**L’articulation entre l’arithmétique et l’algèbre : Comment penser la progression des apprentissages numériques entre 10 et 14 ans**

|  |  |
| --- | --- |
| Isabelle Demonty  Université de Liège | Joëlle Vlassis  Université de Luxembourg |

***Résumé*** –Cet article explore la question de l’articulation entre l’arithmétique et l’algèbre à la transition entre l’école primaire et secondaire. Il débute par une discussion générale sur deux éléments clés de cette articulation: (1) la nécessité de développer une pensée dite relationnelle, avec un travail sur le sens de l’égalité et les propriétés des opérations (Carpenter, Levi, Franke, & Zeringue ; 2005) (2) l’émergence d’un raisonnement dit analytique impliquant des quantités indéterminées (Radford, 2014) : celles-ci peuvent être représentées par des nombres, par des signes non conventionnels et progressivement en secondaire, par des expressions algébriques. L’article se prolonge ensuite par la présentation d’une activité centrée sur la généralisation d’une suite de nombres basée sur des supports visuels. Celle-ci montre comment les deux caractéristiques de l’articulation entre l’arithmétique et l’algèbre peuvent se concrétiser dans ce type d’activité. L’analyse des productions d’élèves recueillies lors de son exploitation permet de cibler les besoins spécifiques des élèves, notamment en matière d’apprentissage de la symbolisation de leurs démarches.

**Introduction**

Cet article fait suite à plusieurs recherches collaboratives menées avec des enseignants des deux dernières années du primaire et du premier degré de l’enseignement secondaire en Fédération Wallonie-Bruxelles. Ces travaux ont été prolongés par une recherche menée au Grand-Duché du Luxembourg, destinée à approfondir la réflexion au niveau des trois premières années de l’enseignement secondaire. L’ensemble a abouti à la publication d’articles de recherche et d’un document à l’usage des enseignants (Demonty, Fagnant & Dupont, 2015 ; Demonty, Fagnant & Vlassis, 2015 ; Demonty & Vlassis, 2017 ; Demonty, 2017 ; Demonty, Vlassis & Fagnant, 2018 ; Demonty & Vlassis, 2018 ; Vlassis, Fagnant & Demonty, 2015).

Suite aux difficultés légendaires des élèves lors de l’introduction de l’algèbre au début de l’enseignement secondaire, les recherches menées durant les années 80 ont pointé la nécessité de centrer les apprentissages algébriques du secondaire non pas seulement sur la maitrise de techniques mais également sur le développement d’une forme particulière de pensée, la pensée algébrique, qui permet d’utiliser ces techniques dans une variété de situations (Kieran, 2007 ; Kieran, Pang, Schifter & Ng, 2016).

Si cette pensée constitue un enjeu majeur des apprentissages formels du secondaire, les recherches plus récentes montrent qu’elle peut également se développer plus tôt, dès l’école primaire et au tout début de l’enseignement secondaire, avant même l’introduction du symbolisme algébrique formel : de cette façon, l’algèbre n’apparait plus comme un cours isolé débutant dans l’enseignement secondaire mais peut au contraire s’articuler avec les apprentissages arithmétiques dévolus à l’école primaire et au tout début du secondaire (Carraher & Schliemann, 2007 ; Cai et Knuth, 2011).

Pour mieux préparer les élèves à affronter les rudiments de l’algèbre en secondaire, on pourrait proposer d’enseigner, dès l’école primaire, les premières techniques algébriques, comme par exemple la résolution formelle des équations basée sur les propriétés de l’égalité. Cette manière d’envisager l’articulation ne parait pas satisfaisante, car elle présente le risque de réduire le temps alloué à des apprentissages essentiels de l’école primaire, au profit d’autres que l’on sait déjà complexes pour des élèves plus âgés.

