> Interessant ist, daß *beide Faktoren von dem kosmologischen Modell abhängen und zwar so, daß sie sich für viele Modelle gegenseitig verstärken.*

Um auf die Gesamtzahl zu kommen, muß man über die Massenfunktionen der verschiedenen Galaxientypen integrieren,<sup>4</sup> über die verschiedenen Galaxientypen summieren, über die Leuchtkraftfunktion der Quellen (die von  $z_s$  abhängt) integrieren (gegebenenfalls getrennt für verschiedene Quellentypen und anschließend über alle Typen summieren), über  $z_s$  integrieren und schließlich über  $z_d$  integrieren.

## ii. Normierungsprobleme und *amplification bias*

Zunächst fällt auf, daß man wahrscheinlich sehr viele Unsicherheiten durch Normierung hineinbringt. Man hat also mindestens vier Integrale (mehr, falls man die Leuchtkraftfunktion für Galaxien bzw. Quellen in mehrere typenabhängige Leuchtkraftfunktionen aufspaltet), die alle natürlich normiert werden müssen. Hinzu kommt, daß viele Größen (Entfernungen, Volumenelemente für Zahlendichten usw.) in Einheiten von (Potenzen von)  $H_0$  gemessen werden, so daß unsere Unsicherheit hinsichtlich der Hubble-Konstanten sich hier bemerkbar macht.<sup>5</sup>

Ein anderes Problem ist, daß wir die wahre Quasarleuchtkraftfunktion nicht kennen. Es ist möglich, daß die beobachtete Leuchtkraftfunktion erheblich von dem statistischen Gravitationslinseneffekt beeinflusst ist [Turner 80]. Um den *amplification bias* berücksichtigen zu können, muß man aber die wahre Leuchtkraftfunktion kennen. Es herrscht nicht einmal Übereinstimmung bezüglich der *beobachteten* Quasarleuchtkraftfunktion, wie der Widerspruch verschiedener Arbeiten zu diesem Thema zeigt [BSP 88, Hawkins & Veron 93].

Beide dieser Tatsachen waren wichtige Gründe für mich, mich auf Größen zu konzentrieren, die unabhängig von der Quasarleuchtkraftfunktion sind.

## iii. Bildabstand

Der Vollständigkeit halber sei hier erwähnt, daß der Bildabstand prinzipiell benutzt werden kann, um verschiedene kosmologische Modelle voneinander zu unterscheiden [Paczynski & Gorski 81, Alcock & Anderson 86, GPL 89, TOG 84], aber die Unterschiede sind viel zu klein, um in der Praxis angewendet zu werden [FFKT 92, Kochanek 92].

## iv. Kosmische Hintergrundstrahlung

Im Prinzip ist die Größe der durch den statistischen Gravitationslinseneffekt verursachten Anisotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung weltmodellabhängig, aber dieser Effekt ist zu klein, um beobachtet zu werden [FFKT 92].<sup>6</sup>

<sup>3</sup> gewichtet mit der Beobachtungswahrscheinlichkeit; dazu mehr später

<sup>4</sup> und dabei beachten, daß man scheinbare Helligkeiten statt Massen beobachtet

<sup>5</sup> Es kommt natürlich darauf an, welche Größen man in welchen Einheiten betrachtet und ob die Normierungsgrößen absolut oder bezogen auf  $H_0$  bestimmt worden sind.

<sup>6</sup> [FFKT 92] haben zunächst nach Größen gesucht, die sowohl stark vom Weltmodell als auch schwach von „uninteressanten“ Unsicherheiten abhängen. Ihrer Ansicht nach ist die hohe beobachtete Häufigkeit von Quasar-Galaxien-Assoziationen auch nicht mit Weltmodellen mit großen  $\lambda_0$ -Werten zu erklären, aber die Komplexität dieses Gebietes macht die pauschale Aussage, daß man aus solchen beobachteten Überhäufigkeiten nichts

## v. Linsengalaxienrotverschiebungsstatistik

Es ist sicher ein guter Brauch in der Beobachtenden Kosmologie, so viele *Beobachtungsgrößen* und so wenige theoretische Annahmen wie möglich zu benutzen. Fragt man nach der *Wahrscheinlichkeitsverteilung in  $z_d$* , also die Wahrscheinlichkeit, wenn eine Mehrfachquelle vorliegt, bei einem bestimmten  $z_d$  eine Linsengalaxie zu finden, wenn folgende Beobachtungsgrößen vorliegen

- Rotverschiebung der Quelle  $z_s$
- Bildabstand  $\Delta\theta$
- Galaxientyp

so findet man, daß diese Größe stark von dem kosmologischen Modell abhängt [TOG 84, Kochanek 92, FFKT 92, Krauss & White 92a]. Sowohl die über  $z_d$  integrierte Gesamtwahrscheinlichkeit als auch die Form der Kurve der differentiellen Wahrscheinlichkeit hängt stark vom kosmologischen Modell ab. Die Gesamtwahrscheinlichkeit hängt natürlich auch von der oben beschriebenen Unsicherheit der Normierung ab, aber die Verteilung in  $z_d$  ist unabhängig davon.

Umgekehrt kann man die Wahrscheinlichkeit berechnen, daß ein bestimmtes kosmologisches Modell der Wirklichkeit entspricht, wenn die Rotverschiebungen einiger Linsengalaxien bekannt sind. Das ist der Gegenstand der Arbeit. Die theoretischen Grundlagen werden in Teil C aufgezeigt.

Alle bisher hierzu veröffentlichten Arbeiten [TOG 84, Kochanek 92, FFKT 92, Krauss & White 92a, Jaroszyński 92] haben sich dabei darauf beschränkt, kosmologische Modelle mit  $\lambda_0 = 0$  und/oder  $k = 0$  (oder sogar, natürlich als Grenzfall gedacht,  $\Omega_0 = 0$ ) zu betrachten. Die Voraussetzung  $\lambda_0 = 0$  wird (wenn überhaupt) meistens damit begründet, daß man dies der Einfachheit halber annimmt oder daß man ästhetische Gründe für die Annahme hat. Es ist sicher nicht gerechtfertigt, „der Einfachheit halber“  $\lambda_0 = 0$  anzunehmen, denn es handelt sich hierbei keinesfalls um eine *Näherung* sondern um eine *Vereinfachung*—es ist sogar der Fall, daß die optische Tiefe von allen kosmologischen Parametern am stärksten<sup>7</sup> von  $\lambda_0$  abhängt. Meine persönlichen Gründe, nicht aus ästhetischen Gründen  $\lambda_0 = 0$  zu setzen, habe ich bereits erwähnt (Kapitel 1 Abschnitt c Punkt ii).

Es wird auch manchmal  $k = 0$  vorausgesetzt, weil in letzter Zeit  $k = 0$  als wahrscheinlich erscheint als Folge von inflationären Modellen.

Zweifelsohne aber sind die vom kosmologischen Modell abhängigen Größen, die man berechnen muß, erheblich leichter zu berechnen, wenn einer (oder mehrere) der Spezialfälle ( $\lambda_0$ ,  $\Omega_0$  oder  $k = 0$ ) vorliegt. Selbst wenn man keine integrierte, sondern nur die differentielle, optische Tiefe betrachtet, machen sich Rechenschwierigkeiten besonders bei der Berechnung der Winkelgrößenentfernungen bemerkbar. Für die Spezialfälle gibt es einfache analytische Formeln; für den allgemeinen Fall sind diese halb-analytisch mit modernen Methoden schnell zu berechnen [Feige 92], aber der entsprechende Formalismus scheint wenig verbreitet zu sein. Läßt man die Bedingung  $\eta = 1$  fallen, dann sind Winkelgrößen- und Leuchtkraftentfernungen i.a. nicht analytisch gegeben. Zum Glück hat Kayser [Kayser 85]

---

über das Weltmodell lernen kann, unmöglich.

<sup>7</sup>Dies wird in Kapitel 12 quantifiziert.

eine Differentialgleichung hergeleitet, die relativ leicht wirksam numerisch zu implementieren ist, die also eine wichtige Voraussetzung für das Gelingen dieser Arbeit gewesen ist.

Was mein Vorhaben also von bisherigen auf diesem Gebiet unterscheidet [TOG 84, Kochanek 92, FFKT 92, Krauss & White 92a, Jaroszyński 92] sind im wesentlichen folgende Punkte:

**alle Modelle** Statt nur einige Beispielm Modelle zu rechnen, versuche ich den gesamten, aus anderen Gründen als realistisch anzusehenden, Parameterraum dicht genug zu untersuchen, daß alle wesentlichen Effekte gesehen werden.

**$\eta$ -Paramete** Dabei beschränke ich mich nicht auf homogene Weltmodelle.

**Verteilung** Ich betrachte die Verteilung der Linsengalaxien in  $z_d$ , nicht die Gesamtzahl der Gravitationslinsen, weil dies ein vergleichbar gutes wenn nicht besseres Maß für die Bestimmung des Weltmodells aus Gravitationslinsenstatistik ist, und weil man bei der Betrachtung dieser Größe erheblich weniger Unsicherheit durch wenig bekannte Normierungsfaktoren hat, die immer eine Rolle spielen, wenn man integrierte Größen betrachtet. Außer [Kochanek 92] konzentrieren sich die meisten Untersuchungen (z.B. [Surdej *et.al.* 93]) auf integrierte Größen.

**Auswahleffekte** Ich versuche ansatzweise für endliche Beobachtungsgenauigkeit zu korrigieren. Dies ist weniger wichtig als bei der Betrachtung integrierter Größen, aber, wie ich zeigen werde, kann trotzdem zu erheblicher Verfälschung des Ergebnisses führen.

**Konsistenz** Ich überprüfe, ob die von mir betrachteten Weltmodelle mit anderen Kenntnissen (z.B. über das Weltalter) vereinbar sind.

Später (Kapitel 9) werde ich zeigen, daß Entwicklungseffekte nicht so störend sind wie bei Methoden der klassischen Beobachtenden Kosmologie.

## Zusammenfassung

- In Prinzip reicht eine Messung der Laufzeitdifferenz aus, um aus Beobachtungen und einem plausiblen Modell eines Gravitationslinsensystems die Hubble-Konstante zu bestimmen. Zur Zeit überwiegen praktische Schwierigkeiten, aber die grobe Übereinstimmung zeigt die Macht solcher nicht klassischen Methoden zur Bestimmung kosmologischer Parameter, die durch ihre Unabhängigkeit zusätzlich eine Bestätigung des gesamten theoretischen Rahmens geben.
- Außer  $H_0$  kann man in Prinzip  $\lambda_0$ ,  $\Omega_0$  und  $\eta$  bestimmen, aber dies setzt (meistens) Kenntnis über  $H_0$  voraus, ist lediglich ein Effekt zweiter Ordnung und liefert mehr Auskunft über  $\eta$  als über die „interessanteren“ Parameter.
- Obwohl viele statistische Ansätze von vornherein wenig geeignet sind, um kosmologische Parameter zu bestimmen während andere z.Z. wegen zusätzliche Unsicherheiten ausscheiden, sieht die Linsengalaxienrotverschiebungsstatistik vielversprechend aus. Besonders wichtig hierbei ist sowohl die Unabhängigkeit von Normierungsproblemen als auch der geringe Einfluß von Entwicklungs- und Auswahleffekten.



## Kapitel 8

# Diskussion der in dieser Arbeit verwendeten Modelle

### a. Kurzbeschreibung der Modelle

#### i. Quasare

Für die Zwecke dieser Arbeit reicht es vollkommen aus, Quasare als Punktquellen zu betrachten. Für praktische Zwecke ist es nützlich, daß sie meist durch ihre Farben bzw. Spektren von den Linsengalaxien zu unterscheiden sind. Wichtig ist auch, daß es eine Möglichkeit gibt, ihre Rotverschiebungen zu messen. Der Formalismus gilt aber allgemein; er ist nicht auf Quasare beschränkt. Es ist also kein Problem, wenn die Quelle kein Quasar, sondern ein anderes Objekt, z.B. eine Galaxie, ist. Eine aufgelöste Struktur der Quelle ist ebenfalls kein Problem, solange man etwas wie einen Bildabstand definieren kann.

#### ii. Galaxien

Galaxien werden als singuläre isotherme Sphären modelliert. Es ist auch wichtig, ihre Rotverschiebungen messen und natürlich sie durch Farben bzw. Spektren von den Quellen unterscheiden zu können. Es wird angenommen, daß die Schechter-Leuchtkraftfunktion, die noch als  $z$ -unabhängig angenommen wird, die Wirklichkeit gut beschreibt und daß Leuchtkraft und Geschwindigkeitsdispersion durch die Faber-Jackson- bzw. Tully-Fisher-Beziehung verknüpft sind.

### b. Näherungsmodelle

#### i. Unterscheidung zwischen Näherung und Vereinfachung

In einer Arbeit wie dieser, wo der Schwerpunkt auf Kosmologie liegt, ist es natürlich unmöglich, alle Feinheiten der Galaxien- bzw. Quasarphysik

berücksichtigen zu können. Deshalb betrachte ich absichtlich Größen, die stärker von der Kosmologie abhängen. Um überhaupt in einer vernünftigen Zeit zu Ergebnissen zu kommen, muß ich natürlich Näherungen machen. Ich hoffe dabei, Vereinfachungen vermieden zu haben, die einen qualitativen Einfluß auf die Ergebnisse hätten. Näherungen sollen kleine Abweichungen darstellen, die entweder gut abgeschätzt werden können bzw. vernachlässigbar sind gegenüber einer Genauigkeit, die ausreicht, um interessante Ergebnisse zu bekommen (also in dieser Arbeit vergleichbar mit der Genauigkeit anderer Methoden zur Bestimmung des Weltmodells).

## ii. Ergebnisse verschiedener Untersuchungen zu Näherungen

In diesem Abschnitt versuche ich, meine Näherungen zu rechtfertigen.

### Galaxien: endliche Kernradien

Eine singuläre isotherme Sphäre ist aus zwei Gründen ein unrealistisches Modell für eine Galaxie:

- (1) Die Gesamtmasse divergiert für  $d \rightarrow \infty$
- (2) Die Flächenmassendichte divergiert für  $d \rightarrow 0$

wobei  $d$  der Abstand vom Zentrum ist. Der erste Punkt bereitet gar keine Schwierigkeit (unter Voraussetzung der Kugelsymmetrie), denn entscheidend für die Ablenkung ist lediglich die Masse *innerhalb* des Impaktparameters. Ein Abschneiden bei  $d > a$  wird also überhaupt nicht bemerkt [SEF, Abschnitt 8.1.4].

Der zweite Punkt ist etwas problematischer, denn eine Abweichung von der singulären isothermen Sphäre in dem Kernbereich, wo sich ein Großteil der für die Ablenkung verantwortlichen Masse befindet, wirkt sich mit Sicherheit auf die Größe des Einsteinrings aus. Dieser Punkt ist *sehr* ausführlich von Krauss und White untersucht worden [Krauss & White 92a], mit dem erfreulichen Ergebnis, daß man relativ leicht für den Effekt eines endlichen Kernradius korrigieren kann, denn der Nettoeffekt ist eine Verkleinerung der integrierten optischen Tiefe für große (realistische)  $z_s$ -Werte um einen Faktor  $\approx 2,5$ – $3$  *unabhängig von der genauen Leuchtkraft-Kernradius-Beziehung*. Noch viel wichtiger ist die Tatsache, daß die differentielle optische Tiefe *so gut wie vollständig unabhängig von der Form der Leuchtkraft-Kernradius-Beziehung* ist. (Dies gilt sowohl für  $\eta = 0$  als auch für  $\eta = 1$ .) Insbesondere ist die Annahme  $r_{\text{Kern}} = 0$  (abgesehen von der in diesem Zusammenhang uninteressanten Normierung) genau so gut wie jede andere. Der endliche Kernradius, der alle Berechnungen erheblich schwieriger macht, macht sich lediglich als zusätzlicher Normierungsfaktor bemerkbar. Das heißt, wenn man sich für die integrierte optische Tiefe interessiert, hat man eine Verkleinerung um einen Faktor  $\approx 3$  mit einer Unsicherheit, die viel kleiner ist als die anderer Normierungsfaktoren. Betrachtet man, so wie ich in dieser Arbeit, die differentielle Verteilung, dann *spielt der endliche Kernradius überhaupt keine Rolle* [Krauss & White 92a, Figure 11].<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Krauss und White haben lediglich  $k = 0$  Modelle betrachtet, aber man kann davon ausgehen, daß der Effekt für alle kosmologische Modelle gilt, denn er ist ein lokaler Effekt (hat mit der Massenverteilung der Galaxien zu tun), während die Unterschiede für verschiedene Kosmologien durch das Volumenelement sowie durch Unterschiede des Wirkungsquerschnittes als Folge der Unterschiede in den Entfernungen  $D_{ij}$  zustandekommen.



### Galaxien: Abweichung von der Kugelsymmetrie

Eine singuläre isotherme Sphäre als Linse erzeugt grundsätzlich nur zwei Bilder; viele bekannte Gravitationslinsensysteme besitzen aber mehr als zwei Bilder.<sup>2</sup> Dies kann verhältnismäßig leicht bei fast allen Linsenmodellen durch eine kleine Störung der Symmetrie erzeugt werden (siehe, z.B. [Narayan & Wallington 92]). Es ist jedoch eine erlaubte Näherung für diese Arbeit, die Linsengalaxien als kugelsymmetrisch zu betrachten, denn interessant ist nicht die Zahl der Bilder sondern der Bildabstand. Wir haben gesehen, daß der Bildabstand für eine singuläre isotherme Sphäre dem Radius des Einsteinringes entspricht; hat man mehrere Bilder, dann (für kleine Symmetriestörungen, wie beobachtet werden) entspricht der Abstand der Bilder voneinander in etwa dem Radius des Einsteinrings [Narayan & Wallington 92].

### Galaxien: verschiedene Typen

Es gibt natürlich außer elliptischen Galaxien auch andere Galaxientypen. Die Massenverteilung in elliptischen Galaxien (vor allem wenn man Näherungen machen darf) ist einfach genug, um eine ausführliche statistische Betrachtung möglich zu machen. Irreguläre Galaxien sind wohl zu klein, um beobachtbare Mehrfachquellen zu erzeugen, und die *Massenverteilung* einer Spiralgalaxie kann vielleicht auch in erster Näherung als singuläre isotherme Sphäre betrachtet werden (was zu den beobachteten flachen Rotationskurven führt). Man hat lediglich einen anderen Exponenten in der Masse-Leuchtkraft-Beziehung. Es zeigt sich aber, daß die Zahl der Spirale als Linsengalaxien verhältnismäßig klein sein sollte [FFKT 92, Krauss & White 92a, Kochanek 92], so daß die Statistik auf jeden Fall von elliptischen Galaxien dominiert wird.

