

---

# Modélisation par éléments finis du couplage thermo-élastique dans les structures vibrantes

Séverine Lepage, Jean-Claude Golinval

Université de Liège  
Département d'Aérospatiale, Mécanique et Matériaux  
LTAS - Vibrations et Identification des Structures  
1, Chemin des Chevreuils  
B-4000 Liège, Belgique  
SLepage@ulg.ac.be

---

*RÉSUMÉ.* Afin de répondre à la demande de systèmes de navigation inertielle de plus en plus précis, des micro-accéléromètres et des micro-gyromètres sont développés. La conception de ces systèmes nécessite la prise en compte des mécanismes de dissipation tels que l'amortissement thermo-élastique. Afin d'estimer l'influence des effets thermo-élastiques sur le comportement des structures vibrantes, des modèles analytiques peuvent être développés pour des structures simples et sous certaines hypothèses restrictives. Pour traiter des géométries plus complexes, la méthode des éléments finis doit être utilisée. A titre d'exemple, une poutre bi-encastée a été modélisée à l'aide d'éléments finis thermo-élastiques. Les modèles analytiques et par éléments finis montrent que le couplage thermo-élastique modifie la fréquence naturelle, atténue l'amplitude des vibrations, se caractérise par un déphasage entre les champs thermiques et mécaniques et influence le facteur de qualité du micro-résonateur.

*ABSTRACT.* Micro-accelerometers and micro-gyrometers are being developed in order to respond to the demand of accurate miniature inertial navigation systems. In the design of such accurate systems, which require a high quality factor, the dissipation mechanisms such as the thermoelastic damping have to be considered. In order to assess the thermoelastic influence on the behavior of vibrating structures, analytical models may be used for simple configurations under very restrictive assumptions. In order to investigate more complex structures, the finite element method may be used. An oscillating clamped-clamped beam is modelled using thermoelastic finite elements. The analytical and finite element analyses show that the thermoelastic coupling implies a natural frequency shift, an amplitude attenuation, a difference of phase between the thermal and mechanical degrees of freedom and influences the quality factor of the resonating system.

*MOTS-CLÉS :* Éléments finis, couplage thermo-élastique, amortissement thermo-élastique, micro-structures.

*KEYWORDS:* Finite element method, thermoelastic coupling, thermoelastic damping, micro-structures.

---

## 1. Introduction

De nos jours, les systèmes inertiels de navigation nécessitent le développement de micro-accéléromètres et micro-gyromètres de plus en plus précis. Dans ce contexte, l'ONERA développe depuis quelques années des micro-senseurs inertiels vibrants tels que l'accéléromètre VIA (Vibrating Inertial Accelerometer [LET 98]) et le gyromètre VIG (Vibrating Inertial Gyrometer [JAN 00]). Le principe de fonctionnement de ces systèmes vibrants repose sur la mise en vibration d'un mode pilote et la détection des vibrations induites au mode récepteur. Ainsi, dans le cas du VIG, le mode pilote correspond à la vibration d'un diapason à deux branches dans une direction. Le mode récepteur, orthogonal au mode pilote, est sollicité en vibration forcée par les accélérations de Coriolis avec une amplitude proportionnelle à la vitesse de rotation appliquée.

Dans le cas du VIG, par exemple, des couplages thermo-élastique et piézoélectrique influencent très sensiblement le comportement dynamique du gyromètre. Par conséquent, la conception de ces micro-senseurs nécessite le développement d'outils de modélisation permettant de prendre en compte le couplage entre différents champs physiques.

Dans le cadre de ce travail, nous nous concentrons sur l'étude et la modélisation par éléments finis des effets thermo-élastiques. Tout d'abord, l'étude des effets du couplage thermo-élastique sur les structures vibrantes est abordée et les modèles analytiques sont brièvement présentés. Ensuite, la formulation par éléments finis thermo-élastiques est exposée et illustrée sur l'exemple d'une poutre bi-encastée.

