

Développement de modèles hydrosédimentaires pour la gestion de grands ouvrages hydrauliques

Benjamin Dewals
Ingénieur civil physicien

Mémoire présenté en vue de l'obtention
du D.E.A. en Sciences appliquées

Année académique 2001-2002

“Hydraulic engineering is clearly a field for those who love nature and who are comfortable in applying the laws of fluid mechanics for the betterment of mankind while preserving nature.”

James A. Liggett
in “What is Hydraulic Engineering?”,
J. Hydraul. Eng., vol. **128**(1), 2002

Table des matières

<i>Table des matières</i>	5
I. Introduction	8
II. Intégration temporelle implicite	10
II.1 Implicite vs explicite	10
II.2 Méthode	12
II.3 Application aux équations de Saint-Venant	13
II.4 Construction de la matrice Jacobienne	15
II.5 Résolution de grands systèmes linéaires	19
II.5.1 Stockage de très grandes matrices	19
II.5.2 Stratégie de résolution	19
II.5.3 Méthode des sous-espaces de Krylov	19
II.5.4 Le préconditionnement	20
II.5.5 Préconditionnement par factorisation incomplète	20
II.5.6 Résolution du système linéaire	21
II.6 Choix du pas de temps	21
II.7 Efficacité d'une intégration temporelle implicite	22
II.8 Discrétisation spatiale bidimensionnelle	23
II.8.1 Fractionnement des flux	23
II.8.2 F.D.S. de Roe	26
II.8.3 Schéma AUSM	27
Introduction	27
Coût du calcul	27
Formulation du schéma	27
II.9 Exemples de résultats bidimensionnels	31
II.9.1 Canal courbe	31
II.9.2 Comparaison entre Roe et AUSM	33
II.9.3 Lac de Kol (Inde)	34
II.10 Bibliographie	36
III. Modélisation d'écoulements à l'aide d'un formalisme en coordonnées curvilignes	38
III.1 Introduction	38
III.2 Présentation synthétique de la méthode	39
III.3 Changement de variables général	40
III.4 Transformation d'une équation d'advection quelconque	41
III.5 Système de coordonnées adapté aux déversoirs	41
III.6 Forme locale des équations en coordonnées curvilignes	44
III.6.1 Composantes des vitesses dans les deux systèmes de coordonnées	44
III.6.2 Conservation de la masse	44
III.6.3 Conservation de la quantité de mouvement	45
III.7 Passage en adimensionnel	45

III.8	Forme locale des équations en coordonnées curvilignes (seconde variante)	48
III.8.1	Composantes des vitesses dans les deux systèmes de coordonnées	48
III.8.2	Conservation de la masse	48
III.8.3	Conservation de la quantité de mouvement	48
III.9	Conditions limites en coordonnées curvilignes	49
III.9.1	Condition limite à la surface libre	49
III.9.2	Condition limite au fond	50
III.10	Intégration de l'équation de continuité sur la hauteur locale	50
III.11	Intégration sur la hauteur de l'équation de quantité de mouvement	51
III.12	Inconnues conservatives	51
III.12.1	Définitions	51
III.12.2	Evaluation de la hauteur d'eau	52
III.12.3	Signification des inconnues conservatives	53
III.13	Hypothèses sur la distribution de vitesse	54
III.13.1	Distribution uniforme	54
III.13.2	Autres hypothèses	55
III.14	Comparaison des surpressions calculées avec la formule de Gumensky	56
III.15	Hypothèses concernant la distribution de vitesse à l'amont	57
III.15.1	Zone morte	58
III.15.2	Zone de recirculation	58
III.15.3	Décélération graduelle du fluide vers le fond	59
III.16	Influence d'une pression additionnelle	60
III.17	Géométrie d'un déversoir standard	61
III.18	Résultats de simulations	62
III.18.1	Déversoir sans seuil	62
	Approche classique	62
	Modélisation basée sur les coordonnées curvilignes	63
III.18.2	Influence de la géométrie du déversoir	65
III.18.3	Seuil topographique	67
III.18.4	Déversoir parabolique	68
	Aucun traitement particulier des variations d'inclinaison	68
	Distribution de vitesse avec zone morte	69
	Distribution de vitesse avec recirculation (80 %)	70
	Distribution de vitesse avec recirculation (75 %)	71
	Distribution de vitesse avec recirculation (77 %)	72
III.19	Bibliographie	74
IV.	Modélisation de l'ensablement d'une grande retenue.....	75
IV.1	L'alluvionnement de grandes retenues	75
IV.1.1	Les conséquences de l'ensablement d'une retenue	75
IV.1.2	Quelques exemples d'alluvionnement prononcé	76
IV.1.3	Difficultés de modélisation	79
IV.1.4	Phénomènes modélisés	79
IV.2	Stratégie générale adoptée pour l'étude	80
IV.3	Modèle de transport sédimentaire	81
IV.3.1	Bilan de masse pour les matériaux solides	81
	Conservation de la masse pour une classe granulométrique individuelle	82
	Conservation de la masse totale de particules solides	83
	Evaluation du pas de temps maximum garantissant la stabilité	84
IV.3.2	Débits solides induits par l'écoulement	85
	Evaluation des capacités de transport	85
	Modèle d'advection – diffusion	85
	Lois de transport distinctes	85
	Lois de transport total	86
	Disponibilité en sédiments et débits solides	86

IV.3.3	Débits solides dus à la gravité	88
IV.3.4	Validation du modèle	88
IV.4	Conditions de simulation pour le lac de Kol	89
IV.4.1	Conditions limites hydrodynamiques	89
IV.4.2	Conditions limites sédimentaires	90
IV.4.3	Détermination du débit de simulation	91
IV.4.4	Propriétés des sédiments	93
IV.4.5	Loi de transport sédimentaire	93
	Choix d'une loi de transport total	93
	La loi de Ackers et White	93
IV.4.6	Aspects numériques	94
IV.4.7	Calibrage de la loi	95
IV.4.8	Simulations plus détaillées à l'aval	95
IV.4.9	Traitement de la granulométrie	96
IV.5	Résultats	96
IV.5.1	Topographie d'ensemble	96
	Conditions de simulation	96
	Solution hydrodynamique stabilisée	97
IV.5.2	Région 1 : la plus en amont	98
IV.5.3	Région 2	100
IV.5.4	Région 3	101
IV.5.5	Région 4	105
IV.5.6	Région 5	106
IV.5.7	Région 6	107
IV.5.8	Région 7	110
IV.5.9	Région 8	112
IV.5.10	Région la plus en aval	114
IV.5.11	Conclusion	129
IV.6	Bibliographie	130
V.	Conclusion	132

I. Introduction

Ce travail de D.E.A. s'inscrit dans le prolongement direct du travail de fin d'études d'Ingénieur civil réalisé au sein du HACH au cours de l'année académique 2000-2001, dans le domaine de la modélisation numérique du transport sédimentaire intense. Il constitue aussi à part entière un préliminaire à la poursuite de recherches relatives au transport solide, appliqué au domaine des constructions hydrauliques.

D'ores et déjà il est utile de mettre en évidence la chronologie des sujets abordés, qui se succèdent en suivant un enchaînement logique.

Les premiers modèles développés au cours du travail précédent, à 1D puis à 2D, assurent un couplage complet entre l'écoulement d'une part et, d'autre part, l'érosion, le remaniement topographique concomitant et la rétroaction de celui-ci sur l'hydrodynamique.

La mise au point et la résolution numérique de ce genre de modèle entièrement couplé demeure aujourd'hui relativement rare en raison des défis numériques de taille à surmonter afin d'assurer la stabilité du schéma. Dans notre cas, une évaluation stable des flux de l'opérateur spatial discrétisé est garantie grâce à un schéma original, utilisé en conjonction avec une technique d'intégration temporelle explicite. La robustesse du schéma numérique et l'applicabilité du logiciel en topographie quelconque ont été illustrées sur des cas de figure variés, allant de la propagation de la crue consécutive à une rupture de barrage sur topographie naturelle érodable, à l'interaction fluide-structure avec effet érosif marqué au cours de l'évasement progressif d'une brèche dans un ouvrage de retenue en terre.

Pour satisfaisantes que soient ces simulations réalisées à partir du modèle couplé, celui-ci présente l'inconvénient d'imposer une contrainte extrêmement restrictive sur le pas de temps à utiliser. S'il est adapté à l'étude d'écoulements hautement transitoires, tels que ceux engendrés par la ruine d'un ouvrage de retenue, il s'avère totalement inadéquat pour l'étude de processus plus graduels dans le temps. La mise au point d'un modèle découplé, quasi-stationnaire pour l'hydrodynamique, s'est dès lors imposée. Cette approche consiste, pour chaque pas de temps, à calculer un écoulement d'eau en régime établi, puis à évaluer séparément le transport solide et la mise à jour consécutive de la topographie.

Afin de tirer un maximum d'avantages d'une stratégie de résolution quasi-stationnaire, il est primordial de disposer d'un outil très performant pour converger vers une solution hydrodynamique stabilisée. Nous nous sommes alors détournés des schémas temporels explicites dans ce cadre précis, pour privilégier une technique implicite. Beaucoup plus complexe à mettre en œuvre, mais relaxant toute restriction sur le pas de temps, l'intégration temporelle implicite s'est révélée extrêmement compétitive et a conduit, pour des solutions stationnaires, à un gain d'un facteur 100 en temps de calcul.

Ce travail décrit les étapes successives qui ont conduit à la mise au point de l'outil d'intégration implicite, en partant du cas unidimensionnel et en franchissant progressivement les obstacles pour accéder finalement à des simulations quasi-tridimensionnelles.

Un formalisme original basé sur l'utilisation de coordonnées curvilignes dans le plan vertical est ensuite présenté. Il sera appliqué à la description d'écoulements sur des pentes fortes et variables, telles que celles rencontrées sur un coursier de déversoir, mais son intérêt est en réalité beaucoup plus large. En effet, dès lors que l'hydrodynamique est largement influencée par les conditions opératoires des organes d'évacuation, qu'ils soient de surface ou de fond, une représentation hautement fiable des conditions de mise en vitesse s'impose comme condition incontournable à l'obtention de résultats hydrodynamiques de qualité. Tous les résultats présentés dans ce cadre ont été obtenus par intégration temporelle implicite. La compétitivité des techniques implicites pour la recherche de solutions stationnaires a donc été mise à profit de façon appropriée.

Une application innovante portant sur la simulation à très long terme de l'alluvionnement d'un lac est illustrée. Elle permettra d'introduire un critère supplémentaire au niveau du choix d'un schéma explicite ou implicite, portant sur la distinction entre l'étude d'un régime établi proprement dit et celle d'une succession d'états quasi-stationnaires. La conclusion synthétisera finalement les principaux objectifs atteints et dégagera, à la lumière des résultats obtenus, des pistes de recherche à explorer davantage.

II. Intégration temporelle implicite

II.1 Implicite vs explicite

Le choix entre une méthode d'intégration temporelle implicite et une méthode explicite dépend de la finalité du calcul. Les techniques implicites autorisent le recours à des pas de temps plus longs mais les inversions de matrices qu'elles nécessitent engendrent un coût de calcul lourd et parfois prohibitif. Toutefois, une telle façon de procéder s'avère réellement profitable dès lors que le pas de temps sensiblement plus élevé auquel elles donnent accès demeure tout à fait acceptable eu égard à la précision exigée par le modélisateur sur l'évolution instationnaire. Le recours à une intégration temporelle implicite offre également un maximum d'avantages dans le cas de la recherche d'un écoulement stationnaire, et donc notamment si une stratégie de résolution quasi-stationnaire est adoptée.

Au contraire, une intégration temporelle explicite est typiquement mise à profit dans le cadre de simulations de nature hautement transitoire. Pour nombre d'applications envisagées au HACH, dont les ruptures de barrages (voir notamment Archambeau & al. [2] ou Dewals & al. [6]), les temps caractéristiques physiques n'excèdent pas sensiblement la valeur du pas de temps imposée pour une intégration temporelle explicite stable et il serait erroné d'utiliser un pas de temps nettement supérieur à ces temps caractéristiques des processus physiques examinés. C'est pourquoi, seule une intégration temporelle explicite était traditionnellement disponible dans la suite de logiciels WOLF.

A titre d'exemple, la Figure 1 illustre un cas de rupture de barrage idéalisée dans un canal rectangulaire à fond mobile (Dewals [5]). L'évolution très rapide du profil en long de la surface libre ainsi que du niveau du lit au cours des tout premiers instants de simulation permet de conclure immédiatement que le temps caractéristique du phénomène est lui aussi extrêmement faible et de toute façon de l'ordre du pas de temps requis pour la stabilité d'un schéma explicite. Il serait donc totalement superflu et excessivement onéreux de recourir à une intégration implicite.

De plus, l'utilisation d'un tel schéma avec des pas de temps plus importants, bien que stable, fournirait pour solution une évolution transitoire des champs dépourvue d'intérêt car incapable d'appréhender l'évolution fortement instationnaire de l'écoulement. Par exemple, des cartes de risque obtenues à l'issue d'une telle simulation se révéleraient sensiblement faussées car des valeurs extrêmes des différents champs auraient échappé au calcul mené avec des pas de temps sensiblement plus grands que le temps caractéristique du phénomène.

Néanmoins, force est de constater que dans une multitude d'applications pratiques, moins extrêmes que la rupture d'ouvrages de retenue, les limites de l'intégration temporelle explicite sont atteintes. Qu'il s'agisse de la recherche proprement dite d'un

écoulement en régime ou encore l'implémentation d'un processus quasi-stationnaire à grande échelle spatio-temporelle, le recours à l'implicite se révèle finalement incontournable. Même si cette question demeure encore polémique aux yeux de certains scientifiques, de très nombreuses publications attestent également de la supériorité des méthodes implicites par rapport aux méthodes de Runge-Kutta, même accélérées (Lacor [12]), dans le cas précis de la recherche d'une solution stationnaire (Amaladas & Kamath [1], Fähr [7]).

Nous nous sommes donc attelés à la mise sur pied d'un schéma d'intégration temporelle implicite, à même de jouer un rôle précieux dans de nombreuses simulations hydrosédimentaires et pourrait même représenter une condition sine qua non pour mener à bien des prévisions à très grandes échelles spatiale et temporelle.

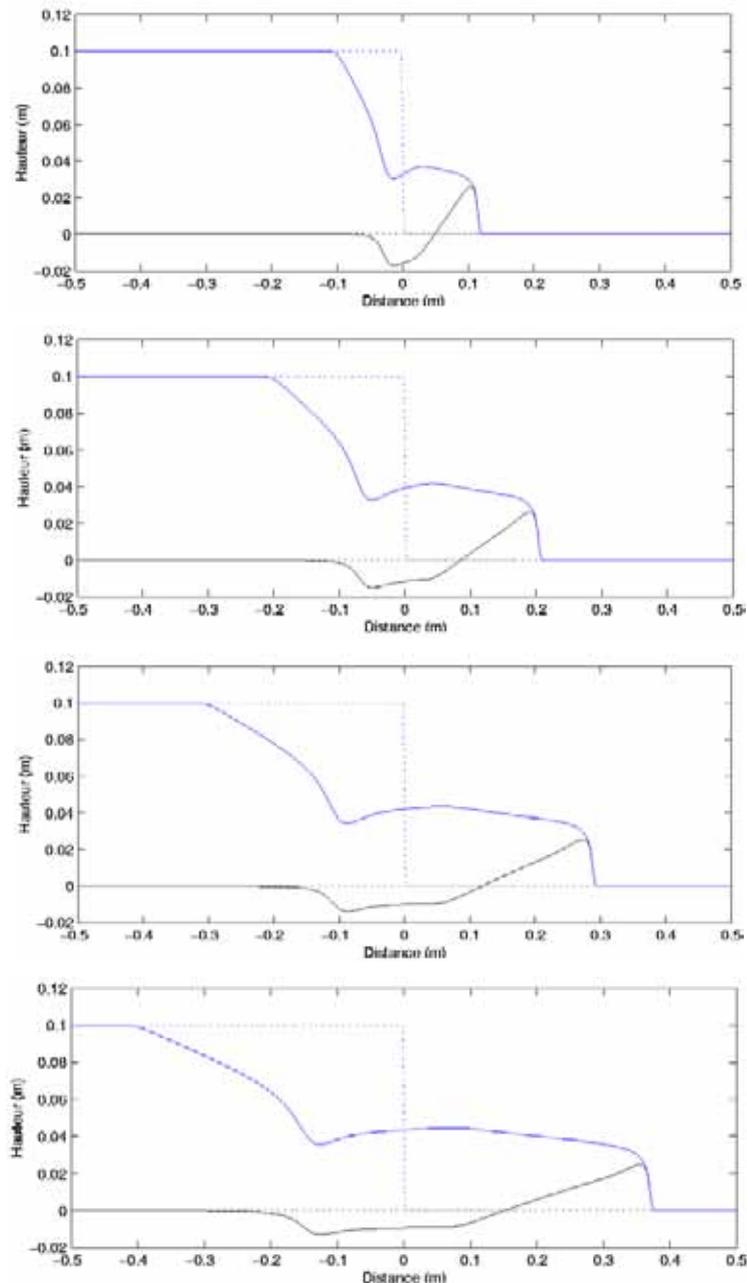


Figure 1 – Rupture de barrage instantanée sur fond mobile, modélisée à l'aide d'un modèle hydrosédimentaire couplé (Résultats à l'issue de 0.1, 0.2, 0.3 et 0.4 s).

II.2 Méthode

Quel que soit le modèle exploité (Navier-Stokes, Euler, Saint-Venant, ...) la discrétisation spatiale des équations aux dérivées partielles fournit des équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dU}{dt} = R(U), \quad (2.1)$$

où U est un vecteur qui contient toutes les inconnues et R désigne l'opérateur spatial discrétisé.

Il faut ensuite à mener à bien l'intégration temporelle de (2.1) afin de déterminer les valeurs des inconnues à chaque instant à partir de la connaissance d'un champ initial donné. Par exemple, un schéma simple de type Euler *explicite* s'écrit :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = R(U^n), \quad (2.2)$$

où n et $n + 1$ font respectivement référence aux pas de temps connu et inconnu. L'opérateur spatial est évalué à partir des valeurs connues de U . Il apparaît dès lors clairement que (2.2) permet une mise à jour directe de l'inconnue, sans passer par la résolution d'un système d'équations.

Au contraire, si une technique de type *implicite* est utilisée, (2.2) devient :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = R(U^{n+1}). \quad (2.3)$$

Toutes les équations doivent donc être traitées simultanément et, une fois discrétisées, elles forment un grand système d'équations algébriques non linéaires à résoudre afin de déterminer la valeur des inconnues au pas de temps suivant. Il existe donc un couplage total de toutes les inconnues à tous les nœuds.

Aussi bien le schéma explicite (2.2) que son homologue implicite (2.3) sont du premier ordre de précision temporelle. Le second ordre de précision dans le temps pourrait par exemple être atteint grâce à un schéma semi-implicite proposé par Crank-Nicholson :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}[R(U^n) + R(U^{n+1})], \quad (2.4)$$

qui s'apparente à une différence centrée dans le temps autour de la station temporelle intermédiaire $n + \frac{1}{2}$.

Il est important de se rendre compte de la taille tout à fait conséquente que peut prendre ce système émanant de (2.3) ou (2.4). Par exemple la résolution du modèle des eaux peu profondes sur un maillage de 250 000 éléments conduit à un système algébrique non linéaire de 750 000 inconnues. Si en outre le modèle hydrodynamique était couplé à une équation de bilan de masse pour les sédiments, la taille du système, pour un maillage identique, atteindrait un million d'équations. Aucun algorithme ne permet actuellement de fournir directement la solution exacte d'un tel système non linéaire, constitué d'au moins plusieurs centaines de milliers d'inconnues. Il s'avère par conséquent incontournable de procéder à une linéarisation du système. Une méthode de type Newton-Raphson, avec une seule itération, a été retenue. L'itération unique se justifie ici par la seule volonté de

converger vers une configuration stationnaire, sans capter de façon précise l'évolution transitoire de l'écoulement entre son état initial et le régime établi. Nous expliciterons aussi pourquoi, même dans le cas de la recherche d'un régime établi, la méthode de Newton-Raphson ne peut être utilisée seule, indépendamment d'une intégration pseudo-temporelle.

La matrice du système linéaire ainsi obtenu s'appelle le Jacobien \mathbf{J} du système. Son évaluation, analytique ou numérique, représente un des deux grands défis de l'implémentation d'un schéma numérique implicite. Le second obstacle majeur à surmonter se trouve dans la résolution, suffisamment précise et surtout rapide, du très grand système linéaire.

Le calcul de la matrice Jacobienne sous forme symbolique requiert l'évaluation de dérivées par rapport à toutes les variables discrètes aux nœuds du maillage. La complexité mathématique et surtout algorithmique d'une telle tâche en toute généralité est extrême, mais elle permet de réduire la charge de calcul CPU par rapport à des dérivées évaluées par différences finies, tout en garantissant une précision accrue.

Cette méthodologie a été implémentée au sein de WOLF et a conduit à d'excellents résultats pour des simulations unidimensionnelles : par rapport au cas explicite, le temps de calcul se voit typiquement réduit d'un facteur atteignant plusieurs centaines. Un fractionnement des flux original et simple est utilisé actuellement dans WOLF (Mouzelard [15] et Archambeau & al. [2]), ce qui a rendu abordable l'évaluation analytique de la matrice Jacobienne. Toutefois, ce fractionnement des flux propre à WOLF présente l'inconvénient de produire, en présence de composantes de vitesse très faibles, des flux qui ne sont plus dérivables par rapport aux inconnues aux nœuds. Cette limitation demeure imperceptible dans la toute grande majorité des simulations 1D mais par contre, à quelques exceptions près, son effet néfaste transparait immédiatement dans le cas de simulations bidimensionnelles. Autrement dit, ce schéma numérique original et très compétitif bénéficie d'avantages substantiels à 1D et dans tous les cas où il est couplé à une intégration temporelle explicite, mais son extension au bidimensionnel implicite n'est pas immédiate. C'est pourquoi le schéma classique de Roe est exploité actuellement pour mener à bien tout type de simulation d'écoulement complètement bidimensionnel en implicite. Dans ce cas, un calcul numérique des dérivées à l'aide d'un quotient différentiel procure une assez bonne approximation des différents éléments de la matrice Jacobienne. La généralisation du 1D au 2D est possible sans difficulté particulière. Il est néanmoins primordial d'apporter un traitement particulier aux termes sources, présents dans le modèle des eaux peu profondes, afin de mettre leur discrétisation en adéquation parfaite avec celle des termes advectifs (Toro [20]).

Dans le cas d'un problème dont on ne recherche que la solution stationnaire, il n'y a aucune raison de se fixer a priori un pas de temps. Au contraire, il est avantageux d'opter à chaque moment pour la valeur maximale admissible de ce pas de temps. Une évaluation efficace de ce pas de temps le plus approprié sera présentée au paragraphe II.6.

II.3 Application aux équations de Saint-Venant

La méthodologie à suivre pour procéder à l'intégration temporelle des modèles exploités en hydrodynamique à surface libre va être illustrée sur base des équations de Saint-Venant particularisées au cas d'un canal prismatique à section rectangulaire. Celles-ci constituent un modèle unidimensionnel obtenu à la suite d'une intégration sur la section mouillée des équations de base de la mécanique des fluides (Piroton & al. [17], Piroton

[16]). Nous bénéficions donc ici du formalisme relativement léger de ce cas particulier et la démarche sera ensuite généralisée au cours des paragraphes ultérieurs. Le système à résoudre se compose d'une équation de continuité et d'un bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = q_L \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_{xx} u q + \frac{g}{2} h^2 \cos \theta \right) + g h \frac{\partial z_b}{\partial x} - g h \sin \theta - \frac{\tau_x}{\rho b} = 0 \quad (2.6)$$

avec

- h la hauteur d'eau,
- q le débit spécifique,
- x la coordonnée spatiale,
- t le temps,
- q_L les apports latéraux,
- z_b le niveau du lit,
- b la largeur du bief,
- ρ_{xx} le coefficient d'inégale répartition des vitesses,
- u la vitesse de l'écoulement,
- g l'accélération de la pesanteur,
- $\sin \theta$ l'inclinaison par rapport à l'horizontale de l'axe de référence,
- τ_x la contrainte de friction,
- ρ la masse volumique du fluide.

Discretisé dans le temps, le système constitué des équations (2.5) et (2.6) peut s'écrire :

$$\frac{u_i(t + \Delta t) - u_i(t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) = r_i \quad (2.7)$$

où le second membre r au nœud i dépend uniquement des valeurs aux nœuds $i - 1$, i et $i + 1$ en reconstruction constante :

$$u_i = \begin{pmatrix} h_i \\ q_i \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

et

$$r_i = \left(\begin{array}{c} q_{L,i} - \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_i \\ g h_i \sin \theta_i + \frac{\tau_{x,i}}{\rho b} - \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{xx} u q) \Big|_i - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g}{2} \cos \theta h^2 \right) \Big|_i - g h \frac{\partial z_b}{\partial x} \Big|_i \end{array} \right). \quad (2.9)$$

Dans l'optique d'un traitement implicite de (2.7), un système d'équations non linéaires doit être résolu à chaque pas de temps :

$$F(S, U^n) = \frac{S - U^n}{\Delta t} - R(S) = 0 \quad (2.10)$$

dont la solution à rechercher est $S = U^{n+1}$.

Pour résoudre ce système, une méthode de type Newton-Raphson sera utilisée mais, comme la précision instationnaire ne constitue pas la finalité du calcul, seule une itération sera effectuée. Le système linéarisé s'écrit :

$$F(S, U^n) \simeq F(U^n, U^n) + \left. \frac{\partial F}{\partial S} \right|^n (S - U^n) \quad (2.11)$$

soit encore

$$-R(U^n) + \left(\frac{I}{\Delta t} - \left. \frac{\partial R}{\partial U} \right|^n \right) (S - U^n) = 0 \quad (2.12)$$

Si on définit la matrice Jacobienne

$$J = \left(\frac{I}{\Delta t} - \left. \frac{\partial R}{\partial U} \right|^n \right), \quad (2.13)$$

la résolution du système non linéaire se réduit à la résolution du système d'équations algébriques linéaires

$$J \delta U = R(U^n), \quad (2.14)$$

où δU représente l'accroissement qui sert à effectuer la mise à jour du vecteur d'inconnues :

$$U^{n+1} = U^n + \delta U. \quad (2.15)$$

II.4 Construction de la matrice Jacobienne

Un élément générique de la matrice Jacobienne s'écrit

$$J_{kl} = \frac{\delta_{kl}}{\Delta t} - \frac{\partial R_k}{\partial U_l} \quad k, l = 1, \dots, 2N, \quad (2.16)$$

où N est le nombre de nœuds du maillage unidimensionnel.

Cette matrice Jacobienne est en réalité constituée de blocs quatre éléments à 1D (ou de neuf éléments à 2D) :

$$[J]_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\delta_{ij}}{\Delta t} - \frac{\partial r_{i,1}}{\partial h_j} & -\frac{\partial r_{i,1}}{\partial q_j} \\ -\frac{\partial r_{i,2}}{\partial h_j} & \frac{\delta_{ij}}{\Delta t} - \frac{\partial r_{i,2}}{\partial q_j} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

où cette fois $i, j = 1, \dots, N$ correspondent à l'indice des nœuds du maillage.

Calculer la dérivée de l'opérateur spatial discrétisé par rapport à toutes les variables discrètes de manière symbolique est extrêmement complexe, mais néanmoins réalisable dans certains cas. Cette construction analytique du Jacobien a été implémentée dans le cas du fractionnement des flux exposé au paragraphe II.8.1.

Par différences finies, le calcul numérique des dérivées à l'aide du quotient différentiel proposé ci dessous procure une assez bonne évaluation des différents éléments de la matrice Jacobienne :

$$\frac{\partial R_k}{\partial U_l} \simeq \frac{R_k(U_{m \neq l}, U_l + \delta U_l) - R_k(U_{m \neq l}, U_l)}{\delta U_l} \quad (2.18)$$

La perturbation des variables conservatives se calcule via la formule

$$\delta U_k = \varepsilon \|U\|_k \quad (2.19)$$

dans laquelle ε vaut typiquement 10^{-8} (voir par exemple Rogiest [18]).

Les deux variables de chaque nœud sont donc successivement perturbées et la perturbation correspondante du vecteur R est évaluée en chaque nœud. Cette stratégie conduit à $2N + 1$ évaluations de l'opérateur spatial ! En effet, $2N$ évaluations avec perturbation sont nécessaires en plus d'une évaluation de l'opérateur non perturbé. Il est heureusement possible de sensiblement décroître ce coût de calcul en examinant le domaine d'influence numérique de chaque nœud au cours d'un pas de temps.