### Galaxien: Entwicklungseffekte

Entwicklungseffekte sind der Hauptgrund, weshalb die klassischen Methoden der Beobachtenden Kosmologie höchstens  $H_0$ , nicht aber die anderen kosmologischen Parameter, bestimmen können [Sandage 93b]. Dies liegt daran, daß die Effekte der anderen Parameter sich erst bei hohem  $z$  bemerkbar machen, und daß die *Helligkeit* der beobachteten Objekte eine große Rolle spielt. Da ich Linsengalaxien bei verhältnismäßig kleinen Rotverschiebungen betrachte,<sup>3</sup> sind von vornherein Entwicklungseffekte weniger wichtig. Entscheidend ist aber für diese Untersuchung die *Masse*, nicht die *Helligkeit*, der Linsengalaxien. (Die Helligkeit spielt nur eine Rolle, indem sie entscheidet, bis zu welcher Rotverschiebung eine Galaxie beobachtet

<sup>2</sup>Ist der Kernradius  $> 0$ , dann gibt es ein drittes Bild, das sich im Mittelpunkt der Linse befindet und eine Verstärkung  $< 1$  besitzt. Für einen unendlich kleinen Kernradius ist die relative Helligkeit dieses Bildes  $= 0$ . Im allgemeinen gilt, daß Linsen mit Singularitäten (Punktmasse, SIS) eine *gerade* Zahl von Bildern erzeugen, Linsen ohne Singularitäten eine *ungerade* Zahl; ist die Linse im Rahmen der Beobachtungsgenauigkeit singulär, dann ist das „zusätzliche“ Bild meist viel zu schwach, um beobachtet zu werden. Die Tatsache, daß man meist eine gerade Bildzahl beobachtet, ist also ein Hinweis darauf, daß Galaxienkernradien sehr klein sein müssen.

<sup>3</sup>Sowohl meine Methode als auch die klassischen Methoden verlangen, daß man die Rotverschiebungen der Galaxien kennt. Da ich Feldgalaxien betrachte, und nicht z.B. die hellsten Mitglieder eines Haufens, können Rotverschiebungen nur bei kleinerem  $z$  gemessen werden. Hinzu kommt, daß der verstärkte Quasar meist heller als die Galaxie ist, so daß die Helligkeit der Galaxie noch größer sein muß als bei einer Rotverschiebungsmessung einer isolierten Galaxie, was bedeutet (wenn alles andere gleich bleibt), daß die Rotverschiebung kleiner ist.

bzw. ihre Rotverschiebung gemessen werden kann.) Da *Massevolution* auf jeden Fall weniger ausgeprägt ist als *Leuchtkraftevolution*, zumindest bei Feldgalaxien mit kleinen Rotverschiebungen, dürfte die Störung durch Entwicklungseffekte für diese Arbeit vernachlässigbar sein.

### Galaxien: realistische Leuchtkraftfunktion

Es ist sicher nicht richtig, daß alle Galaxien sich durch eine Schechter-Leuchtkraftfunktion beschreiben lassen; es gibt verschiedene Leuchtkraftfunktionen für Haufen- und Feldgalaxien sowie für verschiedene Galaxientypen [BST 88]. Es ist aber für diese Arbeit keine zu grobe Näherung, elliptische (und Spiral-) Feldgalaxien durch die Schechter-Leuchtkraftfunktion zu beschreiben. Die Leuchtkraftfunktion ist deshalb wichtig, weil sie (in Verbindung mit der Faber-Jackson- bzw. Tully-Fisher-Beziehung) Auskunft über die relative Häufigkeit von Galaxien verschiedener Masse gibt. Die *genaue* Form der Verteilung ist weniger wichtig als die Tatsache, daß die Anzahl der Galaxien sehr schnell mit zunehmender Masse abnimmt.

Dies ist qualitativ anders als die Unsicherheiten der integrierten Linsenstatistik, die durch die unbekannt Form der Quasarleuchtkraftfunktion zustandekommen, denn ein „Knick“, wie bei [BSP 88], hätte sehr große Auswirkungen auf die integrierte Linsenstatistik.

### Galaxien: dunkle Materie

Entscheidend für diese Untersuchung ist die Annahme, daß die Geschwindigkeitsdispersion (der leuchtenden Materie) der Galaxie Auskunft über die Masse, die für die Lichtablenkung verantwortlich ist, gibt. Es ist aber nicht zwingend, daß die Geschwindigkeitsdispersion aller Materie der Galaxie mit der der leuchtenden Materie übereinstimmen muß. Insbesondere wäre ein massives Halo, was ausgedehnter als die leuchtende Materie ist, eine um den Faktor  $\sqrt{1,5}$  höhere Geschwindigkeitsdispersion als die beobachtete fordern [TOG 84, Gott 77]. Für die Fälle, die er betrachtet hat, hat Kochanek [Kochanek 92] gezeigt, daß der Einfluß des kosmologischen Modells viel größer ist als der des Massenmodells. Dies ist auch ein lokaler Effekt, wie ein endlicher Kernradius, so daß die Abweichungen des Modells von der Wirklichkeit wohl nicht vom kosmologischen Modell abhängig sind.

### Galaxien: Masse-Leuchtkraft-Beziehungen

Sicher sind die Tully-Fisher- bzw. Faber-Jackson-Beziehungen nur Näherungen, aber der Fehler, der durch die Benutzung dieser empirischen Beziehungen verursacht wird, ist sicher eine der kleinsten Unsicherheiten.

## Zusammenfassung

- Quasare (oder andere Quellen) dienen dieser Arbeit nur als entfernte Quellen. Es ist nicht nötig, mehr Wissen über sie voranzusetzen.
- Für diese Arbeit braucht man Galaxienmodelle, die analytisch zu behandeln sind, aber die Unsicherheiten dieser „üblichen Näherungen“ sind klein genug, um das Ergebnis nicht wesentlich zu verfälschen. (Eine Unsicherheit um einen Faktor 2 ist keine große Unsicherheit in der Kosmologie.) Ich modelliere Galaxien als singuläre isotherme Sphären

# Teil C

# Statistik

*Statistics is not a branch of mathematics.  
Press et.al., Numerical Recipes*



# Kapitel 9

## Optische Tiefe

### a. Definition

#### i. Voraussetzungen

Unter dem Begriff „optische Tiefe“ verstehe ich eine dimensionslose Größe, die die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Mehrfachbildern angibt. Der Begriff ist nicht wohl definiert innerhalb der Gravitationslinsentheorie [SEF, S. 39 (Fußnote)]; meine Definition stimmt mit der von [SEF] überein: „...the fraction of the sky covered by the Einstein circles of all lenses between us and sources at a specified distance“. Voraussetzungen für die Berechnung sind, daß es keine Überlappungen der Wirkungsquerschnitte einzelner Galaxien gibt, weder bei gleichem  $z_d$ <sup>1</sup> noch bei verschiedenem  $z_d$ .<sup>2</sup>

#### ii. Gleichungen

Man kann diese Definition der optischen Tiefe  $d\tau$  wie folgt quantifizieren:

$$d\tau = \frac{\text{„wirksame Fläche für Mehrfachbilder“}}{\text{Gesamtfläche}}$$

die gegeben ist durch

$$\frac{(\text{Zahl der Galaxien}) \times (\text{wirksame Fläche einer Galaxie})}{\text{Gesamtfläche}}$$

In einem  $z_d$ -Intervall ist dies

$$\frac{(\text{Zahl der Galaxien pro Volumen}) \times dl \times (\text{wirksame Fläche einer Galaxie})}{\text{Gesamtfläche}}$$

wobei  $dl$  ein Längenelement der *Lichtlaufzeitentfernung* ist.<sup>3</sup> Man muß also folgenden Ausdruck berechnen können, die die optische Tiefe *für eine feste*

<sup>1</sup> Dies entspräche einer komplizierteren Linse; in dieser Arbeit betrachte ich *einzelne Galaxien* als Linsen. (Dies bedeutet auch, daß ich nur Feldgalaxien betrachte, also keine Systeme, wo z.B. ein Galaxienhaufen eine wesentliche Rolle spielt, wie beim Doppelquasar 0957 + 561.)

<sup>2</sup> Dies entspräche einer Mehrfachablenkung; ich betrachte nur Systeme, wo die Linse sich in einer Ebene befindet.

<sup>3</sup> Dies entspricht einem Längenelement der metrischen Entfernung bei  $z = z_d$  zu der Zeit, als sich das Licht hier befand; siehe Kapitel 3.

Galaxienmasse angibt:<sup>4</sup>

$$d\tau = n_0(1 + z_d)^3 \pi a^2 c dt \quad (9.1)$$

wobei  $n_0$  die Zahlendichte der entsprechenden Galaxien bei  $x = 0$  ist,  $\pi a^2$  der Wirkungsquerschnitt einer Galaxie und  $c dt$  das Längenelement der Lichtlaufzeitentfernung angibt. Der Faktor  $(1 + z_d)^3$  berücksichtigt die durch die Expansion des Universums verursachte Abnahme der Zahlendichte.<sup>5</sup>

Aus Gl. 6.16 folgt, daß die Größe  $\pi a^2$  für die singuläre isotherme Sphäre gegeben ist durch

$$\pi a^2 = 16\pi^3 \left(\frac{v}{c}\right)^4 \left(\frac{D_d D_{ds}}{D_s}\right)^2 \quad (9.2)$$

Die Größe  $dt$  ist in Kapitel 2 zu finden:

$$dt = \frac{1}{H_0} \frac{1}{1 + z_d} \frac{1}{\sqrt{P(z_d)}} dz_d \quad (9.3)$$

wo  $P(z_d) = (1 + z_d)^2(\Omega_0 z_d + 1 - \lambda_0) + \lambda_0$ . Damit lautet der Ausdruck für die optische Tiefe für die Erzeugung von Mehrfachbildern durch singuläre isotherme Sphären:

$$\frac{d\tau}{dz_d} = n_0(1 + z_d)^3 16\pi^3 \left(\frac{v}{c}\right)^4 \left(\frac{D_d D_{ds}}{D_s}\right)^2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{1 + z_d} \frac{1}{\sqrt{P(z_d)}} \quad (9.4)$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von  $H_0$ , denn  $n_0$  wird üblicherweise in Einheiten von  $\left(\frac{H_0}{c}\right)^3$  gemessen, die Entfernungen  $D_{xy}$  in Einheiten von  $\frac{c}{H_0}$  aus den Rotverschiebungen berechnet.

In dieser Arbeit benutze ich den Ansatz Kochaneks [Kochanek 92]: für welche Weltmodelle stimmen die beobachteten Linsengalaxienrotverschiebungen mit der theoretisch berechneten Verteilung am besten überein? Man betrachtet wirkliche Systeme, also mit beobachteten Rotverschiebungen  $z_d$  und  $z_s$ , Abstand der Bilder  $2a$  und Linsengalaxientyp. Gl. 9.4 gibt die optische Tiefe für eine feste Galaxienmasse an; hält man den Bildabstand konstant, dann hängt die entsprechende Galaxienmasse (berechnet aus der Geschwindigkeitsdispersion  $v$ ) von  $z_d$  ab. Beobachtungen [Schechter 76] liefern folgende Leuchtkraftfunktion für Galaxien:

$$\frac{dn}{dL} = \frac{n^*}{L^*} \left(\frac{L}{L^*}\right)^\alpha \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right) \quad (9.5)$$

$n$  ist die Zahl der Galaxien und  $L$  die Leuchtkraft;  $n^*$  und  $L^*$  sind Normierungsgrößen. (Ich verwende den Wert  $\alpha = -1, 1$  von [EEP 88]) Die Leuchtkraft mit der Geschwindigkeitsdispersion  $v$  durch die Faber-Jackson- bzw. Tully-Fisher-Beziehung [Faber & Jackson 76, Tully & Fisher 77] gegeben ist:

$$\left(\frac{L}{L^*}\right) = \left(\frac{v}{v^*}\right)^\gamma \quad (9.6)$$

mit  $\gamma = 4$  für elliptische und S0-Galaxien und  $\gamma = 2.6$  für Spirale.  $v^*$  ist die Geschwindigkeitsdispersion einer  $L^*$ -Galaxie; ich verwende  $v^* = 276 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  für

<sup>4</sup>Siehe, z.B. [FFKT 92].

<sup>5</sup>Hier werden Entwicklungseffekte vernachlässigt.

elliptische Galaxien,  $v_* = 252 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  für S0-Galaxien<sup>6</sup> und  $v_* = 144 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  für Spirale. (Diese Werte stammen aus einer Analyse mehrerer Arbeiten zur Linsenstatistik [TOG 84, Krauss & White 92a, Jaroszyński 92, Kochanek 92]. Hierbei muß man, neben offensichtlichen Druckfehlern, beachten, daß bei manchen der Parameter  $(1,5)^{\frac{1}{2}}$  schon in der Definition der Geschwindigkeitsdispersion berücksichtigt worden ist bzw. daß manche Autoren die *beobachtete* Geschwindigkeitsdispersion und andere die der gesamten Materie meinen; der Faktor  $(1,5)^{\frac{1}{2}}$  spielt nur bei elliptischen Galaxien eine Rolle—dies ist in manchen Arbeiten unklar. (Man muß auch zwischen der *Rotationsgeschwindigkeit* und der *Geschwindigkeitsdispersion* einer Spiralgalaxie unterscheiden.) Meine Werte sind also konsistent mit allen Arbeiten zur Linsenstatistik wenn man diese Punkte berücksichtigt. Die genauen Werte sind aber nicht entscheidend; dies wurde für die Weltmodelle, die er betrachtet hat, von Kochanek gezeigt [Kochanek 92].

Drückt man  $v$  bzw.  $n_0$  durch  $L$  aus, erhält man

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial z_d \partial \frac{L}{L_*}} = n_* (1 + z_d)^2 16\pi^3 \left(\frac{v_*}{c}\right)^4 \left(\frac{L}{L_*}\right)^{\alpha + \frac{4}{\gamma}} \left(\frac{D_d D_{ds}}{D_s}\right)^2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{P(z_d)}} \exp\left(-\frac{L}{L_*}\right) \quad (9.7)$$

(Siehe auch [Kochanek 92].)

Um die optische Tiefe als Funktion von Beobachtungsgrößen zu erhalten, definiert man

$$\hat{a}_* := 4\pi \left(\frac{v_*}{c}\right)^2$$

und

$$\hat{a} := \hat{a}_* \left(\frac{v}{v_*}\right)^2 \frac{D_{ds}}{D_s}$$

Es ist also

$$a = \hat{a} D_d \quad (9.8)$$

$\hat{a}$  ist der Winkelradius des Einsteinringes bzw. die Hälfte des beobachteten Bildabstandes. Macht man eine Variablentransformation von  $\frac{L}{L_*}$  zu  $\frac{\hat{a}}{\hat{a}_*}$  und integriert über  $\delta(\hat{a} - \hat{a}_*)$ , erhält man nach einigen umfangreichen aber trivialen Rechnungen<sup>7</sup> den gewünschten Ausdruck für die optische Tiefe als Funktion von  $z_d$  und dem Weltmodell bei bekanntem Bildabstand  $2a$ , Quellenrotverschiebung  $z_s$  und Linsengalaxientyp:

$$\frac{d\tau}{dz_d} = 16\pi^3 n_* \left(\frac{v_*}{c}\right)^4 (1 + z_d)^2 \frac{\hat{a}}{\hat{a}_*} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}_*} \frac{D_s}{D_{ds}}\right)^{\frac{\gamma}{2}(1+\alpha)} D_d^2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{(1 + z_d)^2 (\Omega_0 z_d + 1 - \lambda_0) + \lambda_0}} \exp\left(-\left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}_*} \frac{D_s}{D_{ds}}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\right) \quad (9.9)$$

<sup>6</sup>Bei den elliptischen und S0-Galaxien entsprechen diese Werte *beobachteten* Geschwindigkeitsdispersionen von 225 bzw.  $206 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ ; der Unterschied kommt von dem Faktor  $\sqrt{1,5}$ —siehe [TOG 84, Gott 77].

<sup>7</sup>Siehe Anhang 1.

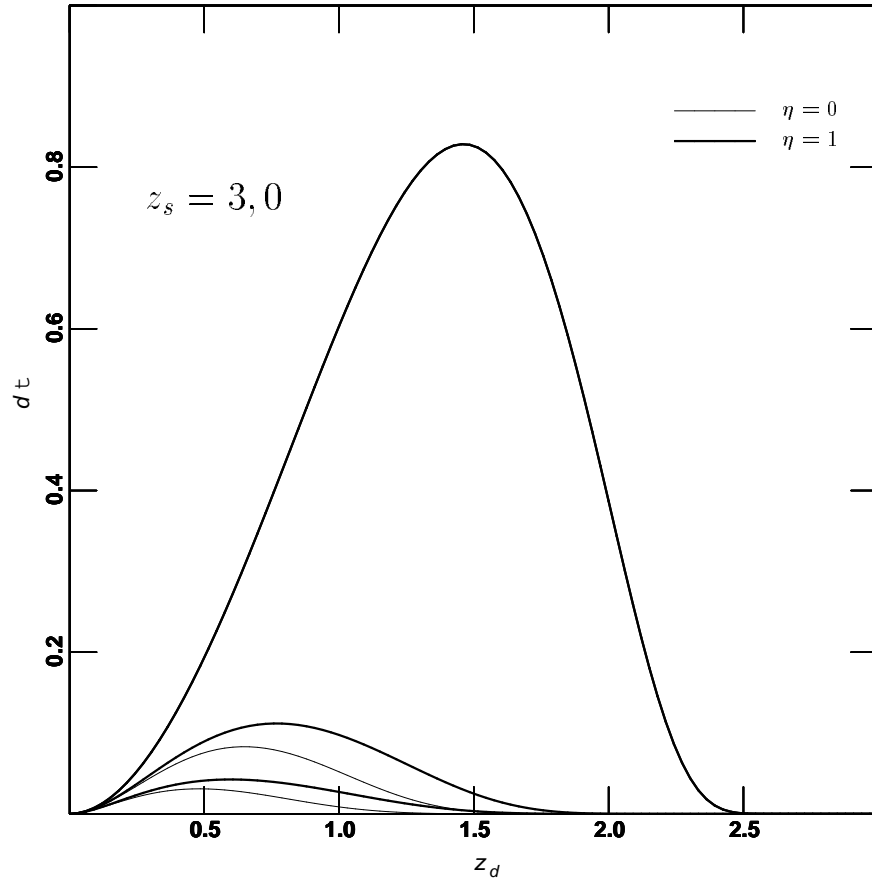


Abbildung 9-1. Beispiele für die Funktion  $d\tau(z_d)$   
 Dargestellt ist  $d\tau(z_d)$  für  $(\Omega_0; \lambda_0)$ -Werte von (von unten nach oben)  $(1,0;0,0)$ ,  $(0,4;0,7)$  und  $(0,0;1,0)$ . Deutlich zu sehen ist der schwache Einfluß von  $\eta$ . (Für  $\Omega = 0$  spielt der Wert von  $\eta$  natürlich keine Rolle.)