Cette articulation peut également être réfléchie en d’autres termes, en cherchant des manières de raisonner qui prennent racine en arithmétique et qui sont essentielles pour comprendre les rudiments de l’algèbre (Carpenter, Levi, Franke & Zeringue, 2005). Dans cette perspective, l’articulation entre l’arithmétique et l’algèbre se veut donc au service d’objectifs fondamentaux tant du primaire que du secondaire.

Quelles activités sont-elles particulièrement porteuses en matière d’articulation arithmétique-algèbre ? Et comment les exploiter pour permettre aux élèves de développer les compétences prioritaires de l’école primaire et secondaire ?

C’est sur ces questions que cet article se penche. Il est structuré en deux parties. La première partie fait le point sur les deux éléments clés de l’articulation entre l’arithmétique et l’algèbre. La deuxième partie développe ensuite une activité particulièrement porteuse en matière d’articulation entre l’arithmétique et l’algèbre. Exploitable tant à l’école primaire que secondaire, elle permet de montrer comment les apprentissages de ces deux niveaux scolaires peuvent s’articuler pour permettre un développement plus progressif des compétences numériques entre 10 et 14 ans.

**Première partie : les deux éléments clés de l’articulation entre l’arithmétique et l’algèbre.**

Afin d’introduire la thématique, nous proposons une mise en perspective de questions d’évaluations soumises aux élèves au terme de la scolarité primaire (CEB) et des deux premières années du secondaire (CE1D) en Belgique francophone. Bien sûr, les questions et leurs attendus sont différents à 12 et 14 ans mais cette première approche permet de constater qu’aux deux niveaux de la scolarité, certaines activités peuvent être articulées et servent ainsi les objectifs prioritaires de l’école primaire et du début de l’enseignement secondaire.

Par la suite, nous développons deux éléments clés de l’articulation entre l’arithmétique et l’algèbre : (1) la nécessité de développer une pensée relationnelle avec comme objectif, un travail sur le sens de l’égalité et les propriétés des opérations (Carpenter et al, 2005) et (2) l’émergence d’un raisonnement analytique impliquant des quantités indéterminées (Radford, 2014).

Cette première partie débouche enfin sur un modèle permettant d’articuler les compétences numériques à développer entre 10 à 14 ans, pour permettre une meilleure progression dans les apprentissages réalisés durant les deux dernières années de l’école primaire et les premières années du secondaire.

* 1. **Quelques exemples d’activités numériques proposées aux élèves de 12 et 14 ans**

Dans les évaluations certificatives de ces dernières années, nous avons identifié 3 types d’activités du même type qui sont soumises aux élèves aux deux moments de la scolarité :

* des problèmes impliquant des quantités indéterminées
* des situations suscitant la généralisation d’une suite de nombres
* des calculs à transformer par d’autres, plus simples.

Les figures 1, 2 et 3 ci-après mettent en perspective des questions issues de ces deux évaluations.

1. *Des problèmes impliquant des quantités indéterminées*

|  |  |
| --- | --- |
| **Exemple de question posée à 12 ans** | **Exemple de question posée à 14 ans** |
| **CEB 2013** | **CE1D 2016** |

**Figure 1** : Questions portant sur la résolution de problèmes

Comme le montre la figure 1, la résolution de problèmes de partages inégaux apparait aux deux moments de la scolarité. Dans ce type de problèmes consistant à partager un tout en une série de parts inégales, aucun lien ne peut être directement établi entre le tout et chacune des parts : c’est plutôt les rapports entre les parts inconnues qui sont connus - «  un grand pot contient *deux fois plus* de graines qu’un petit pot » pour le problème destiné aux élèves de 12 ans ou «  le 2e jour, elle marche *10 km de plus* que le 1e jour et le 3e jour, elle marche le *double de* kilomètres parcourus le 2e jour » pour le problème destiné aux élèves de 14 ans. Les élèves sont donc confrontés, aux deux moments de la scolarité, à des problèmes comprenant des quantités indéterminées (le nombre de graines dans des pots de grandeurs différentes ou la distance marchée durant chaque étape d’une randonnée) reliées entre elles par des relations additives et/ou multiplicatives connues.