## 2. Les effets du couplage thermo-élastique

Dans les micro-résonateurs qui requièrent un haut facteur de qualité, les différentes sources de dissipation doivent être prises en compte lors de la conception. Parmi celles-ci, l'amortissement dû aux effets thermo-élastiques ne peut être négligé [DUW 03]. Ce type d'amortissement est le résultat d'une perte d'énergie causée par un phénomène de couplage entre le transfert de chaleur et la vitesse de la déformation de la structure. De fait, lorsqu'un solide thermo-élastique ayant un coefficient de dilatation thermique positif est comprimé (étendu), il s'échauffe (se refroidit). Ainsi, lorsqu'un solide thermo-élastique est déformé, il est mis hors équilibre et de l'énergie est dissipée par couplage thermo-élastique. En effet, le couplage thermo-élastique crée des gradients locaux de température générant un flux irréversible de chaleur qui permet au solide de retrouver un état d'équilibre.

Ce mécanisme de dissipation d'énergie a été étudié par des modèles analytiques pour de simples structures telles que des poutres vibrantes en flexion (voir [ZEN 37] ou [LIF 00]). Les principales hypothèses sur lesquelles sont fondés ces modèles analytiques sont l'isolation thermique de la poutre vis-à-vis du milieu extérieur et l'absence de transfert de température dans la direction longitudinale de la poutre. L'influence des

effets thermo-élastiques peut être quantifiée par le changement relatif de la pulsation propre définie par

$$\Delta_{\omega_n} = \frac{\Re(\omega_n) - \omega_{0,n}}{\omega_{0,n}} \quad [1]$$

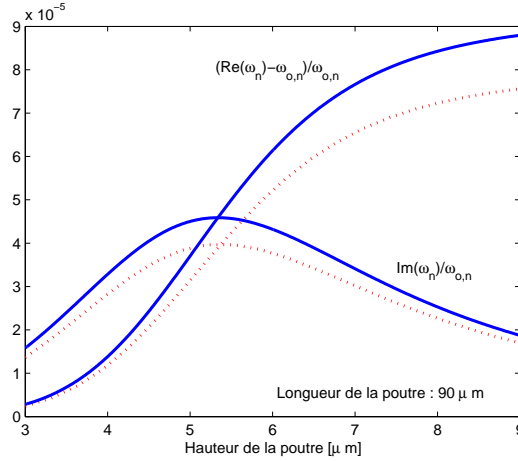
et par l'atténuation de l'amplitude des vibrations due à l'amortissement thermo-élastique

$$\xi_{\omega_n} = \frac{\Im(\omega_n)}{\omega_{0,n}} \quad [2]$$

où  $\omega_n$  est la  $n^{\text{ème}}$  pulsation propre de la poutre thermo-élastique et  $\omega_{0,n}$  est la  $n^{\text{ème}}$  pulsation propre de la poutre isothermique. En particulier, la dissipation d'énergie peut être mesurée par le facteur de qualité  $Q$  qui peut être approché par l'expression suivante :

$$Q \approx 2 \left| \frac{\Re(\omega_n)}{\Im(\omega_n)} \right| \quad [3]$$

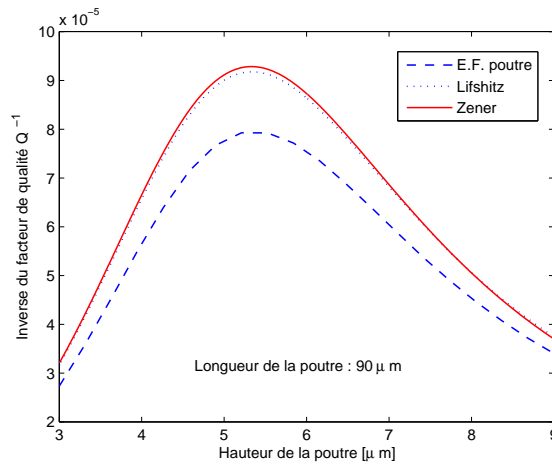
Il faut noter que les valeurs relatives [1-3] ne dépendent que des propriétés mécaniques et thermiques du matériau et du rapport hauteur sur longueur de la poutre. La largeur de la poutre n'influence aucunement ces variations relatives.