## b. Normierung

### i. Normierungsfaktoren im strengen Sinne

Da ich mich nur für die Abhängigkeit der optischen Tiefe von  $z_d$  und dem Weltmodell und nicht für den absoluten Wert interessiere, kann man eine optische Tiefe  $d\tau$  ohne Normierung betrachten:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dz_d} &= (1+z_d)^2 \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}(1+\alpha)} \\ &\quad D_d^2 \frac{1}{\sqrt{(1+z_d)^2(\Omega_0 z_d + 1 - \lambda_0) + \lambda_0}} \\ &\quad \exp\left(-\left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\right) \end{aligned} \quad (9.10)$$

Der Einfluss des kosmologischen Modells steckt in den Entfernungen  $D_{ij}$  und in dem Wurzelausdruck. Einige Beispiele gibt Abb. 9-1.



## ii. Andere „Normierungsfaktoren“

Die Vorgehensweise, nur die *unnormierte* optische Tiefe zu betrachten, hat den Vorteil, daß Korrekturen, die eine realistischere Physik berücksichtigen und sich nur auf die „Amplitude“ der optischen Tiefe, nicht aber auf die Form der Funktion, auswirken, keine Rolle spielen. Hierzu gehört z.B. der bereits besprochene Effekt endlicher Kernradien (Kapitel 8 Abschnitt ii).

## c. Auswahl effekte

### i. Spektroskopische Grenzhelligkeit

Ein wichtiger Punkt, der meines Wissens bis jetzt in der Literatur nicht berücksichtigt worden ist, ist, daß Gl. 9.10 nicht immer die Wahrscheinlichkeit angibt, bei dem entsprechenden  $z_d$ -Wert eine Linsengalaxie zu finden (für ein bestimmtes Gravitationslinsensystem und für ein festes Weltmodell)—nämlich dann nicht, wenn die scheinbare Helligkeit der bei dem entsprechenden  $z_d$ -Wert benötigten Linsengalaxie so schwach ist, daß man aus technischen Gründen bei diesem  $z_d$ -Wert überhaupt keine Rotverschiebung *messen* könnte. Vergleicht man, wie ich es in dieser Arbeit tue, die beobachteten  $z_d$ -Werte mit der erwarteten Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Weltmodell, um eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit zu machen, daß dieses Weltmodell der Wirklichkeit entspricht, dann bedeutet die Tatsache, daß Weltmodelle, die einen wahrscheinlichsten  $z_d$ -Wert bei Rotverschiebungen, die viel größer sind als die beobachteten, vorherzusagen, nicht unbedingt, daß diese Weltmodelle unwahrscheinlich sind—dies könnte vielleicht nur die Tatsache widerspiegeln, daß man bei diesen großen  $z_d$ -Werten aus technischen Gründen nicht in der Lage ist, die Rotverschiebungen zu messen.

Aus diesem Grund muß man Gl. 9.10 wie folgt modifizieren:

Für jeden Wert von  $z_d$ , für den man  $d\tau$  berechnet, muß man  $d\tau = 0$  setzen, wenn die scheinbare Helligkeit der bei diesem  $z_d$ -Wert benötigten Linsengalaxie nicht ausreicht, um eine Messung der Rotverschiebung zu ermöglichen.

Aus dem Weltmodell,  $z_d$ ,  $z_s$ , Linsengalaxientyp und dem Bildabstand läßt sich die scheinbare Helligkeit  $m$  der benötigten Linsengalaxie aus den bereits bekannten Beziehungen und Definitionen wie folgt berechnen:

$$m = M_* - 2,5 \frac{\gamma}{2} \log \left( \frac{\hat{a}}{\hat{a}_*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right) + 5 \log D_L - 5 + K \quad (9.11)$$

wo  $M_*$  die absolute Helligkeit einer  $L_*$ -Galaxie ist und  $K$  die  $K$ -Korrektur. (Ich verwende  $M_{B*} = -19,9 + 5 \log h$  (siehe [EEP 88]) und ein  $(B - R)$  von 1,8 für elliptische Galaxien bzw. 1,3 für Spirale [Peletier]. Ist  $m > m_{\text{grenz}}$  dann ist  $d\tau = 0$ .

In Kapitel 3 wurde gezeigt, daß  $D_L = D_d(1 + z_d)^2$ ; das gilt aber für bolometrische Helligkeiten. Berechnet man Helligkeiten in einem bestimmten Spektralbereich, so hat man einen zusätzlichen Faktor  $\sqrt{1 + z_d}$ , der berücksichtigt, daß nur der Bruchteil  $\frac{1}{z_d}$  des Flusses in dem Spektralbereich im Bezugssystem der Galaxie noch in dem Spektralbereich enthalten ist, wenn das Spektrum rotverschoben wird. Dies ist ein Teil der in Kapitel 3 besprochenen  $K$ -Korrektur. Natürlich müßte man auch berücksichtigen, daß die Energieverteilung im Spektrum der Galaxie nicht konstant

ist, also die volle  $z$ -abhängige  $K$ -Korrektur berücksichtigen. Ich habe die  $K$ -Korrekturen von [CWW 80] benutzt.<sup>8</sup>

Da  $M^*$  modulo  $H_0$  gemessen wird, spielt unsere Unsicherheit bezüglich der Hubble-Konstanten keine Rolle bei der Berechnung der scheinbaren Helligkeit—in Gl. 9.11 ist  $D_L$  gegeben durch  $(1 + z_d)^2 D_d \frac{c}{H_0}$ , so daß

$$\begin{aligned} 5 \log D_L &= 10 \log(1 + z_d) + 5 \log D_d + 5 \log c - 5 \log H \\ &= 10 \log(1 + z_d) + 5 \log D_d + 5 \log c - 5 \log \left( \frac{100 \text{ km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} \right) - 5 \log h \end{aligned}$$

Die 2 Terme, die von  $h$  abhängen, heben sich also bei der Berechnung der scheinbaren Helligkeit nach Gl. 9.11 gegenseitig auf.

Es ist nicht möglich, eine analytische Abschätzung für den Einfluß von  $m_{\text{grenz}}$  anzugeben. Durch Berechnungen für verschiedene angenommene Werte kann dieser Einfluß gezeigt werden. Die Unterschiede sind aber nicht so groß, wie man vielleicht zunächst vermutet, denn eine Änderung in  $m_{\text{grenz}}$  wirkt sich nicht unbedingt stark auf die entsprechende Änderung in  $z_d$  aus: Die scheinbare Helligkeit als Funktion von  $z_d$  ändert sich relativ schnell, zumindest in dem Bereich wo sich  $m_{\text{grenz}}$  in den meisten Weltmodellen befindet, denn die Masse der benötigten Galaxie nimmt mit steigendem  $z_d$  ab. Die durch eine Änderung von  $m_{\text{grenz}}$  verursachte Änderung in  $z_d$  ist also kleiner als für eine feste Galaxienmasse.

Zunächst erscheint es möglich, etwas über die relative Wahrscheinlichkeit eines Weltmodells zu sagen, indem man untersucht, ob der *Bruchteil der Systeme ohne beobachtete Linse* mit der Erwartung für das entsprechende Weltmodell übereinstimmt. Dies ist aber nicht sehr aussagekräftig, denn es ist viel schwieriger, eine Grenzhelligkeit für den *Nachweis einer Linsengalaxie* anzugeben als die Abschätzung der spektralen Grenzhelligkeit  $m_{\text{grenz}}$ . Hängt  $m_{\text{grenz}}$  in erster Näherung von der Helligkeit der Galaxie ab, so ist die Grenzhelligkeit für den Nachweis durch Beobachtung durch andere Störfaktoren wie die genaue Geometrie der Bilder, das Seeing, das Flußverhältnis zwischen Bildern und Galaxie usw. viel stärker beeinflusst.

## ii. Andere $z_d$ -abhängige Auswahleffekte

Entscheidend für diese Untersuchung ist, daß man nur Systeme betrachtet, die nicht wegen Besonderheiten der jeweiligen Linsengalaxie gefunden worden sind. (Daß man sonst starke Auswahleffekte hätte, ist klar.) Es könnte jedoch trotzdem sein, daß manche  $z_d$ -Werte bevorzugt sind, und zwar deshalb, weil sie eine höhere Verstärkung der Quasarbilder haben. Das System würde nicht gefunden worden sein, wenn die Linsengalaxie eine andere Rotverschiebung hätte, weil die Quasarbilder sonst zu schwach sein würden. Es ist leicht, die Verstärkung einer singulären isothermen Sphäre analytisch anzugeben [TOG 84], und im Prinzip könnte man dafür korrigieren, indem man die optische Tiefe auf 0 setzt für die  $z_d$ -Bereiche, wo die Verstärkung nicht ausgereicht hätte, um dort die Quelle sichtbar zu machen. Dies habe ich aus zwei Gründen nicht getan:

- Obwohl der Bildabstand relativ stabil ist gegenüber (in der Praxis immer vorhandenen) kleinen Abweichungen von der singulären isothermen Sphäre, gilt dies nicht für die Verstärkung.<sup>9</sup>

<sup>8</sup> Diese sind tabelliert für verschiedene Galaxientypen, Farben und  $z$ -Werte. Als maßgebend für  $m_{\text{grenz}}$  habe ich die Johnson- $R$ -Helligkeit benutzt. Um die  $K$ -Korrektur zu berechnen als Funktion von  $z$  habe ich die Werte für den entsprechenden Galaxientyp zwischen den angegebenen  $z$ -Werten interpoliert.

<sup>9</sup> Insbesondere gibt es bei den Fällen mit mehr als zwei Bildern sehr große Verstärkungen als Folge der anderen Kaustikstruktur.

- In der Praxis bestehen Galaxien mindestens zum Teil aus Sternen, was zu einem komplizierten Kaustiknetzwerk führt (*microlensing*) und die maximale Verstärkung herabsetzt [Kunze 90].

Dies bedeutet natürlich, daß man die ganze Wahrheit mit der singulären isothermen Sphäre nicht erfassen kann, aber die Tatsache, daß *microlensing* hohe Verstärkungen erheblich kleiner macht, bedeutet, daß ein möglicher Auswahleffekt durch die  $z_d$ -Abhängigkeit der Verstärkung keine zu große Bedeutung hat.

## Zusammenfassung

- Man kann einen Ausdruck für die optische Tiefe als Funktion von  $z_d$  und dem kosmologischen Modell herleiten, der sonst nur von beobachtbaren Größen eines Systems und von empirisch bestimmten Konstanten abhängt. Die Verteilung der beobachteten  $z_l$ -Werte<sup>10</sup> kann dann Auskunft über das Weltmodell liefern.
- Interessiert man sich nur für die Form der  $d\tau$ - $z_d$ -Kurve, dann müssen Normierungsfaktoren, die sonst erhebliche Unsicherheiten hineinbringen würden, nicht betrachtet werden.
- Ein wichtiger Effekt ist die Tatsache, daß der  $z_d$ -Wert, bis wohin man eine Linsenrotverschiebung messen könnte, meistens viel kleiner als  $z_s$  ist, so daß  $d\tau$  für größere  $z_d$ -Werte = 0 gesetzt werden muß. Ein möglicher Auswahleffekt durch  $z_d$ -abhängige Verstärkung wird zum Teil durch *microlensing* aufgehoben.

---

<sup>10</sup>Siehe Fußnote auf S. 71.



# Kapitel 10

## Relative Wahrscheinlichkeit

*When I was younger, Statistics was the science of large numbers.  
Now, it seems to me rapidly to be becoming  
the science of no numbers at all.*

Oswald George

### a. Konzept

#### i. Prinzip

Wären alle relevanten Beobachtungsgrößen jedes Gravitationslinsensystems ( $z_l$ ,<sup>1</sup>  $z_s$ ,  $a$ , Galaxientyp bzw.  $\gamma$  und  $m_{\text{grenz}}$ ) gleich, dann würde man erwarten, wenn man das Weltmodell kennt, daß  $d\tau$  unmittelbar die Wahrscheinlichkeitsdichte in  $z_d$ , also die Wahrscheinlichkeit, bei der entsprechenden Rotverschiebung eine Linsengalaxie zu finden, angibt. Wenn man nur der Größenordnung 10 Systeme hat, dann müßte man natürlich das  $z_d$ -Intervall zwischen 0 und  $z_s$  in die „optimale“ Zahl von Bins einteilen und die Verteilung der beobachteten  $z_l$ -Werte bezüglich dieser Bins untersuchen, wobei der  $z_d$ -Bereich eines Bins so bestimmt wird, daß das Integral über  $d\tau$  von der Untergrenze bis zur Obergrenze jedes bins gleich ist. (Die Fläche unter der Kurve entspricht der Wahrscheinlichkeit.) Man erwartet dann eine Gleichverteilung (im Rahmen der statistischen Streuung) bezüglich dieser Bins. Will man das Weltmodell bestimmen, dann kann man die relative Wahrscheinlichkeit theoretischer Weltmodelle vergleichen, wobei eine größere relative Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß die beobachteten  $z_l$ -Werte besser mit der theoretischen Verteilung übereinstimmen.

#### ii. Praxis

In der Praxis gibt es natürlich eine andere  $d\tau(z_d)$ -Funktion für jedes System. Ich berechne also für jedes System eine Zahl  $n$  zwischen 0 und 1:

$$n = \frac{\int_0^{z_l} d\tau}{\int_0^{z_s} d\tau} \quad (10.1)$$

---

<sup>1</sup>In dieser Arbeit halte ich mich weitgehend an die Indexkonvention von Refsdal; in vielen Arbeiten wird  $z_l$  anstatt Refsdals  $z_d$  benutzt. Ich benutze  $z_d$  wie in Kapitel 6 definiert, also als allgemeine Bezeichnung für diese Variable;  $z_l$  bedeutet hingegen in dieser Arbeit einen *beobachteten Wert einer bestimmten Linsengalaxie*.

Eine Gleichverteilung der Zahlen in dem Intervall  $[0, 1]$  erwartet man, wenn man  $d\tau$  mit dem der Wirklichkeit entsprechenden Weltmodell berechnet. Weltmodelle, die eine relativ unwahrscheinliche Verteilung erzeugen, stuft man als relativ unwahrscheinlich ein.

## b. Berechnung

### i. Funktionsweise

Die relative Wahrscheinlichkeit verschiedener Weltmodelle wurde in dieser Arbeit auf folgende Weise berechnet. Für jedes Weltmodell, beschrieben durch die Parameter  $\lambda_0$ ,  $\Omega_0$ ,  $\eta$  und  $h$ , wurde für jedes System eine Zahl zwischen 0 und 1 durch Gl. 10.1 berechnet.<sup>2</sup> Zur Berechnung der scheinbaren Helligkeit der Linsengalaxie (wichtig für den Vergleich mit  $m_{\text{grenz}}$ ) braucht man zusätzlich die Größen  $M_*$  und  $a_*$ , wobei  $a_* := 4\pi \left(\frac{v_*}{c}\right)^2$ . ( $v_*$  ist die Geschwindigkeitsdispersion einer  $L_*$ -Galaxie und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit.) Die relative Wahrscheinlichkeit eines Weltmodells ist die relative Wahrscheinlichkeit, daß die mit diesem Weltmodell berechnete Verteilung der Zahlen zwischen 0 und 1 zufällig entstanden sein könnte. Diese relative Wahrscheinlichkeit kann man dann z.B. in der  $\lambda_0$ - $\Omega_0$ -Ebene darstellen.

Quantitativ läßt sich die relative Wahrscheinlichkeit so ausdrücken: verteilt man  $k$  Objekte auf  $b$  Bins, und ist  $n(i)$  die Zahl der Objekte in dem  $i$ -ten Bin, dann ist die Wahrscheinlichkeit gegeben durch

$$W = \prod_{i=1}^b \frac{k! \left(\frac{1}{b}\right)^{n(i)}}{n(i)!} \quad (10.2)$$

(Siehe, z.B. [Moroney].) Da uns die Normierung nicht interessiert, kann man den konstanten Zähler weglassen und nur den Nenner betrachten.

### ii. Optimierung

Man hat als freien Parameter die Zahl der Bins. Hat man z.B. 2 Bins, kann man sagen, daß ein Weltmodell, bei dem alle  $n$  Systeme in einem Bin fallen, eine *a priori* Wahrscheinlichkeit von  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$  hat. Kochanek [Kochanek 92] hat diesen Ansatz verfolgt. Es ist aber klar, daß nur der Median der Verteilung hierbei eine Rolle spielt; Verteilungen, die sich nur durch ihre Standardabweichung und/oder Schiefe unterscheiden, können nicht voneinander unterschieden werden. Auf der anderen Seite, wenn die Zahl der Bins viel größer als die Zahl der Systeme ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß mehr als ein System in ein Bin fällt, verschwindend klein. Ist kein Bin mehrfach besetzt, dann sind alle Verteilungen gleich wahrscheinlich, so daß man aus der beobachteten Verteilung nicht auf das Weltmodell schließen könnte. Intuitiv vermutet man, daß die optimale Zahl der Bins etwa die Zahl der Systeme sein soll. Gleichzeitig dürfen Schlüsse, die aus der Verteilung gezogen werden, nicht von der Zahl der Bins abhängen—es sollte lediglich so sein, daß die *Genauigkeit* der Aussage von der Zahl der Bins abhängt. Um die optimale Binanzahl zu ermitteln, kann man Rechnungen für verschiedene Binanzahlen (um die Zahl der Systeme herum) machen und überprüfen, bei welcher Binanzahl die meiste Struktur zu sehen ist. Ob die

<sup>2</sup>Für die Berechnung von  $d\tau$  braucht man die aus Beobachtung bestimmte Schechter-Leuchtkraft-Funktion und die Faber-Jackson- bzw. Tully-Fisher-Beziehung so wie die Beobachtungsdaten  $z_l$ ,  $z_s$ ,  $a$ ,  $\gamma$  und  $m_{\text{grenz}}$  von jedem System.

wesentlichen Züge dieser Struktur echt sind kann man dann überprüfen, indem man untersucht, ob sie auch bei anderen Binanzahlen vorhanden sind. Es ist aber auch so klar, daß die optimale Binanzahl einfach die Zahl der Systeme ist.