1. *Des situations suscitant la généralisation d’une suite de nombres*

|  |  |
| --- | --- |
| **Exemple de question posée à 12 ans** | **Exemple de question posée à 14 ans** |
| **CEB 2013** | **CE1D 2018** |

**Figure 2** : Questions portant sur une activité de généralisation

La figure 2 propose une deuxième idée d’activités que l’on retrouve à l’école primaire et secondaire : les activités de généralisation. Celles-ci amènent à analyser une suite arithmétique de nombres. Si la question destinée aux plus jeunes élèves se centre sur l’analyse d’un terme de la suite en recherchant plusieurs calculs permettant de le retrouver, la question posée aux élèves plus âgés prolonge cette réflexion vers l’élaboration d’une formule permettant de retrouver n’importe quel terme.

1. *Des calculs à transformer par d’autres, plus simples.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Exemple de question posée à 12 ans** | **Exemple de question posée à à 14 ans** |
| **CEB 2016** | **CE1D 2016** |

**Figure 3** : Questions portant sur la transformation de calculs

Comme le montre la figure 3, on retrouve dans les deux types d’évaluation, des questions amenant les élèves à transformer des calculs afin de réduire leur complexité. A l’école primaire, ces calculs impliquent l’utilisation de procédures de calcul mental, elles-mêmes liées aux propriétés des opérations (commutativité, associativité et distributivité). A l’école secondaire, ces calculs impliquent la transformation d’expressions algébriques qui peuvent également se justifier en référence aux propriétés des opérations.

* 1. **Que recouvrent ces situations permettant l’articulation arithmétique/algèbre ?**

La mise en perspective de questions issues des évaluations certificatives illustre le fait que certaines compétences peuvent être pensées en continuité, et servir ainsi tant la compréhension de l’arithmétique que de l’algèbre.

Cette recherche de continuité a également fait l’objet de plusieurs recherches (Carpenter et al, 2005 ; Radford, 2008 & 2014 ; Cai & Knuth, 2011 ; Kieran, 2007 ; Kieran, et al, 2016). Dans cette section, nous développons deux éléments clés d’une articulation fructueuse entre l’arithmétique et l’algèbre, déjà évoqués précédemment à savoir :

* une pensée relationnelle, avec comme objectif, un travail sur l’égalité et les propriétés des opérations (Carpenter, et al., 2005).
* un raisonnement analytique impliquant des quantités indéterminées (Radford, 2014).

1. *Une pensée relationnelle, avec un travail sur l’égalité et les propriétés des opérations*

Selon Carpenter et al. (2005), lorsqu’on apprend les procédures de calculs mentaux, on peut soit focaliser l’attention des élèves sur les techniques en tant que telles, soit mettre l’emphase sur les propriétés des opérations qui les sous-tendent.

Illustrons cette idée au départ du premier exercice de la figure 3, destiné aux élèves de 12 ans :

76,4 + 83,8 = …. + 84

Les élèves peuvent trouver la réponse correcte en se souvenant de la technique de compensation dite croisée : « ce que tu enlèves à l’un des termes, tu dois l’ajouter à l’autre terme ». S’ils ont oublié cette règle, ils sont souvent contraints de calculer la réponse du calcul « 76,4 + 83,8 » et ensuite soustraire 84 de ce résultat, technique qui fonctionnera, mais qui nécessitera également des calculs assez compliqués.

Bien que cette technique de compensation croisée soit basée sur des propriétés fondamentales de l’arithmétique (en l’occurrence, la commutativité et l’associativité de l’addition), les élèves ont tendance à perdre de vue cette idée et n’ont ainsi plus accès à une compréhension de cette technique qui leur permettrait par exemple de décomposer le premier calcul comme suit :

*76,4 + 83,8 = 76,4 + (84 – 0,2) = (76,4 – 0,2) + 84 = 76,6 + 84*

En apprenant aux élèves à transformer des calculs par d’autres ayant la même solution, sans chercher à identifier précisément cette solution, on leur permet de prendre conscience des propriétés des opérations et, dans la foulée, de développer une représentation correcte du signe d’égalité qui est ainsi placé entre deux expressions désignant le même nombre. Ce faisant, on amène les élèves à comprendre en profondeur les procédures usuelles de calcul mental, ce qui constitue un des piliers de l’école primaire en mathématiques. Des supports visuels ou des énoncés de la vie de tous les jours, peuvent aider les élèves à accéder à ces propriétés des opérations, sans passer par leur mémorisation formelle.