En reconstruction constante, l'opérateur spatial en un nœud i n'est fonction que des variables conservatives au nœud lui-même ainsi qu'en ses voisins directs $i - 1$ et $i + 1$. Si une variable conservative se voit perturbée au nœud i , seuls trois éléments-blocs de R sont donc influencés par cette perturbation, et donc seuls trois termes de la ligne correspondante de la matrice J sont non nuls.

En perturbant non pas une variable conservative d'un seul nœud à la fois, mais d'un nœud sur trois, aucune interférence entre les perturbations des différents éléments de R n'est générée. En conséquence, le nombre total minimum d'évaluations de R vaut :

$$3 \times 2 + 1 = 7 \quad (2.20)$$

au lieu de $2N + 1$.

La formulation classique de la matrice Jacobienne en reconstruction constante s'écrit :

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & \dots & i & i+1 & \dots & N \\
 \hline
 1 & X & X & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & X & X & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 i-1 & 0 & \ddots & \begin{bmatrix} \frac{\partial r_{i-1,1}}{\partial h_i} & -\frac{\partial r_{i-1,1}}{\partial q_i} \\ \frac{\partial r_{i-1,2}}{\partial h_i} & -\frac{\partial r_{i-1,2}}{\partial q_i} \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\
 i & & & \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} - \frac{\partial r_{i,1}}{\partial h_i} & -\frac{\partial r_{i,1}}{\partial q_i} \\ -\frac{\partial r_{i,2}}{\partial h_i} & \frac{1}{\Delta t} - \frac{\partial r_{i,2}}{\partial q_i} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{\partial r_{i,1}}{\partial h_{i+1}} & -\frac{\partial r_{i,1}}{\partial q_{i+1}} \\ -\frac{\partial r_{i,2}}{\partial h_{i+1}} & -\frac{\partial r_{i,2}}{\partial q_{i+1}} \end{bmatrix} & \dots & 0 \\
 i+1 & & & \begin{bmatrix} -\frac{\partial r_{i+1,1}}{\partial h_i} & -\frac{\partial r_{i+1,1}}{\partial q_i} \\ -\frac{\partial r_{i+1,2}}{\partial h_i} & -\frac{\partial r_{i+1,2}}{\partial q_i} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} - \frac{\partial r_{i+1,1}}{\partial h_{i+1}} & -\frac{\partial r_{i+1,1}}{\partial q_{i+1}} \\ -\frac{\partial r_{i+1,2}}{\partial h_{i+1}} & \frac{1}{\Delta t} - \frac{\partial r_{i+1,2}}{\partial q_{i+1}} \end{bmatrix} & & \\
 i+2 & 0 & \dots & 0 & \begin{bmatrix} -\frac{\partial r_{i+2,1}}{\partial h_{i+1}} & -\frac{\partial r_{i+2,1}}{\partial q_{i+1}} \\ -\frac{\partial r_{i+2,2}}{\partial h_{i+1}} & -\frac{\partial r_{i+2,2}}{\partial q_{i+1}} \end{bmatrix} & \ddots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & X & X \\
 N & 0 & \dots & 0 & 0 & X & X
 \end{array} \quad (2.21)$$

Etant donné que la matrice Jacobienne présente un caractère bande et que sa taille est tout à fait conséquente pour toute application réaliste, la stocker entièrement représenterait un gaspillage d'espace mémoire, qui prendrait rapidement des proportions pénalisantes. En pratique, seule la bande de la matrice sera effectivement stockée. En reconstruction constante, la matrice stockée se limitera à $3N$ blocs de quatre éléments. La matrice Jacobienne sera donc mémorisée de façon optimale selon le canevas :

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & 2 & 3 \\
 \hline
 1 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} - \frac{\partial r_{1,1}}{\partial h_1} & -\frac{\partial r_{1,1}}{\partial q_1} \\ -\frac{\partial r_{1,2}}{\partial h_1} & \frac{1}{\Delta t} - \frac{\partial r_{1,2}}{\partial q_1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{\partial r_{1,1}}{\partial h_{1+1}} & -\frac{\partial r_{1,1}}{\partial q_{1+1}} \\ -\frac{\partial r_{1,2}}{\partial h_{1+1}} & -\frac{\partial r_{1,2}}{\partial q_{1+1}} \end{bmatrix} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 i & \begin{bmatrix} -\frac{\partial r_{i,1}}{\partial h_{i-1}} & -\frac{\partial r_{i,1}}{\partial q_{i-1}} \\ -\frac{\partial r_{i,2}}{\partial h_{i-1}} & -\frac{\partial r_{i,2}}{\partial q_{i-1}} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} - \frac{\partial r_{i,1}}{\partial h_i} & -\frac{\partial r_{i,1}}{\partial q_i} \\ -\frac{\partial r_{i,2}}{\partial h_i} & \frac{1}{\Delta t} - \frac{\partial r_{i,2}}{\partial q_i} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{\partial r_{i,1}}{\partial h_{i+1}} & -\frac{\partial r_{i,1}}{\partial q_{i+1}} \\ -\frac{\partial r_{i,2}}{\partial h_{i+1}} & -\frac{\partial r_{i,2}}{\partial q_{i+1}} \end{bmatrix} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 N & \begin{bmatrix} -\frac{\partial r_{N,1}}{\partial h_{N-1}} & -\frac{\partial r_{N,1}}{\partial q_{N-1}} \\ -\frac{\partial r_{N,2}}{\partial h_{N-1}} & -\frac{\partial r_{N,2}}{\partial q_{N-1}} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} - \frac{\partial r_{N,1}}{\partial h_N} & -\frac{\partial r_{N,1}}{\partial q_N} \\ -\frac{\partial r_{N,2}}{\partial h_N} & \frac{1}{\Delta t} - \frac{\partial r_{N,2}}{\partial q_N} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array} \quad (2.22)$$

où

- la première colonne représente l'influence sur un nœud i de la perturbation d'une variable conservative du nœud précédent ($i - 1$),
- la deuxième colonne donne l'influence sur un nœud de la perturbation d'une variable conservative de ce même nœud,
- la dernière colonne indique l'influence sur un nœud i de la perturbation d'une variable conservative au nœud suivant ($i + 1$).

Sept évaluations de l'opérateur spatial sont requises pour le calcul complet de cette matrice Jacobienne. Tout d'abord une évaluation du vecteur R non perturbé en fonction des valeurs des variables conservatives au temps t . Ensuite suivent six évaluations successives correspondant aux perturbations des $2N$ variables conservatives. A l'aide de notations cohérentes avec le formalisme adopté précédemment, la démarche peut être synthétisée de la façon suivante :

- deux évaluations de R pour la perturbation des deux variables $i - 1$,
- deux évaluations de R pour la perturbation des deux variables i ,
- deux évaluations de R pour la perturbation des deux variables $i + 1$.

De façon plus détaillée on est conduit aux opérations suivantes :

- perturbation d'une valeur sur trois (valeurs d'indice $3 \times j$ avec j de 1 à $N/3$) des termes de h_j^t et q_j^t , puis calcul des vecteurs R correspondants,
- perturbation des termes h_j^t et q_j^t d'indices $3 \times j - 1$ (avec j de 1 à $N/3$) calcul des vecteurs R correspondants,
- perturbation des termes h_j^t et q_j^t d'indices $3 \times j - 2$ (avec j de 1 à $N/3$) calcul des vecteurs R correspondants.

L'algorithme se charge ensuite de remplir la matrice Jacobienne. Néanmoins, selon la technique utilisée pour la résolution du système linéaire, il peut être possible d'éviter le calcul explicite (et donc le stockage) du Jacobien. Dans ce cas, la matrice Jacobienne n'intervient que via des produits matrice-vecteur $J p$, qui peuvent être estimés de façon beaucoup plus économique par une dérivée directionnelle :

$$J p \simeq \frac{F(U^n + \varepsilon p) - F(U^n)}{\varepsilon} \quad (2.23)$$

où ε est choisi judicieusement. Il est couramment fixé à une valeur de l'ordre de 10^{-8} . L'expression (2.10) de F , permet de transformer la relation (2.23) :

$$J p \simeq \frac{\frac{\varepsilon p}{\Delta t} - R(U^n + \varepsilon p) + R(U^n)}{\varepsilon} = \frac{p}{\Delta t} - \frac{R(U^n + \varepsilon p) - R(U^n)}{\varepsilon}. \quad (2.24)$$

L'avantage considérable apporté par les relations précédentes réside dans le fait qu'elles évitent la manipulation de matrices de grande taille. En effet, les produits matrice-vecteur sont exprimés directement en termes de vecteurs de dimension $2N$.

Cette structure algorithmique visant à évaluer et à stocker de façon optimale le Jacobien a été implémentée aussi bien dans le modèle unidimensionnel qu'au sein du code de calcul bisimensionnel.

II.5 Résolution de grands systèmes linéaires

II.5.1 Stockage de très grandes matrices

Comme la matrice Jacobienne est toujours une matrice très creuse, voire bande-blocs, la stocker entièrement serait un gaspillage inacceptable d'espace mémoire. En pratique, comme l'évoquait déjà le paragraphe précédent, seuls les éléments susceptibles de ne pas être nuls sont stockés.

Le rôle déterminant des temps d'accès à la mémoire a été mis en exergue au cours des travaux. Lors des tout premiers développements, la matrice Jacobienne avait été stockée entièrement. Ensuite, un stockage plus judicieux a été implémenté et à partir de ce moment, un gain en temps de calcul a encore été constaté, malgré une augmentation du nombre d'opérations à réaliser afin d'extraire une valeur désirée de la matrice Jacobienne. Ceci confirme la nécessité impérieuse d'intégrer le temps des opérations d'accès à la mémoire en plus du temps de traitement proprement dit des opérations mathématiques dans une stratégie d'optimisation du temps total de calcul.

II.5.2 Stratégie de résolution

Les solveurs directs classiques nécessitent un nombre d'opérations de l'ordre de N^3 et des ressources mémoire de l'ordre de N^2 , où N est la taille du système à résoudre.

Le nombre d'opérations N^3 pour une matrice pleine se réduit toutefois à $N \times p^2$ pour une matrice bande de largeur p . Autrement dit, s'il est possible d'exploiter pleinement le caractère bande de la matrice, le nombre d'opérations requis pour l'inversion du système devient linéaire par rapport à la taille du problème.

Cette structure bande existe pour les problèmes 1D, c'est pourquoi dans ce cas une décomposition LU permet de résoudre le système. A deux dimensions par contre la situation est nettement plus complexe en raison de l'impossibilité d'attribuer des numéros consécutifs à tous les éléments qui s'influencent mutuellement. En conséquence, nous avons opté, dans le cadre du présent travail, pour une méthode itérative basée sur les sous-espaces de Krylov.

II.5.3 Méthode des sous-espaces de Krylov

Seule une description très synthétique de la méthode des sous-espaces de Krylov est exposée dans le présent paragraphe. Le lecteur intéressé est invité à se référer par exemple à Rogiest [18].

Afin de résoudre un grand système linéaire une solution itérative peut être utilisée. Cette stratégie de résolution présente l'avantage de pouvoir alléger sensiblement le coût de calcul pour des systèmes de très grande taille et, d'autre part, d'autoriser un arrêt du processus dès que l'itéré courant offre une précision suffisante. Il y a donc un contrôle permanent de l'évolution du processus et la possibilité concomitante de l'interrompre au moment le plus opportun.

La méthode des sous-espaces de Krylov consiste à construire progressivement une base, à laquelle on ajoute un vecteur et donc une dimension à chaque itération. En outre, le résidu du système linéaire est rendu orthogonal à une base, éventuellement différente de la première, mais qui est aussi de dimension croissante à chaque nouvelle itération. Cette contrainte s'exprime via les *conditions de Petrov-Galerkin*.

Si les deux bases sont choisies identiques, une méthode de *projection orthogonale* est obtenue et les conditions d'orthogonalité sont alors baptisées *conditions de Galerkin*. Au contraire, le GMRES, utilisé ici, est une méthode de *projection oblique*.

L'algorithme du GMRES (*General Minimal Residual*) constitue une généralisation à des systèmes quelconques de méthodes plus classiques limitées au cas de matrices symétriques. Une propriété importante du GMRES est celle d'*optimalité*, qui assure que le résidu ne peut que décroître d'une itération à la suivante.

Cette procédure garantit, pour une arithmétique exacte, la convergence vers la solution exacte du système en un nombre d'itérations égal à la taille du système. En pratique il serait bien entendu impossible, mais aussi stérile, d'effectuer un tel nombre d'itérations.

Afin de mettre en œuvre l'orthogonalisation du résidu, il est nécessaire de construire la base orthonormée. L'*algorithme d'Arnoldi*, basé sur la méthode de Gram-Schmidt, est mis à profit à cet effet.

II.5.4 Le préconditionnement

La vitesse de convergence du GMRES dépend étroitement de la racine carrée du nombre de conditionnement de la matrice Jacobienne. En conséquence, un préconditionnement judicieux s'impose.

Ce préconditionnement est possible à droite ou à gauche. Cependant, dans le cas d'un préconditionnement à droite, le résidu est calculé directement alors que cette évaluation serait plus compliquée, et donc plus coûteuse en temps de calcul, si un préconditionnement à gauche était choisi car un système d'équations devrait être résolu pour évaluer le résidu.

II.5.5 Préconditionnement par factorisation incomplète

Une factorisation est qualifiée d'incomplète si celle-ci conduit à ignorer des éléments non nuls (*fill elements*) au cours du processus et dont la position correspond à celle d'éléments nuls de la matrice d'origine. La factorisation incomplète trouve son intérêt dès lors qu'on constate le coût CPU important d'une factorisation exacte.

L'existence d'une factorisation incomplète n'est pas garantie en toute généralité, même dans les cas où la possibilité de réaliser une factorisation complète est assurée. Néanmoins, il a été démontré que l'applicabilité de la technique particulière mise en œuvre, nommée ILU (*Incomplete Lower-Upper factorization*), est très large.

La variante la plus simple, ILU(0), permet d'aboutir à deux matrices L et U qui possèdent des zéros aux mêmes endroits que, respectivement, les parties triangulaires inférieure et supérieure de la matrice d'origine J. De ce fait, aucune surcharge en termes de mémoire nécessaire pour le stockage n'est requise pour évaluer cette factorisation incomplète.

A elle seule, une procédure de factorisation inexacte introduit des erreurs qui peuvent porter sévèrement atteinte au pas de temps autorisé et donc dégrader la robustesse ainsi que l'efficacité du schéma d'intégration temporelle (Amaladas & Kamath [1]).

II.5.6 Résolution du système linéaire

Dans le cadre des simulations unidimensionnelles réalisées en implicite, la matrice Jacobienne présentait toujours une structure bande particulièrement favorable à la résolution rapide du système par le biais d'une méthode itérative. En effet, étant donné qu'en reconstruction constante, chaque maille n'est directement influencée que par ses deux voisins, la matrice est tridiagonale-blocs. De même, si une reconstruction linéaire est effectuée, seules cinq cellules différentes s'influencent directement et, comme la configuration 1D permet de leur attribuer des places successives au sein de la numérotation, la matrice devient pentadiagonale-blocs. Dans ce cas, une décomposition LU incomplète se révélait à même de produire une approximation suffisante de la solution du grand système linéaire.

Au contraire, les mailles contiguës dans le stencil bidimensionnel ne peuvent être systématiquement ordonnées de façon successive au sein de la numérotation continue. La numérotation des cellules joue dès lors un rôle de premier plan et il devient primordial de l'optimiser. C'est pourquoi la méthode dite de *la tache d'huile*, implémentée au sein du logiciel WOLF, a été exploitée. Son influence nettement favorable se concrétise effectivement par une réduction tangible du nombre d'itérations requises lors de la convergence du GMRES.

II.6 Choix du pas de temps

Bien que théoriquement aucun critère de stabilité ne limite le pas de temps au cours d'une intégration temporelle de type implicite, notre incapacité à résoudre directement un grand système non linéaire va réintroduire une limitation.

En effet, le système non linéaire n'est résolu qu'approximativement par le biais d'une linéarisation, selon la méthode de Newton-Raphson. Cette technique classique offre l'avantage d'assurer une convergence quadratique vers la solution dans un voisinage de celle-ci. Néanmoins, en dépit de cette convergence locale très favorable, la convergence globale de la méthode de Newton-Raphson n'est en rien assurée. Il devient dès lors indispensable de combiner celle-ci avec une évolution dans un pseudo-temps.

La discrétisation spatiale des équations aux dérivées partielles à résoudre permet d'aboutir à un système d'équations différentielles ordinaires dont la seule variable indépendante restante est le temps. Formellement, celles-ci peuvent s'écrire à l'aide de la formule (2.1) :

$$\frac{dU}{dt} = R(U) \quad (2.25)$$

où U désigne le vecteur des inconnues aux nœuds et R l'opérateur spatial discrétisé. Le schéma (2.2) d'intégration de type Euler implicite pour cette équation s'écrit :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = R(U^{n+1}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta U}{\Delta t} = R(U^n + \Delta U) \quad (2.26)$$

Il constitue un grand système d'équations non linéaires. Les inconnues sont les incréments à apporter aux valeurs aux centres des mailles, contenues dans le vecteur $\Delta U = U^{n+1} - U^n$, de taille égale au produit du nombre de nœuds et du nombre d'inconnues par nœud. Il est bien entendu incontournable de passer à une linéarisation de (2.26) :

$$\left[\frac{I}{\Delta t} - \frac{dR}{dU} \right]^n \Delta U = R(U^n) \quad (2.27)$$

A la limite où $\Delta t \rightarrow \infty$, l'équation (2.27) se réduit à la méthode classique de Newton-Raphson pour déterminer la solution de $R(U) = 0$. Comme cette dernière n'assure une convergence quadratique qu'à condition que l'itéré initial soit suffisamment proche de la solution, une condition initiale adéquate peut être générée grâce au schéma d'intégration temporelle, i.e. en choisissant des pas de temps plus faibles de façon à conserver dans (2.27) le terme instationnaire.

En conclusion, une stratégie appropriée pour accélérer la convergence vers un régime établi est de permettre au processus itératif de résolution de (2.27) d'imiter un schéma d'intégration temporelle précis en choisissant des pas de temps faibles au début. Puis, au fur et à mesure que l'évolution transitoire rapproche la solution courante du régime établi, de plus grands pas de temps seront à privilégier afin de profiter du caractère inconditionnellement stable de l'intégration temporelle implicite. Cette approche est à la base de la stratégie *Switched Evolution - Relaxation* (SER) proposée par Van Leer (1984). L'ordre de grandeur du pas de temps à choisir pour obtenir l'effet désiré est donné par Amaladas & Kamath [1] :

$$\Delta t \simeq \frac{\|U^n\|}{\|R(U^n)\|} \quad (2.28)$$

Plus précisément, dans le logiciel développé, nous nous fixons un nombre de Courant initial CFL^0 qui sera par la suite mis à jour en fonction de la décroissance du résidu :

$$CFL^n = CFL^0 \left[\frac{\|R(U^0)\|}{\|R(U^n)\|} \right]^{SER} \quad (2.29)$$

où *SER* désigne un exposant ayant une valeur de l'ordre de 1.

II.7 Efficacité d'une intégration temporelle implicite

La comparaison des pas de temps implicite et explicite est éloquent. Par exemple, un cas de figure d'écoulement fluvial dans un canal courbe (2200 points de calcul, régime fluvial) conduit à un pas de temps explicite maximum de l'ordre du centième de seconde, étant donné la limitation très restrictive portant sur le nombre de Courant. Quel que soit le schéma explicite utilisé, le nombre de Courant demeure toujours de l'ordre de l'unité. Par contre, dans le cas d'une intégration implicite, le nombre de Courant a été choisi égal à 100 dès le début du calcul et s'accroît jusqu'au-delà de 10^8 à l'image de l'amélioration de la qualité de la solution, ce qui se traduit par des pas de temps (10^7 s) sans commune mesure avec ceux imposés par le critère de stabilité en explicite. Ces améliorations conduisent in fine au gain d'un facteur 100 en temps de calcul. La convergence quadratique de la méthode de Newton-Raphson dans le voisinage de la solution finale est mise en évidence à la Figure 2.

Le schéma d'intégration temporelle implicite a en outre été couplé à un outil de raffinements successifs et automatiques du maillage au cours de la convergence développé récemment au HACH. Les Figure 10 et Figure 11, présentées au paragraphe II.9.1, illustrent la mise en œuvre de cette adaptation automatique du maillage.

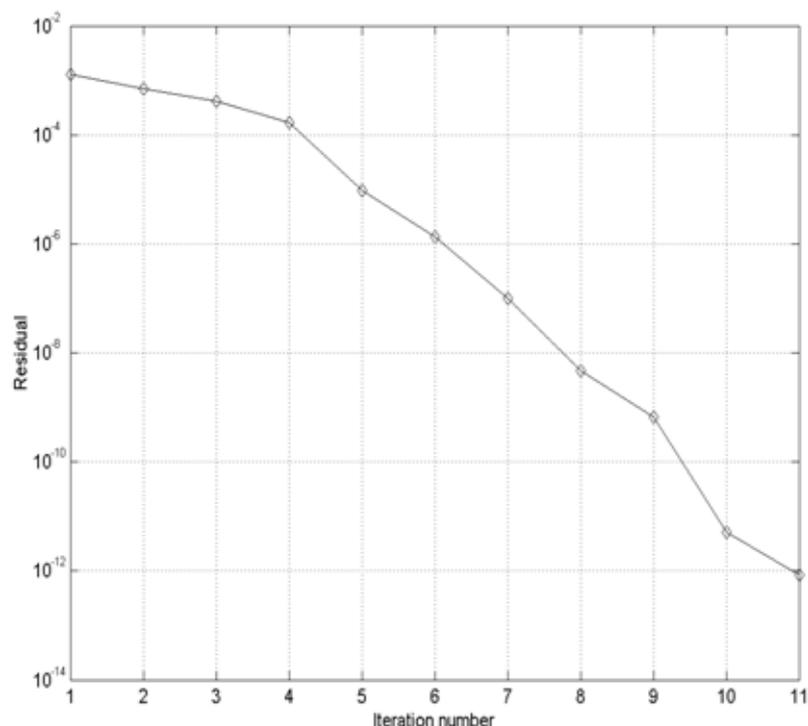


Figure 2 – Courbe de convergence d'un calcul d'écoulement en régime stationnaire par intégration temporelle implicite.

II.8 Discrétisation spatiale bidimensionnelle

La discrétisation spatiale habituellement utilisée au HACH se base sur une méthode simple et rapide de fractionnement des flux. Celle-ci sera décrite et discutée en mettant en exergue ses points forts ainsi que certaines limitations. Ensuite, les avantages que peut apporter la technique classique de Roe seront brièvement exposés. Finalement, le schéma récent AUSM sera décrit puis exploité lors d'une application.

II.8.1 Fractionnement des flux

Les méthodes de *fractionnement des flux* (ou *Flux Vector Splitting*, FVS) consistent à séparer le vecteurs flux en deux contributions (Hirsch [11]) :

$$f = f^+ + f^- . \quad (2.30)$$

Les matrices convectives partielles relatives à chacun des deux termes de (2.30) doivent respectivement avoir des valeurs propres non positives et non négatives. Ces matrices, ainsi que leurs valeurs propres, ont été évaluées et une analyse de von Neumann démontrant la stabilité linéaire du schéma a été présentée au cours de travaux antérieurs (voir Dewals [5] ou Mouzelard [15]). Au sens d'une analyse linéaire, la stabilité de ce FVS est garantie quel que soit le régime d'écoulement, y compris pour un modèle hydrosédimentaire complètement couplé.

La physique de la propagation de l'information dans le domaine est prise en compte. En effet, les contributions purement advectives des flux sont systématiquement décentrées vers l'amont. Au contraire le terme de pression est calculé à partir de l'information provenant de l'aval.

Ce schéma original a été appliqué au calcul d'un écoulement unidimensionnel en régime stationnaire. Il s'agit du calcul d'une ligne d'eau avec ressaut sur un lit présentant trois pentes successives (1%, 5% et 1%). Le débit spécifique s'élève à 10 m²/s et la hauteur d'eau aval est fixée à 7 m.

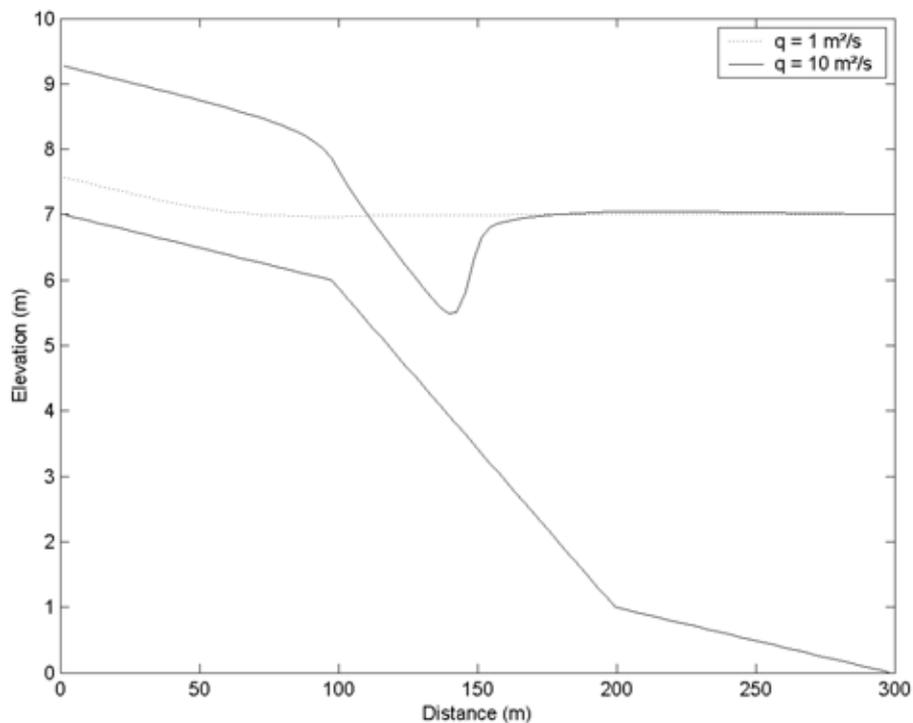


Figure 3 – Ligne d'eau sur une pente multiclinale : solution stabilisée avec un ressaut hydraulique et condition initiale, correspondant à un débit dix fois moindre.

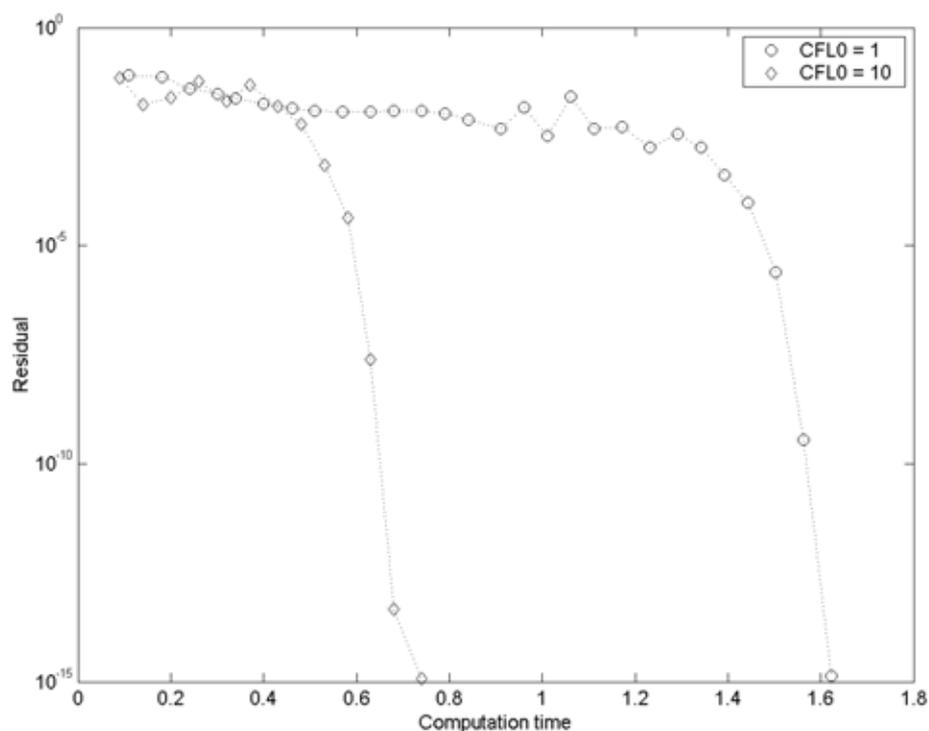


Figure 4 – Evolution du résidu au cours du calcul de la ligne d'eau avec ressaut sur les trois pentes et influence du nombre de Courant initial.