Ich habe in dieser Arbeit diese Statistik benutzt, denn die Zahl der Systeme, die man betrachten kann, ist sehr klein (siehe Kapitel 11). Wenn man mehr Systeme zur Verfügung hätte, dann wäre es möglich z.B. ein Kolmogorov-Smirnov Test zu benutzen als Maß für die Wahrscheinlichkeit, daß die beobachtete Verteilung der Rotverschiebungen der Linsengalaxien der theoretischen Verteilung eines bestimmten kosmologischen Modells entspricht. Es ist leicht, eine andere Art der Wahrscheinlichkeitsberechnung in die Programme einzubauen, so daß das Verfahren bei Bedarf geändert werden kann bzw. wäre es möglich, verschiedene Methoden der Wahrscheinlichkeitsberechnung zu benutzen. (Siehe auch die Fußnote auf S. 101.)

## Zusammenfassung

- Je wahrscheinlicher das Weltmodell, desto größer sollte die Übereinstimmung zwischen den beobachteten  $z_l$ -Werten und der mit diesem Weltmodell theoretisch berechneten Verteilung sein.
- Einfache Kombinatorik erlaubt eine Quantifizierung der relativen Wahrscheinlichkeit, die möglichst viel Information der beobachteten Verteilung der  $z_l$ -Werte ausnützt.





## Teil D

# Ergebnisse und Diskussion

*I often say that when you can measure what you are speaking about,  
and express it in numbers, you know something about it;  
but when you cannot measure it, when you cannot express it in numbers,  
your knowledge is of a meagre and unsatisfactory kind:  
it may be the beginning of knowledge,  
but you have scarcely, in your thoughts, advanced to the stage of science,  
whatever the matter may be.*

William Thomson



# Kapitel 11

## Beobachtungsdaten

### a. Auswahlkriterien

Um für diese Untersuchung brauchbar zu sein, muß ein Gravitationslinsensystem folgende Voraussetzungen erfüllen:

- Die Quellenrotverschiebung  $z_s$  muß bekannt sein.
- Die Linsenrotverschiebung  $z_l$  muß bekannt sein.
- Der Typ der Linsengalaxie muß bekannt sein.
- Ein „Bildabstand“ muß beobachtbar sein.
- Die Linse muß eine isolierte Einzelgalaxie sein.
- Das System darf nicht wegen Besonderheiten der Linsenrotverschiebung gefunden worden sein.

Um einem Weltmodell eine bestimmte relative Wahrscheinlichkeit zuzuordnen, betrachte ich die Wahrscheinlichkeit, daß die beobachteten Linsenrotverschiebungen in dem entsprechenden Weltmodell „zufällig“ entstanden sein könnten. Alle anderen Beobachtungsgrößen werden sozusagen festgehalten; ich betrachte ja die Wahrscheinlichkeitsverteilung in  $z_d$  für das Auftreten der Linsengalaxie *für ein festes, bekanntes System*. In so fern spielen Auswahleffekte keine Rolle; es ist nicht *a priori* wahrscheinlicher, die Linse bei bestimmten Rotverschiebungen zu finden—es sei denn, sie wäre zu lichtschwach; dieser Punkt wird berücksichtigt, indem in diesem Fall die optische Tiefe  $d\tau = 0$  gesetzt wird.

### b. Klassifizierung bekannter Linsensysteme

#### i. Systeme, die nicht brauchbar sind

Das Einsteinkreuz 2237 + 0305 wurde bei einer Untersuchung von *Galaxien* gefunden; dies ist das einzige System, für das dies zutrifft. Die anderen Systeme sind auch nicht brauchbar, weil die Linse keine isolierte Einzelgalaxie ist, sondern ein Galaxienhaufen oder, wie bei 2016 + 112, mehr als eine „Feldgalaxie“. (Siehe Tabelle 11-1.)

## ii. Systeme, die wahrscheinlich nicht brauchbar sind

In diesen Fällen, wo man die Linse nicht sieht, kann man aufgrund des großen Bildabstandes davon ausgehen, daß die Linse wahrscheinlich keine isolierte Einzelgalaxie ist. (Siehe Tabelle 11-2.)

## iii. Unsichere Systeme

Bei diesen Systemen ist die Tatsache umstritten, ob sie überhaupt Gravitationslinsen sind. (Siehe Tabelle 11-3.)

## iv. Systeme, die brauchbar sein könnten

Es gibt viele Systeme, die geeignet sein würden, wenn man die Rotverschiebungen messen könnte. Bis auf 1104 – 1805, das als letztes System vor Fertigstellung dieser Arbeit entdeckt wurde, haben alle diese Systeme einen großen  $z_s$ -Wert (was den wahrscheinlichsten  $z_d$ -Wert—unabhängig von der Kosmologie—systematisch zu größeren Rotverschiebungen verschiebt) und/oder einen kleinen Bildabstand (was eine schwächere Linsengalaxie bedeutet). (Siehe Tabelle 11-4.)

## v. Brauchbare Systeme

Diese Systeme erfüllen alle Auswahlkriterien. In absehbarer Zeit könnte diese Liste erheblich wachsen, denn viele Systeme können nur deshalb nicht in die Statistik hineingenommen werden, weil ihre Rotverschiebungen (meistens  $z_l$ ) nicht bekannt sind. (Siehe Tabelle 11-5.)

## Zusammenfassung

- Gravitationslinsensysteme werden in das Sample aufgenommen, wenn sie einfach genug sind, um die Statistik anwenden zu können, und wenn genug beobachtbare Größen bekannt sind.
- Obwohl viele, auch bekannte, Systeme ausscheiden, gibt es noch viele, die in das Sample aufgenommen werden könnten, wenn ihre Rotverschiebungen bekannt wären.

Name	Position	Bilder	$\theta''$	Quelle	$m_{\text{Quelle}}$	$z_s$	$z_l$	Linse	$m_{\text{Linse}}$	Bemerkungen
Double Quasar	0957+561	2	3.05	QSO	B = 17.5 B = 17.7	1.41	0.36	EG + 2H	R = 18.5	Haufen wichtig
	1120+019	2	3.25	QSO	V = 16.2 V = 20.8	1.465	0.6	EG + H	R = 22.5	Haufen wichtig dunkle Materie als Linse?
	2016+112	3	1.9	AGN	i = 22.9 i = 23.2 i = 24	3.27	1.01 > 2?	2G (+ H?)	i = 21.9	$\geq 2$ Linsengalaxien
Einstein Cross	2237+0305	4	0.9	QSO	r = 17.6 r = 17.8 r = 18.1 r = 18.4	1.69	0.039	SG	r = 14.5	wegen Linsenrotverschiebung gefunden
	2345+007	2	3.65	QSO	B = 19.5 B = 20.1	2.15			(J > 22.5)	größter bekannter $\theta$ (zu groß für Einzelgalaxy) dunkle Materie als Linse? <i>binary</i> QSO?
3C194		2	1.75	AGN	R = 21.5	1.779	0.312	EG	R = 19.3	Haufen wichtig
3C238		2	1.75	AGN		1.405	0.14	Abell-Haufen		Haufen wichtig

Tabelle 11-1. Nicht brauchbare Systeme

In der letzten Spalte sind die Gründe aufgeführt, weshalb diese Systeme für diese Arbeit nicht brauchbar sind. „EG“ bedeutet „elliptische Galaxie“, „SG“ bedeutet „Spiralgalaxie“ und „H“ bedeutet Galaxienhaufen. Die Größe  $\theta''$  ist der sogenannte kritische Radius. Für eine exakte SIS ist dies der halbe Bildabstand bzw. Radius des Einsteinringes.

Name	Position	Bilder	$\theta''$	Quelle	$m_{\text{Quelle}}$	$z_s$	$z_l$	Linse	$m_{\text{Linse}}$	Bemerkungen
	0023+171	2	2.4	AGN	$r = 22.8$ (AB) $r = 23.4$ (C)	0.946				dunkle Materie als Linse?
	1429-008	2	2.55	QSO	$R = 17.7$ $R = 20.8$	2.08				dunkle Materie als Linse?
	1634+267	2	1.9	QSO	$B = 19.2$ $B = 20.8$	1.961			$R = 20???$	dunkle Materie als Linse?
3C297	1415-1347	2	1.2	AGN	$R = 21.0$	1.4061		H???		

**Tabelle 11-2. Wahrscheinlich nicht brauchbare Systeme**

Vor allem wegen des großen Bildabstandes ( $\Rightarrow$  keine isolierte Einzelgalaxie als Linse) sind diese Systeme wahrscheinlich ungeeignet für diese Arbeit.

Name	Position	Bilder	$\theta''$	Quelle	$m_{\text{Quelle}}$	$z_s$	$z_l$	Linse	$m_{\text{Linse}}$	Bemerkungen
	0414+0534	4	1.5	RG	R = 23 (A-D)	2.63???	1.0???	G????	R = 22.4	
	1042+178	4	0.8	AGN	R = 21 (A-D)	0.921				vielleicht keine Linse

Tabelle 11-3. Unsichere Systeme

Name	Position	Bilder	$\theta''$	Quelle	$m_{\text{Quelle}}$	$z_s$	$z_l$	Linse	$m_{\text{Linse}}$	Bemerkungen
	0952-01	2	0.45	QSO	$\Delta I = 1.35$	4.5				
	1009-025	2	0.775	QSO	R = 17.6 R = 20.0	2.74	1.62?????	G????		
Double Hamburger	1104-1805	2	1.5	QSO	B = 16.2 B = 18.0	2.303				
	1208+1011	2	0.225	QSO	V = 17.5 V = 19.0	3.803				
Clover Leaf	1413+117	4	0.55	QSO	R = 18.3 R = 18.5 R = 18.6 R = 18.7	2.55				
	1422+231	4	0.65	QSO	R = 16.5 (A-D)	3.62				
	1549+3047	Ring	1.0	radio lobe			0.111	EG	V = 16	
	1830-211	2 + Ring	0.5	radio jet					V $\approx$ 23	
	1938+666	4 + <i>miniarc</i>	$\leq 0.5$	RG?	r = 23 (A-D)					

Tabelle 11-4. Wahrscheinlich brauchbare Systeme

Diese System könnte man benutzen, wenn die Rotverschiebungen bekannt wären.



Name	Position	Bilder	$\theta''$	Quelle	$m_{\text{Quelle}}$	$z_s$	$z_l$	Linse	$m_{\text{Linse}}$	Bemerkungen
UM 673	0142-100	2	1.1	QSO	B = 17.0 B = 19.1	2.719	0.493	EG	R = 19.0	„typisches Mehrfach-Quasar-System“
	0218+357	Ring + 2	0.165	<i>radio lobe</i>		0.94(?)	0.68	SG	r $\approx$ 20	„Radio-Ring“
Triple Quasar	1115+080	4	1.15	QSO	B = 17.2 B = 17.2 B = 18.7 B = 18.2	1.722	0.29????	EG	R = 19.8	
	1131+0456	2 + Ring	1.05	EG, <i>radio lobe</i>		1.13	0.85	EG	R = 22	„Radio-Ring“
	1654+1346	Ring	1.05	<i>radio lobe</i>		1.74	0.254	EG	R = 18.7	„Radio-Ring“
3C324		3	1.0	AGN	R = 22.7 R = 23.3	1.206	0.845	SG	R = 22.5	

**Tabelle 11-5. Brauchbare Systeme**

Diese Systeme erfüllen die Auswahlkriterien.



# Kapitel 12

## Auswertung von Beobachtungsdaten

*There is no more common error than to assume that, because prolonged and accurate mathematical calculations have been made, the application of the result to some fact of nature is absolutely certain.*

Alfred North Whitehead

### a. Einfluß verschiedener Parameter und qualitative Erwartungen

#### i. $\lambda_0$

Der Einfluß der Kosmologie auf die Funktion  $d\tau$  setzt sich zusammen aus dem Einfluß durch die Größe  $\frac{cdt}{dz}$

$$\frac{cdt}{dz} \sim \frac{1}{\sqrt{(1+z_d)^2(\Omega_0 z + 1 - \lambda_0) + \lambda_0}} \quad (12.1)$$

und durch den Ausdruck

$$D_d^2 \left( \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^\mu \exp \left( - \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^\nu \quad (12.2)$$

wobei  $\mu < 0$  und  $\nu > 0$  sind. (Dies ergibt sich aus Gl. 9.10.) Die Entfernungen ergeben sich aus der Differentialgleichung

$$D'' + \left( \frac{2}{v} + \frac{g'(v)}{g(v)} \right) D' + \frac{3\Omega_0 \eta}{2} \frac{v}{g^2(v)} D = 0 \quad (12.3)$$

wobei  $g(v) = \sqrt{\Omega_0 v^3 + (\Omega_0 + \lambda_0 - 1)v^2 - \lambda_0}$ ,  $v = 1 + z$ . Es ist aus Gl. 12.1 klar, daß, was die Größe  $\frac{cdt}{dz}$  betrifft, im betrachteten Bereich des Parameterraumes,  $\lambda_0$  einen größeren Einfluß als  $\Omega_0$  hat. Für die Entfernungsparameter ist dies nicht unmittelbar zu sehen, aber viele Untersuchungen zeigen [TOG 84, FFKT 92, Breimer & Sanders 92, Krauss & White 92a], daß der Einfluß von  $\lambda_0$  größer ist als die von  $\Omega_0$ , sowohl auf die integrierte optische Tiefe (Fläche unter der Kurve) als auch auf die Lage des Maximums (Form der Kurve). Es ist also erfreulich, daß der Parameter  $\lambda_0$ , sonst am schwierigsten zu messen, bei der Linsenstatistik die wichtigste Größe ist. Es scheint sogar jetzt schon mehr oder weniger allgemein bekannt zu sein, daß Linsenstatistik bei weitem die beste Obergrenze für  $\lambda_0$  liefert [PCT 92].

ii.  $\Omega_0$ 

Der Einfluß von  $\Omega_0$  ist kleiner als der von  $\lambda_0$ , aber es ist klar, daß  $d\tau$  auch von  $\Omega_0$  abhängt.

iii.  $\eta$ 

Die Größe  $\eta$  taucht nur in dem Entfernungsparameter auf, also nicht in der Größe  $\frac{cdt}{dz}$ . Man erwartet also von vornherein, daß  $\eta$  weniger wichtig als die anderen kosmologischen Parameter ist. Zusätzlich ist es auch der Fall, daß sich der  $\eta$ -Einfluß weghebt in dem Ausdruck für den Entfernungsparameter, so daß auch hier der Einfluß von  $\eta$  nicht wichtig zu sein scheint. (Siehe, z.B., [FFKT 92].) Dies ist ein Vorteil dieser Methode zur Bestimmung des kosmologischen Modells; bei der kosmologischen Korrekturfunktion beim *time delay* spielt ja  $\eta$  meist eine größere Rolle als die anderen Parameter.

iv.  $m_{\text{grenz}}$ 

Interessiert man sich für die Kosmologie, dann sollte diese Untersuchung von  $m_{\text{grenz}}$  unabhängig sein. Man könnte befürchten, daß diese Tatsache die Grundlage der Arbeit zerstört, aber der Einfluß *der genauen Wahl* von  $m_{\text{grenz}}$  ist nicht sehr groß. Wohl aber macht es einen Unterschied, ob man  $m_{\text{grenz}} = \infty$  setzt oder nicht. Dies ist leicht zu verstehen, denn die Funktion  $m(z)$  ist sehr steil bei kleinen  $z$ -Werten,<sup>1</sup> was zur Folge hat, daß es relativ gleichgültig ist, welchen (realistischen) Wert für  $m_{\text{grenz}}$  (Verschiebung des Abschneidepunktes entlang der steilen Kurve) man nimmt; selbst relativ große Änderungen in der Helligkeit spielen sich in einem relativ kleinen  $z$ -Intervall ab, so daß die Unsicherheit in  $m_{\text{grenz}}$  keine zu große Rolle spielt.<sup>2</sup> Da aber schon bei relativ kleinem  $z$  eine Helligkeit erreicht wird, die viel zu schwach ist, um eine Rotverschiebungsmessung zu erlauben, ist das Abschneiden der Funktion  $d\tau$  sehr wichtig. Es ist erfreulich, daß dieses Abschneiden meistens in einem Bereich passiert, daß nicht empfindlich von den genauen Werten von  $m_{\text{grenz}}$  abhängt. Zusätzlich hat man den unerwarteten *Vorteil*, daß man Entwicklungseffekte eher vernachlässigen kann, weil man sowieso die Wirkung von Linsengalaxien bei verhältnismäßig kleinem  $z$  betrachtet.

## b. Untersuchungen durch numerische Rechnungen: Vorgehensweise

i.  $\lambda_0$ - $\Omega_0$ 

Ich habe  $\lambda_0$  und  $\Omega_0$  als die wichtigsten unabhängigen Variablen gewählt, und die meisten Rechnungen in Abhängigkeit von  $\lambda_0$  und  $\Omega_0$  durchgeführt. Um den gewünschten Bereich in der  $\lambda_0$ - $\Omega_0$ -Ebene abzudecken, habe ich die

<sup>1</sup>Zwei Effekte spielen hier eine Rolle: die Abnahme der scheinbaren Helligkeit mit zunehmenden  $z$  (bei gleicher absoluter Helligkeit) und die Abnahme der absoluten Helligkeit (die dadurch zustandekommt, weil die benötigte Linsenmasse *bei festgehaltenem Bildabstand* mit  $z$  zunächst abnimmt).