Cette compréhension en acte des propriétés des opérations et cette vision correcte du signe d’égalité sont également indispensables pour donner sens aux transformations algébriques apprises en secondaire.

Par exemple, pour réduire l’expression « 4b + 4 – b », il ne sera plus possible de rechercher d’abord la réponse au calcul « 4b + 4 » avant de soustraire « b » de cette réponse. Il deviendra en revanche indispensable de transformer le premier calcul en un autre, plus simple, qui pourra être trouvé grâce à nouveau, à l’utilisation des propriétés des opérations (en l’occurrence la commutativité et l’associativité de l’addition) :

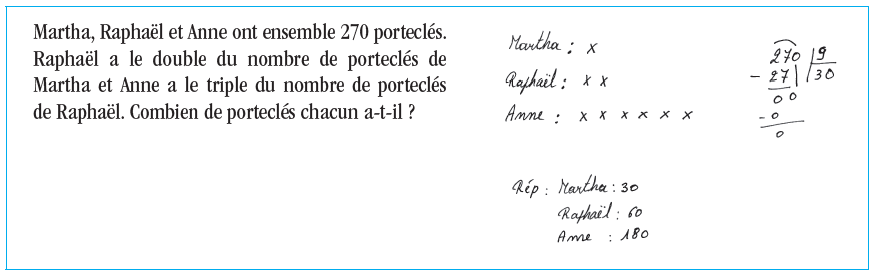
*4b + 4 – b = 4b – b + 4 = 3b + 4*

Une vaste étude longitudinale menée en Nouvelle-Zélande a permis de suivre l’évolution des apprentissages numériques de plus de 800 élèves de 10 à 14 ans. Les élèves qui ont développé, dès l’école primaire, des stratégies raisonnées en matière de calcul parviennent mieux que les autres à comprendre les transformations algébriques lorsque l’algèbre formelle est introduite au début de l’enseignement secondaire. De plus, ces élèves continuent à progresser, y compris dans la résolution de problèmes impliquant ces techniques (Britt & Irwin, 2011).

1. *Un raisonnement analytique impliquant des quantités indéterminées*

On peut encore faire un pas plus loin dans la recherche d’articulations entre l’arithmétique et l’algèbre en cherchantdes formes de raisonnements particulièrement sollicitées en algèbre et qui peuvent déjà être amorcées en arithmétique. Historiquement, l’algèbre est apparue lorsqu’on a commencé à réaliser des opérations impliquant des quantités indéterminées : cette capacité à réaliser des opérations impliquant de telles quantités est donc une caractéristique essentielle de l’algèbre, qu’il est possible d’exploiter dans un cadre numérique. Ce type de raisonnement sur des quantités indéterminées est qualifié d’analytique par certains auteurs (Radford, 2014; Riviera & Réhaume, 2014).

C’est par exemple le cas des problèmes de partages inégaux que l’on retrouve souvent tant à l’école primaire que secondaire. En analysant des démarches de résolution d’élèves face à ces problèmes, Riviera et Réhaume (2014) ont pu mettre en évidence que certains d’entre eux, avant même d’avoir appris l’algèbre, parviennent à analyser les problèmes en réfléchissant aux quantités inconnues, de l’énoncé sans chercher d’emblée à en déterminer la valeur, comme l’illustre la figure 4 ci-dessous :



**Figure 4** : Un exemple de démarche de résolution de problèmes de nature algébrique (Oliveira & Réhaume, 2014, p. 417).