L'examen de la Figure 4 illustre l'efficacité du schéma implicite à produire une solution stabilisée de très haute précision. Deux phases peuvent être distinguées dans la diminution du résidu : une évolution pseudo-temporelle conduisant les itérés successifs dans un voisinage suffisamment étroit autour de la solution recherchée, puis une convergence ultra rapide vers cette solution en régime. Ce processus est géré grâce à l'adaptation judicieuse et automatique du pas de temps, conformément aux considérations présentées au paragraphe II.6. L'allure des deux courbes exposées à la Figure 4 laisse déjà présager la nécessité de systématiquement opter pour un nombre de Courant initial maximum, tout en préservant la propriété de convergence du processus.

La dissipation numérique que le schéma apporte contribue à son extrême robustesse. Parmi les inconvénients de la méthode, citons le traitement non automatique des vitesses faibles divergentes et les discontinuités du flux de pression intervenant pour de faibles débits susceptibles de changer de sens.

La première limitation évoquée est néanmoins maîtrisée actuellement grâce à un traitement particulier approprié de ce genre de situation. De façon générale, la difficulté liée aux faibles composantes de vitesse est illustrée à la Figure 5. Le problème d'une telle configuration résulte de la difficulté à dégager un critère de sens de décentrement approprié de façon suffisamment général. Par exemple, le simple examen de la composante de vitesse normale au bord ne permet pas de distinguer les deux premiers cas représentés à la Figure 5, bien que physiquement ils soient fortement dissemblables. De même, un critère basé uniquement sur la comparaison des orientations α_R et α_L s'avère également incomplet car il ne tient aucunement compte de l'intensité des vecteurs vitesses et se révèle par conséquent inapte à différencier une zone quasi-morte d'une situation de transport intense.

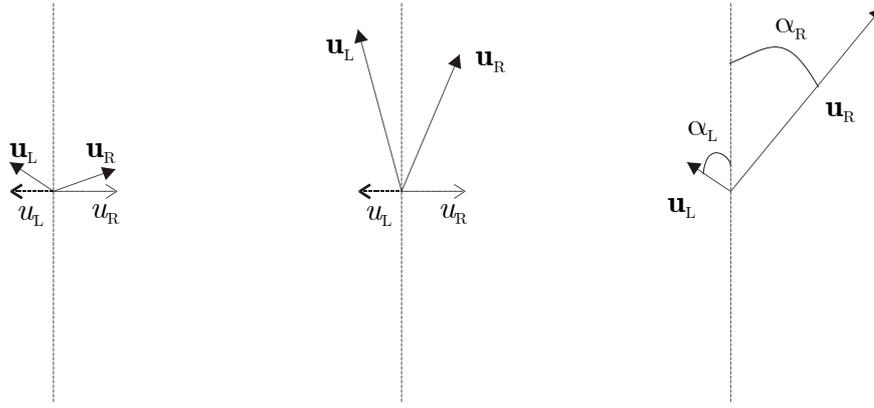


Figure 5 – Représentation schématique d'un bord où les vecteurs vitesses reconstruits à gauche (u_L) et à droite (u_R) divergent.

II.8.2 F.D.S. de Roe

Le *flux difference splitting* (FDS) de Roe s'est hissée parmi les méthodes les plus reconnues et les plus exploitées pour le calcul des flux numériques dans une discrétisation de type volumes finis. Elle a gagné ses lettres de noblesse dans de très nombreux domaines depuis la mécanique des fluides compressibles, avec le cas-test incontournable du tube à choc, jusqu'à l'étude de la propagation d'ondes raides consécutives à la rupture d'ouvrages de retenue.

Le principe de l'évaluation des flux est fondé sur la résolution exacte d'un problème de Riemann linéarisé à chaque interface entre cellules. Les conditions initiales discontinues sont fournies par les valeurs des inconnues reconstruites à gauche et à droite du bord. Une formulation détaillée du calcul des flux se trouve dans l'ouvrage de Toro [20], ou encore, sous forme adaptée aux équations des eaux peu profondes, leur évaluation est explicitée notamment par Toro [19] et par Mouzelard [15].

Trois expressions mathématiquement équivalentes peuvent être utilisées pour l'évaluation des flux numériques aux interfaces selon la méthode de Roe :

$$F_N(U_L, U_R) = F_N(U_L) + A_N^-(U_R - U_L), \quad (2.31)$$

$$F_N(U_L, U_R) = F_N(U_R) - A_N^+(U_R - U_L), \quad (2.32)$$

$$F_N(U_L, U_R) = \frac{1}{2}[F_N(U_L) + F_N(U_R)] - \frac{1}{2}|A_N|(U_R - U_L). \quad (2.33)$$

où F_N représente le flux numérique à calculer au bord, U_L et U_R sont les valeurs des inconnues reconstruites respectivement à gauche et à droite de l'interface. A_N^+ , A_N^- et $|A_N|$ désignent des décompositions de la matrice Jacobienne propres à la méthode de Roe et explicitées, par exemple, par Mouzelard [15]. La représentation (2.31) est préféré pour évaluer les flux $(F_N)_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$ et $(F_N)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}$, alors que la formulation (2.32) s'avère particulièrement adaptée au calcul de $(F_N)_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}$ et $(F_N)_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}$.

Le FDS de Roe procure au moins trois avantages substantiels par rapport au FVS précédent. D'une part, la dissipation numérique artificiellement introduite se voit notablement réduite par rapport au FVS. D'autre part les faibles vitesses n'engendrent

aucune singularité car elles sont traitées automatiquement et, de façon corollaire, les flux numériques évalués sont continus par rapport aux valeurs des inconnues aux nœuds. Cette dernière propriété rend le schéma de Roe très adapté à un traitement implicite de l'intégration temporelle.

Toutefois, l'extension du schéma de Roe de son expression originale, adaptée aux équations d'Euler, au modèle des eaux peu profondes n'est pas dépourvue de difficultés. En effet, une mise en adéquation correcte du terme source de pente de fond avec l'évaluation du flux de pression est loin d'être triviale. Plusieurs méthodes ont été proposées pour pallier cet inconvénient, notamment par Garcia-Navarro & Vazquez-Cendon [9], Benkhaldoun & al. [3], Garcia-Navarro & Vazquez [8], Garcia-Navarro & Vazquez-Cendon [10] et Bradford & Sanders [4]. En outre, tout comme pour les équations de la mécanique des fluides, des adaptations, appelées *entropy fix*, doivent être apportées au schéma afin de traiter correctement des ondes de dépression.

II.8.3 Schéma AUSM

Introduction

Plus récent que les précédents, le schéma AUSM a été proposé en 1993 par Liou & Steffen [14] et repris par Liou & Edwards [13]. Le principe fondamental du calcul des flux reste analogue à celui qui a conduit au premier FVS décrit, d'où le nom *Advective Upstream Splitting Method* (AUSM) pour ce schéma intermédiaire entre les FVS et FDS et qui offre une combinaison des avantages des deux autres familles. Tout comme le premier fractionnement des flux, le schéma AUSM se distingue par sa remarquable simplicité, tout en rivalisant avec les performances du FDS de Roe et en les dépassant même dans certains cas, tant en termes de précision que de faible diffusion numérique.

Coût du calcul

Contrairement au schéma de Roe, AUSM ne fait pas intervenir de matrice Jacobienne et écarte de ce fait tout problème lié à la différentiation des flux. En outre, le coût de la construction des vecteurs flux requiert, en chaque nœud, de l'ordre de n^2 opérations, où n est le nombre d'équations. Au contraire, le schéma AUSM nécessite un nombre d'opérations de l'ordre de n seulement, ce qui le rend d'autant plus compétitif si des équations de transport additionnelles sont greffées au modèle. Toute la mesure de cet avantage devrait notamment être perçue lors de l'étude du transport sédimentaire différencié d'un mélange de particules solides de tailles différentes. Dans ce cas effectivement des équations de continuité supplémentaires doivent être ajoutées, en nombre égal au nombre de classes granulométriques considérées.

Formulation du schéma

Le schéma est directement adapté aux équations des eaux peu profondes et non pas présenté dans sa forme originale, relative aux équations d'Euler de la Mécanique des fluides compressibles. La présente adaptation est à notre connaissance inédite.

La méthode repose essentiellement sur la définition judicieuse d'un nombre de Froude à l'interface, en fonction des valeurs reconstruites des inconnues. Ce nombre de Froude particulier est ensuite exploité afin de déterminer les expressions des flux conduisant à une discrétisation stable et précise.

Les équations régissant un écoulement instationnaire à surface libre peuvent s'écrire

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = \mathbf{s} \quad (2.34)$$

avec

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{g}{2}h^2 \\ huv \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

La première étape revient à distinguer dans les flux donnés en (2.35) deux contributions de significations physiques totalement différentes :

$$\mathbf{f} = u \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2}h^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{f}^c + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2}h^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

à savoir un terme purement convectif et un terme résultant de l'intégration sur la hauteur de la distribution hydrostatique de pression. Le terme convectif apparaît dès lors comme un vecteur de grandeurs scalaires qui seraient advectées passivement par un écoulement de vitesse correctement évaluée.

Etant donné les différences fondamentales entre les deux termes, ils seront discrétisés séparément. Des développements en tout point analogues doivent bien entendu être effectués pour le flux dans l'autre direction spatiale.

A une interface $i + \frac{1}{2}$, où les inconnues reconstruites à droite et à gauche du bord sont munies des indices R et L respectivement, le flux convectif sera calculé à l'aide de

$$\mathbf{f}_{\frac{1}{2}}^c = \text{Fr}_{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} hc \\ hcu \\ hcv \end{pmatrix}_{L/R} = \text{Fr}_{\frac{1}{2}} \left[\hat{\mathbf{f}}_{\frac{1}{2}}^c \right]_{L/R}, \quad (2.37)$$

où

$$\langle \bullet \rangle_{L/R} = \begin{cases} \langle \bullet \rangle_L & \text{si } \text{Fr}_{\frac{1}{2}} \geq 0 \\ \langle \bullet \rangle_R & \text{si } \text{Fr}_{\frac{1}{2}} < 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

et c représente la célérité. Il est intéressant de constater que les relations précédentes ouvrent la voie à toute une famille de schémas, selon la définition choisie pour le nombre de Froude à l'interface.

Notons bien que, malgré sa formulation particulière, la définition (2.38) n'engendre aucune discontinuité dans l'évaluation du flux à l'interface, même pour des valeurs très faibles du Froude. En effet, dans ce cas le flux advectif tend tout simplement vers zéro et la transition du décentrement dans un sens à celui dans l'autre sens a lieu de façon continue. Cette observation ne pourrait en aucun cas être transposée au terme de pression, qui lui ne s'annule qu'à condition que la hauteur d'eau fasse de même. Ceci constitue une différence notable entre les deux termes, ce qui plaide une fois de plus pour

un traitement numérique séparé de chacun d'eux. En ce qui concerne le flux de pression, il est calculé à l'aide d'une somme pondérée des valeurs extrapolées à gauche et à droite de l'interface.

Il reste à définir l'expression de $Fr_{\frac{1}{2}}$ en fonction des grandeurs reconstruites aux bords. Pour ce faire, les polynômes suivants sont introduits (Toro [19]) :

$$Fr^{\pm} = \begin{cases} \pm \frac{1}{4}(Fr \pm 1)^2 & \text{si } |Fr| \leq 1, \\ \frac{1}{2}(Fr \pm |Fr|) & \text{si } |Fr| > 1 \end{cases} \quad (2.39)$$

et le terme de pression $p = \frac{g}{2}h^2$ sera évalué au moyen de

$$p^{\pm} = \begin{cases} \frac{1}{2}p(1 \pm Fr) & \text{si } |Fr| \leq 1, \\ \frac{1}{2}p \frac{Fr \pm |Fr|}{Fr} & \text{si } |Fr| > 1 \end{cases} \quad (2.40)$$

ou encore

$$p^{\pm} = \begin{cases} \frac{1}{2}p(Fr \pm 1)^2(2 \mp Fr) & \text{si } |Fr| \leq 1, \\ \frac{1}{2}p \frac{Fr \pm |Fr|}{Fr} & \text{si } |Fr| > 1. \end{cases} \quad (2.41)$$

Les définitions (2.39) et (2.41) sont illustrées graphiquement à la Figure 6 et la Figure 7. Elles permettent finalement le calcul de $Fr_{i+\frac{1}{2}}$ et $p_{i+\frac{1}{2}}$ grâce à :

$$Fr_{i+\frac{1}{2}} = Fr_L^+ + Fr_R^- \quad \text{et} \quad p_{i+\frac{1}{2}} = p_L^+ + p_R^- \quad (2.42)$$

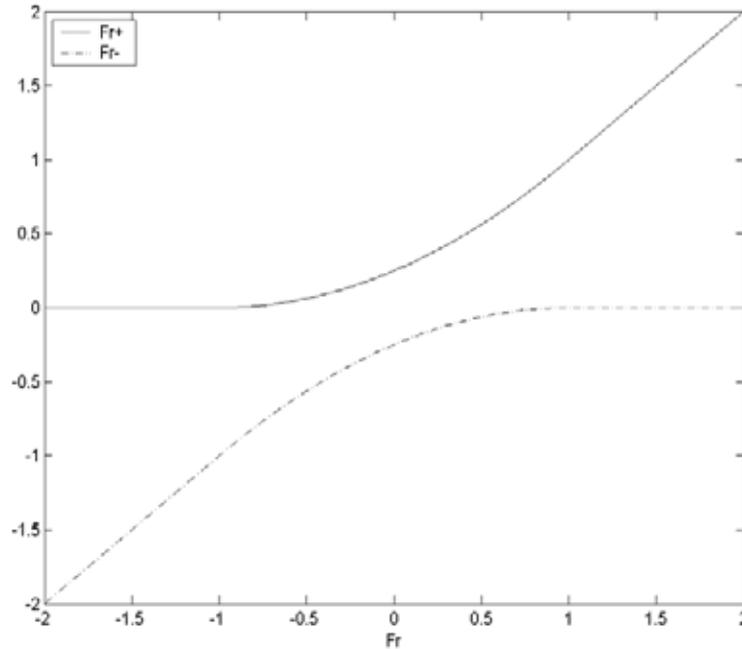


Figure 6 – Evaluation continue de la partie positive Fr^+ et de la partie négative Fr^- du nombre de Froude à l'interface, conformément à la définition (2.39).

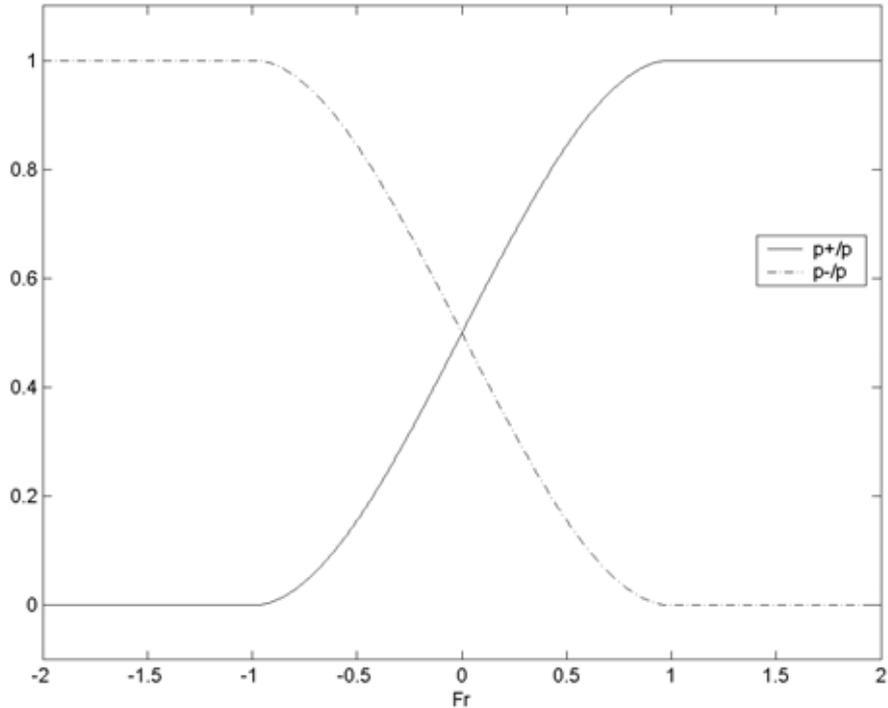


Figure 7 – Représentation des quotients $\frac{p^+}{p}$ et $\frac{p^-}{p}$ fournis par la définition (2.41).

Une application unidimensionnelle a été traitée afin de mettre en évidence certaines différences entre d’une part le fractionnement original des flux et d’autre part la technique AUSM. La comparaison de la Figure 8 avec la Figure 9, toutes deux obtenues en reconstruction constante, met en exergue la dissipation numérique nettement moindre de la méthode AUSM par rapport à la première dans le cas de la ligne d’eau avec ressaut sur un lit présentant trois pentes successives.

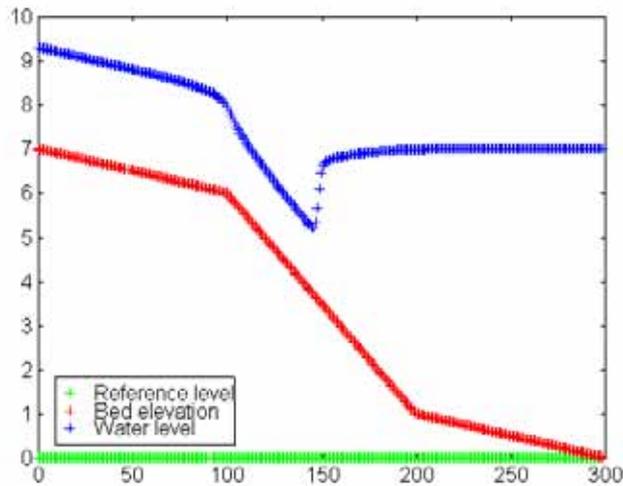


Figure 8 – Ligne d’eau sur une pente multiclinal, calculée à l’aide du FVS.

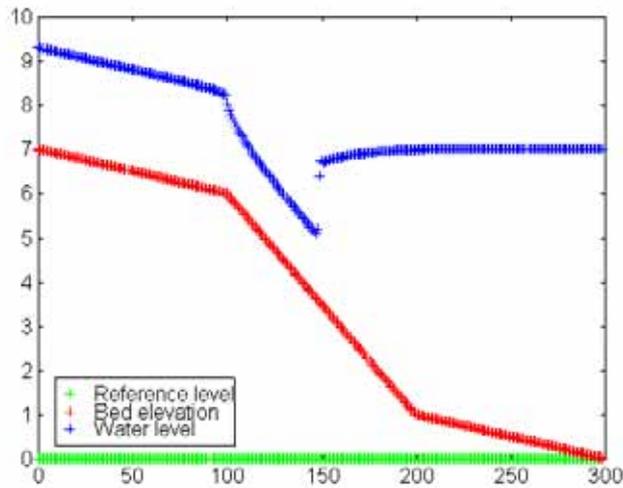


Figure 9 – Ligne d'eau sur une pente multiclinal, calculée à l'aide de la méthode AUSM.

II.9 Exemples de résultats bidimensionnels

II.9.1 Canal courbe

Un exemple de solution hydrodynamique stationnaire a été recherché à l'aide du schéma d'intégration temporelle implicite implémenté. La géométrie correspond à un canal courbe d'un angle totale de 90° , large de 1 mètre. La hauteur d'eau imposée à l'aval vaut également 1 mètre.

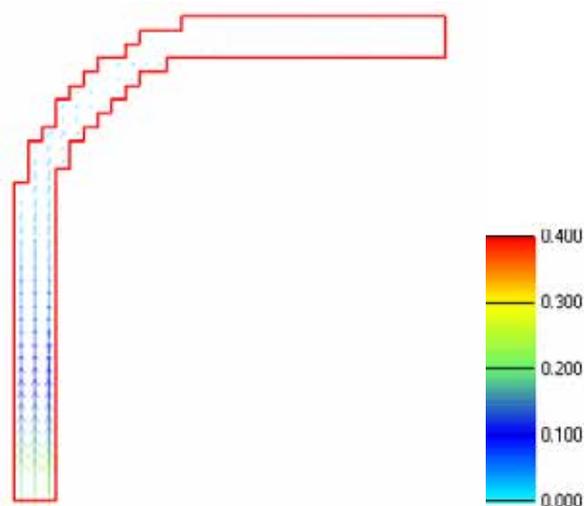


Figure 10 – Contour du maillage grossier, solution au premier pas de temps et échelle des débits spécifiques (m^2/s).

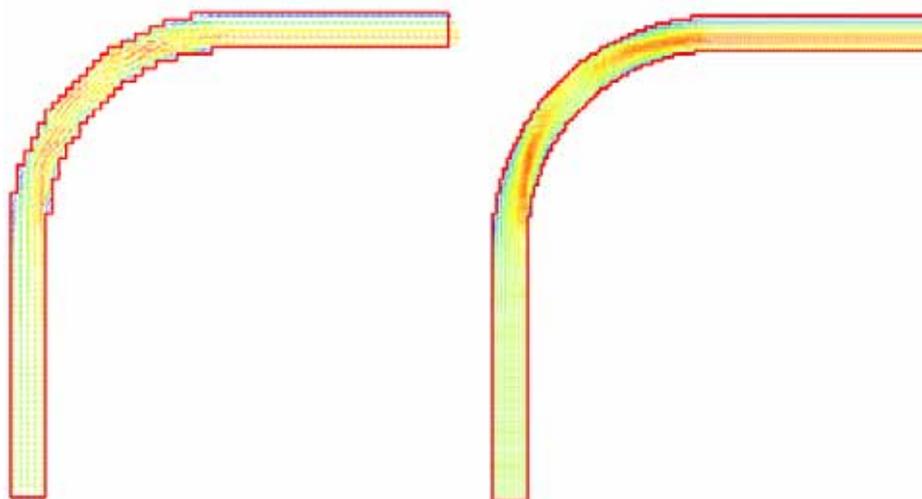


Figure 11 – Solutions stabilisées sur les maillages de 20 cm et 10 cm respectivement.

La technique de maillage à raffinement progressif est mise en œuvre afin de partir d'un état initial tout à fait quelconque et de converger le plus rapidement possible vers un écoulement en équilibre. Cette procédure est illustrée à la Figure 10 et la Figure 11.

Il est intéressant de constater à la Figure 10 que dès le tout premier pas de temps, des débits naissent dans l'ensemble du domaine, qui est donc immédiatement « contaminé » par la condition limite imposée à l'amont.

L'évolution du résidu au cours du temps de calcul est représenté à la Figure 12. Le critère d'arrêt s'élève à 10^{-8} . La condition initiale correspond à un champ de débits nul

Dans le premier cas, deux maillages successifs sont utilisés. Une première solution est recherchée sur un maillage grossier de mailles de 40 cm de large. Ensuite la solution finale est obtenue à l'aide de cellules de 10 cm de côté. Le nombre d'itérations du GMRES est limité à 40 à chaque pas de temps. On observe la décroissance rapide du résidu sur le premier maillage puis sa remontée lors du passage d'une taille de maille à la suivante. Malgré cette remontée du résidu, l'utilisation d'un maillage à raffinement progressif se justifie en constatant la différence notable de temps CPU requis pour effectuer une itération sur le maillage grossier par rapport au maillage fin. Le second exemple confirme aussi la pertinence de l'approche.

Dans le second cas, un remaillage supplémentaire est utilisé afin d'estimer dans quelle mesure les avantages du remaillage compensent avantageusement les opérations additionnelles requises pour passer d'un grid à l'autre. Cette fois, trois tailles de mailles sont considérées : 40 cm, 20 cm et 10 cm. La figure montre que cette approche s'avère encore plus compétitive que la précédente.

Dans le troisième cas, le nombre d'itérations lors de la résolution des systèmes linéaires n'est pas limité et on observe que le temps de calcul se voit nettement augmenté en raison d'une recherche inutile de précision lors des pas de temps intermédiaires.

Dans le dernier cas finalement, le calcul est effectué, à partir des conditions initiales de débit nul, directement sur le maillage le plus fin. Tous les pas de pseudo-temps et, partant, toutes les itérations en vue de la résolution des systèmes linéaires sont réalisés sur le maillage raffiné au maximum, ce qui pénalise visiblement le temps de calcul total. Le nombre d'itérations du GMRES a de nouveau été restreint à un maximum de 40. Sans cette dernière précaution, le temps de calcul était encore doublé par rapport à celui du cas 4.

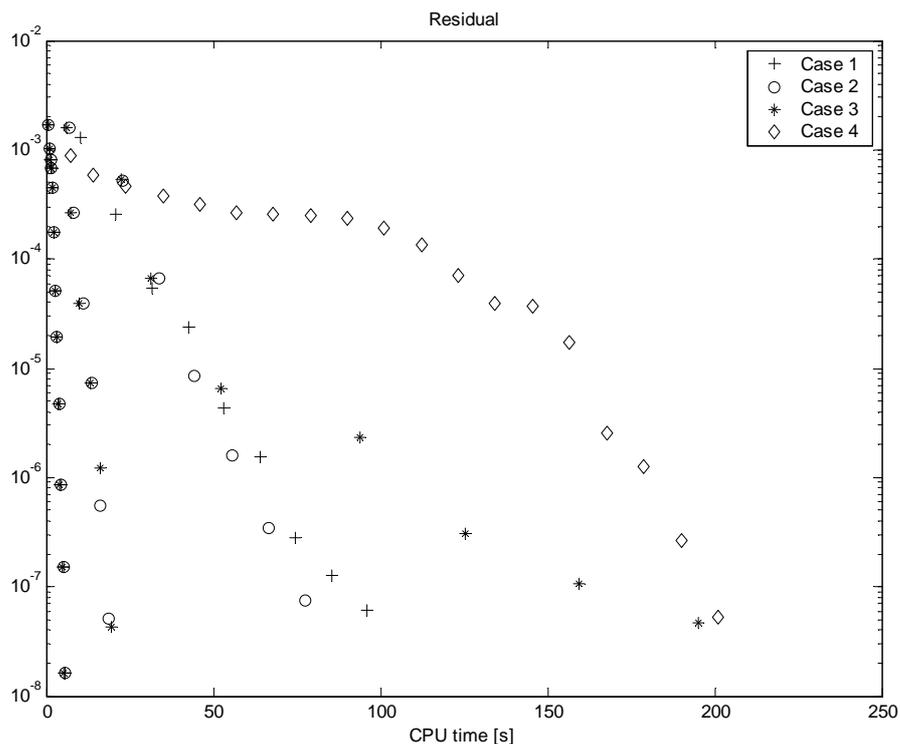


Figure 12 – Evolution du résidu lors de la recherche d'une solution bidimensionnelle stationnaire.

II.9.2 Comparaison entre Roe et AUSM

Dans la même configuration que le cas précédent, les deux techniques d'évaluation des flux appropriées au schéma implicite ont été comparées. La hauteur imposée à l'aval du canal courbe vaut 1 m et le débit spécifique imposé est également unitaire. Les conditions initiales correspondent à une configuration de repos (débits nuls partout) en présence d'une surface libre horizontale.

La Figure 13 compare la décroissance du résidu en fonction du temps total de calcul. Il est bien entendu essentiel d'établir la comparaison sur base du temps de calcul, seule grandeur tangible et véritablement pénalisante dans le cadre d'une application pratique, et pas seulement sur base du nombre d'itérations. Il apparaît que le FDS de Roe fournit une convergence accélérée par rapport à celle de la technique AUSM. Plus précisément, on observe que la seconde évaluation des flux se révèle peu performante au début de la simulation ou, autrement dit, pour de très faibles vitesses. Constatant que la majorité de ce temps de calcul est lié à la résolution du système linéaire, cette différence de comportement s'interprète immédiatement en concluant à un moins bon conditionnement de la matrice Jacobienne AUSM par rapport à celle de Roe, surtout dans le cas d'un champ de vitesses quasi nulles.