<sup>2</sup>Die Funktion  $d\tau$  ist in diesem  $z$ -Bereich nicht so steil, daß kleine Änderungen in dem  $z$ -Wert für die obere Grenze der Integration zu einer zu großen Ungenauigkeit beitragen könnten.

folgenden Grenzen gewählt:

$$\begin{array}{ccc} -10 < \lambda_0 < 10 \\ 0 < \Omega_0 < 10 \end{array}$$

Es ist klar, daß nicht das ganze Gebiet erlaubt ist. Man stellt fest, daß erlaubte Weltmodelle sich in einem Bereich befinden, der begrenzt ist durch folgende Bedingungen

- (1)  $\Omega_0$  muß  $> 0$  sein
- (2) ein minimales Weltalter
- (3) eine maximale Rotverschiebung<sup>3</sup>
- (4) ein minimales  $q_0$

(Die oben hergeleiteten Untergrenzen für  $\Omega_0$  sind so klein, daß man für praktische Zwecke  $\Omega_0 > 0$  als Bedingung hat.) Eine Abschätzung über ein minimales  $q_0$ , zusammen mit  $Z_{\max}$ , wurde benutzt, um eine Obergrenze sowohl für  $\Omega_0$  als auch für  $\lambda_0$  festzulegen. Die Untergrenze für  $\Omega_0$  ist selbstverständlich, und die Untergrenze für  $\lambda_0$  ergibt sich aus extremen Annahmen über das Weltalter.

Die Berechnung der relativen Wahrscheinlichkeit verschiedener Weltmodelle mit  $\lambda_0$  und  $\Omega_0$  als Variablen habe ich zunächst für „kanonische“ Werte der anderen Parameter durchgeführt.<sup>4</sup> (Diese Werte sind unten erläutert.) Um die Abhängigkeit von den anderen Parametern zu untersuchen, die laut Erwartung kleiner als die Abhängigkeit von  $\lambda_0$  und  $\Omega_0$  sein soll, habe ich die Berechnung für verschiedene Werte der anderen Parameter durchgeführt, wobei jeweils ein Parameter ( $\eta$  oder  $m_{\text{grenz}}$ ) beim Festhalten des anderen verändert wurde.

## ii. $\eta$

Die Bedingung für  $\eta$  ist  $0 < \eta < 1$ ; als „kanonischen Wert“ habe ich 0,5 benutzt. Untersucht wurden folgende Werte

0,0                      0,3                      0,5                      0,7                      1,0

## iii. $m_{\text{grenz}}$

Streng genommen ist  $m_{\text{grenz}}$  kein „freier Parameter“, sondern sollte für jedes System einzeln angegeben werden. Es hat sich aber gezeigt, daß das Ergebnis nicht stark von dem (realistischen) Wert von  $m_{\text{grenz}}$  abhängt, so daß es keine zu schlechte Näherung sein dürfte, einen gemeinsamen Wert für alle Systeme anzunehmen; als „kanonischen Wert“ habe ich  $m_r = 23,5$  benutzt. Untersucht wurden folgende Werte

23,5                                      24,5                                       $\infty$

<sup>3</sup>  $Z_{\max} \leq z_{\max}$  wobei  $Z_{\max}$  der größte beobachtete  $z$ -Wert ist und  $z_{\max}$  der größtmögliche  $z$ -Wert in dem jeweiligen Weltmodell ist. Es ist möglich,  $z_{\max}$  analytisch zu bestimmen [Feige 92].

<sup>4</sup> Eine solche Rechnung, mit einer Auflösung von  $100 \times 100$ , also für 10.000 Weltmodelle mit Schritten von 0,2 in  $\lambda_0$  bzw. 0,1 in  $\Omega_0$ , braucht etwa vier Stunden CPU-Zeit auf einem DEC  $\mu$ VAX Rechner.

**iv.  $k = 0$** 

Für den Spezialfall  $k = 0$  ( $\lambda_0 = 1 - \Omega_0$ ) wurden 10.000 Modelle in der  $\eta$ - $\Omega_0$ -Ebene berechnet, wobei der bereits erwähnte Wertebereich für  $\eta$  benutzt wurde. 10.000 Modelle in der  $m_{\text{grenz}}$ - $\Omega_0$ -Ebene wurden ebenfalls untersucht; hierbei wurden Werte für  $m_{\text{grenz}}$  zwischen 20 und 26 betrachtet.

**v.  $\lambda_0 = 0$** 

Für den Spezialfall  $\lambda_0 = 0$  wurden 10.000 Modelle in der  $\eta$ - $\Omega_0$ -Ebene berechnet, wobei die bereits erwähnten Wertebereiche für  $\eta$  benutzt wurden. 10.000 Modelle in der  $m_{\text{grenz}}$ - $\Omega_0$ -Ebene wurden ebenfalls untersucht; hierbei wurden Werte für  $m_{\text{grenz}}$  zwischen 20 und 26 betrachtet.

## **c. Untersuchungen durch numerische Rechnungen: Ergebnisse**

**i. Allgemeines**

Wegen der Definition der relativen Wahrscheinlichkeit ist es klar, daß man nur diskrete Werte für diese Größe hat, und daß die Zahl der möglichen Werte mit der Zahl der Bins (= Zahl der Systeme) rasch ansteigt. Obwohl natürlich nicht alle Werte vorkommen müssen, ist es ersichtlich, daß man wahrscheinlich durch die größere Anzahl möglicher Werte mehr „Struktur“ in der Darstellung einer Berechnung erhält, wenn man mehr geeignete Systeme zur Verfügung hätte.

Auf S. 93 werden die Ergebnisse graphisch dargestellt.

**ii.  $\lambda_0$ - $\Omega_0$** **Allgemeines**

Die „wichtigsten“ Rechnungen sind die für die  $\lambda_0$ - $\Omega_0$ -Ebene; wie bereits erklärt, sollen diese Parameter den größten Einfluß haben.<sup>5</sup> Daß dies der Fall ist, ist an Hand der anderen Rechnungen gezeigt worden.

Man erkennt zunächst Streifen gleicher Wahrscheinlichkeit, die ungefähr „parallel“ zu den Kurven gleichen Weltalters (und zu der Grenze zum unendlichen Weltalter bzw. den  $M_2$ -Modellen—der  $A_2$  Kurve bei [Stabell & Refsdal 66].) Die Tatsache, daß diese eher senkrecht als waagrecht sind, spiegelt die Tatsache wider, daß die Abhängigkeit von  $\lambda_0$  größer ist als die von  $\Omega_0$ . Im erlaubten Bereich erkennt man, daß Modelle, die sich in der Nähe dieser Kurve befinden, unwahrscheinlicher sind. Ungefähr senkrecht zu diesen Streifen befinden sich Geraden von konstantem Krümmungsradius. Es scheint also der Fall zu sein, daß diese Methode nicht sehr empfindlich auf den Krümmungsradius reagiert. Auf der anderen Seite, bei bekanntem  $\Omega_0$  bzw. Krümmungsradius scheint es möglich zu sein, etwas über den Wert von  $\lambda_0$  auszusagen. Eine andere Betrachtungsweise wäre folgende: der Parameter, der in erster Linie gemessen wird, ist also  $q_0$ .

<sup>5</sup>Sie sind auch die „interessantesten“ Parameter; ein Vorteil dieser Methode ist, daß die interessantesten Parameter diejenigen sind, die den größten Einfluß auf die Berechnungen haben.

Entscheidend ist also der Abstand von der  $A_2$ -Kurve, nicht der Wert von  $\lambda_0$  an sich. Sind bei flachen ( $k = 0$ ) Modellen große  $\lambda_0$ -Werte relativ unwahrscheinlich, gilt dies nicht für  $k = +1$ . Dies kann man wie folgt verstehen: Die allgemeine Wirkung der kosmologischen Konstante, das Maximum von  $d\tau$  zu höheren Rotverschiebungen zu verschieben, wird z.T. dadurch ausgeglichen, daß das Volumenelement  $\frac{1}{1+z} \frac{dV}{dz}$  bei diesen Modellen bei großen Rotverschiebungen sehr klein sein kann—es kann sogar verschwinden.

Für den Fall, daß die (berechnete) scheinbare Helligkeit irgend einer Linsengalaxie schwächer wurde als  $m_{\text{grenz}}$ , so wurde die relative Wahrscheinlichkeit für das entsprechende Weltmodell = 0 gesetzt.<sup>6</sup> So ist zu erklären, daß es ein Gebiet in der  $\Omega_0$ - $\lambda_0$ -Ebene der Wahrscheinlichkeit 0 gibt, jenseits dessen man wieder eine relative Wahrscheinlichkeit  $> 0$  hat; die Linsengalaxie, die unsichtbar wurde, wird wieder sichtbar wenn  $\chi$  in der Nähe von  $\pi$  kommt.<sup>7</sup> Es gibt eine andere mögliche Erklärung für das Auftreten der Wahrscheinlichkeit 0 außerhalb des  $M_2$ -Bereichs, nämlich, daß die Wahrscheinlichkeit auch = 0 gesetzt wurde, falls irgendeine Entfernung ( $D_l$ ,  $D_s$  oder  $D_{ls}$ ) zu klein ( $< 10^{-6} \times \frac{c}{H_0}$ ) war, damit weder bei der Berechnung von  $d\tau$  noch bei der Berechnung von  $m$  Divergenzen auftreten. (Dies ist zwar numerisch notwendig bedeutet aber keine Ungenauigkeit, denn für den Grenzfall, daß ein  $D_{ij} = 0$  wird, ist die optische Tiefe  $d\tau$  ebenfalls = 0, was eine analytische Betrachtung zeigt—es ist sicher gerechtfertigt, einem Weltmodell die Wahrscheinlichkeit 0 zuzuordnen, wenn  $d\tau = 0$  ist bei der beobachteten Rotverschiebung  $z_l$ .)

$\eta$

Vergleicht man die Ergebnisse für verschiedene  $\eta$ -Werte, so sieht man einen systematischen Effekt: es gibt eine „Drehung“ der Streifen. Dies kommt zum Teil von dem Einfluß von  $\eta$  auf die Entfernungsparameter, aber hauptsächlich von dem Einfluß von  $\eta$  auf die Helligkeitsentfernung für die Berechnung des  $z_d$ -Wertes, oberhalb dessen  $d\tau = 0$  gesetzt werden muß. Dieser Effekt ist aber aus zwei Gründen nicht wichtig:

<sup>6</sup>Es ist natürlich genau genommen zu streng, ein Weltmodell wegen der Tatsache, daß eine Linsengalaxie eine schwächere Helligkeit als  $m_{\text{grenz}}$  hätte, zu verwerfen—vor allem weil die Berechnung der scheinbaren Helligkeit nicht ohne Fehler ist. Die Berechnung der relativen Wahrscheinlichkeit (Kapitel 10) betrachtet aber Zahlen im Intervall ]0,1[; ist  $m$  jedoch schwächer als  $m_{\text{grenz}}$ , dann würde dies eine Zahl  $> 1$  bedeuten. Bei der kleinen Zahl der betrachteten Systeme wäre es nicht empfehlenswert, dieses System aus der Betrachtung herauszunehmen, vor allem weil meistens *mehrere* Systeme nicht betrachtet werden sollten. Die beobachteten Linsenhelligkeiten (siehe die Tabellen in Kapitel 11) sind aber mindestens eine Größenklasse heller als  $m_{\text{grenz}}$ , so daß das Problem nur bei Weltmodellen auftritt, die nahe der  $A_2$ -Kurve liegen und/oder einen kleinen Krümmungsradius ( $\sim (\lambda_0 + \Omega_0 - 1)^{-\frac{1}{2}}$ ) haben, die also durch eine genauere Betrachtung aus anderen Gründen ausgeschlossen werden könnten.

<sup>7</sup>Wenn man als zusätzliche Bedingung fordert, daß  $\chi < \pi$  sein muß bis zu einer bestimmten  $z$ -Wert, dann kann man ein größeres Gebiet ausschließen als mit der Betrachtung von  $z_{\text{max}}$ . Dies habe ich aus zwei Gründen nicht getan:

- Es ist schwierig, eine genaue Abschätzung zu machen, bis zu welchem  $z$ -Wert man das Vorhandensein der Antipoden ausschließen kann.
- Das Gebiet, was man zusätzlich ausschließen kann, ist so klein, daß dies keine praktischen Vorteile bringt.

Es ist eher wünschenswert, dies nicht zu tun, denn der Formalismus funktioniert für solche Weltmodelle genau so gut, und (wenn man mehr Systeme hätte) man vielleicht so eine unabhängige Methode hätte, solche Weltmodelle auszuschließen.

- (1) Die Unterschiede kommen zustande, wenn  $\eta$  als gleichwertiger kosmologischer Parameter auftritt. Meine Ergebnisse stellen also eine Obergrenze des Effekts dar.
- (2) Im erlaubten Bereich ist der Effekt weniger stark ausgeprägt.

Weil es zwei mögliche Gründe dafür gibt, die relative Wahrscheinlichkeit  $= 0$  zu setzen, hat die Tatsache, daß sich die Größe des Gebietes ändert, wo die Wahrscheinlichkeit für nicht  $M_2$ -Modelle  $= 0$  gesetzt wird, zwei mögliche Erklärungen:

- (1) Für ein gegebenes Weltmodell sind Objekte bei gleicher Rotverschiebung heller für größere  $\eta$ -Werte.
- (2) Für  $\eta = 0$  kann keine Entfernung  $= 0$  werden (außer für  $z = 0$ ); je kleiner  $\eta$ , desto weniger ausgeprägt ist dieser Effekt.

Da das Gebiet für größere  $\eta$ -Werte größer ist, überwiegt der zweite Effekt.

$m_{\text{grenz}}$

Eine Änderung von  $m_{\text{grenz}}$  hat den erwarteten Effekt: eine Änderung zu schwächeren Helligkeiten hin führt dazu, daß man auch schwächere Galaxien noch sehen könnte. Dies führt wiederum dazu, daß Modelle, die einen höheren Wert des Medians der  $d\tau$ -Kurve haben (z.B. die nahe der  $A_2$ -Kurve) eine kleinere relative Wahrscheinlichkeit zugeordnet bekommen. (Zusätzlich sieht man, daß der Bereich außerhalb des  $M_2$ -Bereichs der relativen Wahrscheinlichkeit 0 kleiner wird, denn wenn  $m_{\text{grenz}}$  schwächer ist, dann kommt es in weniger Weltmodellen vor, daß eine Linsengalaxie eine schwächere berechnete scheinbare Helligkeit als  $m_{\text{grenz}}$  hat. Dies zeigt auch, daß, wie oben vermutet, der Hauptgrund für die Vergrößerung dieses Gebietes mit  $\eta$  der zweite dort besprochene Effekt ist.) Interessant ist, daß eine Änderung in  $m_{\text{grenz}}$  von einer Größenklasse<sup>8</sup> nur einen kleinen Effekt hat. Dies zeigt, daß eine einigermaßen gute Abschätzung ausreicht, um den Einfluß der spektroskopischen Grenzhelligkeit zu untersuchen. Betrachtet man jedoch den Fall  $m_{\text{grenz}} = \infty$ , dann wird klar, daß die Vernachlässigung dieses Effektes zu völlig falschen Ergebnissen führen kann. Allein die Tatsache, daß man nur am Rande des erlaubten Gebietes (wenn überhaupt) Modelle mit der größten Wahrscheinlichkeit hat, zeigt, daß die Vernachlässigung der Grenzhelligkeit in die Irre führt. Man sieht ziemlich deutlich, daß die so gefundene kleine Wahrscheinlichkeit für Modelle nahe der  $A_2$ -Kurve eine Folge der falschen Annahme ist, daß man die Rotverschiebungen der Linsengalaxien bei *allen*  $z$ -Werten (bis hin zu  $z_s$ ) messen könnte.

### Vergleich mit Kochanek

Als Vergleich habe ich mein Verfahren auf dieselben Systeme angewendet, die in der Arbeit von Kochanek [Kochanek 92] verwendet werden, die als Ausgangspunkt dieser Diplomarbeit diente. Ich habe z.T. andere Systeme betrachtet, entweder weil es in der Zwischenzeit neue Beobachtungsdaten gibt, was die Betrachtung zusätzlicher Systeme ermöglicht, oder weil in [Kochanek 92] statt einer gemessenen *Emissionsrotverschiebung* eine

<sup>8</sup>Dies ist tatsächlich extremer als es zunächst vielleicht zu sein scheint, denn die Grenzhelligkeit wird für alle Systeme herabgesetzt. (In allen Berechnungen dieser Arbeit wird  $m_{\text{grenz}}$  quasi als freien Parameter betrachtet; in der Praxis jedoch sollte man  $m_{\text{grenz}}$  für jedes System im einzelnen abschätzen.)



Abschätzung aus *Absorptionslinien* benutzt wurde. (Wegen der Berücksichtigung des Einflusses der Linsenhelligkeit durch  $m_{\text{grenz}}$  kann ich natürlich nur Linsen betrachten, deren Rotverschiebungen in Emission gemessen worden sind. Ein anderer Grund, solche Systeme aus der Betrachtung herauszulassen, ist, daß das Absorptionssystem bei einer anderen Rotverschiebung als der der Linse liegen darf.) Ich erwarte also von vornherein andere Ergebnisse; diese Betrachtung stellt eher eine Kontrolle meines Verfahrens dar. (Um seiner Vorgehensweise zu entsprechen ist  $m_{r m_{\text{grenz}}} = \infty$  und  $\eta = 1$ .) Das Verhältnis der relativen Wahrscheinlichkeiten des Einstein-de Sitter- und des de Sitter-Modells  $(\Omega_0; \lambda_0) = (1, 0; 0, 0)$  bzw.  $(0, 0; 1, 0)$  beträgt nach meinem Verfahren 6:1; dies ist zu vergleichen mit dem in [Kochanek 92] gefundenen Ergebnis von 5–10.

### iii. $k = 0$ und $\lambda_0 = 0$

In diesen Plots kann man natürlich entlang der Geraden parallel zur  $\Omega_0$ -Achse, die dem kanonischen Wert von  $\eta$  bzw.  $m_{\text{grenz}}$  entspricht, dieselben Werte der relativen Wahrscheinlichkeit feststellen, als im Plot der kanonischen Werte entlang der Geraden für  $k = 0$  bzw.  $\lambda = 0$ .

$\eta$

Man sieht, daß die Abhängigkeit von  $\eta$  relativ schwach ist, außer bei sehr großen  $\Omega_0$ -Werten. Für große  $\Omega_0$ -Werte spielt die Frage, wieviel Materie sich im Lichtkegel befindet, doch eine merkliche Rolle. Dies ist auch zu erwarten. Für  $k = 0$  jedoch scheiden solche großen  $\Omega_0$ -Werte sowieso wegen des kleinen Weltalters aus. Für  $\lambda_0 = 0$  gilt dies auch, aber die Einschränkung ist nicht ganz so stark.