**Figure 1.** Variation de la fréquence propre et de l'atténuation de l'amplitude des vibrations en fonction de la hauteur pour une poutre bi-encastée de longueur fixée (Ligne pointillée : E.F. poutre, ligne continue : modèle de Lifshitz).

Les figures 1 et 2 représentent la variation de la fréquence propre, de l'amortissement et du facteur de qualité pour le premier mode propre d'une poutre bi-encastée fabriquée en silicium. Ces figures montrent que le couplage thermo-élastique introduit non seulement un amortissement mais également une augmentation de la première fréquence de résonance de la poutre. Ces effets ont aussi une influence sur le facteur

de qualité. L'importance des effets thermo-élastiques dépend du rapport entre la hauteur et la longueur de la poutre. Ainsi pour une poutre de longueur donnée, il existe une hauteur pour laquelle l'amortissement thermo-élastique ainsi que la diminution du facteur de qualité atteignent un maximum. Par contre, la variation de fréquence naturelle ne présente pas d'optimum, elle varie de sa valeur isotherme lorsque la hauteur est petite jusqu'à sa valeur adiabatique lorsque la hauteur augmente. La variation relative de la fréquence naturelle et de l'inverse du facteur de qualité sont de l'ordre de  $10^{-5}$ . Cette variation, très faible, n'est pourtant pas négligeable dans le cas des micro-résonateurs.



**Figure 2.** Variation de l'inverse du facteur de qualité en fonction de la hauteur pour une poutre bi-encastrée de longueur fixée.

### 3. Formulation par la méthode des éléments finis du couplage thermo-piézoélectrique

Les modèles analytiques (présentés dans [ZEN 37] et [LIF 00]) ne sont valables que sous certaines hypothèses restrictives et pour des cas très simples. Il est par conséquent nécessaire de développer une autre méthode afin d'étudier les effets thermo-élastiques sur des structures complexes telles que le gyromètre VIG. La méthode des éléments finis permet de réaliser des simulations prenant en compte le couplage fort entre différents champs physiques. La formulation par éléments finis thermo-piézoélectriques dérive du principe des travaux virtuels dans lequel les contributions électrique, thermique et mécanique sont prises en compte [ALT 96]. L'équation d'équilibre discrétisée est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_u \\ \ddot{\mathbf{u}}_\Phi \\ \ddot{\mathbf{u}}_\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{\theta u} & \mathbf{C}_{\theta \Phi} & \mathbf{C}_{\theta \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_u \\ \dot{\mathbf{u}}_\Phi \\ \dot{\mathbf{u}}_\theta \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\Phi} & \mathbf{K}_{u\theta} \\ \mathbf{K}_{\Phi u} & \mathbf{K}_{\Phi\Phi} & \mathbf{K}_{\Phi\theta} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_u \\ \mathbf{u}_\Phi \\ \mathbf{u}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_\Phi \\ \mathbf{F}_\theta \end{pmatrix} \quad [4]$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  représentent respectivement les matrices généralisées de masse, d'amortissement et de raideur ;  $\mathbf{F}$  désigne le vecteur des forces externes et les indices  $u$ ,  $\Phi$  et  $\theta$  font référence respectivement aux degrés de liberté mécanique, électrique et thermique. Comme les matrices structurales sont asymétriques, les méthodes d'analyse doivent être adaptées pour résoudre une équation aux valeurs propres non symétrique. De plus, comme la variation relative de fréquence naturelle est de l'ordre de  $10^{-5}$ , une mise à l'échelle est nécessaire pour améliorer le conditionnement des matrices et la précision des résultats doit être assez élevée.