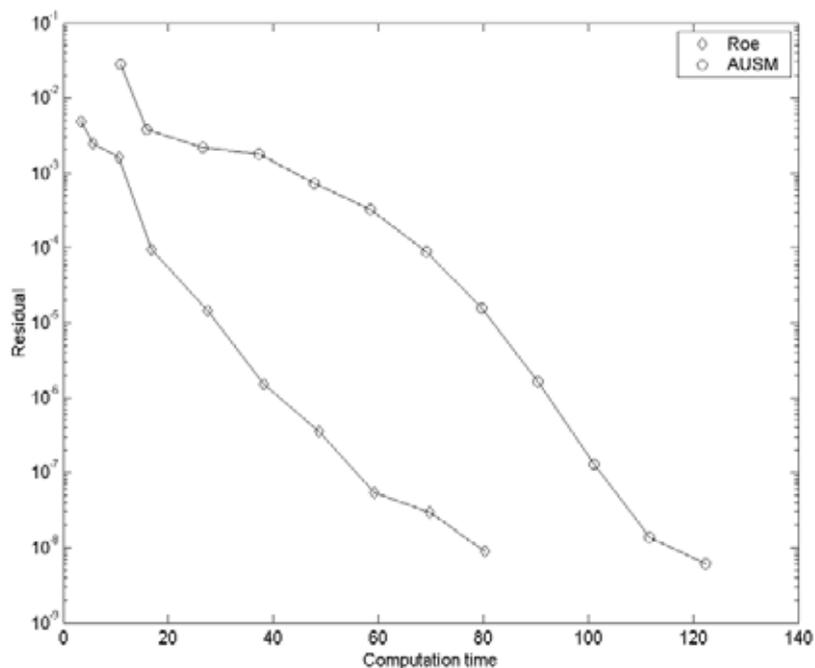


Figure 13 – Evolution du résidu obtenue à l'aide du FDS de Roe et avec la technique AUSM.

II.9.3 Lac de Kol (Inde)

Une partie du présent travail est consacrée à l'évaluation du temps d'alluvionnement du futur lac de Kol sur la rivière Satluj (Inde). La topographie de la partie aval de cette grande retenue a d'ores et déjà été exploitée afin de mettre en évidence l'influence du choix du pas de temps initial sur la vitesse de convergence.

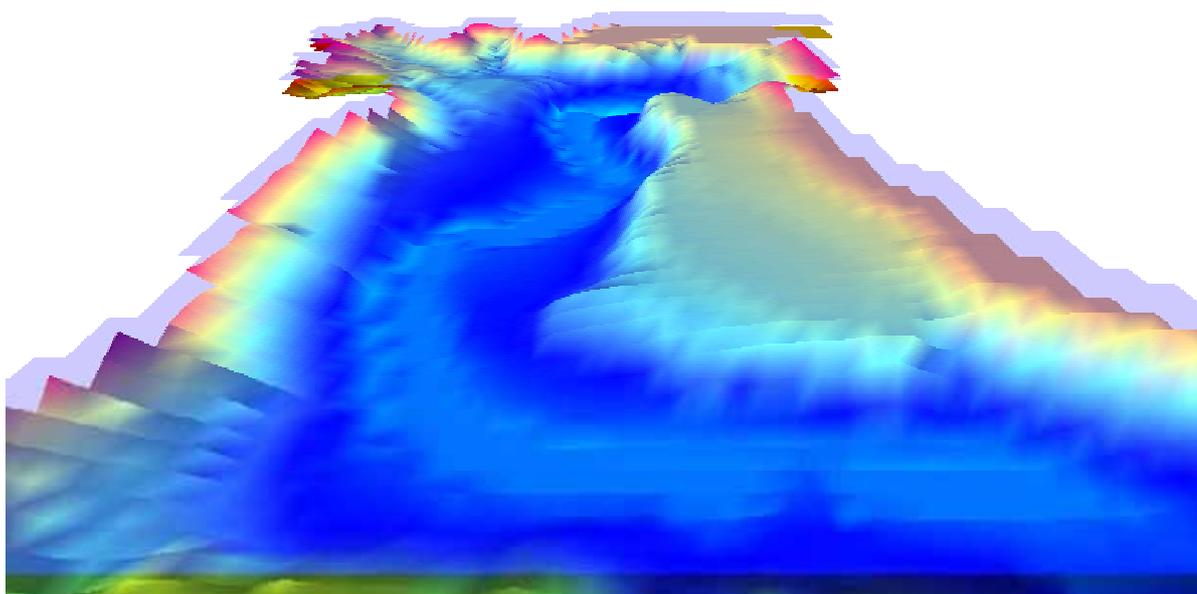


Figure 14 – Visualisation 3D de la topographie aval de Kol et de la surface libre calculée.

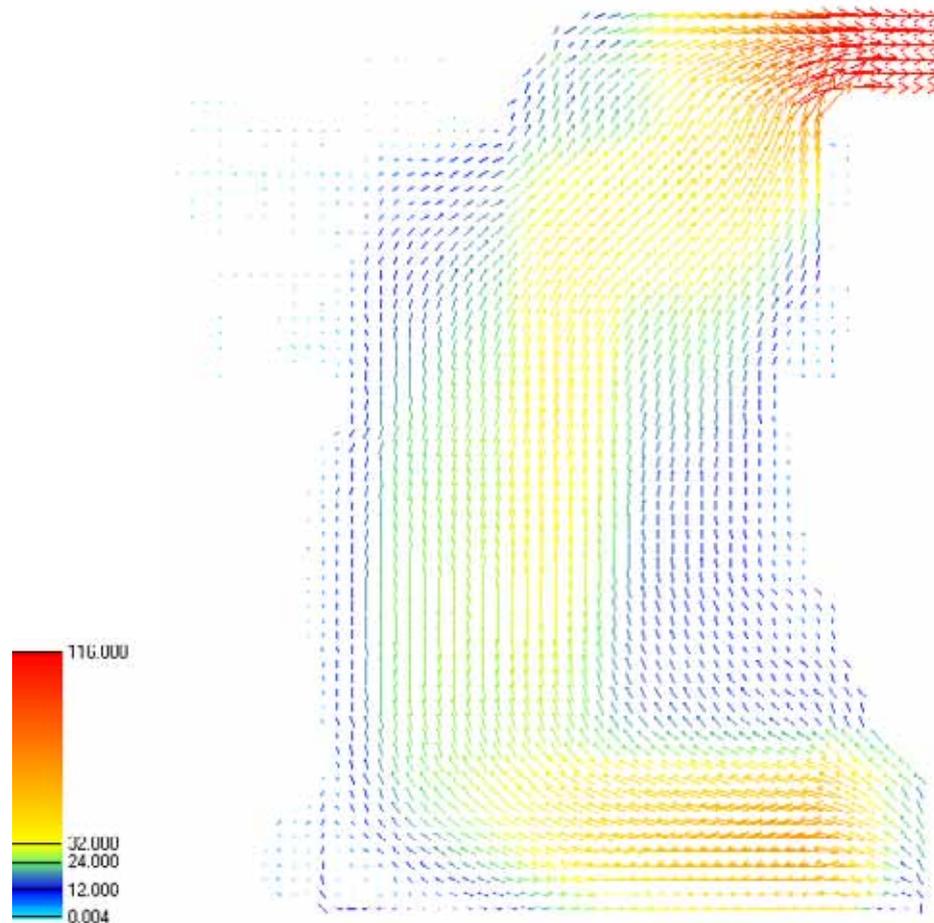


Figure 15 – Répartition des débits spécifiques (m^2/s) calculés pour le débit de dimensionnement (PMF) du barrage de Kol.

Comme détaillé au paragraphe II.6, le pas de temps est contrôlé par la valeur initiale fixée pour le nombre de Courant et évolue ensuite au gré de l'augmentation de la précision atteinte sur le résultat. Une solution en régime a été calculée sur un maillage de 2500 mailles pour le débit de dimensionnement valant $16500 \text{ m}^3/\text{s}$.

La condition initiale correspond à une surface libre horizontale, fixée à la cote 645 comme la condition limite aval, et à une approximation grossière pour la répartition des débits. Cette dernière résulte en effet du calcul de quelques pas en explicite.

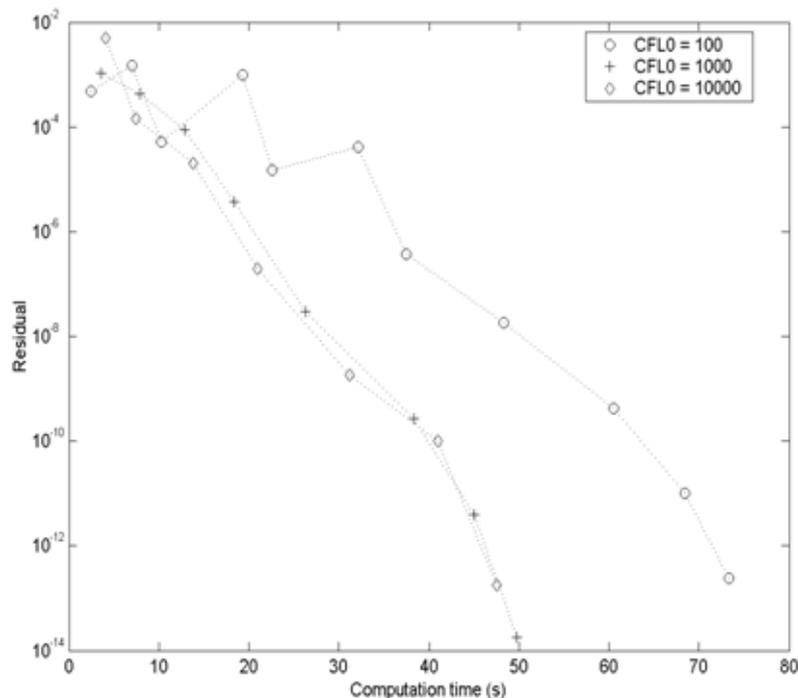


Figure 16 – Evolution du résidu, en fonction du nombre de Courant initial, au cours du calcul de l'hydrodynamique dans le lac de Kol.

La Figure 16 met en exergue l'influence déterminante du nombre de Courant (CFL) fixé au début du calcul. En effet la simulation débutant avec un nombre CFL relativement faible (100) représente dans un premier temps une évolution instationnaire avant de véritablement converger vers le régime établi. Par contre, si CFL est d'emblée choisi de l'ordre de 1000 ou plus, on observe que les itérés successifs plongent littéralement vers la solution stabilisée dès les premiers pas de temps. Ne perdons toutefois pas de vue que si l'itéré initial est fortement éloigné de la solution finale, un CFL faible sera requis au début du processus en raison du caractère *local* et non *global* de la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson. De nouveau, la convergence quadratique est très visible à la Figure 16 qui montre le gain de deux ordres de grandeur au cours de chacune des dernières itérations. De plus, les valeurs extrêmement faibles du résidu sont sans commune mesure avec celles qu'un schéma explicite permet d'atteindre en un temps de calcul semblable.

II.10 Bibliographie

- [1] Amaladas, J.R. & H. Kamath, *Implicit and multigrid procedures for steady-state computations with upwind algorithms*. Computers & Fluids, 1999. **28**: pp. 187-212.
- [2] Archambeau, P., B. Dewals, S. Erpicum, T. Mouzelard & M. Piroton. *Dam-break hazard mitigation with geomorphic flow computation, using WOLF 2D hydrodynamic software*. in *International Conference on Risk Analysis*. 2002. Sintra, Portugal: WIT Press.

-
- [3] Benkhaldoun, F., L. Monthe & I. Elmahi. *A splitting finite volume roe scheme for shallow water equations with source terms*. in *CADAM meeting*. 1998. Wallingford: European Commission.
- [4] Bradford, S.F. & B.F. Sanders, *Finite-Volume Model for Shallow-Water Flooding of Arbitrary Topography*. *J. Hydraul. Eng*, 2002. **128**(3).
- [5] Dewals, B., *Modélisation numérique du transport sédimentaire*. Diploma Thesis. 2001, University of Liege.
- [6] Dewals, B., P. Archambeau, S. Erpicum, T. Mouzelard & M. Piroton. *Wolf software: a fully integrated device applied to modelling gradual dam failures and assessing subsequent risks*. in *Advances in Fluid Mechanics*. 2002. Ghent, Belgium: WIT Press.
- [7] Fäh, R., *Numerische Simulation der Strömung in offenen Gerinnen mit beweglicher Sohle*. PhD Thesis. 1997, VAW-ETHZ: Zürich.
- [8] Garcia-Navarro, P. & M. Vazquez, *Some Considerations and Improvements on the Performance of the Roe's scheme for 1D Irregular Geometries*. 1997, Universidade de Santiago do Compostela: Santiago do Compostela.
- [9] Garcia-Navarro, P. & M.E. Vazquez-Cendon. *Roe's scheme for 1D irregular geometries*. in *Hydroinformatics 98*. 1998. Balkema, Rotterdam, NL.
- [10] Garcia-Navarro, P. & M.E. Vazquez-Cendon, *On numerical treatment of the source terms in the shallow water equations*. *Computers & Fluids*, 2000(29): pp. 951-979.
- [11] Hirsch, *Numerical Computation of internal and external Flows*. Vol. 1: Fundamentals of Numerical Discretization. 2000, Chichester: John Wiley & Sons.
- [12] Lacor, C., *Solution of Time Dependent Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations with the Finite Volume Method*. 1998.
- [13] Liou, M.-S. & J.R. Edwards. *AUSM Schemes and extensions for low mach and multiphase flows*. in *30th Computational Fluid Dynamics*. 1999: von Karman Institute for Fluid Dynamics.
- [14] Liou, M.-S. & C.J. Steffen, *A new flux splitting scheme*. *Journal of Computational Physics*, 1993. **107**: pp. 23-39.
- [15] Mouzelard, T., *Contribution à la modélisation des écoulements quasi tridimensionnels instationnaires à surface libre*. Thèse de doctorat. 2002, Université de Liège.
- [16] Piroton, M., *Une Approche Globale pour Modéliser la Genèse et la Propagation des Crues Naturelles ou Accidentelles*. Classe des Sciences. 1997: Académie Royale de Belgique.
- [17] Piroton, M., P. Archambeau, B. Dewals, S. Erpicum & T. Mouzelard, *Cours d'Hydraulique Appliquée*. 2002: Université de Liège.
- [18] Rogiest, P., *An Implicit Finite Volume Scheme for the Computation of Unsteady Compressible Flows on Multi-Block Structured Grids. Application to Aeroelastic Problems*. PhD Thesis. 1997, University of Liege.
- [19] Toro, E., *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*, ed. Wiley. 2001. 309.
- [20] Toro, E.F., *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. 1997, Berlin: Springer.

III. Modélisation d'écoulements à l'aide d'un formalisme en coordonnées curvilignes

III.1 Introduction

Même si les coursiers et déversoirs ne sont pas eux-mêmes le siège de phénomènes de transport solide intense, leur influence est prépondérante sur le niveau exact du plan d'eau amont, où ont lieu les phénomènes d'alluvionnement ou de mise en mouvement des sédiments, par exemple au cours de chasses. Il est par conséquent incontournable d'inclure également ces organes de régulation dans le domaine de simulation, d'autant plus que le rôle tout à fait déterminant de la hauteur d'eau sur la capacité de charriage de tout écoulement est connue.

Le modèle des eaux peu profonde nécessite néanmoins une extension afin de traiter rigoureusement l'écoulement au droit du seuil ainsi que sur les coursiers à inclinaison forte et surtout variable. En effet, comme le montre la Figure 17, les axes sont classiquement orientés selon la pente moyenne de l'écoulement principal de telle sorte que le modèle demeure strictement valide quelle que soit la pente moyenne. Il n'y a donc aucune limitation portant sur l'inclinaison proprement dite mais il n'en va pas de même en ce qui concerne les *variations* locales d'inclinaison des axes. Ces changements d'orientation n'étant pas traités de façon adéquate dans le modèle initial, nous avons proposé une extension rigoureuse et originale, inédite à notre connaissance, autorisant la modélisation correcte d'écoulements moyennés sur la hauteur et dont la direction moyenne dans le plan vertical subit des transitions brusques.

Elle est basée sur une nouvelle formulation très générale du modèle des eaux peu profondes, établie moyennant une intégration entre un lit quelconque évoluant éventuellement avec le temps et une surface libre a priori inconnue, définis tout deux dans un plan vertical muni d'un repère curviligne ad hoc.

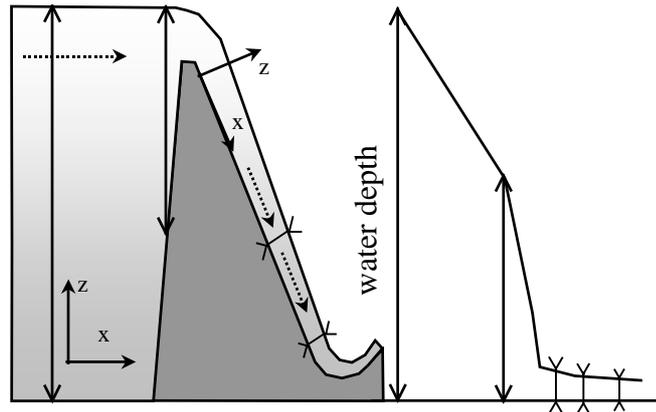


Figure 17 - Inclinaison des axes selon la pente moyenne de l'écoulement.

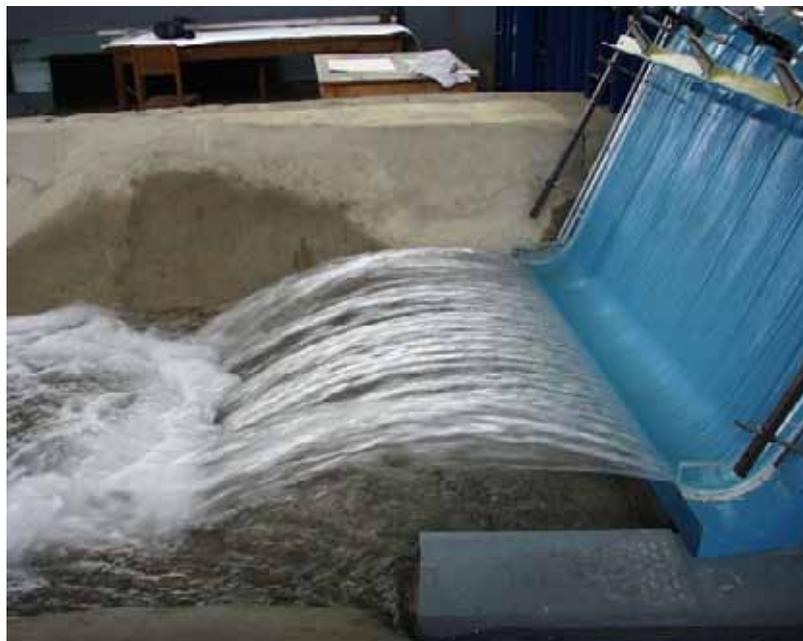


Figure 18 – Exemple de déversoir avec cuillère et jet libre.

III.2 Présentation synthétique de la méthode

Nous avons formulé les équations dans un système de coordonnées curvilignes général, choisi de telle sorte que qu'une des familles de lignes de coordonnées soit *localement* parallèle au fond moyen. Le seconde famille de lignes de coordonnées est prise *localement* normale à la première.

Les équations aux dérivées partielles sont transformées, en procédant non seulement au changement de coordonnées mais également à un changement d'inconnues, de façon à préserver une formulation conservative des équations de bilan, y compris dans le système de coordonnées curvilignes.

La seule hypothèse émise consiste à admettre que le rapport des carrés de la vitesse normale et de la vitesse longitudinale par rapport à la direction principale d'écoulement soit négligeable. Aucune hypothèse ne porte directement sur la pression. On obtient comme résultat de calcul une expression de la pression, qui se réduit à une

distribution hydrostatique uniquement si le repère est cartésien. L'intégration des équations selon la normale locale à la direction principale d'écoulement est ensuite réalisée.

L'intégration spatiale réalisée ici conduit bien entendu à une connaissance moyenne, ou « faible » des différents champs et, en particulier, de la vitesse ou du débit. Néanmoins, le profil réel de vitesse garde une influence et les écarts de la vitesse locale par rapport à la valeur moyenne sur la hauteur se manifesteront directement par le biais de termes additionnels dans la forme intégrée de tous les termes non linéaires. Cette question se pose de façon analogue à celle des tensions turbulentes qui interviennent à l'issue de l'intégration temporelle effectuée lors de la moyenne de Reynolds des équations de la mécanique des fluides. En outre, la variation d'inclinaison des axes avec l'abscisse curviligne donne naissance à de nouvelles non linéarités. Différents traitements vont être testés pour appréhender correctement ces termes non linéaires et in fine fermer le système d'équations.

Les développements décrits ici ont permis de mettre en évidence plusieurs modifications significatives au sein des équations de bilan intégrées sur la hauteur lorsque l'inclinaison variable de l'axe d'écoulement principal est prise en compte. D'une part, les inconnues conservatives qui apparaissent naturellement dans les termes instationnaires des bilans sont affectées d'une correction directement proportionnelle à la variation locale d'inclinaison de l'axe. L'interprétation de cette modification est immédiate car elle traduit simplement l'augmentation de la taille des mailles dans le plan vertical, muni du maillage curviligne présenté, au fur et à mesure que la distance par rapport au fond s'accroît. D'autre part, le terme source directement lié à l'inclinaison des axes se voit lui aussi affecté d'un facteur correctif analogue à celui qui porte sur les inconnues conservatives. L'interprétation est en tout point semblable à la précédente. D'autres termes sources apparaissent du fait des écarts de la distribution de pression par rapport au profil hydrostatique.

III.3 Changement de variables général

Un changement de variables quelconque va être appliqué pour passer de coordonnées curvilignes quelconques dans un plan vertical à des coordonnées cartésiennes :

$$t = t ; \tag{3.1}$$

$$x = x(\xi, \eta) ; \tag{3.2}$$

$$y = y(\xi, \eta). \tag{3.3}$$

La transformation des opérateurs de dérivation s'obtient à l'aide de la matrice Jacobienne du changement de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

On en déduit la transformation inverse :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ 0 & -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

où J désigne le *Jacobien* de la transformation, défini par :

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}. \quad (3.6)$$

III.4 Transformation d'une équation d'advection quelconque

Le changement de variables décrit ci-dessus va être appliqué à une équation d'advection unidimensionnelle du type :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} = S. \quad (3.7)$$

où s désigne l'inconnue, $f_x = f_x(s)$ et $f_y = f_y(s)$ sont des flux et S représente un terme source. Les résultats du paragraphe précédent permettent d'exprimer immédiatement l'équation aux dérivées partielles dans les nouvelles coordonnées :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial f_x}{\partial \xi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial f_x}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial f_y}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial f_y}{\partial \eta} = S. \quad (3.8)$$

Cette dernière équation présente le défaut majeur de ne pas être conservative, ce qui compliquera son traitement numérique, en particulier en présence de champs discontinus. Il est néanmoins possible de pallier cet inconvénient car un changement judicieux d'inconnue permet de retrouver une forme conservative. Celle-ci s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (Js) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(f_x \frac{\partial y}{\partial \eta} - f_y \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f_y \frac{\partial x}{\partial \xi} - f_x \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = JS. \quad (3.9)$$

III.5 Système de coordonnées adapté aux déversoirs

Afin de simuler des écoulements sur un déversoir, tout en conservant la validité des hypothèses justifiant le modèle des eaux peu profondes, il est incontournable d'opter pour un système adapté de coordonnées. L'axe des abscisses (ξ) dans ce nouveau repère sera aligné avec la pente locale du déversoir (Figure 20). La direction du second axe (η) est choisie localement normale à celle du précédent.

L'angle mesuré localement entre l'axe des abscisses curvilignes ξ et l'horizontale est noté α et est compté positivement dans le sens horloger. Il permet d'établir une relation analytique entre les coordonnées des deux systèmes.

Afin d'expliciter ce changement de variables particulier, il est utile de commencer par s'intéresser aux points caractérisés par $\eta = 0$. La Figure 20 permet de constater qu'une variation de la coordonnée ξ , lorsque $\eta = 0$, se répercute de la façon suivante sur les coordonnées cartésiennes :

$$dx = \cos \alpha \, d\xi \quad (3.10)$$

$$dy = -\sin \alpha \, d\xi \quad (3.11)$$

où, en toute généralité, l'angle α demeure bien entendu une fonction de la coordonnée ξ . Cette relation fonctionnelle devra être choisie représentative de la forme du déversoir à modéliser.

L'intégration de ces relations (3.10) et (3.11) entre une valeur nulle et une valeur finale de ξ conduit au changement de variables valable pour tous les points situés sur l'axe des ξ :

$$x - x_0 = \int_0^{\xi} \cos \alpha \, d\xi' \quad (3.12)$$

$$y - y_0 = \int_0^{\xi} -\sin \alpha \, d\xi'. \quad (3.13)$$

Dans un second temps, le rôle de η doit être pris en compte. La Figure 20 illustre également les projections à effectuer pour aboutir finalement au changement de variables complet :

$$x - x_0 = \int_0^{\xi} \cos \alpha \, d\xi' + \eta \sin \alpha \quad (3.14)$$

$$y - y_0 = \int_0^{\xi} -\sin \alpha \, d\xi' + \eta \cos \alpha \quad (3.15)$$

où x_0 et y_0 désignent les coordonnées du point correspondant à l'origine des ξ et η .

Les variations de x et de y s'en déduisent immédiatement :

$$dx = \cos \alpha \left(1 + \eta \frac{d\alpha}{d\xi} \right) d\xi + \sin \alpha \, d\eta \quad (3.16)$$

$$dy = -\sin \alpha \left(1 + \eta \frac{d\alpha}{d\xi} \right) d\xi + \cos \alpha \, d\eta. \quad (3.17)$$

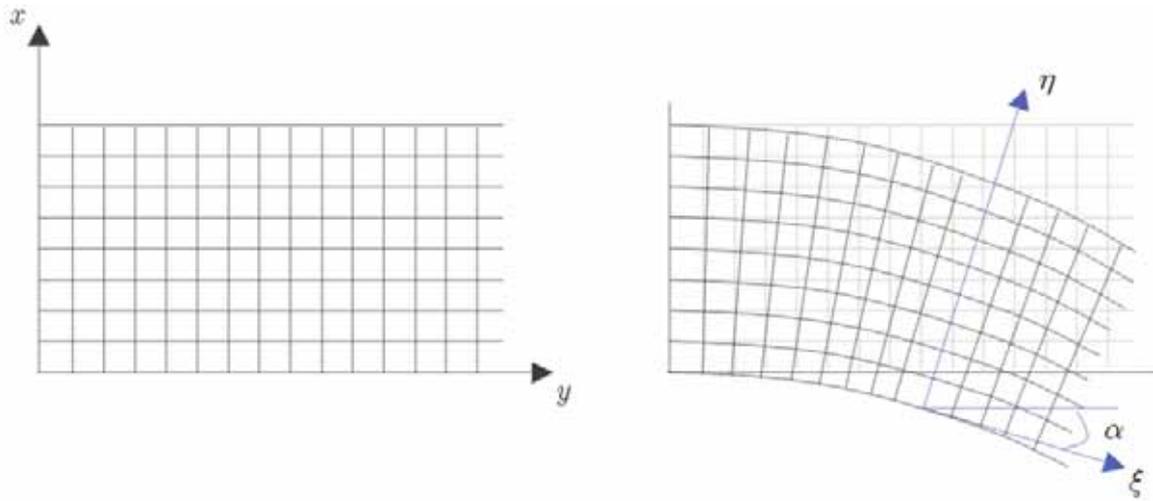


Figure 19 - Changement de coordonnées adapté à un déversoir.

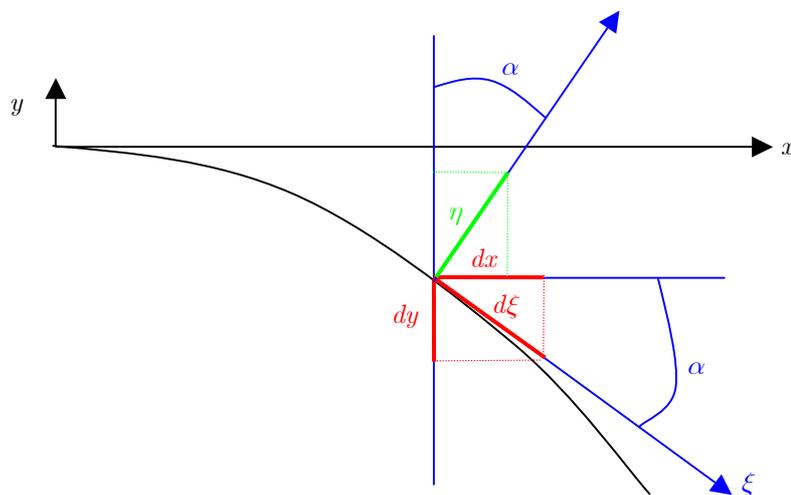


Figure 20 - Changement de coordonnées pour les points de l'axe ξ .