$m_{\text{grenz}}$

Die Abhängigkeit von  $m_{\text{grenz}}$  ist beruhigend schwach. Für (unrealistisch) helle  $m_{\text{grenz}}$ -Werte (in Abhängigkeit von  $\Omega_0$ ) findet man, daß die relative Wahrscheinlichkeit auf 0 gesetzt wird für manche Weltmodelle (was bedeutet, daß die scheinbare Helligkeit mindestens einer Linsengalaxie schwächer ist als  $m_{\text{grenz}}$ ). Zu großen Helligkeiten hin sieht man, daß der genaue Wert von  $m_{\text{grenz}}$  unwichtig ist.

## Zusammenfassung

- Man kann den Einfluß der verschiedenen Parameter auf die Ergebnisse abschätzen und qualitative Erwartungen formulieren.
- Es scheint günstig zu sein, die  $\lambda_0 - \Omega_0$ -Ebene für die meisten Rechnungen zu benutzen, wobei man „kanonische Werte“ für die anderen Parameter benutzt. Der Einfluß dieser Parameter kann untersucht werden, indem man entweder sie einzeln variiert oder bei Unterdrückung eines Freiheitsgrades (z.B. durch die Bedingungen  $\lambda_0 = 0$  oder  $k = 0$ ) die Abhängigkeit über einen weiten Bereich untersucht.
- Man stellt fest, daß die Methode eher zwischen verschiedenen Modellen mit dem gleichen Krümmungsradius unterscheidet bzw. in erster Linie ein Maß für  $q_0$  ist. Der Einfluß von  $\eta$  (im erlaubten Bereich) ist klein, der durch die Berücksichtigung von  $m_{\text{grenz}}$  erheblich gegenüber

dem Fall, daß man  $m_{\text{grenz}} = \infty$  setzt—für realistische  $m_{\text{grenz}}$ -Werte jedoch spielt der genaue Wert keine große Rolle.

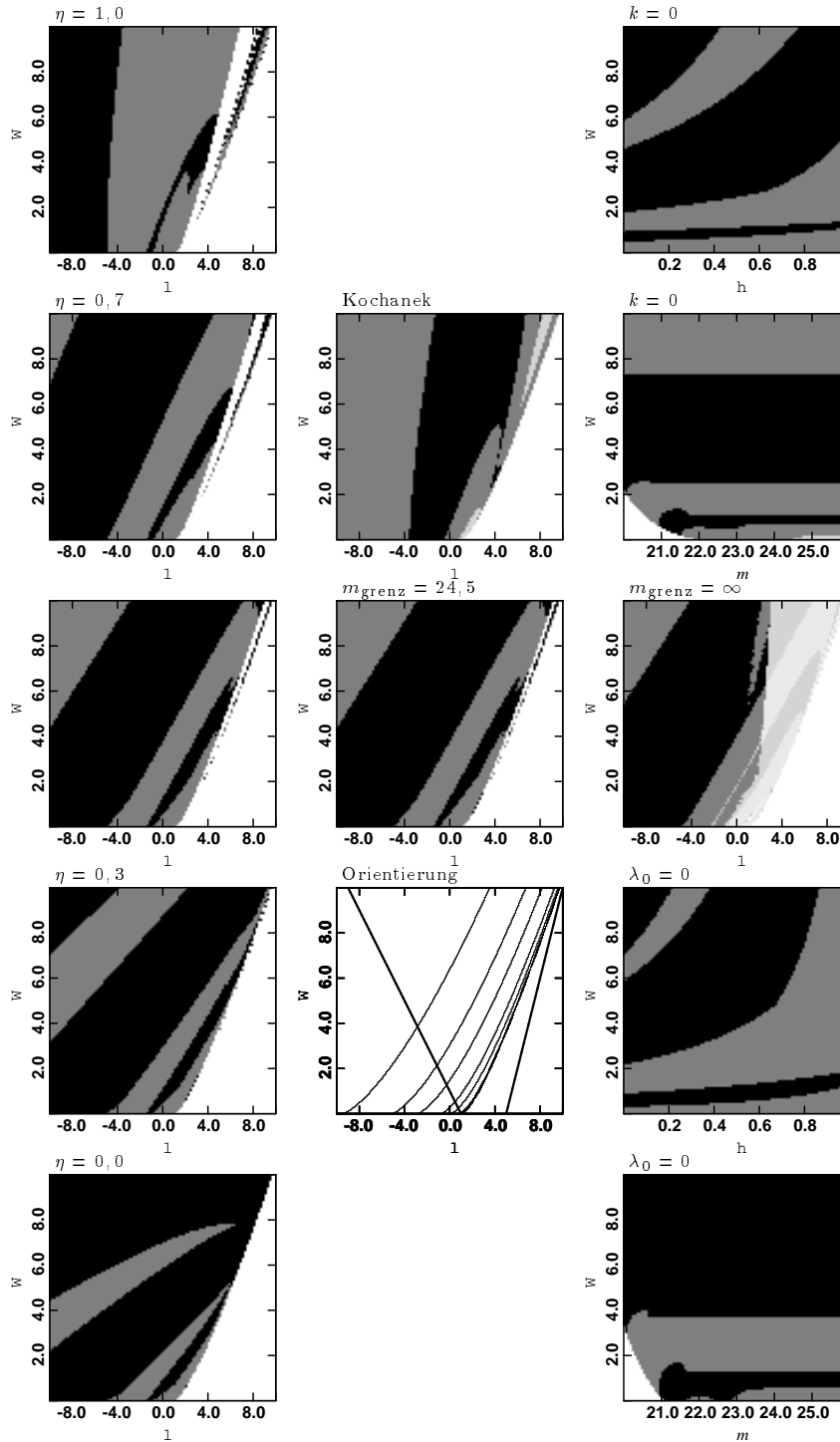


Abbildung 12-1. Graphische Darstellung der Ergebnisse

Die linke Spalte zeigt verschiedene  $\eta$ -Werte; die mittlere Reihe verschiedene  $m_{\text{grenz}}$ -Werte. Zum Vergleich sind in der mittleren Spalte die Ergebnisse für die Eingabewerte von [Kochanek 92] (oben) und ein Bild zur Orientierung (unten). (All dies in der  $\lambda_0$ - $\Omega_0$ -Ebene.) Oben rechts sind Bilder für den Fall  $k=0$ : Abhängigkeit von  $\Omega_0$  und  $\eta$  bzw.  $m_{\text{grenz}}$ . Unten rechts das entsprechende für  $\lambda_0=0$ . Schwarz entspricht einer relativen Wahrscheinlichkeit von 1, weiß einer von 0; die Graustufen stellen lineare Zwischenwerte dar. (Nicht angegebene Parameter besitzen ihre „kanonischen“ Werte.)



# Kapitel 13

## Vergleich mit anderen Arbeiten

Obwohl es relativ viele Arbeiten über die Statistik von Gravitationslinsensystemen im allgemeinen gibt, z.B. [TOG 84, Krauss & White 92a, Jaroszyński 92], ist die Betrachtung der Verteilung der Rotverschiebung der Linsengalaxien bei Gravitationslinsensystemen mit mehrfach abgebildeten Quellen in Bezug auf Kosmologie ein relativ neues Gebiet; die Hauptarbeiten sind [FFKT 92] und [Kochanek 92]. In der Einleitung wurden folgende Forderungen an eine Arbeit auf diesem Gebiet gestellt:

**alle Modelle** Es sollten alle Weltmodelle betrachtet werden, die nicht aus anderen Gründen ausgeschlossen werden.

**$\eta$ -Parameter** Verschiedene  $\eta$ -Werte sollten betrachtet werden.

**Verteilung** Man sollte bei der Analyse der Beobachtungsdaten nicht nur die Gesamtzahl der Systeme, sondern auch ihre  $z_l$ -Verteilung betrachten, da man so zusätzliche Aussagen machen kann, obwohl die Zahl der Systeme sehr klein sein mag. (Siehe [Kochanek 92].)

**Auswahleffekte** Wichtig für den Vergleich mit Beobachtung ist, daß man „korrigierte“ Verteilungen berechnet, die alle Auswahleffekte und Beobachtungsungenauigkeiten berücksichtigen.

**Entwicklungseffekte** Jede realistische Betrachtung muß zumindest den Einfluß der zeitlichen Entwicklung der Linsen abschätzen.

**Räumliche Verteilung** Bei der Betrachtung von Galaxien als Linsen würde man den Umfang und Anwendbarkeit der Untersuchung erheblich einschränken, wenn man nur isolierte Galaxien betrachtet.

### a. Alle Modelle

[FFKT 92] betrachten vier Modelle<sup>1</sup>:

**Case A**  $\Omega_0 = 1, \lambda_0 = 0$  ( $k = 0$ ; Einstein-de Sitter-Modell)

---

<sup>1</sup>  $k = \text{sign}(\Omega_0 + \lambda_0 - 1)$

**Case B**  $\Omega_0 = 0, 1, \lambda_0 = 0$  ( $k = -1$ )

**Case C**  $\Omega_0 = 0, 1, \lambda_0 = 0, 9$  ( $k = 0$ )

**Case D**  $\Omega_0 = 0, \lambda_0 = 1$  ( $k = 0$ ; de Sitter-Modell)

Kochanek betrachtet folgende Modelle:

**STD 01**  $\Omega_0 = 0, 1, \lambda_0 = 0$  ( $k = -1$ )

**STD 10**  $\Omega_0 = 1, \lambda_0 = 0$  ( $k = 0$ ; Einstein-de Sitter-Modell)

**LBD 10**  $\Omega_0 = 0, \lambda_0 = 1$  ( $k = 0$ ; de Sitter-Modell)

die identisch sind mit „Case B“, „Case A“ und „Case D“ bei [FFKT 92].

Wie in Kapitel 3 erläutert, gibt es einfachere Entfernungformeln für verschiedene Spezialfälle. Da in diesen Arbeiten ausschließlich solche Spezialfälle betrachtet werden, liegt die Vermutung nahe, daß dies aus Gründen der Leichtigkeit der Berechnungen geschieht. Stellt man den Anspruch, vollständig und systematisch zu sein [FFKT 92], dann sollte man wenigstens zeigen, daß die betrachteten Fälle die Schar möglicher Modelle einigermaßen abdecken. („Case D“ ist sicher unrealistisch, obwohl es einen Grenzfall darstellen könnte.)

Daß sowohl [FFKT 92] als auch Kochanek jeweils 2 Modelle mit  $k = 0$  (von allen möglichen!) betrachten, ist sicher nicht gerechtfertigt, wenn man versuchen will, mit 3 oder 4 Modellen die ganze Bandbreite abzudecken. Die Vermutung liegt nahe, daß Modelle mit  $k = 0$  aus anderen Gründen bevorzugt werden, und dies wird bei Kochanek angedeutet; die Bezeichnung der Modelle als „for convenience of comparison. . . four typical choices“ bei [FFKT 92] wirkt unglaublich. Tatsächlich beginnen viele moderne Arbeiten über Kosmologie mit dem Hinweis auf die *Erwartung*  $k = 0$ , da diesen Fall wegen der Theorie des inflationären Universums bevorzugt wird;<sup>2</sup> dies wird wohl der Grund sein, weshalb auch in Bezug auf Gravitationslinsenstatistik Modelle mit  $k = 0$  bevorzugt betrachtet werden. (Siehe aber hierzu [Feige 92, S. 141].)

Da ich die Berechnung der Winkelgrößenentfernungen mit Hilfe der Differentialgleichung von Kayser [Kayser 85] durchgeführt habe, war es für mich möglich, alle Weltmodelle zu betrachten. Mit Hilfe von Programmen von Feige [Feige 92] konnte ich für beliebige Friedmann-Lemaître-Modelle viele  $\eta$ -unabhängig Eigenschaften, z.B. das Weltalter oder  $z_{max}$ , untersuchen.

Insbesondere war die Betrachtung von Modellen mit  $k = +1$  wichtig, denn bei manchen dieser Modelle wird die allgemeine Zunahme der optischen Tiefe mit zunehmendem  $\lambda_0$  z.T. durch die Abnahme des Volumenelementes ausgeglichen, so daß die für Modelle mit  $k = 0$  gültige<sup>3</sup> Aussage, daß man auf Grund jetziger Beobachtungen Weltmodelle mit  $\lambda_0 \approx 1$  ausschließen kann, für  $k = +1$  nicht ohne weiteres zutrifft.

## b. $\eta$ -Parameter

Gravitationslinsenphysik setzt notwendigerweise voraus, daß das Universum nicht vollkommen homogen ist (Kapitel 3 Abschnitt d). Jede realistische Arbeit über Kosmologie in Zusammenhang mit Gravitationslinsen

<sup>2</sup>In vielen anderen wird dies zwar nicht explizit gesagt, aber es werden hauptsächlich kosmologische Modelle mit  $k = 0$  gerechnet.

<sup>3</sup>abgesehen von Auswahleffekten, siehe unten

sollte also verschiedene  $\eta$ -Werte betrachten. Fukugita *et al.* [FFKT 92] betrachten lediglich die zwei Grenzfälle  $\eta = 1$  und  $\eta = 0$ , wobei für den zweiten Fall zwei statistische Ansätze betrachtet werden. Kochanek [Kochanek 92] betrachtet lediglich Modelle mit  $\eta = 1$ . Es ist natürlich leichter, Modelle mit  $\eta = 1$  zu rechnen, da sich hier die Winkelgrößenentfernungen leichter berechnen lassen (Kapitel 3). (Für den Grenzfall  $\eta = 0$  gibt es ebenfalls vereinfachte Entfernungsformeln [FFKT 92].)

Mit Hilfe der Differentialgleichung von Kayser [Kayser 85] ist es für mich möglich gewesen, *beliebige*  $\eta$ -Werte zu betrachten. Hierbei konnte ich feststellen, daß das von [FFKT 92] auf Grund ihrer einfacheren Betrachtung bereits gefundene Ergebnis, daß der  $\eta$ -Parameter nicht so ausschlaggebend für die Gravitationslinsenstatistik ist, auch für eine weitere Zahl von Friedmann-Lemaître-Modellen und für alle  $\eta$ -Werte gültig ist.

## c. Verteilung

[FFKT 92] entwickeln den Formalismus für die Berechnung der  $z_l$ -Verteilung, wenden ihn aber nur im theoretischen Teil der Arbeit an; beim Vergleich mit Beobachtung wird nur die integrierte Form betrachtet. Kochanek hingegen vergleicht theoretisch berechnete Verteilungen mit den beobachteten Systemen. Ich habe diesen Ansatz übernommen und erweitert, um möglichst alle Information, die in der Verteilung steckt, auszunutzen (Kapitel 10).

## d. Auswahleffekte

Bei [FFKT 92] werden Auswahleffekte diskutiert, aber in Hinblick auf die *integrierte* optische Tiefe. Ein Vorteil der Betrachtung der *differentiellen* optischen Tiefe ist, daß Auswahleffekte nicht so störend sind. Eine Ausnahme ist die Beobachtbarkeit der Linsengalaxie (genauer die spektroskopische Grenzhelligkeit), die eine wichtige Rolle spielt. So weit ich weiß, wurde dieser Effekt erst in dieser Arbeit untersucht. Es hat sich gezeigt, daß die Vernachlässigung dieses Effekts erheblichen Einfluß auf die Ergebnisse hat. Ein wichtiger Punkt ist die Änderung, die bei vielen Modellen mit  $\lambda_0 > 0$  auftritt: weil die scheinbare Helligkeit einer Galaxie bei gegebener absoluter Helligkeit und gegebenem  $z$  meist kleiner ist bei diesen Modellen, und weil die *absolute* Helligkeit einer Linsengalaxie unter sonst gleichen Bedingungen kleiner ist, reicht selbst eine verhältnismäßig schwache spektroskopische Grenzhelligkeit aus, um typische Linsengalaxien bereits bei kleinem  $z$  für die Statistik unbrauchbar zu machen, weil sie sonst zu schwach sind. Mit anderen Worten, die Ablehnung von Weltmodellen mit einem verhältnismäßig hohen typischen  $z_d$ -Wert kann dadurch zustandekommen, daß man bei hohem  $z$  die Galaxien nicht sehen kann, und nicht unbedingt dadurch, daß diese Weltmodelle unser Universum nicht richtig beschreiben. Berücksichtigt man  $m_{\text{grenz}}$ , so ist man gezwungen, nur bei kleinem  $z$  diese Modelle mit anderen zu vergleichen, so daß die typische Eigenschaft, ein hoher  $z$ -Wert des Medians der Funktion  $d\tau$ , keinen Einfluß hat.

## e. Entwicklungseffekte

Weder [FFKT 92] noch [Kochanek 92] berücksichtigen Entwicklungseffekte. Es hätte den Rahmen dieser Diplomarbeit gesprengt, Entwicklungseffekte der Linsengalaxien<sup>4</sup> miteinzubeziehen. Jedoch aufgrund der Betrachtung der spektroskopischen Grenzhelligkeit  $m_{\text{grenz}}$  sind Entwicklungseffekte für den von mir entwickelten Formalismus nicht ausschlaggebend, da man sich auf kleine Rotverschiebungen beschränken muß, wo die Entwicklungseffekte klein sind.

## f. Räumliche Verteilung

[FFKT 92] gehen von einer gleichmäßigen Galaxienverteilung aus. Ich habe den Ansatz von Kochanek [Kochanek 92] übernommen, die sich auf isolierte Galaxien als Linsen beschränkt. Dadurch kann man zwar nicht alle Systeme mit in die Statistik aufnehmen, aber dadurch, daß man sich auf einfache Linsen beschränkt, sind die Unsicherheiten der Ergebnisse leichter abzuschätzen. Man kann auch sicher sein, daß kein unsichtbarer Galaxienhaufen vorliegt, denn eine Voraussetzung ist, daß man die Rotverschiebung der Linsengalaxie kennt. Wären andere Galaxien in der Nähe, dann wäre es möglich, sie zu sehen, auch wenn sie etwas schwächer wären als die Linsengalaxie, da die Anwesenheit der hellen Bilder der Quelle nicht so viel stört als bei der Linsengalaxie (deren Rotverschiebung man ja messen kann).