Dans cet exemple, les opérations que les élèves réalisent n’impliquent que des nombres. Pourtant, pour trouver le premier calcul « 270 : 9 », les élèves ont dû analyser le problème en considérant une quantité indéterminée (la part de Martha, symbolisée dans la production par une croix), qui leur a alors permis de retrouver les trois quantités inconnues du problème (les parts respectives de Martha, de Raphaël et d’Anne). Cette démarche n’est pas sans lien avec la démarche algébrique enseignée à l’école secondaire, comme le montre la comparaison des deux démarches dans la figure 5 ci-dessous.

|  |  |
| --- | --- |
| **Démarche pré-algébrique ancrée dans l’arithmétique** | **Démarche algébrique impliquant les techniques algébriques formelle** |
|  | *Choix des inconnues* *:*  Le nombre de porteclés de Martha : x  Le nombre de porteclés de Raphaël : 2x  Le nombre de porteclés d’Anne : 6x  *Mise en équation et résolution :*  x + 2x + 6x = 270  9x = 270  x = 30 |

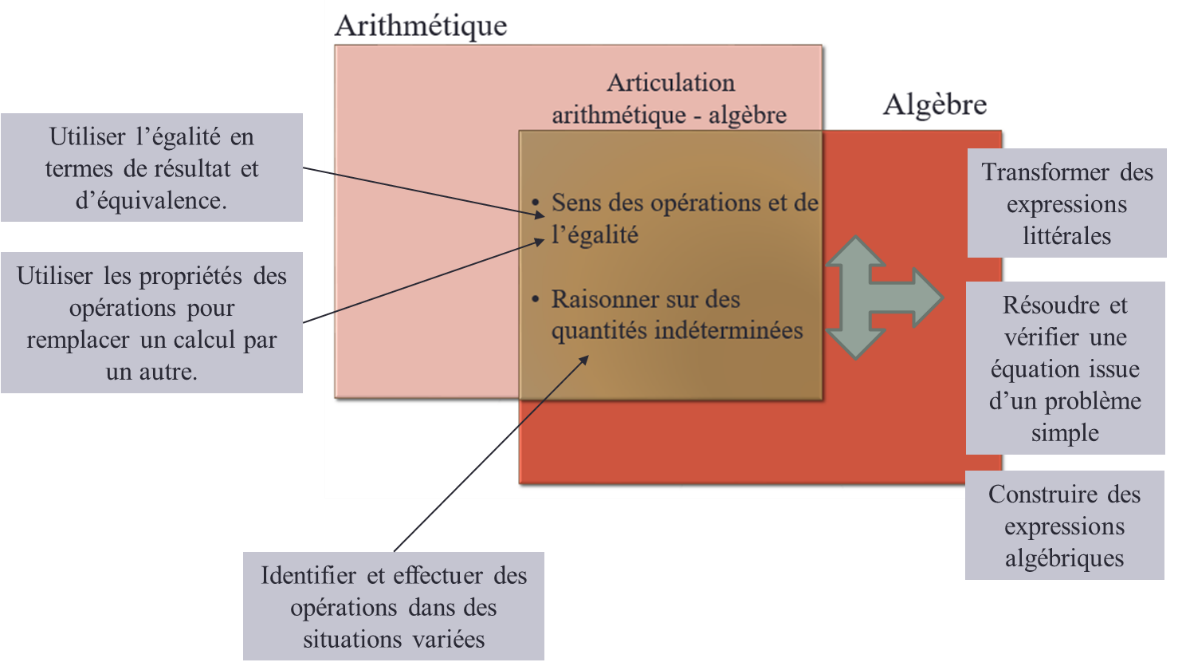
**Figure 5** : Comparaison de deux démarches de résolution de problèmes de partages inégaux

Encourager les élèves à focaliser leur attention sur l’analyse des relations évoquées dans les problèmes de partages inégaux, sans chercher d’emblée à les résoudre permet non seulement d’affiner les démarches de résolution de problèmes mais développe également les prémices d’une pensée algébrique qui, pourra déboucher, à 14 ans, sur une mise en équation et sa résolution plus formelle.