Ce résultat permet d'évaluer les éléments de la matrice Jacobienne du changement de variables ainsi que le Jacobien correspondant. En toute généralité, ce dernier prend la forme simple :

$$J = 1 + \eta \frac{d\alpha}{d\xi} \quad (3.18)$$

et se ramène à l'unité si l'inclinaison de l'axe est uniforme.

On déduit immédiatement de (3.16) et (3.17) que (3.5) se particularise sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\frac{1}{J} \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

III.6 Forme locale des équations en coordonnées curvilignes

III.6.1 Composantes des vitesses dans les deux systèmes de coordonnées

Le vecteur représentant la vitesse locale peut être décrit aussi bien par ses composantes dans un des systèmes de coordonnées que dans l'autre. Une relation géométrique élémentaire relie les projections de la vitesse sur les axes des deux repères :

$$\begin{pmatrix} u_\xi \\ v_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

où u et v désignent les composantes dans les directions cartésiennes x et y respectivement. u_ξ et v_η sont les projections du vecteur vitesse sur les axes locaux ξ et η . La relation (3.20) peut être modifiée afin d'effectuer la transformation inverse :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\xi \\ v_\eta \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

III.6.2 Conservation de la masse

Si l'hypothèse de fluide incompressible est admise, l'équation de continuité s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.22)$$

Les formules (3.9), (3.16) et (3.17) permettent de reformuler la conservation de la masse dans le système de coordonnées approprié décrit au paragraphe III.5 :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(u \cos \alpha - v \sin \alpha \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[v \cos \alpha \left(1 + \eta \frac{d\alpha}{d\xi} \right) + u \sin \alpha \left(1 + \eta \frac{d\alpha}{d\xi} \right) \right] = 0 \quad (3.23)$$

ou encore, en exploitant la relation (3.20),

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (J v_\eta) = 0 \quad (3.24)$$

On vérifie bien entendu que, si α reste indépendant de ξ , l'équation précédente se simplifie et s'identifie formellement à l'expression du bilan de masse (3.22) en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} = 0. \quad (3.25)$$

III.6.3 Conservation de la quantité de mouvement

En coordonnées cartésiennes et en l'absence de contributions diffusives ou turbulentes, les équations de bilan de quantité de mouvement s'expriment aisément sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) = S_x \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uv) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v^2 + \frac{p}{\rho} \right) = -g + S_y \quad (3.27)$$

où p et ρ représentent respectivement la pression et la masse volumique du liquide. S_x et S_y désignent des termes sources quelconques dans chacune des directions x et y . L'exploitation de l'équation (3.9) permet de passer à des dérivées selon les coordonnées du maillage curviligne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(1 + \eta \frac{d\alpha}{d\xi} \right) u \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(u^2 + \frac{p}{\rho} \right) \cos \alpha - uv \sin \alpha \right] \\ + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(1 + \eta \frac{d\alpha}{d\xi} \right) uv \cos \alpha + \left(1 + \eta \frac{d\alpha}{d\xi} \right) \left(u^2 + \frac{p}{\rho} \right) \sin \alpha \right] = J S_x \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(1 + \eta \frac{d\alpha}{d\xi} \right) v \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[uv \cos \alpha - \left(v^2 + \frac{p}{\rho} \right) \sin \alpha \right] \\ + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(1 + \eta \frac{d\alpha}{d\xi} \right) \left(v^2 + \frac{p}{\rho} \right) \cos \alpha + \left(1 + \eta \frac{d\alpha}{d\xi} \right) uv \sin \alpha \right] = -g \left(1 + \eta \frac{d\alpha}{d\xi} \right) + J S_y \end{aligned} \quad (3.29)$$

L'utilisation des deux relations précédentes avec (3.20) et (3.21) permet d'aboutir à une équation de quantité de mouvement locale pour les vitesses alignées sur l'axe des abscisses coordonnées curvilignes ξ d'une part et, d'autre part, selon l'axe des ordonnées curvilignes η .

En l'absence de termes sources additionnels S_x et S_y , la combinaison $\cos \alpha \times (3.28) - \sin \alpha \times (3.29)$ conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial t} (J u_\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(u_\xi^2 + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} [J u_\xi v_\eta] = g J \sin \alpha - \frac{d\alpha}{d\xi} u_\xi v_\eta \quad (3.30)$$

De même, $\sin \alpha \times (3.28) + \cos \alpha \times (3.29)$ fournit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (J v_\eta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (u_\xi v_\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J \left(v_\eta^2 + \frac{p}{\rho} \right) \right] = -g J \cos \alpha + \frac{d\alpha}{d\xi} \left(u_\xi^2 + \frac{p}{\rho} \right). \quad (3.31)$$

III.7 Passage en adimensionnel

Afin d'intégrer sur la hauteur les équations de quantité de mouvement, il est indispensable d'obtenir un découplage des différentes équations, par exemple en tirant

d'une équation une information sur la distribution de pression. La mise sous forme adimensionnelle des équations non intégrées permet d'isoler une expression de la pression intégrable sur la hauteur, moyennant l'hypothèse peu restrictive selon laquelle le rapport de la vitesse selon η et de la vitesse dans le sens préférentiel d'écoulement est faible et que, partant, le carré de ce rapport est négligeable.

Des grandeurs caractéristiques vont être définies de façon à rendre les équations adimensionnelles et à mettre en évidence leurs termes prépondérants.

Soient :

- h_0 : une épaisseur caractéristique de la lame fluide selon η
- v_0 : vitesses caractéristiques selon l'axe η
- u_0 : vitesse caractéristique selon la direction principale d'écoulement (l'axe ξ).

Avec ces valeurs, construisons une longueur caractéristique selon l'axe ξ en s'aidant du rapport des vitesses caractéristiques:

$$\lambda_\xi = h_0 \frac{u_0}{v_0} \quad (3.32)$$

Les vitesses caractéristiques selon les deux axes peuvent être comparées en définissant :

$$\varepsilon \triangleq \frac{v_0}{u_0} \quad (3.33)$$

Choisissons un temps caractéristique en considérant la direction principale d'écoulement :

$$t_0 = \frac{\lambda_\xi}{u_0} = \frac{h_0}{v_0} \quad (3.34)$$

Nous pouvons rendre fort logiquement adimensionnelles les coordonnées et le temps :

$$\xi' = \frac{\xi}{\lambda_\xi} \quad (3.35)$$

$$\eta' = \frac{\eta}{h_0} \quad (3.36)$$

$$t' = \frac{t}{t_0} = \frac{v_0}{h_0} t \quad (3.37)$$

On en déduit les vitesses adimensionnelles :

$$u' = \frac{u_\xi}{u_0} \quad (3.38)$$

$$v' = \frac{v_\eta}{v_0} \quad (3.39)$$

Enfin, nous considérons pour la mise sous forme adimensionnelle de la pression l'axe principal d'écoulement le long duquel se développent essentiellement les gradients de pression :

$$p' = \frac{p}{\rho u_0^2} \quad (3.40)$$

Parallèlement à cette définition, la gravité adimensionnelle s'écrit

$$g' = \frac{gh_0}{u_0^2}. \quad (3.41)$$

En introduisant toutes ces relations dans les équations, on obtient pour la continuité :

$$\frac{\partial u'}{\partial \xi'} + \frac{\partial}{\partial \eta'} \left[v' \left(1 + \varepsilon \eta' \frac{d\alpha}{d\xi'} \right) \right] = 0, \quad (3.42)$$

pour la quantité de mouvement selon ξ :

$$\frac{\partial}{\partial t'} (Ju') + \frac{\partial}{\partial \xi'} (u'^2 + p') + \frac{\partial}{\partial \eta'} (Ju'v') = -\frac{g'}{\varepsilon} J \sin \alpha - \varepsilon \frac{d\alpha}{d\xi'} v' u' \quad (3.43)$$

pour la quantité de mouvement selon η :

$$\varepsilon^2 \left[\frac{\partial}{\partial t'} (Jv') + \frac{\partial}{\partial \xi'} (v' u') + \frac{\partial}{\partial \eta'} (Jv'^2) \right] = -g' J \cos \alpha - \frac{\partial}{\partial \eta'} [Jp'] + \varepsilon \frac{d\alpha}{d\xi'} (u_\xi'^2 + p') \quad (3.44)$$

et J devient :

$$J = 1 + \varepsilon \eta' \frac{d\alpha}{d\xi'}. \quad (3.45)$$

L'hypothèse à formuler revient à supposer ε faible, de telle sorte que son carré soit négligeable vis-à-vis de l'unité, ce qui en dehors de singularités ponctuelles est extrêmement peu restrictif pour la majorité des écoulement de surface. En toute rigueur, il faudrait bien entendu vérifier a posteriori l'ordre de grandeur de tous les termes multipliés par ε^2 .

Dans ces conditions, l'équation dynamique selon η adopte alors une forme dépouillée des termes multipliés par ε^2 . Elle évoque une distribution hydrostatique de la pression selon l'axe η , amendée d'une correction proportionnelle à la variation spatiale d'inclinaison de l'axe ξ :

$$\frac{\partial}{\partial \eta'} \left[\left(1 + \varepsilon \eta' \frac{d\alpha}{d\xi'} \right) p' \right] = -g' \cos \alpha \left(1 + \varepsilon \eta' \frac{d\alpha}{d\xi'} \right) + \varepsilon \frac{d\alpha}{d\xi'} (u_\xi'^2 + p') \quad (3.46)$$

ou encore

$$\frac{\partial p'}{\partial \eta'} = -g' \cos \alpha + \varepsilon \frac{d\alpha}{d\xi'} \frac{u_\xi'^2}{\left(1 + \varepsilon \eta' \frac{d\alpha}{d\xi'} \right)}. \quad (3.47)$$

Le profil de pression peut dès lors être qualifié de *quasi-hydrostatique*.

L'effet sur les équations d'une hypothèse apparemment peu restrictive nous ramène à la base même de la méthode. Parler d'une seule hypothèse sur ε , c'est ignorer le choix sous-jacent opéré dans la mise en forme adimensionnelle des variables. Il y a là une reconnaissance implicite d'une direction prédominante d'écoulement définie par l'axe ξ .

III.8 Forme locale des équations en coordonnées curvilignes (seconde variante)

III.8.1 Composantes des vitesses dans les deux systèmes de coordonnées

Une définition des nouvelles inconnues, différente de celle donnée par la relation (3.20) est tout autant envisageable. Nous opterons ici et par la suite des développements pour une expression de u_ξ qui tienne directement compte de la « dilatation » de l'axe des abscisses curvilignes à mesure que η s'accroît. Autrement dit, nous répercutons sur la définition de la nouvelle vitesse inconnue u_ξ le fait qu'un accroissement identique de ξ se traduit dans le plan physique par des déplacements différents en fonction de la valeur de η considérée. Cette approche conduit à la définition

$$\begin{pmatrix} u_\xi \\ v_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \alpha}{J} & -\frac{\sin \alpha}{J} \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

qui remplace (3.20).

III.8.2 Conservation de la masse

Cette fois, l'équation de continuité (3.22) devient

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (u \cos \alpha - v \sin \alpha) + \frac{\partial}{\partial \eta} [v J \cos \alpha + u J \sin \alpha] = 0 \quad (3.49)$$

ou encore, grâce à (3.48),

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (J u_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J v_\eta) = 0. \quad (3.50)$$

III.8.3 Conservation de la quantité de mouvement

De la même façon le bilan de quantité de mouvement (3.26) et (3.27) est transformé en :

$$\frac{\partial}{\partial t} (J u) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(u^2 + \frac{p}{\rho} \right) \cos \alpha - u v \sin \alpha \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J u v \cos \alpha + J \left(u^2 + \frac{p}{\rho} \right) \sin \alpha \right] = J S_x \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (J v) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[u v \cos \alpha - \left(v^2 + \frac{p}{\rho} \right) \sin \alpha \right] \\ + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J \left(v^2 + \frac{p}{\rho} \right) \cos \alpha + J u v \sin \alpha \right] = -g J + J S_y \end{aligned} \quad (3.52)$$

De nouveau, la définition (3.48) permet de simplifier les expressions précédentes. En effet, en faisant abstraction des termes sources S_x et S_y , la combinaison $\cos \alpha \times (3.51) - \sin \alpha \times (3.52)$ conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial t}(J^2 u_\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(J^2 u_\xi^2 + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J^2 u_\xi v_\eta) = g J \sin \alpha - \frac{d\alpha}{d\xi} J u_\xi v_\eta \quad (3.53)$$

De même, $\sin \alpha \times (3.51) + \cos \alpha \times (3.52)$ fournit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (J v_\eta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (J u_\xi v_\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J \left(v_\eta^2 + \frac{p}{\rho} \right) \right] = -g J \cos \alpha + \frac{d\alpha}{d\xi} \left(J^2 u_\xi^2 + \frac{p}{\rho} \right) \quad (3.54)$$

A l'issue d'une analyse en variables adimensionnelles, on conclut que (3.54) se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial \eta'} \left[\left(1 + \varepsilon \eta' \frac{d\alpha}{d\xi'} \right) p' \right] = -g' \cos \alpha \left(1 + \varepsilon \eta' \frac{d\alpha}{d\xi'} \right) + \varepsilon \frac{d\alpha}{d\xi'} (u_\xi'^2 + p') \quad (3.55)$$

ou encore

$$\frac{\partial p'}{\partial \eta'} = -g' \cos \alpha + \varepsilon \frac{d\alpha}{d\xi'} \left(1 + \varepsilon \eta' \frac{d\alpha}{d\xi'} \right) u_\xi'^2 \quad (3.56)$$

Il apparaît que, si $\frac{d\alpha}{d\xi}$ prend une valeur au maximum de l'ordre de un, le Jacobien peut être pris égal à l'unité dans cette dernière expression, tout en restant cohérent avec l'hypothèse de ne négliger que des termes de l'ordre de ε^2 au maximum. On obtient alors, sous forme dimensionnelle :

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = -g \cos \alpha + \frac{d\alpha}{d\xi} J u_\xi^2 \quad (3.57)$$

III.9 Conditions limites en coordonnées curvilignes

III.9.1 Condition limite à la surface libre

L'équation de la surface libre peut s'exprimer par

$$\eta = \eta_s(\xi, t). \quad (3.58)$$

La trajectoire d'une particule fluide est caractérisée par des fonctions $\xi(t)$, $\eta(t)$. Si cette particule suit la surface libre à un instant donné, les fonctions précédentes doivent vérifier l'annulation de la vitesse différentielle selon η entre une particule qui suivrait la frontière et celle du liquide au même endroit :

$$\frac{D}{Dt} [\eta_s(\xi, t) - \eta] = 0 \quad (3.59)$$

Etant donné que la dérivée totale s'exprime de façon triviale dans un le repère cartésien, il est particulièrement aisé d'expliciter (3.59) en passant par l'intermédiaire des coordonnées x et y :

$$\frac{\partial \eta_s}{\partial t} + [u]_s \frac{\partial \eta_s}{\partial x} + [v]_s \frac{\partial \eta_s}{\partial y} - [v_\eta]_s = 0. \quad (3.60)$$

Transformée à l'aide de (3.19), la condition limite cinématique dans le système d'axes curvilignes devient :

$$\frac{\partial \eta_s}{\partial t} + [u_\xi]_s \frac{\partial \eta_s}{\partial \xi} - [v_\eta]_s = 0, \quad (3.61)$$

où u_ξ correspond à la définition (3.48).

III.9.2 Condition limite au fond

Une démarche en tout point analogue à celle du paragraphe précédent permet de conclure que la condition limite à la borne d'intégration correspondant au fond du canal doit s'écrire :

$$\frac{\partial \eta_b}{\partial t} + [u_\xi]_b \frac{\partial \eta_b}{\partial \xi} - [v_\eta]_b = 0. \quad (3.62)$$

III.10 Intégration de l'équation de continuité sur la hauteur locale

Une intégration selon l'axe des η va être effectuée pour l'équation (3.50) :

$$\int_{\eta_b}^{\eta_s} \frac{\partial}{\partial \xi} (Ju_\xi) d\eta + [Jv_\eta]_{\eta_b}^{\eta_s} = 0 \quad (3.63)$$

La formule de Leibnitz peut être appliquée pour faire apparaître les grandeurs intégrées sur la hauteur :

$$\int_{\eta_b}^{\eta_s} \frac{\partial}{\partial \xi} (Ju_\xi) d\eta = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\int_{\eta_b}^{\eta_s} Ju_\xi d\eta \right) - [Ju_\xi]_{\eta_s} \frac{\partial \eta_s}{\partial \xi} + [Ju_\xi]_{\eta_b} \frac{\partial \eta_b}{\partial \xi}. \quad (3.64)$$

L'exploitation des conditions aux bornes d'intégration (3.61) et (3.62) permet d'aboutir à la formulation intégrée sur la hauteur du bilan de masse :

$$\left(1 + \eta_s \frac{d\alpha}{d\xi} \right) \frac{\partial \eta_s}{\partial t} - \left(1 + \eta_b \frac{d\alpha}{d\xi} \right) \frac{\partial \eta_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\int_{\eta_b}^{\eta_s} Ju_\xi d\eta \right) = 0 \quad (3.65)$$

De nouveau, un traitement numérique approprié de l'équation aux dérivées partielles ne sera possible qu'à partir d'une écriture conservative de (3.65). Celle-ci prend la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\eta_b}^{\eta_s} J d\eta \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\int_{\eta_b}^{\eta_s} Ju_\xi d\eta \right] = 0. \quad (3.66)$$

III.11 Intégration sur la hauteur de l'équation de quantité de mouvement

L'intégration du bilan local de quantité de mouvement (3.53) conduit immédiatement à

$$\begin{aligned} \int_{\eta_b}^{\eta_s} \left[J^2 \frac{\partial u_\xi}{\partial t} \right] d\eta + \int_{\eta_b}^{\eta_s} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(J^2 u_\xi^2 + \frac{p}{\rho} \right) \right] d\eta + \left[J^2 u_\xi v_\eta \right]_{\eta_b}^{\eta_s} \\ = \int_{\eta_b}^{\eta_s} J d\eta g \sin \alpha - \frac{d\alpha}{d\xi} \int_{\eta_b}^{\eta_s} (J u_\xi v_\eta) d\eta \end{aligned} \quad (3.67)$$

L'utilisation de la formule de Leibnitz ainsi que des conditions limites (3.61) et (3.62) permet de simplifier l'expression précédente et conduit à

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta_b}^{\eta_s} (J^2 u_\xi) d\eta + \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\eta_b}^{\eta_s} \left(J^2 u_\xi^2 + \frac{p}{\rho} \right) d\eta + \left[-\frac{p}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right]_{\eta_b}^{\eta_s} \\ = g \sin \alpha \int_{\eta_b}^{\eta_s} J d\eta - \frac{d\alpha}{d\xi} \int_{\eta_b}^{\eta_s} (J u_\xi v_\eta) d\eta \end{aligned} \quad (3.68)$$

L'utilité de l'inclinaison des axes selon la direction principale locale de l'écoulement réside dans la distribution de pression obtenue dans la direction orthogonale à la précédente. Celle-ci s'exprime par :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{p}{\rho} \right) = -g \cos \alpha + \frac{d\alpha}{d\xi} u_\xi^2 \left(1 + \eta \frac{d\alpha}{d\xi} \right) \Rightarrow \frac{p(\eta)}{\rho} = g \cos \alpha (\eta_s - \eta) - \frac{d\alpha}{d\xi} \int_{\eta}^{\eta_s} J u_\xi^2 d\eta \quad (3.69)$$

III.12 Inconnues conservatives

III.12.1 Définitions

L'intégration sur la hauteur des bilans de masse et de quantité de mouvement font apparaître tout naturellement des inconnues conservatives macroscopiques. Elles s'identifient, d'une part, à la masse totale se trouvant dans un élément de contrôle et, d'autre part, à la quantité de mouvement totale selon ξ dans un même élément :

$$s_1 \triangleq \int_{\eta_b}^{\eta_s} J d\eta, \quad (3.70)$$

$$s_2 \triangleq \int_{\eta_b}^{\eta_s} J^2 u_\xi d\eta. \quad (3.71)$$

Avant d'entreprendre la résolution du système formé par les équations de conservation (3.66) et (3.68), il est nécessaire d'exprimer leurs seconds membres respectifs en fonction des deux véritables inconnues du problème : s_1 et s_2 . Pour la plupart des termes, cette retranscription ne s'avère pas triviale et requiert généralement une hypothèse sur le profil de vitesse. Il apparaît aussi clairement que la valeur de la hauteur d'eau locale h devra faire l'objet d'une évaluation à partir de la première inconnue conservative, afin d'être substituée in fine dans plusieurs termes de (3.66) et (3.68).

III.12.2 Evaluation de la hauteur d'eau

L'intégrale (3.70) peut être évaluée analytiquement :

$$s_1 = h \left(1 + \frac{d\alpha}{d\xi} \frac{\eta_b + \eta_s}{2} \right) = \left(1 + \frac{d\alpha}{d\xi} \eta_b \right) h + \frac{d\alpha}{d\xi} \frac{h^2}{2}. \quad (3.72)$$

Il résulte de (3.72) que la hauteur d'eau h est la solution d'une équation polynomiale faisant intervenir l'inconnue conservative s_1 . Une grande prudence dans la résolution de (3.72) est primordiale étant donné que le *degré* du polynôme change selon que l'inclinaison des axes soit variable localement ou pas. Si l'inclinaison α ne varie pas dans la zone de calcul considérée, la relation précédente dégénère en une simple égalité entre la hauteur d'eau et l'inconnue conservative correspondante.

Par contre, dans le cas où la dérivée de α par rapport à la coordonnée curviligne ξ ne s'annule pas, le polynôme du second degré fournit comme solution :

$$h_{\pm} = \left(\frac{d\alpha}{d\xi} \right)^{-1} \left(1 + \frac{d\alpha}{d\xi} \eta_b \right) \left[-1 \pm \sqrt{1 + 2 \frac{d\alpha}{d\xi} \left(1 + \frac{d\alpha}{d\xi} \eta_b \right)^{-2} s_1} \right]. \quad (3.73)$$

Le signe devant le radical doit être choisi de la seule façon possible pour obtenir une hauteur positive. Dans le cas particulier, fréquemment rencontré sur un coursier, où l'axe des abscisses curvilignes coïncide avec le fond, (3.73) prend la forme simplifiée

$$h_{\pm} = \left(\frac{d\alpha}{d\xi} \right)^{-1} \left[-1 \pm \sqrt{1 + 2 \frac{d\alpha}{d\xi} s_1} \right]. \quad (3.74)$$

Une approximation de (3.73), valable au premier ordre et pour $\frac{d\alpha}{d\xi}$ positif, s'écrit :

$$h \simeq s_1 \left[1 - \frac{d\alpha}{d\xi} \left(\eta_b + \frac{s_1}{2} \right) \right]. \quad (3.75)$$

Son allure en l'absence de variations topographiques par rapport à l'axe ξ , ainsi que celle de la formule (3.74) dans les mêmes conditions, sont représentées à la Figure 21.

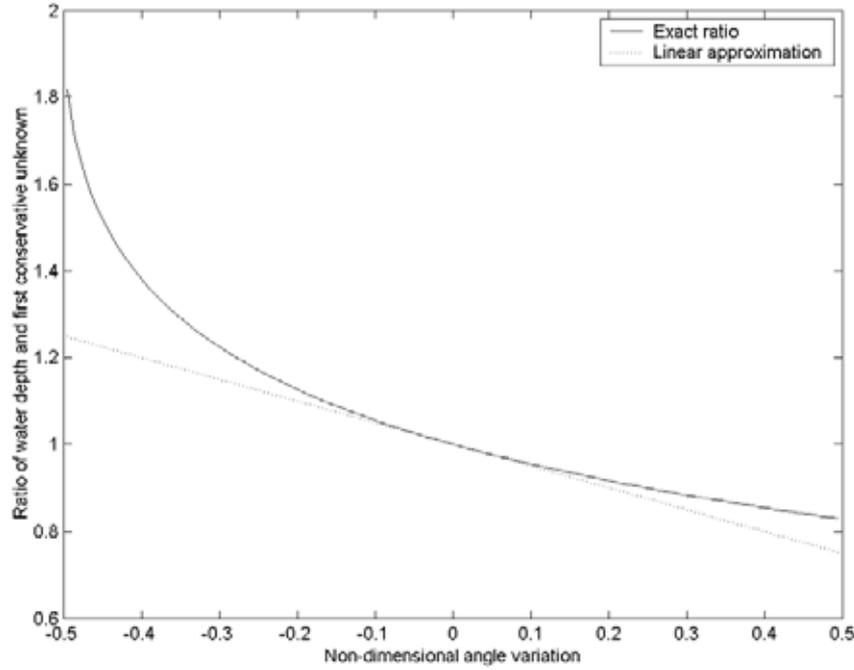


Figure 21 – Rapport entre la hauteur d'eau h et la première inconnue conservative s_1 en fonction de la grandeur adimensionnelle $\frac{d\alpha}{d\xi} s_1$ et pour $\eta_b = 0$.

III.12.3 Signification des inconnues conservatives

L'inconnue conservative s_1 ne représente rien d'autre qu'une mesure directe de la quantité de matière incluse dans un volume de contrôle. Etant donné que le fluide considéré est incompressible, s_1 s'identifie ici à la surface de l'élément de contrôle.

Une vérification peut être effectuée aisément dans le où ξ suit une courbe simple à décrire. A titre d'exemple, il est possible de confirmer que l'intégration du Jacobien entre les bornes correspondant à une portion de secteur de disque rend bien la surface de celui-ci. En effet, si le secteur considéré correspond à un quart de tour, il est facile d'estimer la valeur de la variation uniforme d'inclinaison de l'axe :

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta\xi} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{\frac{\pi}{2}r_0 - 0} = \frac{1}{r_0}. \quad (3.76)$$

Dès lors l'intégrale de s_1 s'effectue de la façon suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}r_0} \left[\int_0^{r_1-r_0} \left(1 + r \frac{d\alpha}{d\xi} \right) dr \right] d\xi = \frac{\pi}{2} r_0 (r_1 - r_0) \left(1 + \frac{r_1 - r_0}{2r_0} \right) = \frac{\pi}{4} (r_1^2 - r_0^2) \quad (3.77)$$

et, conformément à toute attente, fournit bien la valeur de la surface du volume de contrôle 2D.

III.13 Hypothèses sur la distribution de vitesse

III.13.1 Distribution uniforme

Une première hypothèse communément admise consiste à supposer que la distribution selon η de la vitesse dans la direction principale d'écoulement est uniforme en première approximation ($u_\xi = \bar{u}_\xi$ et $\tilde{u}_\xi = 0$). Dans ce cas particulier, l'intégration de (3.57) peut être calculée explicitement :

$$\frac{p(\eta)}{\rho} = g \cos \alpha (\eta_s - \eta) - \frac{d\alpha}{d\xi} u_\xi^2 (\eta_s - \eta) \quad (3.78)$$

où la constante d'intégration a été fixée de façon à annuler la pression relative à la surface libre. Il devient dès lors aisé de remplacer l'expression de la pression locale au sein de l'équation dynamique écrite dans la direction ξ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[u_\xi s_2 + \frac{h^2}{2} \left(g \cos \alpha + \frac{\hat{p}}{\frac{h^2}{2}} \right) \right] + (gh \cos \alpha + \hat{p}_b) \frac{\partial \eta_b}{\partial \xi} \\ = g s_1 \sin \alpha - \frac{d\alpha}{d\xi} \int_{\eta_b}^{\eta_s} (J u_\xi v_\eta) d\eta \end{aligned} \quad (3.79)$$

où \hat{p} désigne la pression additionnelle consécutive à la variation d'inclinaison des axes :

$$\hat{p} \triangleq -\frac{h^2}{2} u_\xi^2 \frac{d\alpha}{d\xi} \left[1 + \frac{d\alpha}{d\xi} (\eta_b + \frac{2}{3}h) \right]. \quad (3.80)$$

$$\hat{p}_b \triangleq -u_\xi^2 \frac{d\alpha}{d\xi} s_1 \quad (3.81)$$

Les équations à résoudre deviennent :

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (s_1 u_\xi) = 0 ; \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial s_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[s_2 u_\xi + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha + \hat{p} \right] + (gh \cos \alpha + \hat{p}_b) \frac{\partial \eta_b}{\partial \xi} = g s_1 \sin \alpha \quad (3.83)$$

où $h = \eta_s - \eta_b$ est calculé à partir de s_1 à l'aide de (3.73).