#### 4. Analyse d'une poutre bi-encastree

A titre d'exemple d'application, une poutre bi-encastree est modélisée à l'aide d'éléments finis thermo-élastiques. Les éléments de poutre, basés sur le modèle d'Euler-Bernoulli, possèdent deux degrés de liberté mécaniques et deux degrés de liberté thermiques par noeud. Les degrés de liberté thermiques correspondent à l'incrément de température et le gradient de température transverse à la fibre neutre. La distribution transversale de la température peut être obtenue à partir de ces deux degrés de liberté en considérant une distribution cubique et en faisant l'hypothèse que les surfaces supérieure et inférieure de la poutre sont isolées thermiquement. Cette dernière hypothèse est réaliste dans le cas des micro-structures et plus spécifiquement celles encapsulées sous vide, car l'augmentation de température est infime et les échanges de chaleur avec le milieu extérieur, qu'ils soient convectifs ou radiatifs, sont négligeables. Cette même poutre a également été modélisée à l'aide d'éléments hexaédriques à huit noeuds et quatre degrés de liberté par noeud. Trois de ces degrés de liberté sont associés aux déplacements du noeud dans chacune des trois directions et le quatrième représente l'incrément de température du noeud. Dans ce modèle tridimensionnel, nous considérons également que la poutre est isolée thermiquement.

Hauteur [ $\mu\text{m}$ ]	Différence de phase [ $^\circ$ ]
3	80
4.5	60
5.3	45
9	10

**Tableau 1.** Différence de phase entre les champs mécanique et thermique (Longueur de la poutre :  $90 \mu\text{m}$ ).

Des analyses modale et transitoire ont été réalisées. Les résultats des calculs sont représentés aux figures 1 et 2. Nous pouvons constater que les modèles par éléments finis et les modèles analytiques donnent des résultats similaires. Le déphasage entre les

champs thermique et mécanique varie également selon l'importance des effets thermo-élastiques (tableau 1). En régime adiabatique, les champs thermique et mécanique sont en phase. La valeur isotherme du déphasage est de  $90^\circ$  et elle est de  $45^\circ$  lorsque les effets thermo-élastiques atteignent leur maximum. Les figures 1 et 2 montrent que les modèles analytiques et par éléments finis donnent des résultats similaires. Les modèles analytiques surestiment légèrement les effets thermo-élastiques car ils négligent les transferts de chaleur selon la direction longitudinale de la poutre.

## 5. Conclusion

La modélisation par éléments finis du couplage thermo-élastique dans les microstructures a été réalisée grâce à des éléments de type poutre et hexaédrique. Le développement de tels éléments est indispensable pour étudier l'influence des effets thermo-élastiques sur le comportement dynamique de structures telles que les micro-résonateurs et ainsi d'en améliorer la conception.

## Remerciements

L'auteur, S. Lepage, remercie le Fonds National de la Recherche Scientifique belge (FNRS) pour son soutien financier.

## 6. Bibliographie

- [ALT 96] ALTAY G., DOKMECI M., « Fundamental variational equations of discontinuous thermopiezoelectric fields », *International Journal of Engineering Sciences*, vol. 34, n° 7, 1996, p. 769–782.
- [DUW 03] DUWEL A., GORMAN J., WEINSTEIN M., BORENSTEIN J., WARD P., « Experimental study of thermoelastic damping in MEMS gyros », *Sensors and Actuators A*, vol. 103, 2003, p. 70–75.
- [JAN 00] JANIAUD D., LE TRAON O., LECORRE B., MULLER S., « Structure monolithique de gyromètre vibrant. Brevet français déposé le 1er février 1999 et publié sous le N° 2 789 171, Demande internationale N° PCT/FR00/00211 déposée le 26 janvier 2000. Extensions : Europe (FR, DE, GB, IT) et Etats-Unis d'Amérique. », 2000.
- [LET 98] LE TRAON O., JANIAUD D., MULLER S., BOUNIOL P., « The VIA vibrating beam accelerometer : concept and performances », *PLANS'98, Palm Springs (USA)*, , 1998.
- [LIF 00] LIFSHITZ R., ROUKES M., « Thermoelastic damping in micro-and nano-mechanical systems », *Physical review B*, vol. 61, n° 8, 2000, p. 5600–5609.
- [ZEN 37] ZENER C., « Internal friction in solids », *Physical review*, vol. 52, 1937, p. 230–235.