## Zusammenfassung

- Mit Hilfe der Differentialgleichung von Kayser [Kayser 85] und einem Programmpaket von Feige [Feige 92] konnte ich die Linsengalaxienrotverschiebungsstatistik für beliebige Friedmann-Lemaître Weltmodelle untersuchen. Ergebnisse, die für Spezialfälle gewonnen worden sind, lassen sich nicht einfach auf beliebige Modelle extrapolieren.
- Ich habe verschiedene  $\eta$ -Werte betrachtet. Hier konnte ich feststellen, daß die Unsicherheit bezüglich  $\eta$  bei der Bestimmung von  $\lambda_0$  und  $\Omega_0$  nicht stört.
- Den Ansatz von Kochanek [Kochanek 92] für die Betrachtung der Verteilung der Rotverschiebungen beobachteter Linsengalaxien in  $z_d$  habe ich erweitert, um möglichst alle Information der Verteilung auszunutzen.
- Ein wichtiges Ergebnis dieser Arbeit ist, daß die spektroskopische Grenzhelligkeit  $m_{\text{grenz}}$  nicht außer Acht gelassen werden darf; eine grobe Abschätzung von  $m_{\text{grenz}}$  reicht jedoch für praktische Zwecke aus, so daß dies keine zu große zusätzliche Unsicherheit mithineinbringt.
- Durch die Berücksichtigung von  $m_{\text{grenz}}$  muß man Entwicklungseffekte nicht so stark beachten, da man dadurch gezwungen wird, die Abhängigkeit der Form der Funktion  $d\tau$  vom kosmologischen Modell nur bei kleinen Rotverschiebungen zu betrachten.

---

<sup>4</sup>Entwicklungseffekte der Quellen spielen keine Rolle.



- Unwissen über die räumliche Verteilung der Galaxien stört das Verfahren nicht, denn es beschränkt sich auf isolierte Galaxien, wo es möglich ist, eine quantitative Analyse leicht durchzuführen.



# Kapitel 14

## Zusammenfassung und Ausblick

Wegen der notwendigen Betrachtung der spektroskopischen Grenzhelligkeit  $m_{\text{grenz}}$ , was in der Praxis bedeutet, daß man die Unterschiede der Form der  $d\tau$ -Funktion für verschiedene Weltmodelle nur bei kleinem  $z$  betrachtet, ist man nicht in der Lage, bestimmte Weltmodelle mit einer zufriedenstellenden kleinen Wahrscheinlichkeit auszuschließen. Man kann aber ansatzweise erkennen, daß das Verfahren numerisch stabil ist, und daß ein Bereich der größten relativen Wahrscheinlichkeit sich in dem Bereich befindet, der nach anderen Überlegungen erlaubt ist. Durch bessere Beobachtungen, die  $m_{\text{grenz}}$  zu schwächeren scheinbaren Helligkeiten hin verschieben, oder durch die Vergrößerung der Zahl der Gravitationslinsensysteme,<sup>1</sup> die als Eingabedaten für das Verfahren geeignet sind, wäre man wahrscheinlich in der Lage, ein kleines Gebiet in dem sonst erlaubten Parameterraum eine so hohe relative Wahrscheinlichkeit zuzuordnen, daß man den erlaubten Bereich weiter als mit anderen Methoden einschränken könnte.

Eine Untersuchung an Hand von Simulationen, um zu sehen, wieviele Systeme man braucht, um den erlaubten Bereich weiter als mit existierenden Methoden einzuschränken, ist bereits in Arbeit. Bei mehr Aussagekraft wäre es möglich, nicht nur die relative Wahrscheinlichkeit darzustellen, sondern auch eine Fehlerangabe für den Bereich höchster relativer Wahrscheinlichkeit, die sich aus der statistischen Streuung ergibt—mit anderen Worten, den Bereich kleinerer Wahrscheinlichkeit, der im Rahmen der statistischen Streuung doch im „richtigen“ Weltmodell entstehen könnte. In diesem Zusammenhang wäre auch ein Ausprobieren anderer Methoden der Berechnung der relativen Wahrscheinlichkeit, wie z.B. des Kolmogorov-Smirnov-Tests, angebracht, vor allem wenn man mehr Systeme betrachtet.

Es ist heute nicht möglich, allein durch die Verteilung der Rotverschiebungen der Linsengalaxien bei bekannten Gravitationslinsensystemen, bestimmte Weltmodelle mit einer zufriedenstellenden Sicherheit auszuschließen. Die Aussage von [Kochanek 92], daß flache Modelle mit einem großen  $\lambda_0$ -Wert 5–10 mal unwahrscheinlicher sind als das Einstein-de Sitter-Modell, ist nicht aufrechterhalten, wenn man  $m_{\text{grenz}}$  in die Betrachtung miteinbezieht. (Mit seinen Eingabedaten ohne die Betrachtung von  $m_{\text{grenz}}$  habe ich ebenfalls 10.000 Modelle in der  $\lambda_0$ - $\Omega_0$ -Ebene gerechnet, wobei dieses Ergebnis bestätigt wird, was eine kleine Kontrolle meines Verfahrens

---

<sup>1</sup> Dies könnte entweder durch die Messung von mehr (meist Galaxien-) Rotverschiebungen bei existierenden Systemen oder durch die Entdeckung neuer Systeme geschehen.

darstellt.) Selbst wenn *flache* Modelle mit einem großen  $\lambda_0$ -Wert ausgeschlossen werden können, kann man dieses Ergebnis i.a. nicht auf andere Weltmodelle, insbesondere nicht auf solche mit  $k = +1$  und einem etwas größerem  $q_0$ -Wert, übertragen.

Erfreulicherweise spielen die Größen  $\eta$  und  $m_{\text{grenz}}$  keine so große Rolle, daß sie zur Unsicherheit der Bestimmung von  $\lambda_0$  und  $\Omega_0$  beitragen. Eigentlich ist  $m_{\text{grenz}}$  kein freier Parameter, sondern sollte für jedes System einzeln abgeschätzt werden. Hierdurch könnte die Aussagekraft des Verfahrens etwas vergrößert werden.

Durch eine Untergrenze für das Weltalter (bei bekannter Hubble-Konstanten) ist man in der Lage, den erlaubten Bereich auf einen Streifen „parallel“ zu und angrenzend an der  $A_2$ -Kurve einzuschränken. Mein Verfahren kann wahrscheinlich noch zusätzlich einen Bereich unmittelbar angrenzend an der  $A_2$ -Kurve ausschließen, so daß eine zusätzliche Bestimmung von, z.B.,  $\Omega_0$  ausreichen würde, um  $\Omega_0$  und  $\lambda_0$  mit einer hoffentlich ausreichenden Genauigkeit zu bestimmen. Noch besser wäre eine Bestimmung des Krümmungsradius,<sup>2</sup> denn Linien von gleichem Krümmungsradius laufen in etwa senkrecht auf die Streifen gleicher relativen Wahrscheinlichkeit. In diesem Zusammenhang ist interessant, daß das von Kayser entwickelte Verfahren [Kayser 93] zur Bestimmung kosmologischer Parameter durch die Winkelgrößen-Rotverschiebungs-Beziehung für kompakte Radioquellen Streifen gleicher relativen Wahrscheinlichkeit in etwa parallel zu Linien mit gleichem Krümmungsradius liefert, so daß die Verfahren sich ergänzen. (Im allgemeinen wird man in Zukunft wahrscheinlich eher durch das Zusammenspiel vieler verschiedener Methoden als durch Verfeinerung einer Methode Fortschritte in der Bestimmung kosmologischer Parameter machen.)

Hoffnungen, mit Hilfe von bereits gewonnenen Beobachtungen bestimmte kosmologische Modelle ausschließen zu können, konnte ich nicht bestätigen. Das Verfahren ist aber wahrscheinlich geeignet, mit etwas umfangreichem Beobachtungsmaterial Aussagen über das kosmologische Modell zu machen, die vergleichbar sind mit denen herkömmlicherer Methoden. Dies will ich durch Simulationen testen. Dadurch, daß in erster Linie man etwas über  $\lambda_0$  und vielleicht  $\Omega_0$  erfahren kann, macht das Verfahren dazu geeignet, mit anderen Methoden ergänzend zusammenzuwirken. Auch dies kann mittels Simulationen getestet werden.

---

<sup>2</sup>im wesentlichen  $|\Omega_0 + \lambda_0|$

# Anhänge



# Anhang 1

## Herleitung des Ausdrucks für die optische Tiefe

'You damn sadist', said Mr. Cummings,  
'you try to make people think'.

Ezra Pound

Es ist zu zeigen, daß der Ausdruck

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial z_d \partial \frac{L}{L^*}} = n^*(1+z_d)^2 16\pi^3 \left(\frac{v^*}{c}\right)^4 \left(\frac{L}{L^*}\right)^{\alpha + \frac{4}{\gamma}} \left(\frac{D_d D_{ds}}{D_s}\right)^2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{P(z_d)}} \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right) \quad (1.1)$$

durch die Variablentransformation von  $\frac{L}{L^*}$  zu  $\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*}$  und Faltung mit  $\delta(\hat{a} - \hat{a}')$  den Ausdruck

$$\frac{d\tau}{dz_d} = 16\pi^3 n^* \left(\frac{v^*}{c}\right)^4 (1+z_d)^2 \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}}\right)^{\frac{\gamma}{2}(1+\alpha)} D_d^2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{(1+z_d)^2(\Omega_0 z_d + 1 - \lambda_0) + \lambda_0}} \exp\left(-\left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\right) \quad (1.2)$$

liefert. (Bemerkung: In Gl. 1.1 ist  $\hat{a}$  als *Variable* zu verstehen, wie auch  $z$ ; in Gl. 1.2 hingegen ist mit  $\hat{a}$  (eigentlich  $\hat{a}'$ ) eine *feste Größe* gemeint. Im folgenden ist zunächst  $\hat{a}$  als Variable zu betrachten.)

Nun ist

$$\frac{L}{L^*} = \left(\frac{v}{v^*}\right)^\gamma$$

(Gl. 9.6) und

$$\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} = \left(\frac{v}{v^*}\right)^2 \frac{D_{ds}}{D_s}$$

(siehe S. 65). Daraus folgt

$$\frac{L}{L^*} = \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}}\right)^{\frac{\gamma}{2}}$$

Einsetzen in Gl. 1.1 liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial z_d \partial \frac{L}{L^*}} &= n^*(1+z_d)^2 16\pi^3 \left(\frac{v^*}{c}\right)^4 \left( \left( \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right)^{\alpha + \frac{4}{\gamma}} \\ &\quad \left( \frac{D_d D_{ds}}{D_s} \right)^2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{P(z_d)}} \exp \left( - \left( \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right) \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{d \frac{L}{L^*}}{d \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*}} &= \frac{d}{d \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*}} \left( \frac{v}{v^*} \right)^\gamma \\ &= \frac{\partial}{\partial \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*}} \left( \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \\ &= \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}-1} \left( \frac{D_s}{D_{ds}} \right) \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial z_d \partial \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*}} &= n^*(1+z_d)^2 16\pi^3 \left(\frac{v^*}{c}\right)^4 \left( \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}(\alpha + \frac{4}{\gamma})} \\ &\quad \left( \frac{D_d D_{ds}}{D_s} \right)^2 \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}-1} \frac{D_s}{D_{ds}} \\ &\quad \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{P(z_d)}} \exp \left( - \left( \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial z_d \partial \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*}} &= n^*(1+z_d)^2 16\pi^3 \left(\frac{v^*}{c}\right)^4 \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}(1+\alpha)+1} \\ &\quad \left( \frac{D_d D_{ds}}{D_s} \right)^2 \frac{D_s}{D_{ds}} \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{P(z_d)}} \exp \left( - \left( \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right) \end{aligned}$$

Durch Umformung erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial z_d \partial \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*}} &= 16\pi^3 n^* \left(\frac{v^*}{c}\right)^4 (1+z_d)^2 \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}(1+\alpha)} \\ &\quad \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \left( \frac{D_d D_{ds}}{D_s} \right)^2 \frac{D_s}{D_{ds}} \\ &\quad \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{P(z_d)}} \exp \left( - \left( \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right) \end{aligned}$$

Da ich mich für ein *festes*  $\hat{a}$  interessiere, also für die Abhängigkeit der optischen Tiefe von  $z$  für einen festen Bildabstand, füge ich die  $\delta$ -Funktion  $\delta(\hat{a} - \hat{a}')$  dem etwas umgeformten Integranden hinzu und integriere über  $d \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dz_d} &= \int 16\pi^3 n^* \left(\frac{v^*}{c}\right)^4 (1+z_d)^2 \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}(1+\alpha)} \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} D_d^2 \\ &\quad \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{P(z_d)}} \exp \left( - \left( \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right) \delta(\hat{a} - \hat{a}') d \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \end{aligned}$$



Wenn man  $P(z_d)$  durch  $\sqrt{(1+z_d)^2(\Omega_0 z_d + 1 - \lambda_0) + \lambda_0}$  ersetzt, die Integration ausführt und  $\hat{a}'$  in  $\hat{a}$  umbenennt, so erhält man

$$\frac{d\tau}{dz_d} = 16\pi^3 n_* \left(\frac{v_*}{c}\right)^4 (1+z_d)^2 \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}}\right)^{\frac{\gamma}{2}(1+\alpha)}$$

$$D_d^2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{(1+z_d)^2(\Omega_0 z_d + 1 - \lambda_0) + \lambda_0}} \exp\left(-\left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\right)$$

*Q.E.D.*



## Anhang 2

# Programme

*We haven't the money, so we've got to think.*

Ernest Rutherford

Die Programme, mit denen ich die Berechnungen durchgeführt habe, wurden hauptsächlich von mir in der Programmiersprache **FORTRAN 77** geschrieben. Ausnahmen bilden einige Unterprogramme aus den *Numerical Recipes* [PFTF] (ebenfalls **FORTRAN 77**), ein Programmpaket von Bernd Feige<sup>1</sup> für die Berechnung von verschiedenen kosmologischen Größen auf der Basis von elliptischen Integralen (in der Programmiersprache C) und einige kleine Unterprogramme, die für dieses benötigt werden (von mir, z.T. mit Hilfe von Reiner Schlotte, in C geschrieben). Alle Quellprogramme zusammen haben eine Größe von etwa 130 Kilobyte.

Die Darstellung der Ergebnisse erfolgte mit Hilfe des Programmpakets *GRAL* von Rainer Kayser [Kayser]. Das Einbinden der hiermit erzeugten **POSTSCRIPT**-Darstellungen in **L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X**, mit dem diese Arbeit entworfen und gesetzt wurde, geschah ebenfalls mit Hilfe von Reiner Schlotte.

---

<sup>1</sup> beschrieben in [Feige 92]



# Literaturverzeichnis

*Let us come now to references to authors,  
which other books contain and yours lacks.  
The remedy for this is very simple;  
for you have nothing else to do  
but to look for a book  
which quotes them all from A to Z...  
Then you put this same alphabet into yours...  
And if it serves no other purpose,  
at least that long catalogue of authors  
will be useful  
to lend authority to your book...*

Miguel de Cervantes

- [Alcock & Anderson 86] C. Alcock & N. Anderson: „On the distance measure for gravitational lenses“  
*APJ*, **302**, 1, 43 (1986)
- [Bartelmann & Schneider 92] M. Bartelmann & P. Schneider: „A large-scale structure model for gravitational lensing“  
*A&A*, **259**, 2, 413 (1992)
- [Berry] M. V. Berry: *Cosmology and Gravitation*  
Bristol: Adam Hilger, 1989
- [Binney & Tremaine] J. Binney & S. Tremaine: *Galactic dynamics*  
Princeton: Princeton University Press, 1987
- [Blandford & Narayan 1992] R. D. Blandford & R. Narayan: „Cosmological applications of gravitational lensing“  
*ARA*, **30**, 311 (1992)
- [Bondi] H. Bondi: *Cosmology*  
Cambridge: Cambridge University Press, 1952
- [Borgeest 82] U. Borgeest: *Zur Massenbestimmung mittels des Gravitationslinseneffektes*  
Diplomarbeit, Universität Hamburg, 1982
- [Borgeest 83] U. Borgeest: „The difference in light travel time between gravitational lens images. II. Theoretical foundations“  
*A&A*, **128**, 1, 162 (1983)

- [Borgeest 85] U. Borgeest: *Die allgemeine Methode zur Bestimmung der Deflektormasse und der Hubble-Konstanten durch den Gravitationslinseneffekt*  
Dissertation, Universität Hamburg, 1985
- [Breimer & Sanders 92] T. G. Breimer & R. H. Sanders: „Constraints on cosmological parameters from clusters of galaxies containing luminous arcs“  
*MNRAS*, **257**, 1, 97 (1992)
- [BSP 88] B. J. Boyle, T. Shanks & B. A. Peterson: „The evolution of optically selected QSOs-II“  
*MNRAS*, **235**, 3, 935 (1988)
- [BST 88] B. Binggeli, A. Sandage & G. A. Tammann: „The luminosity function of galaxies“  
*ARA*, **26**, 509 (1988)
- [Catelan & Pacheco 92] M. Catelan & J. A. de Freitas Pacheco: „A new age-metallicity relation for galactic globular clusters in the  $\alpha$ -enhanced scenario: cosmological implications“  
*A&A*, **258**, 2, L5 (1992)
- [CWW 80] G. D. Coleman, C.-C. Wu & D. W. Weedman: „Colors and magnitudes predicted for high redshift galaxies“  
*APJS*, **43**, 3, 393 (1980)
- [Dar 90] A. Dar: „Astrophysics and cosmology closing in on neutrino masses“  
*Science*, **250**, 4987, 1529 (1990)
- [Duemmler 92] R. Duemmler: „The Hubble constant free from local velocity effects“  
*A&A*, **264**, 1, 1 (1992)
- [Eddington] A. Eddington: *The expanding universe*  
Cambridge: Cambridge University Press, 1933
- [Eddington 30] A. S. Eddington: „On the instability of Einstein’s spherical world“  
*MNRAS*, **90**, 7, 668 (1930)
- [EEP 88] G. Efstathiou, R. S. Ellis & B. A. Peterson: „Analysis of a complete galaxy redshift survey-II. The field-galaxy luminosity function“  
*MNRAS*, **232**, 3, 431 (1988)
- [Einstein 17] A. Einstein: „Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie“  
*Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, **1917**, Februar 8, 142 (1917)