La vitesse selon ξ est déterminée à partir de :

$$\begin{aligned} u_\xi &= s_2 \left(\int_{\eta_b}^{\eta_s} J^2 d\eta \right)^{-1} = s_2 \frac{3 \frac{d\alpha}{d\xi}}{\left(1 + \eta_s \frac{d\alpha}{d\xi} \right)^3 - \left(1 + \eta_b \frac{d\alpha}{d\xi} \right)^3} \\ &= \frac{s_2}{h + (\eta_s^2 - \eta_b^2) \frac{d\alpha}{d\xi} + \frac{1}{3} (\eta_s^3 - \eta_b^3) \left(\frac{d\alpha}{d\xi} \right)^2} \end{aligned} \quad (3.84)$$

qui, en l'absence d'irrégularités topographiques ($\eta_b \equiv 0$), se réduit à

$$u_{\xi} = \frac{s_2}{h} \left[1 + h \frac{d\alpha}{d\xi} + \frac{1}{3} h^2 \left(\frac{d\alpha}{d\xi} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (3.85)$$

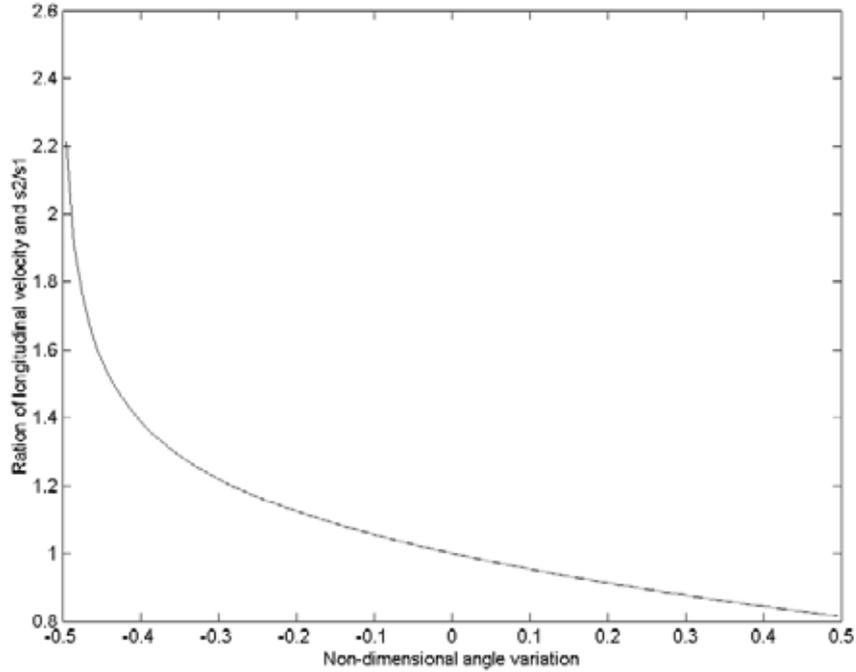


Figure 22 – Rapport entre la vitesse u_{ξ} et le quotient des deux inconnues conservatives $\frac{s_2}{s_1}$.

III.13.2 Autres hypothèses

D'autres expressions pourraient bien entendu être admises pour la distribution selon η de la composante u_{ξ} de la vitesse. Néanmoins, deux faits au moins tendent à plaider en faveur du choix privilégié d'hypothèses très simples dans ce cadre. D'une part, la complexité instrumentale de toute tentative de mesure cette répartition de vitesse sur la hauteur de liquide rend difficile l'obtention de données expérimentales représentatives. Il existe donc peu d'éléments véritablement fiables à même d'orienter de façon pertinente l'adoption d'une hypothèse orientée vers une distribution sophistiquée de u_{ξ} en fonction de η . D'autre part, toute complexification de la relation $u_{\xi}(\eta)$ engendre une surcharge concomitante et significative du formalisme mathématique dans tous les développements analytiques à mener.

Il apparaît en outre que l'hypothèse retenue au paragraphe précédent se révèle d'un degré de réalisme très acceptable. Elle reproduit notamment la décroissance de la vitesse à proximité du fond dans les zones où l'inclinaison de l'axe de référence varie.

III.14 Comparaison des surpressions calculées avec la formule de Gumensky

Il est reconnu actuellement dans le domaine des Constructions hydrauliques qu'un rôle prépondérant peut être joué par les forces centrifuges au droit de la cuillère d'un déversoir. Longtemps ignorées par les concepteurs de telles structures, elles se manifestent par des surpressions générées à la suite de la déflexion substantielle et parfois brusque de la lame d'eau. Avec d'autres expérimentateurs, Gumensky s'est penché sur ce problème et l'a étudié par la voie de différents modèles physiques. Il conclut ses travaux notamment par ces mots probants : "The effect of centrifugal force in deflected streams is seldom evaluated, and the walls of buckets often remain standing in a condition of near failure" (d'après Mason [4]).

A la suite des expériences menées, Gumensky (1954) a proposé une formule pour évaluer la pression interne maximale dans la perspective d'une amélioration du design de ce type de structure. Cette relation a été reprise ultérieurement par Mason [4], qui la formule de la façon suivante :

$$p_{\text{bucket}} = \left(1 + \frac{u^2}{gR}\right) \rho gh \quad (3.86)$$

avec u et h désignant respectivement la vitesse et la hauteur de l'écoulement au bas du coursier. R représente le rayon de courbure de la cuillère et g l'accélération de la pesanteur. La relation (3.86) met bien en exergue la contribution hydrostatique à laquelle se greffe une correction dynamique. Cette expression doit être comparée à la formulation du facteur devant la pente de fond dans l'équation (3.83), grâce à la définition (3.81) :

$$\rho gh \cos \alpha + \rho \hat{p}_b = \rho gh \cos \alpha + \rho \left(-u_\xi^2 \frac{d\alpha}{d\xi} s_1\right) = \rho gh \left[\cos \alpha + \frac{u_\xi^2}{g} \left(-\frac{d\alpha}{d\xi}\right) \frac{s_1}{h} \right], \quad (3.87)$$

où l'ensemble a été multiplié par la masse volumique de l'eau pour des raisons de dimensions.

La très grande similarité entre les deux expressions précédentes permet de voir (3.86) comme une borne supérieure de (3.87). En effet, conformément aux définitions admises depuis le début, la géométrie de la cuillère correspond à une valeur négative de $\frac{d\alpha}{d\xi}$ et, dès lors, la Figure 21 montre clairement que $s_1 < h$. De plus, l'enseignement tiré de l'exemple (3.76) permet d'identifier la valeur absolue de $\frac{d\alpha}{d\xi}$ à l'inverse du rayon de courbure local de la structure. En tirant profit de ces différents éléments, on est amené à conclure en réécrivant (3.87) sous la forme

$$\rho gh \left[\cos \alpha + \frac{u_\xi^2}{g} \left| \frac{d\alpha}{d\xi} \right| \frac{s_1}{h} \right] = \rho gh \left[\cos \alpha + \frac{u_\xi^2}{gR} \frac{s_1}{h} \right] \leq \rho gh \left(1 + \frac{u_\xi^2}{gR}\right). \quad (3.88)$$

La majoration effectuée s'identifie parfaitement à la formule de Gumensky, ce qui constitue une validation partielle de nos développements en coordonnées curvilignes et permet de confirmer, dans ce cas particulier, la pertinence de notre théorie, ainsi que le caractère judicieux des hypothèses émises.

Par ailleurs, des mesures réalisées au laboratoire du HACH corroborent également les valeurs des surpressions prédites par la théorie en coordonnées curvilignes. Les grandeurs fournies ci-dessous se rapportent au prototype et non au modèle de laboratoire mis à l'échelle. Une marge d'erreur est à considérer sur ces mesures étant donné le caractère légèrement bidimensionnel du déversoir étudié et la difficulté de mesurer de faibles hauteurs d'eau en présence d'une surface libre assez irrégulière. Afin de faciliter l'interprétation des valeurs numériques, les pressions calculées sont rapportées à des hauteurs de charge en les divisant par le produit ρg . Le résultat de l'essai est relaté au Tableau III-1. Les conditions d'écoulements correspondent au débit de dimensionnement de 16500 m³/s, s'écoulant sur le déversoir large de 70 m. La hauteur mesurée équivaut à 7 m et le rayon de courbure de la cuillère a été fixé à 20 m (Lejeune & al. [3]). La formule (3.72) a été exploitée pour évaluer la première inconnue conservative en fonction de la hauteur d'eau. Le Tableau III-1 montre la concordance des ordres de grandeur des pressions prédites par les deux modèles et celles constatées expérimentalement. De plus, les valeurs obtenues confirment que la formule de Gumensky est une majoration de celle obtenue via les coordonnées curvilignes. Elle s'avère donc plus sécuritaire mais, en revanche, conduit à un dimensionnement plus onéreux.

Tableau III-1 : Comparaison des pressions mesurées et calculées sur la cuillère du déversoir de Kol Dam.

Pression mesurée (m)	Pression selon Gumesnky (m)	Erreur relative	Pression selon (3.87) (m)	Erreur relative
40	46.5	16 %	39.5	1.4 %

III.15 Hypothèses concernant la distribution de vitesse à l'amont

Le seuil brusque situé juste à l'amont de la plupart des déversoirs constitue une difficulté supplémentaire dans la modélisation de l'écoulement. En effet, le modèle des eaux peu profondes est strictement valide pour des variations graduelles de la pente de fond et la fiabilité des résultats n'est pas nécessairement assurée en présence de changements brusques, voir de discontinuités, du niveau du lit. Ce domaine particulier fait encore l'objet de recherches poussées au niveau international, comme le confirment les travaux récents d'Alcrudo & Benkhaldoun [1].

La méthodologie envisagée ici consiste à émettre une hypothèse concernant le profil de vitesse dans la région immédiatement à l'amont du seuil et à répercuter l'allure particulière du champ de vitesse retenu sur le bilan de quantité de mouvement par le biais des coefficients d'inégale répartition des vitesses ρ_{xx} , ρ_{xy} , etc. Ces coefficients sont définis comme le quotient

$$\rho_{ij} \triangleq \frac{\langle u^2 \rangle}{\langle u \rangle^2} \quad (3.89)$$

où $\langle u^2 \rangle$ désigne la moyenne sur la hauteur d'eau du carré de la vitesse et $\langle u \rangle$ représente la vitesse moyenne sur la lame de fluide. Le coefficient (3.89) ne vaut l'unité que si le profil selon la verticale de la composante horizontale de vitesse est uniforme. Dans tous

les autres cas, il sera supérieur à un en raison des termes de couplages non linéaires apparaissant au numérateur lors de l'opération de moyenne.

III.15.1 Zone morte

Dans un premier temps, la lame fluide est simplement supposée stratifiée en deux zones. D'une part une partie où la vitesse horizontale u présente une distribution uniforme sur cette portion de la hauteur et, d'autre part, une zone où la vitesse reste nulle (Figure 23).

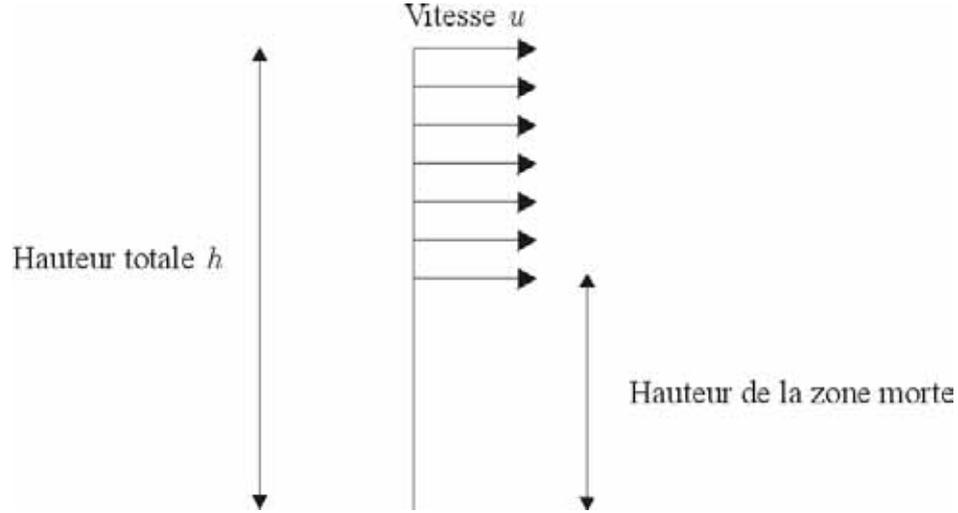


Figure 23 – Distribution de vitesse selon la verticale présentant une zone morte dans le fond.

La vitesse moyenne s'estime grâce à :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h u(y) dy = \frac{1}{h} \int_{h_0}^h U dy = \frac{h - h_0}{h} U \quad (3.90)$$

et la moyenne du carré de la vitesse est donnée par :

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h u^2 dy = \frac{1}{h} \int_{h_0}^h U^2 dy = \frac{h - h_0}{h} U^2, \quad (3.91)$$

où h_0 représente la hauteur de la zone morte. Le coefficient d'inégale répartition des vitesses s'en déduit immédiatement :

$$\rho_{xx} = \frac{\langle u^2 \rangle}{\langle u \rangle^2} = \frac{h - h_0}{h} U^2 \left(\frac{h - h_0}{h} U \right)^{-2} = \frac{h}{h - h_0} > 1. \quad (3.92)$$

III.15.2 Zone de recirculation

Une hypothèse alternative consiste à admettre que la zone inférieure qui était précédemment supposée au repos est, cette fois, le siège d'une recirculation. Le profil de vitesse selon la hauteur se compose donc d'une zone uniforme $u = U$, puis d'une région

où la vitesse décroît (linéairement par hypothèse), passe par zéro et change de signe pour rejoindre la valeur opposée $-U$ (Figure 24).

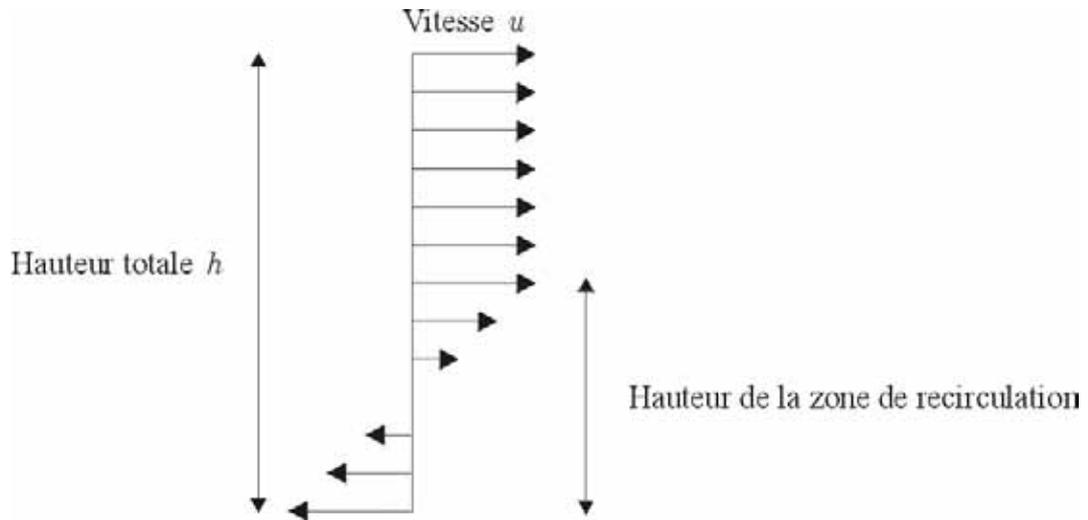


Figure 24 - Distribution de vitesse selon la verticale présentant une zone de recirculation dans le fond.

La vitesse moyenne vaut :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h u(y) dy = \frac{1}{h} \int_{h_0}^h U dy = \frac{h - h_0}{h} U. \quad (3.93)$$

La moyenne sur la hauteur totale du carré de la vitesse vaut :

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h u^2 dy = \frac{1}{h} \int_0^{h_0} U^2 \left(2 \frac{y}{h_0} - 1 \right)^2 dy + \frac{1}{h} \int_{h_0}^h U^2 dy = \frac{1}{h} \left(h - \frac{2}{3} h_0 \right) U^2. \quad (3.94)$$

Le coefficient d'inégale répartition des vitesses vaut par conséquent :

$$\rho_{xx} = \frac{h \left(h - \frac{2}{3} h_0 \right)}{(h - h_0)^2} U^2 > 1. \quad (3.95)$$

III.15.3 Décélération graduelle du fluide vers le fond

Cette fois, la vitesse est uniforme dans la région supérieure de la nappe de fluide et décroît linéairement vers zéro au fond (Figure 25).

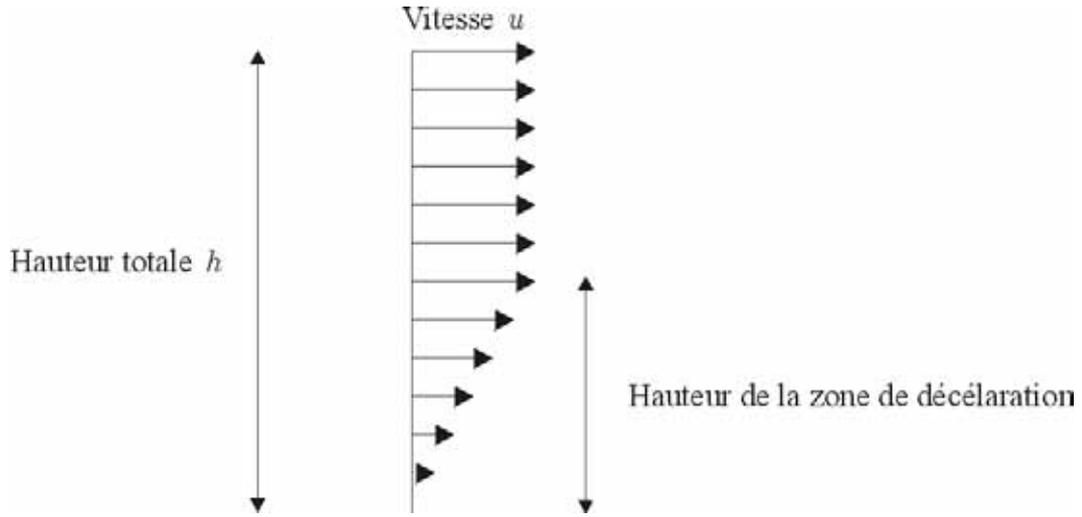


Figure 25 - Distribution de vitesse selon la verticale en présence d'une zone de décélération progressive .

Les relations suivantes se déduisent directement de la répartition de vitesse :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{h} \left(h - \frac{h_0}{2} \right) U ; \quad (3.96)$$

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{h} \left(h - \frac{2}{3} h_0 \right) U^2 . \quad (3.97)$$

On en conclut immédiatement que

$$\rho_{xx} = \frac{h(h - \frac{2}{3} h_0)}{(h - \frac{1}{2} h_0)^2} U^2 > 1 . \quad (3.98)$$

III.16 Influence d'une pression additionnelle

Si le flux de quantité de mouvement se voit affecté d'un terme de pression additionnelle, rendant compte de l'écart entre la pression réelle et une distribution hydrostatique, l'influence de la nouvelle contribution sur la hauteur dépend directement du régime d'écoulement. Ce paragraphe a pour but de mettre en évidence la différence fondamentale de comportement de l'écoulement en présence d'une variation de pression, selon qu'il soit fluvial ou torrentiel.

En effet, dans le cas d'un régime stationnaire et en l'absence de terme source, le flux de quantité de mouvement qui reste uniforme dans tout le domaine unidimensionnel s'écrit :

$$\frac{q^2}{h} + \frac{g}{2} h^2 + \hat{p} \quad (3.99)$$

où la seule inconnue qui reste est la hauteur. Une différentiation de l'expression (3.99), destinée à évaluer l'influence de \hat{p} sur h conduit à :

$$dh = - \frac{d\hat{p}}{gh(1 - Fr^2)} . \quad (3.100)$$

L'examen du signe du second membre dans la relation (3.100) permet de conclure qu'une pression additionnelle négative augmente la hauteur d'eau en régime fluvial et la diminue en régime torrentiel. Ce raisonnement est très similaire à celui qui met en exergue l'influence différenciée d'une variation topographique sur le niveau de la surface libre en fonction du régime d'écoulement (Dewals [2]).

III.17 Géométrie d'un déversoir standard

Un déversoir est qualifié de standard s'il est dimensionné, pour un débit fixé, de telle sorte que le coursier suive précisément la trajectoire qu'aurait la lame fluide si elle était libre, i.e. dans le cas d'un déversoir à seuil mince (Figure 26).

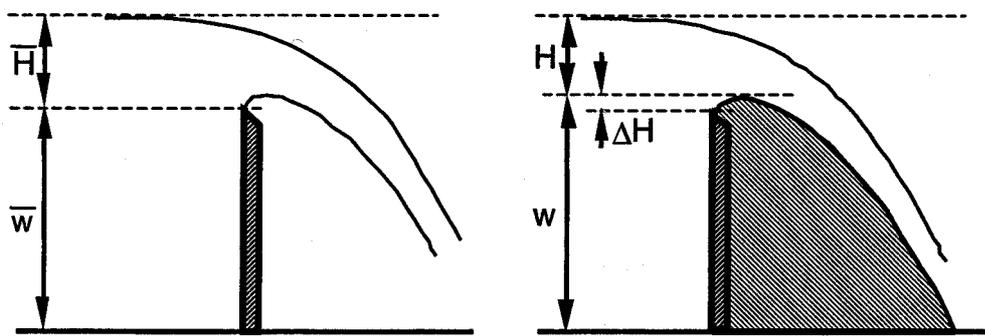


Figure 26 – Déversoir à seuil mince et déversoir standard correspondant (Piroton & al. [6]).

Une exemple de déversoir standard a été simulé. Afin de traiter effectivement une structure standard en présence de son débit de dimensionnement, il est utile de connaître la trajectoire du jet libre en l'absence de coursier, autrement dit dans le cas d'un déversoir à seuil mince. A cet effet, les résultats d'un modèle 2D dans le plan vertical (Mouzelard [5]) ont été exploités. Il conduit à la représentation de la Figure 27 pour la distribution de pression.

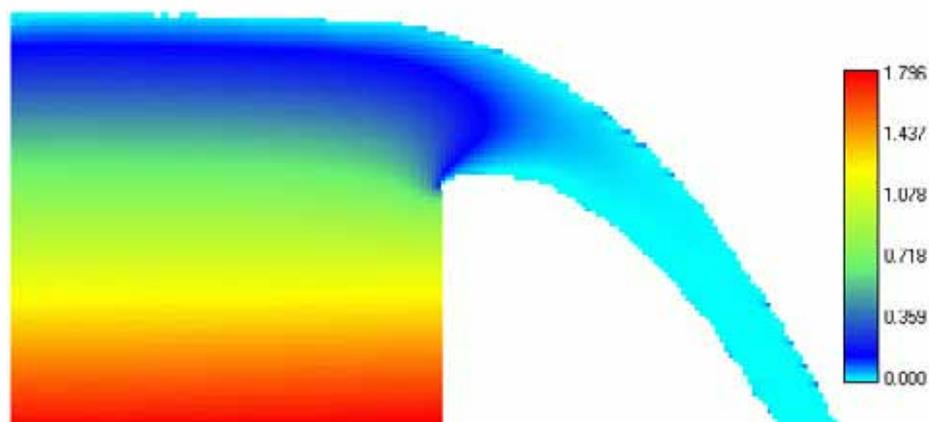


Figure 27 – Champ de pressions relatives $\frac{p}{\rho g}$ (m) obtenu à l'aide d'un modèle 2D dans le plan vertical (Mouzelard [5]).

A ce stade, la géométrie de la surface libre de la nappe inférieure nous préoccupe au premier plan. Le jet, d'allure parabolique, peut être décrit valablement par l'équation suivante, dont les coefficients ont été calés :

$$y(x) = -0.7603x^2 - 0.0137x. \quad (3.101)$$

L'origine des axes de référence est situé au sommet de la parabole. On en déduit directement la valeur de la pente :

$$\frac{dy}{dx} = -2 \times 0.7603x - 0.0137. \quad (3.102)$$

Cette dernière expression fournit la tangente de l'angle d'inclinaison locale du coursier d'un déversoir standard dimensionné pour le débit particulier utilisé.

Etant donné le formalisme en coordonnées curvilignes exploité lors de la résolution des équations, l'information concernant l'inclinaison locale des axes doit être fournie en fonction non pas la coordonnée cartésienne x mais bien en termes de l'abscisse curviligne ξ . Cette transformation s'effectue à l'aide de la relation

$$d\xi = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad (3.103)$$

qui doit être intégrée entre l'origine et l'abscisse courante.

III.18 Résultats de simulations

Divers résultats produits à l'issue de simulations menées à bien sur base du modèle décrit précédemment vont être présentés. Rappelons que *tous* les résultats ont été obtenus à l'aide du schéma d'intégration temporelle implicite exposé précédemment. Nous démontrons donc ici à nouveau que ce schéma implicite est actuellement opérationnel et nous avons en outre profité de son efficacité maximale dans le cadre de la recherche de solutions en régime sur un maillage unidimensionnel. La souplesse que lui confère l'évaluation numérique du Jacobien par différences finies a également été pleinement exploitée étant donné que cette structure algorithmique a permis d'introduire toutes les nouveautés liées aux coordonnées curvilignes sans jamais modifier quoi que ce soit à l'opérateur implicite. Seul l'opérateur explicite était affecté.

III.18.1 Déversoir sans seuil

A titre d'exemple et en vue de mettre en évidence le rôle des principales relations théoriques établies préalablement, un exemple simple est traité ci-dessous. Il s'agit d'une configuration fictive correspondant à un déversoir dépourvu de seuil, ce qui nous permet de focaliser toute notre attention sur l'inclinaison des axes et les effets de sa variation.

Approche classique

La Figure 28 représente une ligne d'eau calculée sur un déversoir en inclinant progressivement les axes mais sans tenir compte explicitement de la variation de leur orientation. La Figure 29 illustre l'allure des inconnues primitives h et u , ainsi que celle des inconnues conservatives s_1 et s_2 . Dans ce cas simplifié, les premières inconnues

primitive et conservative s'identifient bien entendu. De même la multiplication de h par u rendrait l'inconnue conservative s_2 .

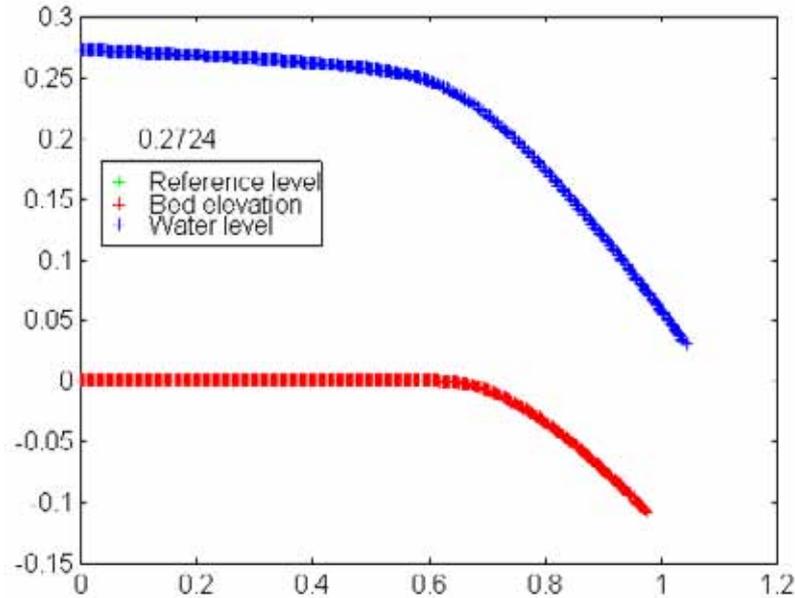


Figure 28 – Déversoir modélisé par inclinaison des axes mais sans prise en compte de leur variation d'inclinaison.

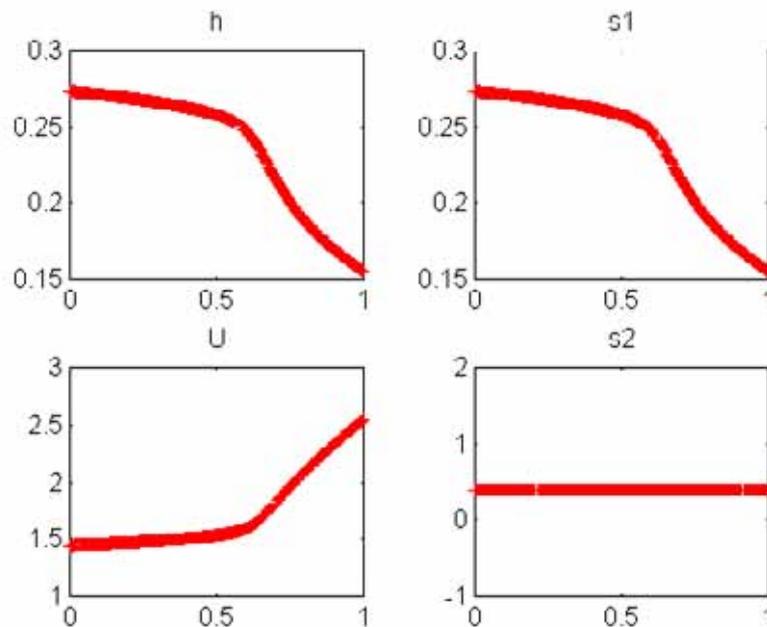


Figure 29 – Déversoir modélisé par inclinaison des axes mais sans prise en compte de leur variation d'inclinaison : inconnues primitives et conservatives.

Modélisation basée sur les coordonnées curvilignes

La Figure 30 présente des résultats analogues en incluant néanmoins les corrections nécessaires pour répercuter correctement les variations de volume des éléments de contrôle sur les équations de conservation. La Figure 31 montre que dans ce cas-ci des différences existent entre inconnues primitives et conservatives. En particulier

la première inconnues conservative rend bien compte du surplus de quantité de matière stockée dans les volumes de contrôle dans la zone d'accroissement d'inclinaison de l'axe de référence. Les hauteurs reconstruites à l'aide de la formule (3.73) demeurent continues. La seconde inconnue conservative reproduit également l'augmentation de la quantité de mouvement stockée au sein des éléments où l'inclinaison des axes varie.

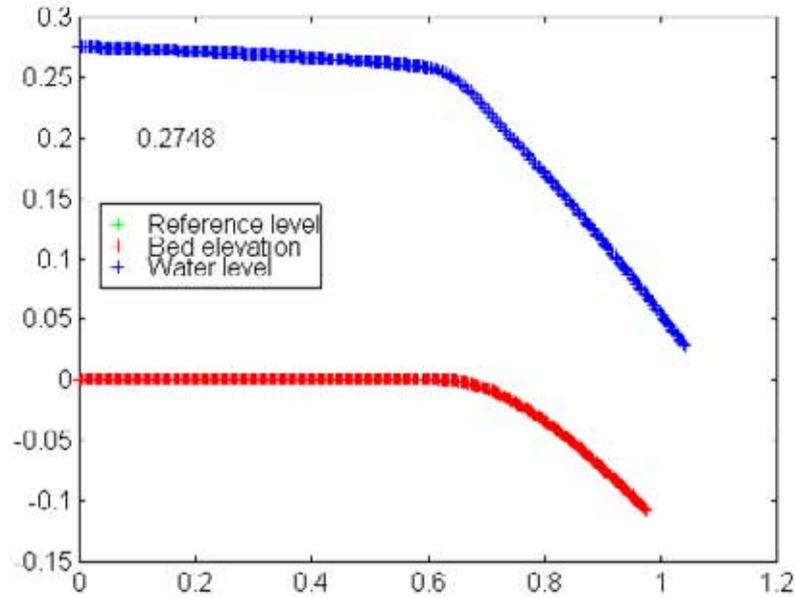


Figure 30 – Déversoir modélisé par inclinaison des axes avec prise en compte correcte de l'influence de leur variation d'inclinaison sur les volumes de contrôle.

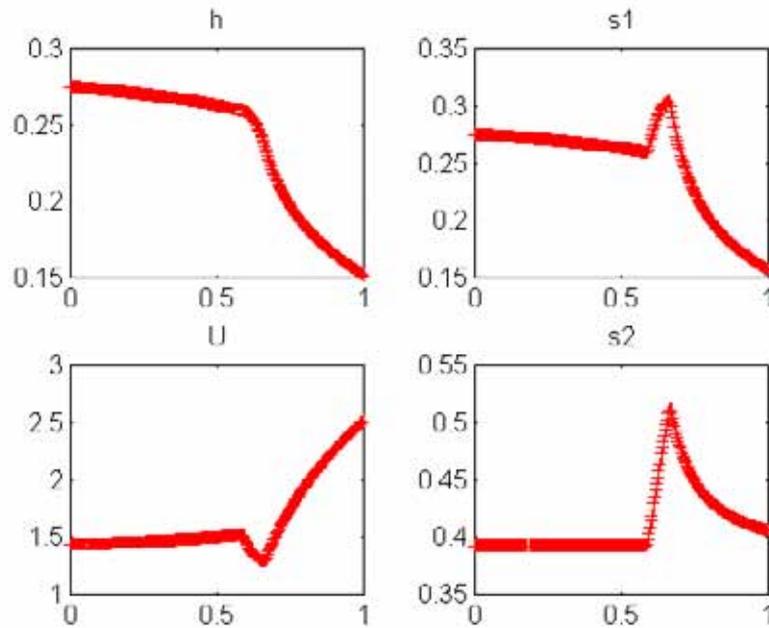


Figure 31 – Déversoir modélisé par inclinaison des axes avec prise en compte correcte de l'influence de leur variation d'inclinaison sur les volumes de contrôle : inconnues primitives et conservatives.

III.18.2 Influence de la géométrie du déversoir

L'influence du degré de continuité de la géométrie du coursier est illustrée sur les deux exemples qui suivent. La Figure 32 représente la ligne d'eau calculée, avec les coordonnées curvilignes, sur un déversoir décrit par une fonction dérivable une seule fois. Comme le montre la Figure 33, la pente de ce coursier est donc continue mais non dérivable. La Figure 35 représente une ligne d'eau homologue de la précédente mais sur un déversoir dont la géométrie est continûment dérivable (Figure 36).

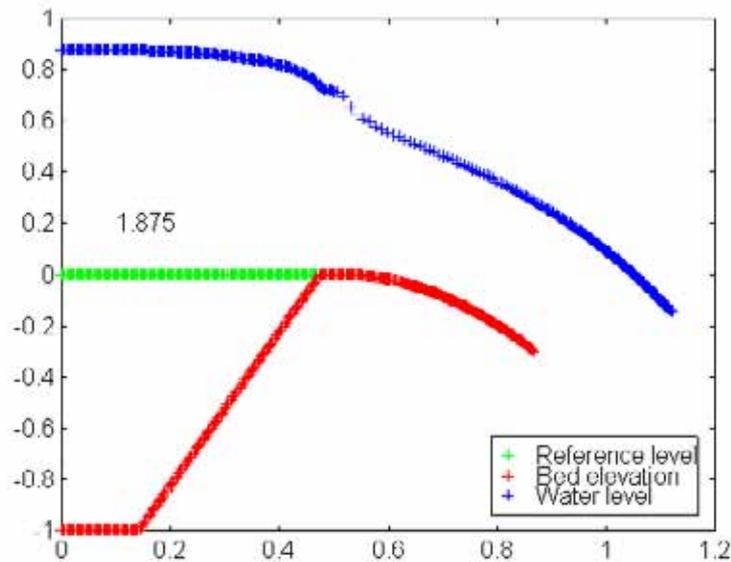


Figure 32 – Ligne d'eau sur un déversoir de géométrie dérivable une fois.

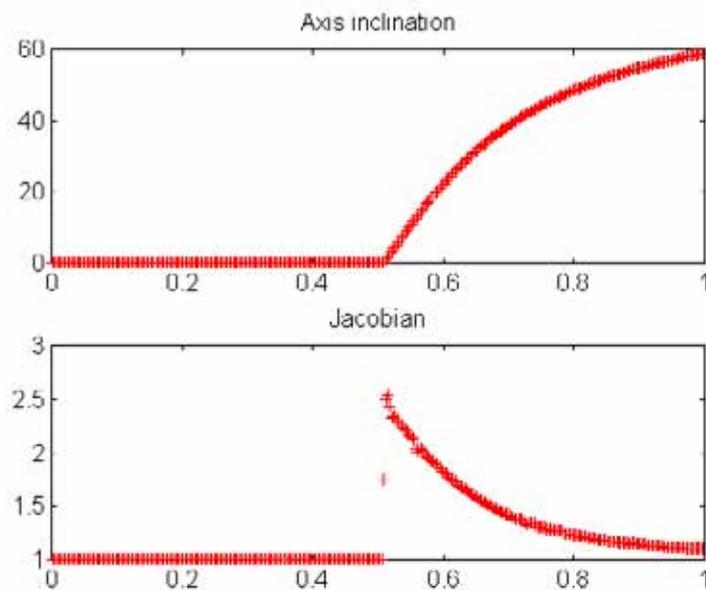


Figure 33 – Inclinaison et Jacobien relatifs à un déversoir de géométrie dérivable une fois.

La comparaison de la Figure 34 et de la Figure 37 montre que la première inconnue conservative subit une discontinuité dans le premier cas alors que dans le second elle varie de façon continue, mais néanmoins brusque. Bien que, en toute généralité, la seconde approche conduise à un meilleur comportement d'un point de vue numérique, tous nos résultats démontrent l'aptitude du schéma numérique à appréhender les variations extrêmement brusques, voire les discontinuités, dans les champs inconnus. Comme représenté à la Figure 34 et à la Figure 37, la hauteur d'eau reconstruite varie

bien entendu de façon continue. Le seuil n'a pas été choisi vertical, de façon à écarter jusqu'ici les particularités liées à un saut de topographie. Celui-ci est traité de façon spécifique au paragraphe III.18.3 et sera exploité au paragraphe III.18.4.

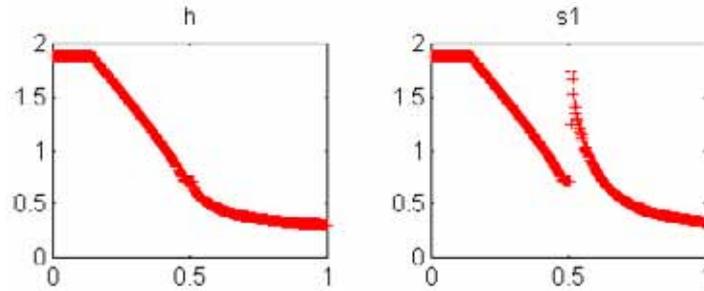


Figure 34 – Premières inconnues primitive et conservative sur un déversoir de géométrie dérivable une fois.

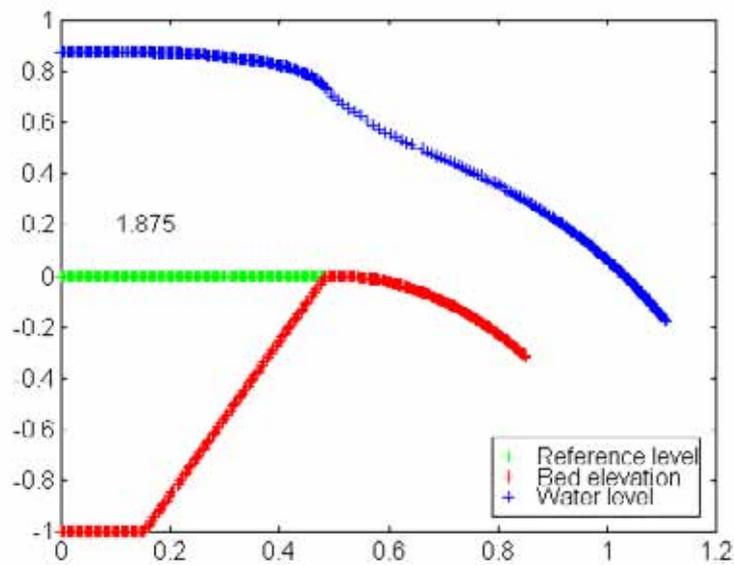


Figure 35 – Ligne d'eau sur un déversoir de géométrie continûment dérivable.

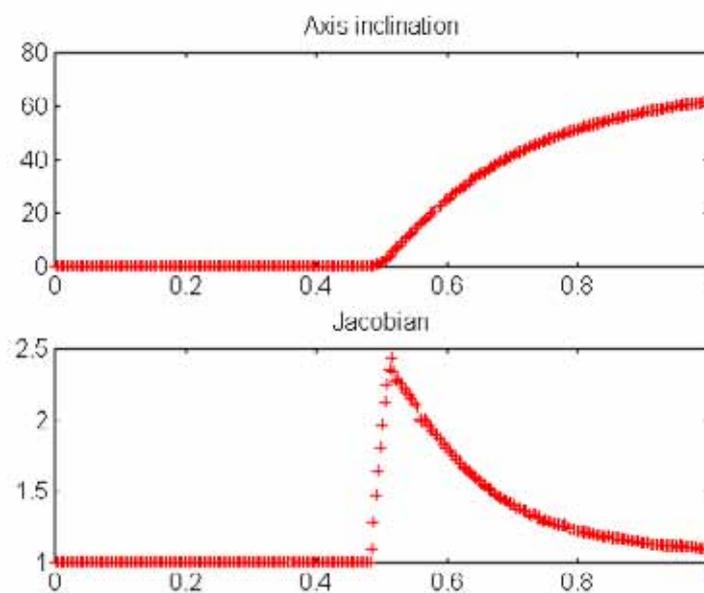


Figure 36 – Inclinaison et Jacobien relatifs à un déversoir de géométrie continûment dérivable.

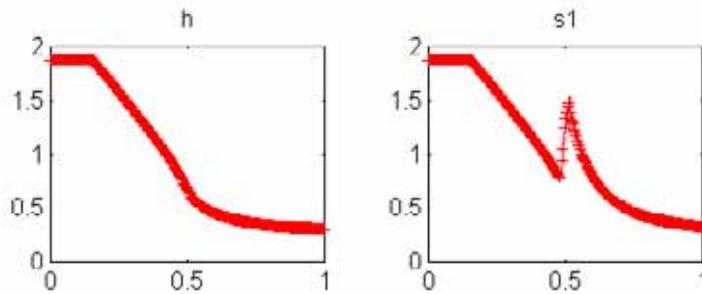


Figure 37 – Premières inconnues primitive et conservative sur un déversoir de géométrie continûment dérivable.

III.18.3 Seuil topographique

Toute modélisation numérique valable d'écoulements sur déversoir doit aussi être à même d'appréhender de façon satisfaisante le seuil présent juste avant le coursier.

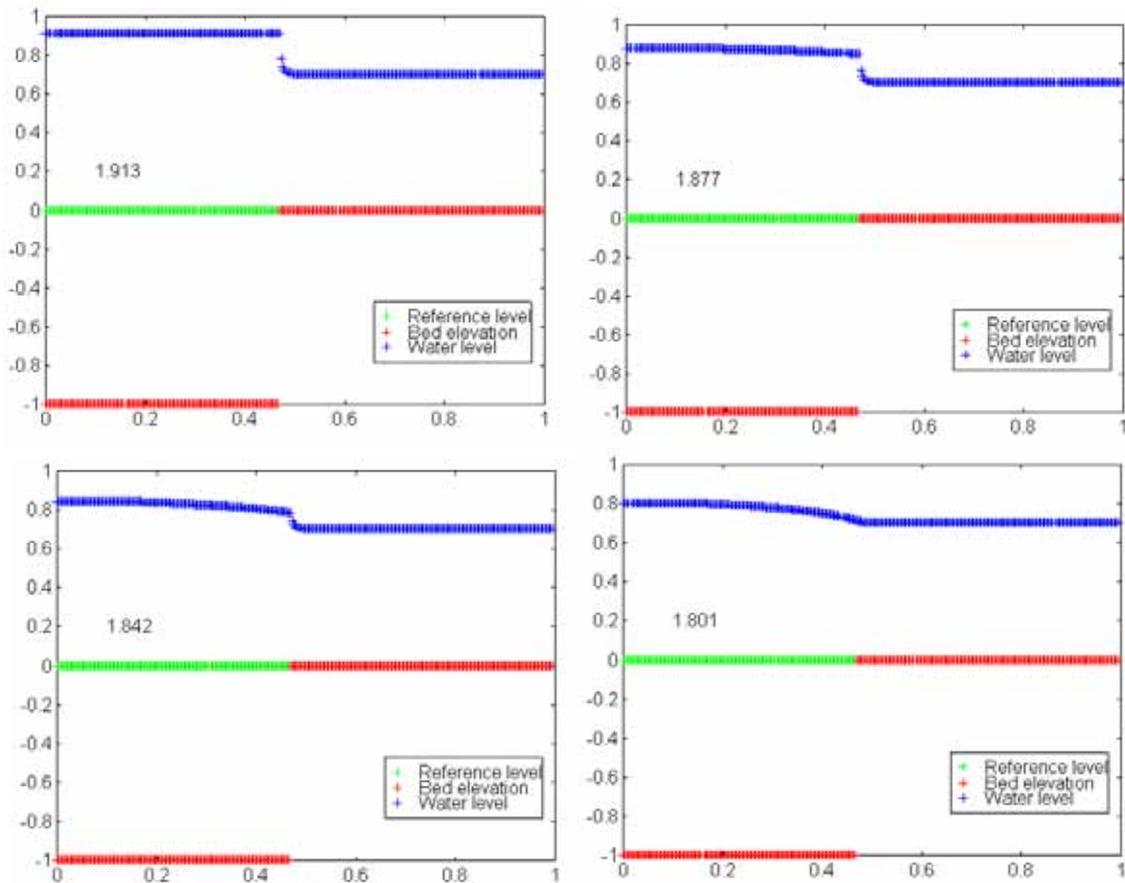


Figure 38 – Ecoulement sur un saut de topographie, avec une zone de recirculation à l'amont supposée s'étendre respectivement jusque 0 %, 50 %, 70 % et 80 % de la hauteur du seuil.

La Figure 38 illustre la simulation d'un écoulement fluvial sur une discontinuité de topographie. Les concepts présentés au paragraphe III.15 ont été mis à profit. Les quatre résultats, obtenus en supposant une distribution uniforme de vitesse ou une zone de recirculation sur 50 %, 70 % ou encore 80 % du niveau du seuil, mettent en exergue la sensibilité de la ligne d'eau à la distribution de vitesse postulée en amont. Cette

observation traduit l'aptitude du modèle considéré à produire un résultat réaliste pour la ligne d'eau, pour autant que la distribution de vitesse imposée le soit également. Ceci rappelle néanmoins une faiblesse de l'approche intégrée sur la hauteur, puisqu'elle requiert qu'une hypothèse soit formulée a priori sur le champ de vitesses, lequel ne constitue donc plus intégralement un résultat de calcul.

III.18.4 Déversoir parabolique

Un exemple d'écoulement a été simulé sur un déversoir parabolique. La géométrie a été introduite en suivant la procédure décrite au paragraphe III.17. La comparaison des différents résultats est effectuée sur base des *coefficients de débits* déduits, d'une part de la formule théorique de Rehbock (Sinniger [7]) et, d'autre part, des simulations réalisées.

Aucun traitement particulier des variations d'inclinaison

Dans un premier temps, l'écoulement sur le déversoir parabolique a été étudié par l'approche classique, en faisant abstraction des corrections liées à l'intégration en coordonnées curvilignes. Cette première simulation nous fournit une base de comparaison pour celles qui suivent. Les résultats correspondants sont synthétisés au Tableau 2. La ligne d'eau obtenue est illustrée à la Figure 39 et l'allure des inconnues primitives est reproduite à la Figure 40. Bien entendu, les premières inconnues, conservative et primitive, s'identifient comme le prévoit la formule (3.73) lorsque la variation spatiale de l'inclinaison des axes n'est pas explicitement prise en considération.

Tableau 2 – Déversoir parabolique : approche classique.

Coefficient simulé	Coefficient théorique	Erreur relative
0.4947	0.4428	12 %

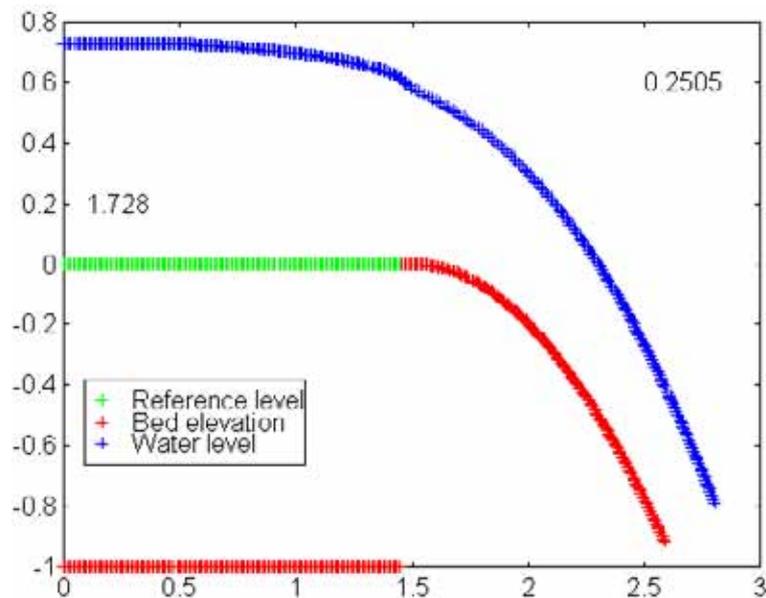


Figure 39 – Déversoir parabolique : ligne d'eau sans traitement spécifique des variations d'inclinaisons.

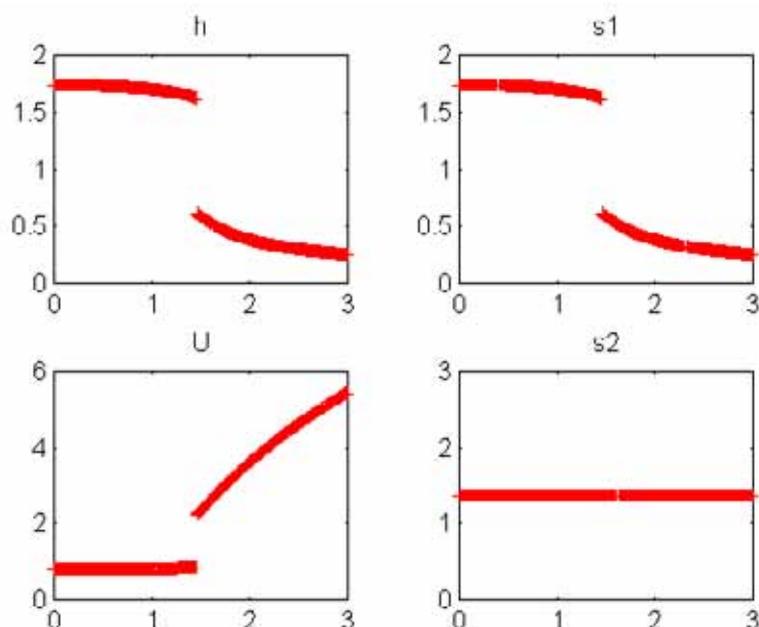


Figure 40 – Inconnues primitives et conservatives, en l’absence de traitement spécifique des variations d’inclinaisons.

Distribution de vitesse avec zone morte

La variation de volume des éléments de contrôle est prise en compte en fonction de l’évolution de l’inclinaison locale de l’axe curviligne. La distribution de pression est supposée localement hydrostatique dans la direction normale à l’axe de référence ξ .

En outre, une zone morte est supposée se trouver immédiatement à l’amont du seuil (voir le paragraphe III.15.1).

Le Tableau 3 résume les résultats obtenus. L’erreur relative sur le coefficient de débit a déjà pu être réduite de moitié par rapport au cas précédent. Les figures qui suivent reproduisent la ligne d’eau, et les champs calculés pour les différentes inconnues.

Tableau 3 – Déversoir parabolique : distribution de vitesse à l’amont avec une zone morte.

Coefficient simulé	Coefficient théorique	Erreur relative
0.4689	0.4442	5.5 %

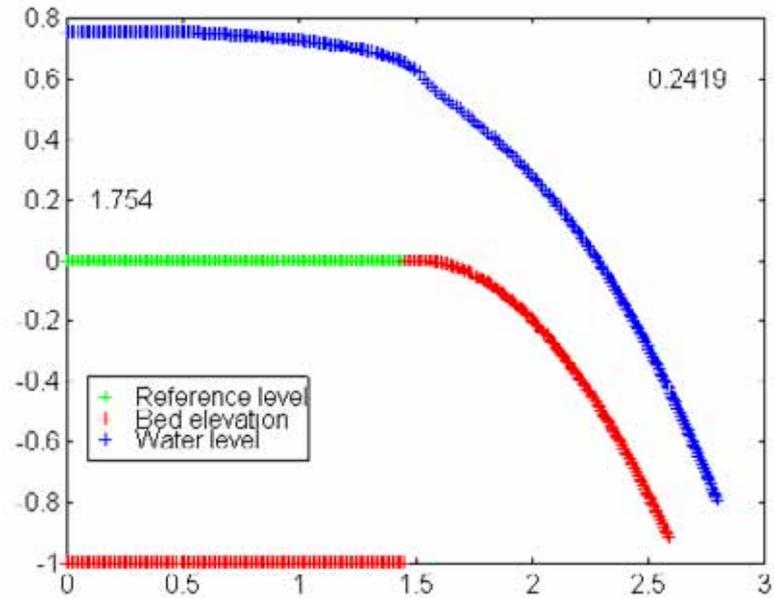


Figure 41 – Déversoir parabolique : ligne d'eau avec traitement spécifique de la variation de volume des éléments de contrôle et une zone morte à l'amont.

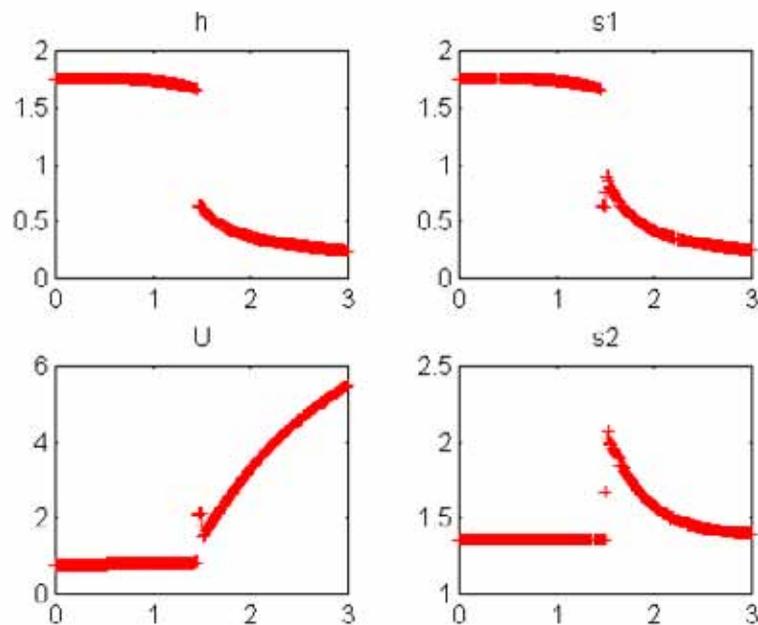


Figure 42 – Inconnues primitives et conservatives, avec traitement spécifique de la variation de volume des éléments de contrôle et une zone morte à l'amont.

Distribution de vitesse avec recirculation (80 %)

Cette fois, un traitement correct des volumes de contrôle est toujours effectué en fonction des variations d'inclinaison des axes, l'hypothèse de pression hydrostatique est conservée localement et une zone de recirculation (voir le paragraphe III.15.2) est supposée s'étendre sur 80 % de la hauteur du seuil. Les hauteurs d'eau, vitesses et débits simulés sont repris à la Figure 43 et la Figure 44. Le Tableau 4 établit la comparaison entre coefficients de débits théorique et simulé. L'erreur demeure de l'ordre de 6.5 %.

Tableau 4 – Déversoir parabolique : distribution de vitesse à l’amont avec recirculation (80 %).

Coefficient simulé	Coefficient théorique	Erreur relative
0.4731	0.4439	6.5 %

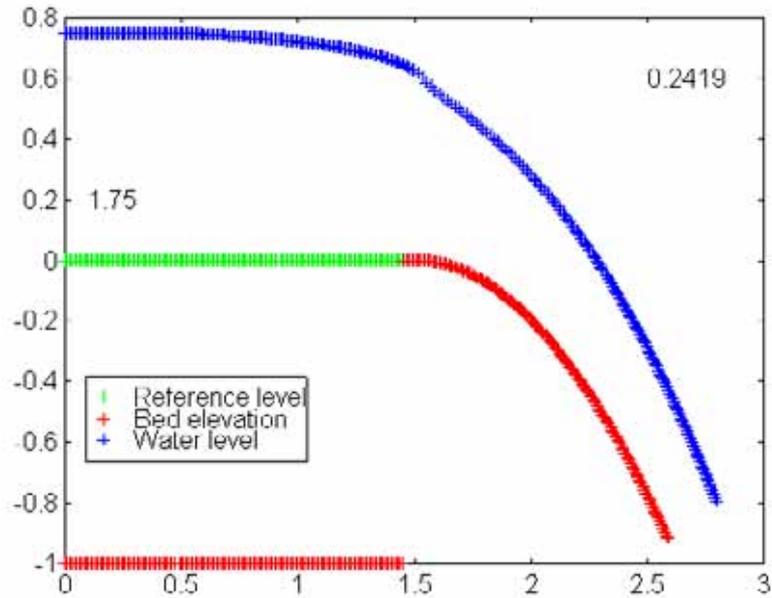


Figure 43 – Déversoir parabolique : ligne d’eau avec traitement spécifique de la variation de volume des éléments de contrôle et une zone de recirculation sur 80 % de la hauteur amont.