- [Einstein 31] A. Einstein: „Zum kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie“  
*Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, **1931**, 235 (1931)
- [Einstein & de Sitter 32] A. Einstein & W. de Sitter: „On the relation between the expansion and the mean density of the universe“  
*Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **18**, 3, 213 (1932)
- [Faber & Jackson 76] S. M. Faber & R. E. Jackson: „Velocity dispersions and mass-to-light ratios for elliptical galaxies“  
*APJ*, **204**, 3, 668 (1976)
- [Feige 92] B. Feige: „Elliptic integrals for cosmological constant cosmologies“  
*Astronomische Nachrichten*, **313**, 3, 139 (1992)
- [FFKT 92] M. Fukugita, K. Futamase, M. Kasai & E. L. Turner: „Statistical properties of gravitational lenses with a nonzero cosmological constant“  
*APJ*, **393**, 1, 3 (1992)
- [Friedmann 22] A. Friedmann: „Über die Krümmung des Raumes“  
*Zeitschrift für Physik*, **10**, 4, 377 (1922)
- [Friedmann 24] A. Friedmann: „Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes“  
*Zeitschrift für Physik*, **21**, 2, 326 (1924)
- [Gessner 92] E. Gessner: „Cosmological constant and the flat rotation curves of galaxies“  
*Astrophysics and Space Science*, **194**, 2, 197 (1992)
- [Gott 77] J. R. Gott III: „Recent theories of galaxy formation“  
*ARA*, **15**, 239 (1977)
- [GPL 89] J. R. Gott III, M.-G. Park & H. M. Lee: „Setting limits on  $q_0$  from gravitational lensing“  
*APJ*, **338**, 1, 1 (1989)
- [Harrison] E. R. Harrison: *Cosmology—the science of the universe*  
Cambridge: Cambridge University Press, 1981

- [Harrison 93] E. R. Harrison: „The redshift-distance and velocity-distance laws“  
*APJ*, **403**, 1, 28 (1993)
- [Hawkins & Veron 93] M. R. S. Hawkins & P. Veron: „The quasar luminosity function from a variability-selected sample“  
*MNRAS*, **260**, 1, 202 (1993)
- [Heckmann] O. Heckmann: *Theorien der Kosmologie*  
Heidelberg: Springer-Verlag, 1968
- [Hubble 26] E. P. Hubble: „Extra-galactic nebulae“  
*APJ*, **64**, 5, 321 (1926)
- [Ichikawa & Fukugita 92] T. Ichikawa & M. Fukugita: „Hubble flows in Pisces-Perseus region from the Giovanelli-Haynes galaxy sample“  
*APJ*, **394**, 1, 61 (1992)
- [Jackson 92] J. C. Jackson: „A deflationary universe“  
*QJRAS*, **33**, 1, 1 (1992)
- [Jaroszyński 92] M. Jaroszyński: „Gravitational lensing in a universe with realistic mass distribution: II. Results“  
*MNRAS*, **255**, 4, 655 (1992)
- [Kayser] R. Kayser: *GRAL: An advanced gravitational lens software package*  
(Installiert am Rechner der Hamburger Sternwarte)
- [Kayser 82] R. Kayser: *Gravitationslinseneffekt: Einfluß kosmologischer Größen auf die Lichtlaufzeit*  
Diplomarbeit, Universität Hamburg, 1982
- [Kayser 85] R. Kayser: *Helligkeitsänderungen durch den statistischen Gravitationslinseneffekt*  
Dissertation, Universität Hamburg, 1985
- [Kayser 93] R. Kayser: „Testing cosmology with compact radio sources“  
(in Vorbereitung)
- [Kayser & Refsdal 83] R. Kayser & S. Refsdal: „The difference in light travel time between gravitational lens images. I. Generalisation of the wavefront method to arbitrary deflectors and inhomogeneous universes“  
*A&A*, **128**, 1, 156 (1983)
- [Kayser & Refsdal 88] R. Kayser & S. Refsdal: „Gravitational lenses and the brightness distribution of distant sources“  
*A&A*, **197**, 1, 63 (1988)



- [Kellerman 93] K. I. Kellermann: „The cosmological deceleration parameter estimated from the angular-size/redshift relation for compact radio sources“  
*Nature*, **361**, 6408, 134 (1993)
- [Kochanek 92] C. S. Kochanek: „Do the redshifts of gravitational lens galaxies rule out a large cosmological constant?“  
*APJ*, **384**, 1, 1 (1992)
- [Krauss & White 92a] L. M. Krauss & M. White: „Gravitational lensing, finite galaxy cores, and the cosmological constant“  
*APJ*, **394**, 2, 385 (1992)
- [Krauss & White 92b] L. M. Krauss & M. White: „Gravitational lensing and the variability of  $G$ “  
*APJ*, **394**, 2, 385 (1992)
- [Kron 93] R. Kron: „Evolution in the galaxy population“  
(Vorträge beim 23<sup>d</sup> „Saas-Fee“ Advanced Course *The Deep Universe*, 1993)
- [Kunze 90] W. D. Kunze: „Amplification near a gravitational lens macro-caustic“  
in *Gravitational lensing*, Y. Mellier, B. Fort & G. Soucail (Hrsg.)  
Berlin: Springer-Verlag, 1990
- [Lee 92] Y.-W. Lee: „Evidence for an old galactic bulge from RR Lyrae stars in Baade’s window: implications for the formation of the galaxy and the age of the universe“  
*AJ*, **104**, 5, 1780 (1992)
- [Leibundgut & Pinto 92] B. Leibundgut & P. A. Pinto: „A distance-independent calibration of the luminosity of type Ia supernovae and the Hubble constant“  
*APJ*, **401**, 1, 49 (1992)
- [Lemaître 27] G. Lemaître: „Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale de nébuleuses extra-galactiques“  
*Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, **47**, A, 49 (1927)
- [Lemaître 31a] G. Lemaître: „A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae“  
*MNRAS*, **91**, 5, 483 (1931)
- [Lemaître 31b] G. Lemaître: „The expanding universe“  
*MNRAS*, **91**, 5, 490 (1931)

- [Longair 93] M. S. Longair: „The physics of background radiation“  
(Vorträge beim 23<sup>d</sup> „Saas-Fee“ Advanced Course *The Deep Universe*, 1993)
- [Mao 91] S. Mao: „Statistics of gravitational lenses: the uncertainties“  
*APJ*, **380**, 1, 9 (1991)
- [Matravers & Aziz 88] D. R. Matravers & A. M. Aziz: „A note on the observer area-distance formula“  
*MNASSA*, **47**, 9&10, 124 (1988)
- [Mattig 58] W. Mattig: „Über den Zusammenhang zwischen Rotverschiebung und scheinbarer Helligkeit“  
*Astronomische Nachrichten*, **284**, 3, 109 (1958)
- [McCrea & Milne 34] McCrea & Milne: „Newtonian universes and the curvature of space“  
*Quart. Jou. Math. (Oxford)*, **5**, 73 (1934)
- [Milne] E. A. Milne: *Relativity, gravitation and world structure*  
Oxford: Oxford University Press, 1935
- [Milne 34] E. A. Milne: „World-models and world-picture“  
*The Observatory*, **57**, 716, 24 (1934)
- [MRRS] G. Musiol, J. Ranft, R. Reif & D. Seeliger: *Kern- und Elementarteilchenphysik*  
Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1988
- [MTW] C. W. Misner, K. S. Thorne & J. A. Wheeler: *Gravitation*  
New York: W. H. Freeman and Company, 1973
- [Moroney] M. J. Moroney: *Facts from figures*  
Harmondsworth, Middlesex, England: Penguin Books Ltd., 1951
- [Narayan & Wallington 92] R. Narayan & S. Wallington: „Introduction to basic concepts of gravitational lensing“  
in *Gravitational Lenses*, R. Kayser, T. Schramm & L. Nieser (Hrsg.)  
Heidelberg: Springer-Verlag, 1992
- [Narlikar & Padmanabhan 91] J. V. Narlikar & T. Padmanabhan: „Inflation for astronomers“  
*ARAA*, **29**, 325 (1991)
- [Paczynski & Gorski 81] B. Paczynski & K. Gorski: „Another possible case of a gravitational lens“  
*APJ*, **248**, 2, L101 (1981)

- [Pagel & Kazlauskas 92] B. E. J. Pagel & A. Kazlauskas: „Primordial helium: the third decimal place“  
*MNRAS*, **256**, 3, 49P (1992)
- [PCT 92] W. H. Press, S. M. Carroll & E. L. Turner:  
„The cosmological constant“  
*ARA*, **30**, 499 (1992)
- [Peacock 92] J. A. Peacock: „Errors on the measurement of  $\Omega$  via cosmological dipoles“  
*MNRAS*, **258**, 3, 581 (1992)
- [Peletier] R. F. Peletier: *Elliptical galaxies: structure and stellar content*  
Groningen: krips repro meppel, 1989
- [Pence 76] W. Pence: „K-corrections for galaxies of different morphological types“  
*APJ*, **203**, 2, 39 (1976)
- [PFTF] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky & W. T. Vetterling: *Numerical recipes: the art of scientific computing*  
Cambridge: Cambridge University Press, 1986
- [PMR 92] M. J. Pierce, R. D. McClure & R. Racine:  
„High resolution imaging of Virgo Cluster galaxies. I. The distance bases on the brightest stars in NGC 4571“  
*APJ*, **393**, 2, 523 (1992)
- [Postman & Geller 84] M. Postman & M. J. Geller: „The morphology-density relation: the group connection“  
*APJ*, **281**, 1, 95 (1984)
- [PRS 92] M. J. Pierce, M. E. Ressler & M. S. Shure:  
„An absolute calibration of type 1a supernovae and the value of  $H_0$ “  
*APJ*, **390**, 2, L45 (1992)
- [Ratra & Quillen 92] B. Ratra & A. Quillen: „Gravitational lensing effects in a time-variable cosmological ‘constant’ cosmology“  
*MNRAS*, **259**, 4, 718 (1992)
- [Refsdal 64a] S. Refsdal: „The gravitational lens effect“  
*MNRAS*, **128**, 4, 295 (1964)
- [Refsdal 64b] S. Refsdal: „On the possibility of determining Hubble’s parameter and the masses of galaxies from the gravitational lens effect“  
*MNRAS*, **128**, 4, 307 (1964)
- [Refsdal 66a] S. Refsdal: „On the possibility of testing cosmological theories from the gravitational lens effect“  
*MNRAS*, **132**, 1, 101 (1966)

- [Refsdal 66b] S. Refsdal: „On the possibility of determining the distances and masses of stars from the gravitational lens effect“  
*MNRAS*, **134**, 3, 315 (1966)
- [Refsdal 70] S. Refsdal: „On the propagation of light in universes with inhomogeneous mass distribution“  
*APJ*, **159**, 1, 357 (1970)
- [RLT 92] D. Richstone, A. Loeb & E. L. Turner: „A lower limit on the cosmic mean density from the ages of clusters of galaxies“  
*APJ*, **393**, 2, 447 (1992)
- [RSdL 67] S. Refsdal, R. Stabell & F. G. de Lange: „Numerical calculations on relativistic cosmological models“  
*MNRAS*, **71**, 1, 143 (1967)
- [Robertson 29] H. P. Robertson: „On the foundations of relativistic cosmology“  
*Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **15**, 11, 822 (1929)
- [Robertson 33] H. P. Robertson: „Relativistic cosmology“  
*Rev. Mod. Phys.*, **5**, 1, 62 (1933)
- [Robertson 35] H. P. Robertson: „Kinematics and world-structure. I“  
*APJ*, **82**, 4, 284 (1935)
- [Robertson 36a] H. P. Robertson: „Kinematics and world-structure. II“  
*APJ*, **83**, 3, 187 (1936)
- [Robertson 36b] H. P. Robertson: „Kinematics and world-structure. III“  
*APJ*, **83**, 4, 257 (1936)
- [Robertson 37] H. P. Robertson: „The apparent luminosity of a receding nebula“  
*Zeitschrift für Astrophysik*, **15**, 1, 69 (1937)
- [Robertson 55] H. P. Robertson: „The theoretical aspects of the nebular redshift“  
*PASP*, **67**, 395, 82 (1955)
- [Sandage 93a] A. Sandage: „ $H_0 = 43 \pm 11$  based on angular diameters of high luminosity field spiral galaxies“  
*APJ*, **402**, 1, 3 (1993)
- [Sandage 93b] A. Sandage: „The elements of practical cosmology“  
(Vorträge beim 23<sup>d</sup> „Saas-Fee“ Advanced Course *The Deep Universe*, 1993)

- [Sandage & Tammann 93] A. Sandage & G. A. Tammann: „The Hubble diagram in  $V$  for supernovae of type Ia and the value of  $H_0$  therefrom“  
*APJ*, **415**, 1, 1 (1993)
- [Sandage *et. al* 92] A. Sandage, A. Saha, G. A. Tammann, N. Panagia & D. Macchetto: „The Cepheid distance to IC 4182: calibration of  $M_V(\text{max})$  SN Ia 1937C and the value of  $H_0$ “  
*APJ*, **401**, 1, L7 (1992)
- [Schechter 76] P. Schechter: „An analytic expression for the luminosity function for galaxies“  
*APJ*, **203**, 2, 297 (1976)
- [SEF] P. Schneider, J. Ehlers & E. E. Falco: *Gravitational Lenses*  
New York: Springer-Verlag, 1992
- [Sextl & Urbantke] R. U. Sextl & H. K. Urbantke: *Gravitation und Kosmologie*  
Zürich: Bibliographisches Institut AG, 1975
- [de Sitter 17a] W. de Sitter: „On Einstein’s theory of gravitation, and its astronomical consequences. First paper.“  
*MNRAS*, **76**, 9, 699 (1917)
- [de Sitter 17b] W. de Sitter: „On Einstein’s theory of gravitation, and its astronomical consequences. Second paper.“  
*MNRAS*, **77**, 2, 155 (1917)
- [de Sitter 17c] W. de Sitter: „On Einstein’s theory of gravitation, and its astronomical consequences. Third paper.“  
*MNRAS*, **78**, 1, 3 (1917)
- [Stabell & Refsdal 66] R. Stabell & S. Refsdal: „Classification of general relativistic world models“  
*MNRAS*, **132**, 3, 379 (1966)
- [Suginohara & Suto 92] T. Suginohara & Y. Suto: „Properties of galactic halos in spatially flat universes dominated by cold dark matter: effects of non-vanishing cosmological constant“  
*APJ*, **396**, 2, 395 (1992)
- [Surdej *et.al.* 93] J. Surdej, J. F. Claeskens, D. Cramp-ton, A. V. Filippenko, D. Hutsemékers, P. Magain, B. Pirenne, C. Vanderriest & H. K. C. Yee: „Gravitational lensing statistics based on a sample of highly luminous quasars“  
*AJ*, **105**, 6, 2064 (1993)

- [TOG 84] E. L. Turner, J. P. Ostriker & J. R. Gott III: „The statistics of gravitational lenses: the distributions of image angular separations and lens redshifts“  
*APJ*, **284**, 1, 1 (1984)
- [Tully & Fisher 77] R. B. Tully & J. R. Fisher: „A new method of determining distances to galaxies“  
*A&A*, **54**, 1, 661 (1977)
- [Turner 80] E. L. Turner: „The effect of undetected gravitational lenses on statistical measures of quasar evolution“  
*APJ*, **242**, 3, L135 (1980)
- [Turner 90] E. L. Turner: „Gravitational lensing limits on the cosmological constant in a flat universe“  
*APJ*, **365**, 2, L43 (1990)
- [Turner & Ikeuchi 92] E. L. Turner & S. Ikeuchi: „Quasar absorption lines with a nonzero cosmological constant“  
*APJ*, **389**, 2, 478 (1992)
- [de Vaucouleurs & Olson 82] G. de Vaucouleurs & D. W. Olson: „The central velocity dispersion in elliptical and lenticular galaxies as an extragalactic distance indicator“  
*APJ*, **256**, 2, 346 (1982)
- [Voigt] H. H. Voigt: *Abriss der Astronomie*  
Zürich: Bibliographisches Institut (Wissenschaftsverlag) und F. A. Brockhaus AG, 1988
- [Walker 35] A. R. Walker: „On Riemannian spaces with spherical symmetry about a line and the conditions for isotropy in general relativity“  
*Quart. Jou. Math. (Oxford)*, **6**, 81 (1935)
- [Walker 36] A. R. Walker: „On Milne’s theory of world-structure“  
*Proc. Math. Soc. Lond.*, **42**, 2, 90 (1936)
- [Weinberg] S. Weinberg: *Gravitation and Cosmology*  
New York: Wiley, 1972
- [Weinberg 76] S. Weinberg: „Apparent luminosities in a locally inhomogeneous universe“  
*APJ*, **208**, 1, L1 (1976)
- [Weyl 23] H. Weyl: „Zur allgemeinen Relativitätstheorie“  
*Physikalische Zeitschrift*, **24**, 11, 230 (1923)

# Danksagung

*Work, Finish, Publish.*

Michael Faraday

Ich danke ganz herzlich Prof. Dr. Sjur Refsdal für die Gelegenheit, in seiner Arbeitsgruppe meine Diplomarbeit zu schreiben. Besonders die Möglichkeit, meine Vorliebe für die klassische Kosmologie mit einem sehr aktuellen Thema verbinden zu können, hat mir sehr gefallen. Dres. Rainer Kayser und Thomas Schramm danke ich für viele hilfreiche Gespräche und gute Ratschläge. Rainers **FORTRAN**-, **VMS/DCL**- und **POSTSCRIPT**-Software hat die Fertigstellung dieser Arbeit sehr erleichtert. Reiner Schlotte hat mir sehr geholfen bei Problemen in Zusammenhang mit dem Einbinden von Graphik und mit **C-FORTRAN**-Schnittstellen (hier auch Thorsten Köhler). Bernd Neindorf half mir, wo die Mathematik schwierig wurde. Für alle diese Hilfen bin ich dankbar—für die Fehler bin ich verantwortlich. Allen anderen in der Gravitationslinsengruppe (Dr. Ulf Borgeest, Martina Erlemann, Willi Hoff, Joachim von Linde, Christoph Lisson, Dörte Mehlert, Lars Nieser, Michael Schaaf und Dr. Jochen Schramm) und an der ganzen Sternwarte danke ich für die vielen kleinen Hilfen und die gute Arbeitsatmosphäre.

Ich danke auch meiner Freundin Anke und Tochter Raika für ihre Hilfe und Geduld während meiner Diplomandenzeit.





# Erklärung

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Hamburg-Bergedorf, den 01.11.1993

Phillip King