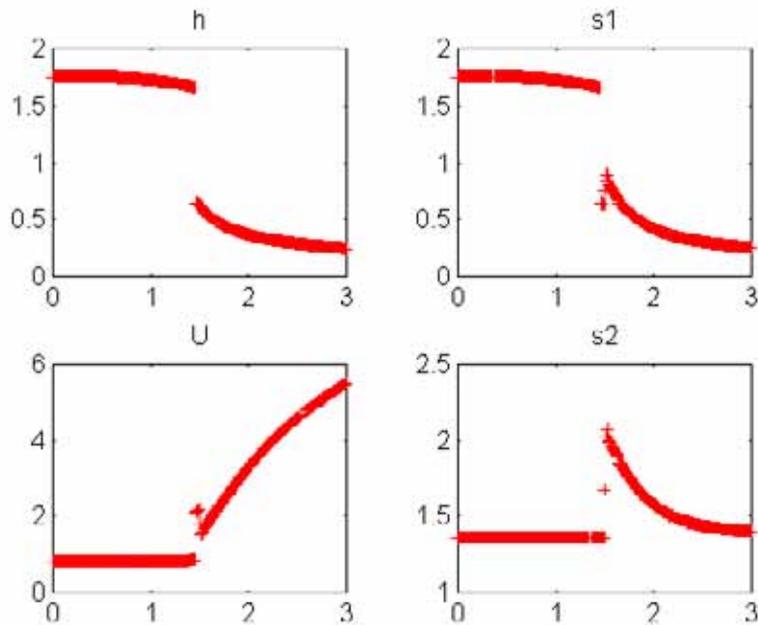


Figure 44 – Inconnues primitives et conservatives, avec traitement spécifique de la variation de volume des éléments de contrôle et une zone de recirculation sur 80 % de la hauteur amont.

Distribution de vitesse avec recirculation (75 %)

Les conditions de simulation sont identiques à celles de la configuration précédente, hormis l’étendue verticale de la zone de recirculation qui est ici limitée à 75 % de la hauteur du seuil. Les résultats (Figure 45 et Figure 46) et le Tableau 5 montrent que l’erreur relative sur le coefficient de débit a pu être sensiblement réduite.

Tableau 5 – Déversoir parabolique : distribution de vitesse à l'amont avec recirculation (75 %).

Coefficient simulé	Coefficient théorique	Erreur relative
0.4395	0.4460	1.45 %

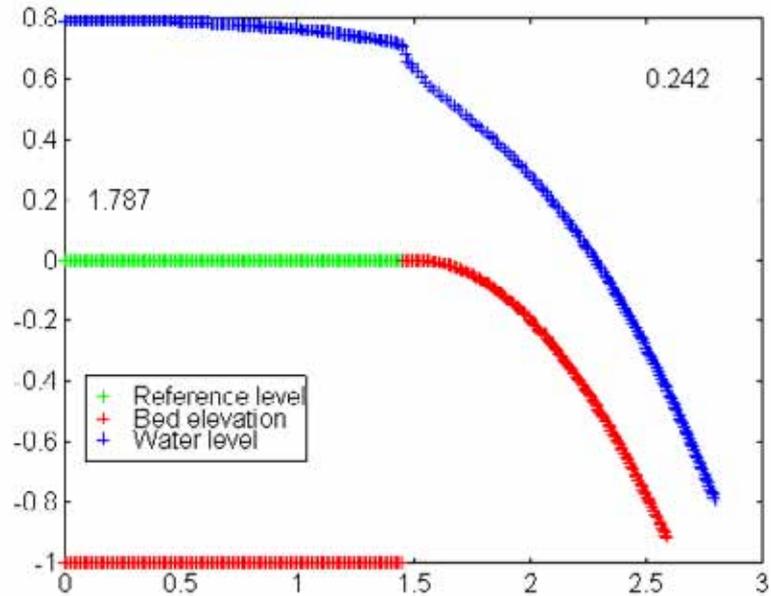


Figure 45 – Déversoir parabolique : ligne d'eau avec traitement spécifique de la variation de volume des éléments de contrôle et une zone de recirculation sur 75 % de la hauteur amont.

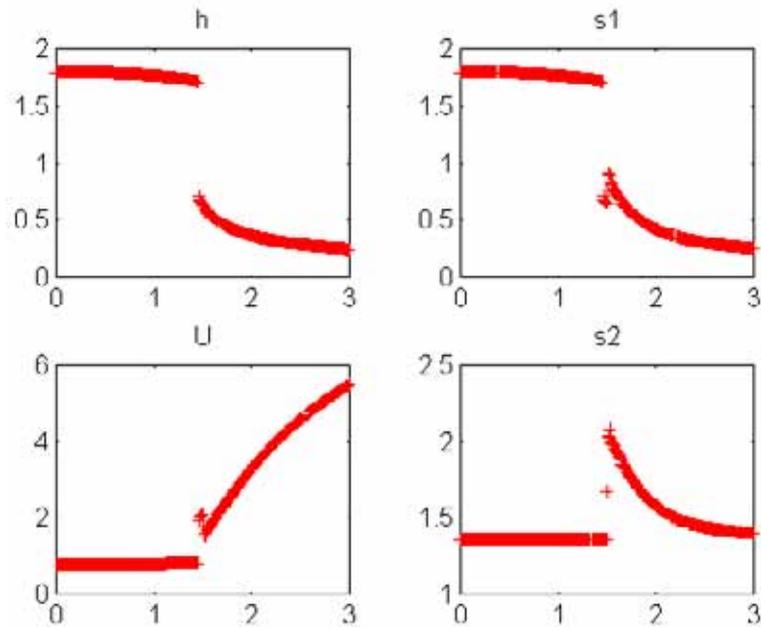


Figure 46 – Inconnues primitives et conservatives, avec traitement spécifique de la variation de volume des éléments de contrôle et une zone de recirculation sur 75 % de la hauteur amont.

Distribution de vitesse avec recirculation (77 %)

La zone de recirculation s'étend jusqu'à 77 % de la hauteur du seuil et les autres paramètres sont maintenus inchangés. Les dernières figures, ainsi que le Tableau 6,

rendent compte d'une nouvelle diminution de l'erreur calculée. Il faut en conclure, comme au paragraphe III.18.3, que le modèle est à même de fournir des résultats d'une qualité excellente, mais que celle-ci demeure tributaire des hypothèses émises sur la distribution de vitesse selon la direction verticale.

Tableau 6 – Déversoir parabolique : distribution de vitesse à l'amont avec recirculation (77 %).

Coefficient simulé	Coefficient théorique	Erreur relative
0.4493	0.4453	0.90 %

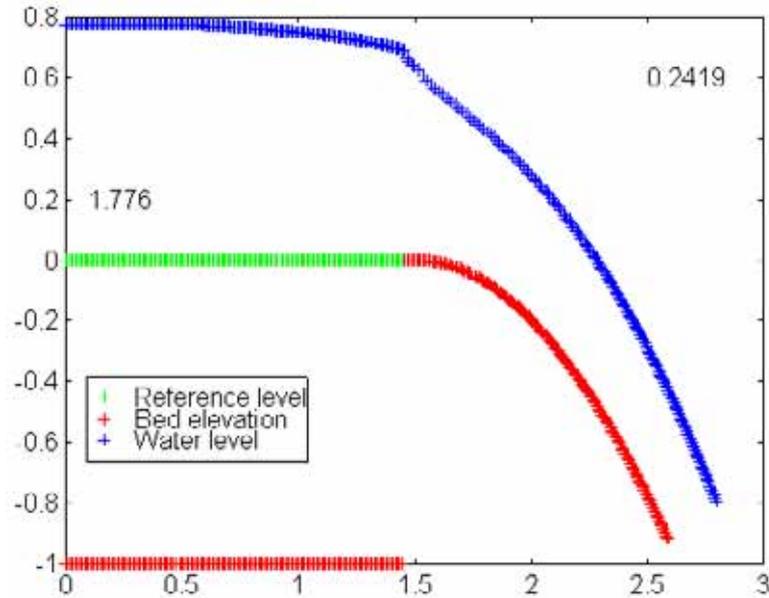


Figure 47 – Déversoir parabolique : ligne d'eau avec traitement spécifique de la variation de volume des éléments de contrôle et une zone de recirculation sur 77 % de la hauteur amont.

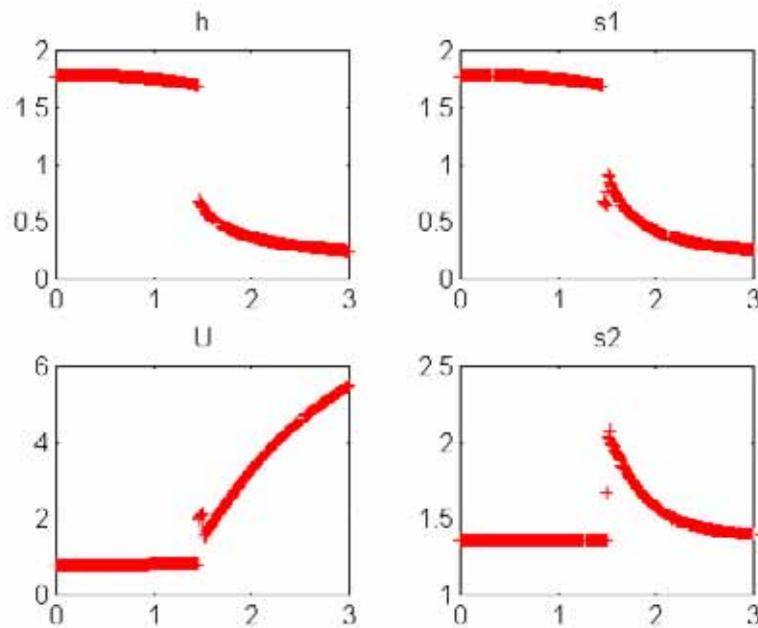


Figure 48 – Inconnues primitives et conservatives, avec traitement spécifique de la variation de volume des éléments de contrôle et une zone de recirculation sur 77 % de la hauteur amont.

III.19 Bibliographie

- [1] Alcrudo, F. & F. Benkhaldoun, *Exact solutions to the Riemann problem of the shallow water equations with a bottom step*. Computers & Fluids, 2001. **30**(6): pp. 643 - 671.
- [2] Dewals, B., *Modélisation numérique du transport sédimentaire*. Travail de fin d'études. 2001, Université de Liège.
- [3] Lejeune, A., M. Pirotton & S. Erpicum, *Study on hydraulic scale models of the Kol Dam Project (India) : Model of the spillway and global model*. 2002, University of Liège: Liège.
- [4] Mason, P.J., *Practical guidelines for the design of flip buckets and plunge pools*. Water Power & Dam Construction, 1993.
- [5] Mouzelard, T., *Contribution à la modélisation des écoulements quasi tridimensionnels instationnaires à surface libre*. Thèse de doctorat. 2002, Université de Liège.
- [6] Pirotton, M., P. Archambeau, B. Dewals, S. Erpicum & T. Mouzelard, *Cours d'Hydraulique Appliquée*. 2002: Université de Liège.
- [7] Sinniger, R., *Écoulements stationnaires*. Traité de Génie Civil de l'EPFL, Constructions Hydrauliques. 1989. 439.

IV. Modélisation de l'ensablement d'une grande retenue

IV.1 L'alluvionnement de grandes retenues

Les cours d'eau, quels qu'ils soient, sont dotés d'une capacité à acheminer des matériaux solides, qui leur sont apportés à la suite de l'érosion, d'origine naturelle ou anthropique, des bassins versants. Lorsque ces mêmes cours d'eau débouchent ensuite dans un réservoir, ce dernier joue le rôle d'un piège à sédiments étant donné que l'hydrodynamique d'un lac est caractérisée par une capacité de transport solide sensiblement moindre. En conséquence, les matériaux solides s'y déposent et réduisent ce faisant le volume disponible pour le stockage, tout en perturbant l'exploitation de l'ouvrage.

Ce problème d'envasement des grandes retenues dans le monde se pose actuellement avec une importance sans cesse croissante et une acuité encore accrue par la perspective d'une évolution climatique notoire. En témoignent les multiples congrès organisés à ce sujet, les innombrables publications qui y ont trait, ainsi que les cris d'alarme sans cesse répétés par des responsables à divers échelons, des gestionnaires et des scientifiques.

IV.1.1 Les conséquences de l'envasement d'une retenue

Les conséquences néfastes émanant du processus de remplissage des lacs par des matériaux solides sont multiples.

L'envasement des réservoirs affecte tout d'abord leur capacité de stockage et par suite détériore le niveau des services rendus par la retenue. D'une part, le volume utile disponible étant diminué, les capacités de laminage des crues et de soutien d'étiage se voient réduites. D'autre part, des pertes d'eau potable ou d'eau destinée à la production énergétique sont engendrées. Ajoutons encore l'usure des accélérées des turbines, qui ne cesse de s'accroître au cours du processus d'ensablement du réservoir.

Comme l'illustre la Figure 49, la sécurité des barrages est également mise en péril par l'augmentation progressive de la poussée des alluvions sur la structure. Plusieurs ruptures de barrages ont été répertoriées dans le monde suite à ce phénomène de sollicitation renforcée. Cette atteinte à la sécurité même des ouvrages se manifeste

IV.6 Bibliographie

- [1] Banihabib, M.E. & A. Mokhtari. *Numerical Simulation of Sedimentation in Detention Dams During a High Concentrated Flow*. in *3rd International Symposium on Environmental Hydraulics*. 2001. Arizona State University, Tempe, AZ.
- [2] Bayram, A., M. Larson, H.C. Miller & N.C. Kraus, *Cross-shore distribution of longshore sediment transport: comparison between predictive formulas and field measurement*. *Coastal Engineering*, 2001. **44**: pp. 79-99.
- [3] Black, K.S., T.J. Tolhurst, D.M. Paterson & S.E. Hagerthey, *Working with natural cohesive sediments*. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2002. **128**(1): pp. 2-9.
- [4] Bouchard, J.-P. *La gestion des sédiments par chasse : outils d'optimisation et de prévision d'impact*. in *Gestion des Sédiments : de la source à la mer*. 2001. Lyon: Société Hydrotechnique de France.
- [5] Bouchard, J.P., F. Maurel & A. Petitjean. *Sedimental Impact of Reservoir Emptying: Prediction tools and site investigation*. in *International Water Research Symposium*. 1997. Aachen, Germany.
- [6] Chanson, H., *The Hydraulics of open Channel Flow*. 1999, Oxford, Auckland, Boston, Johannesburg, Melbourne, New Delhi: Butterworth-Heinemann.
- [7] Chanson, H. & D.P. James. *Siltation of Australian Reservoirs: some Observations and Dam Safety Implications*. in *Proc. Water 99 Joint Congress, 25th Hydrology & Water Res. Symp. and 2nd Intl Conf. Water Res. & Environ. Research*. 1999. Brisbane.
- [8] Dewals, B., *Modélisation numérique de processus de transport sédimentaire en rivière*. *Tribune de l'eau*, 2001. **54**(611): pp. 45-56.
- [9] Dewals, B., *Modélisation numérique du transport sédimentaire*. Travail de fin d'études. 2001, University of Liege.
- [10] Dewals, B., P. Archambeau, S. Erpicum, T. Mouzelard & M. Piroton. *Wolf software: a fully integrated device applied to modelling gradual dam failures and assessing subsequent risks*. in *Advances in Fluid Mechanics*. 2002. Ghent, Belgium: WIT Press.
- [11] Durand, P. *Barrage de Mauvoisin, projet de surélévation de la prise d'eau et vidange, impacts sur l'environnement*. in *Gestion des Sédiments : de la source à la mer*. 2001. Lyon: Société Hydrotechnique de France.
- [12] Fäh, R., *Numerische Simulation der Strömung in offenen Gerinnen mit beweglicher Sohle*. PhD Thesis. 1997, VAW-ETHZ: Zürich.
- [13] Fan, J. & G.L. Morris, *Reservoir Sedimentation. I: Delta and Density Current Deposits*. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1992. **118**(3): pp. 354-369.
- [14] Fan, J. & G.L. Morris, *Reservoir Sedimentation. II: Reservoir Desiltation and Long-Term Storage Capacity*. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1992. **118**(3): pp. 370-385.

-
- [15] Graf, W.H., *Hydraulique fluviale*. Vol. 2: Ecoulement non permanent et phénomènes de transport. 1996: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- [16] Julien, P.Y., *Erosion and Sedimentation*. 1995, Cambridge: Cambridge University Press.
- [17] Lai, J.-S. & H.W. Shen, *Flushing sediment through reservoirs*. Journal of Hydraulic Research, 1996. **34**(2): pp. 237-255.
- [18] Parker, G., Y. Fukushima & H.M. Pantin, *Self-accelerating turbidity currents*. J. Fluid Mech., 1986. **171**: pp. 145-181.
- [19] Schweim, C., J.P. Bouchard, J. Welzel, V. Spork & J. Köngeter. *Sediment management during reservoir depletion - Experimental investigations of mud siltation and resuspension*. in *7th International Symposium on River Sedimentation*. 1998. Hong Kong.
- [20] Singh, S.P. *Mathematical model studies on sedimentation of Bhakra reservoir*. in *Silting Problems in Hydro Power Plants*. 1999. New Delhi: Central Board of Irrigation and Power.
- [21] Soni, J.P., R.J. Garde & K.G.R. Raju, *Aggradation in streams due to overloading*. Journal of the Hydraulics Division, 1980. **106**(HY1): pp. 117-131.
- [22] Vetsch, D. & R. Fäh. *Validation of a numerical model to simulate the Rhine river delta at the lake of Constance*. in *3rd International Symposium on Environmental Hydraulics*. 2001. Arizona State University, Tempe, AZ.
- [23] Yalin, M.S., *Mechanics of Sediment Transport*. Second ed. 1977, Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press.

V. Conclusion

Le présent DEA s'articule autour de trois axes essentiels.

Une comparaison des approches implicite et explicite a tout d'abord été présentée pour l'intégration temporelle du modèle des eaux peu profondes. Les fondements théoriques de la méthode d'intégration implicite ont ensuite été exposés. Nous avons également abordé de façon détaillée certains des grands enjeux numériques et algorithmiques à appréhender pour implémenter et mettre en œuvre un tel schéma, qu'ils concernent le temps de calcul, la gestion de la mémoire ou encore la souplesse algorithmique.

Deux obstacles essentiels ont été surmontés. D'une part, un calcul exact de la matrice Jacobienne du système a été effectué dans le cas d'un fractionnement des flux simple. Il permet non seulement d'éviter le coût élevé d'une évaluation par différences finies, mais en outre il donne véritablement accès à la convergence quadratique de la méthode de Newton-Raphson associée. Son évaluation par différences finies, tout en garantissant une gestion optimisée de la mémoire requise, a également été implémentée et offre une très grande flexibilité à l'égard de tout changement apporté aux équations. Celui-ci serait dès lors pris en compte automatiquement dans le module implicite du code de calcul. D'autre part, nous avons implémenté une algèbre linéaire performante, basée sur l'algorithme du GMRES, et tirant raisonnablement parti des zéros liés au caractère creux de la matrice du système algébrique. Cette exigence est bien entendu inéluctable en vue d'applications réalistes, qui exigent couramment la résolution de systèmes de plusieurs dizaines voir centaines de milliers d'équations.

Dans un premier temps, un modèle unidimensionnel a été mis au point, puis, très logiquement, l'obtention de résultats encourageants à l'aide de ce premier code de calcul a été suivie d'une généralisation à deux dimensions du schéma implicite. Loin d'être immédiate, cette opération n'a été accomplie avec succès qu'à la suite de la sélection d'une technique appropriée pour l'évaluation des flux numériques. Cette étape délicate s'est révélée payante après qu'une méthode assurant la continuité des flux calculés, aussi bien à la transition critique que pour de faibles vitesses, ait été implémentée. Le modèle obtenu, extrêmement compétitif pour l'obtention de solutions stationnaires précises ouvre un très vaste champ d'applications. Ce chapitre nous a également donné l'occasion d'introduire une adaptation, à notre connaissance inédite, du schéma AUSM pour les équations de l'hydrodynamique à surface libre. Il a été comparé et confronté à la fois à un fractionnement des flux original développé au sein du HACH et à la technique classique de Roe pour le calcul des flux numériques.

Plusieurs cas de figure ont été simulés à la fin de cette première partie. Ils permettent une discussion systématique de l'influence des différents paramètres, ainsi

qu'une mise en exergue à la fois de la puissance de ce type d'approche et de certaines difficultés qui y sont liées.

Une deuxième partie du travail décrit une théorie originale, novatrice et inédite pour le traitement des écoulements sur coursiers de déversoirs. Elle est basée sur une formulation en coordonnées curvilignes des équations de la Mécanique des fluides, avant que l'opération d'intégration sur la lame fluide ne soit effectuée. La variation de volume des éléments de contrôle avec la courbure des axes est prise en compte, ainsi que d'autres termes additionnels apparaissant naturellement au cours des développements analytiques rigoureux. Le nouveau système d'équations a été implémenté au sein d'un logiciel 1D et entièrement couplé au schéma d'intégration temporelle implicite décrit précédemment. Cette étape s'est déroulée sans complication particulière en raison de la souplesse fournie par l'algorithme de calcul du Jacobien à l'aide de différences finies. Diverses applications en régime permanent ont été traitées et une comparaison avec des mesures expérimentales a permis de confirmer la validité de l'approche. Néanmoins certaines améliorations restent à apporter, essentiellement en ce qui concerne l'écoulement au droit du seuil du déversoir, où les composantes de vitesse verticale risquent de ne pas rester négligeables.

La dernière phase du travail de DEA a conduit à la réalisation d'une simulation innovante visant à prévoir l'état d'équilibre hydrosédimentaire d'un grand réservoir en Inde (plus de 600 millions de m³) et le délai d'ensablement du lac. A l'aide de considérations physiques et mathématiques, nous avons justifié le choix d'une stratégie de résolution quasi-stationnaire, assurant une maîtrise du coût de calcul. La pratique a montré qu'une remise à jour de l'hydrodynamique était requise régulièrement, de telle sorte que celle-ci a finalement été réalisée grâce à quelques pas explicites, moins onéreux qu'une ou deux itérations implicites. L'approche totalement bidimensionnelle reste extrêmement rare aujourd'hui pour des études d'une telle ampleur.

La présentation de nombreux résultats concluants ne peut être totalement dissociée de l'évocation de limitations inhérentes au modèle et de certaines difficultés auxquelles le modélisateur se voit confronté. Plusieurs d'entre elles ont d'ores et déjà été soulignées au cours des paragraphes correspondants, mais il est bon de synthétiser ici les idées principales.

La nature même du processus d'alluvionnement rend extrêmement complexe toute opération de calibrage du modèle, sauf si des enregistrements bathymétriques ont été enregistrés par le passé. Malheureusement ceux-ci font souvent défaut et sont de toute façon exclus dans le cas d'une étude d'implantation d'un ouvrage à construire. L'incertitude caractérisant tout scénario concernant la prévision des apports solides pendant la période d'ensablement se répercute certes sur la précision des conclusions tirées à partir des simulations, néanmoins la méthode entièrement bidimensionnelle développée au cours de ce travail constitue l'approche physiquement basée la plus objective accessible actuellement à la modélisation. Elle permet de fournir des éléments tangibles d'aide à la décision concernant la rentabilité de grandes installations hydroélectriques, en particulier dans des régions où la rapidité de l'alluvionnement conditionne au premier plan la faisabilité économique de tout nouveau projet.

Une modélisation séparée des différents modes de transport (charriage et suspension) est actuellement en cours d'implémentation et ne peut que conduire à un degré de réalisme accru dans la reproduction des phénomènes à simuler. Par ailleurs, la granulométrie a été caractérisée par un diamètre de grain moyen, qui ne permet pas de

refléter le tri granulométrique parfois observé dans la réalité. Cependant, des difficultés substantielles se présentent à cet égard, notamment en raison de la possible indisponibilité temporaire de certains grains à la surface du lit (pavage du lit) et de la nécessité concomitante de répertorier un historique des différentes couches qui se déposent. Des recherches sont entreprises actuellement dans cette voie. Un besoin se fait également sentir pour la recherche et l'étude de lois de débits solides reflétant de façon plus réaliste le transport différencié de chacune des classes granulométriques. Toute la complexité d'une telle tâche apparaît dès lors qu'on constate que déjà pour des sédiments de taille uniforme la plupart des lois de transport fournissent des résultats prédictifs largement insatisfaisants. Le recours à l'expérimental est donc à prévoir afin d'affiner et de généraliser les lois de capacité de transport actuelles, dont le niveau justesse conditionne directement la qualité des simulations numériques.

Le modèle intégré sur la hauteur peut sembler discutable dans certains cas. Sa validité requiert, en effet, que le carré du rapport des composantes verticale et horizontale de la vitesse soit faible. Des bases solides permettent d'étayer sa validité incontestable dans le cas d'un écoulement en rivière. Par contre, étant donné l'hydrodynamique spécifique d'un lac, le réservoir proprement dit est selon toute vraisemblance le siège d'échanges verticaux de masse et de quantité de mouvement. Des améliorations pourraient dès lors être envisagées de ce côté, selon trois méthodes de difficulté croissante. La prise en compte d'effets diffusifs au sein du lac et la réalisation d'un calibrage approprié de ceux-ci constituent un premier pas vers une description plus fidèle des phénomènes naturels. Une modélisation impliquant deux ou plusieurs couches d'écoulement représenterait un progrès supplémentaire et ouvrirait la voie entre autres à une description appropriée de mécanismes de transport particuliers, tels que les courants de turbidité. Finalement, certaines limitations inhérentes à la vue bidimensionnelle privilégiée actuellement ne peuvent être dépassées que par la mise au point d'un modèle tridimensionnel. Nombre d'obstacles restent cependant à franchir avant de pouvoir garantir une applicabilité suffisamment large et générale d'un modèle complètement 3D, spécialement dans le cadre de simulations à très grandes échelles spatiales et temporelle. Outre les exigences en termes de puissance de calcul et de capacité de stockage, rappelons également la nécessité de disposer de valeurs correctes de conditions initiales, de conditions limites et de nombreuses autres données toujours difficile à obtenir en pratique.

Deux grandes familles de schémas d'intégration temporelle sont dorénavant disponibles dans le modèle WOLF, de sorte que le plus adapté d'entre eux puisse être choisi au cas par cas, en fonction de l'application visée. Outre ces approches explicite et implicite stationnaire, un schéma d'intégration temporelle implicite transitoire reste à implémenter, dans le but d'apporter une réponse optimale pour certaines applications instationnaires dont les temps caractéristiques sont particulièrement longs. L'équipe du HACH envisage d'ores et déjà la simulation de très grands réseaux de rivières, par exemple à une échelle nationale, alimentés par des conditions limites instationnaires correspondant, par exemple, à des données horaires reflétant l'évolution des signaux de pluie et de leur ruissellement sur les bassins versants.

Chaque étape du présent mémoire s'est concrétisée non seulement par un travail de nature numérique et algorithmique, mais également par des recherches théoriques fondamentales, tant sur le plan physique que mathématique des modèles. En parallèle avec celles-ci et afin de les orienter de façon efficiente, une étude bibliographique fouillée et continue a joué un rôle permanent de soutien pour les développements entrepris et d'initiation de nouvelles approches.

En conclusion, la filière de ce travail prouve que les moyens mis en œuvre ont porté leurs fruits. Les deux défis principaux ont été relevés, à savoir la mise en place du schéma d'intégration temporelle implicite et sa large validation, ainsi que la réussite de la simulation à très long terme de l'envasement d'une grande retenue. En outre, la description de l'écoulement en coordonnées curvilignes quelconques permet de jalonner une amélioration substantielle du niveau de réalisme des simulations sur coursiers de déversoirs et, partant, de toute l'hydrodynamique à l'amont étant donné l'influence prépondérante de la condition limite aval sur le domaine complet. Des pistes de recherches futures ont été tracées, aussi bien en ce qui concerne une généralisation du schéma implicite que du côté d'un perfectionnement des capacités prévisionnelles des modèles hydrodédimentaires.