* 1. **Un modèle pour l’articulation des apprentissages numériques entre 10 et 14 ans.**

Si, comme de nombreux chercheurs en didactique des mathématiques l’ont montré, l’algèbre ne se réduit pas à l’introduction de lettres dans les calculs, et que l’arithmétique n’a pas pour seul objectif d’automatiser des procédures de calculs, il est alors possible d’articuler ces deux domaines jalonnant les apprentissages numériques des élèves de 10 à 14 ans.

En amenant, dès l’école primaire, les élèves à utiliser l’égalité en termes d’équivalence, et non seulement en termes de résultat, en suscitant une compréhension en acte des propriétés des opérations et en affinant leurs démarches pour résoudre des problèmes impliquant des quantités indéterminées, on approfondit les compétences arithmétiques et on assoit également les bases d’une pensée algébrique. Avec l’introduction de l’algèbre formelle à l’école secondaire, ces premiers acquis pourront progressivement déboucher sur l’apprentissage de compétences purement algébriques telles que la transformation d’expressions littérales, la construction d’expressions algébriques ou la résolution formelle d’équations du premier degré à une inconnue. Ces idées sont synthétisées dans le modèle présenté dans la figure 6.



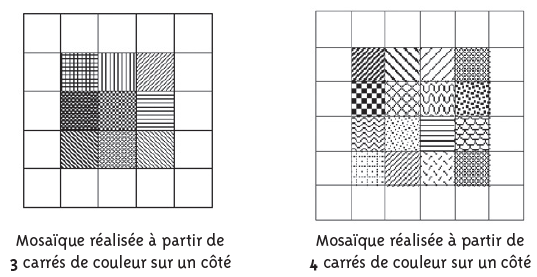
**6** : Modèle pour articuler les compétences arithmétiques et algébriques à développer entre 10 et 14 ans.

**Deuxième partie : Une activité de classe particulièrement propice à l’articulation entre l’arithmétique et l’algèbre**

* 1. **Présentation de l’activité de généralisation « Antoine fait des mosaïques »**

Les activités de généralisation offrent un contexte significatif pour travailler l’articulation entre l’arithmétique et l’algèbre (Cai & Knuth, 2011; Radford, 2008, 2014; Riviera, 2013 ; Warren, Trigueros, Ursini, 2016). La situation « Antoine fait des mosaïque » , présentée en annexe de cet article, est un exemple d’une telle activité. Ce type d’activité est bien connu : elle a été exploitée récemment dans cette revue par Krysinska (2018) ; elle est parfois appelée « Manufacturier » (Bednarz, 2005), « Germaine la couturière » (Vlassis & Demonty, 2002) ou « Carré bordé » (Coulange & Grugeon, 2008;  Coppé & Grugeon, 2009).

Dans la version « Antoine fait des mosaïques » que nous proposons, il s’agit de décrire une méthode pour déterminer des carreaux blancs bordant des mosaïques construites selon un même logique et dont deux modèles sont présentés sur la fiche destinée aux élèves :



L’activité a été ensuite structurée en 4 étapes :

**Etape 1 (question 1) : Utiliser le matériel pour un cas proche**

Par groupes, les élèves sont amenés à construire d’abord une mosaïque à partir de **5 carrés** de couleur sur un côté. La question 1 oriente les élèves vers le dénombrement du nombre de carrés formant le contour de la mosaïque à réaliser. La question ne nécessite pas et n’invite pas à un dénombrement raisonné mais tout en construisant « matériellement » la mosaïque, certains élèves peuvent en comprendre la structure.

**Etape 2 (question 2)** **: Produire un calcul pour un cas proche**

Les élèves sont invités à rechercher le nombre de carrés blancs à utiliser pour réaliser une mosaïque de **7 carrés** de côté, mais cette fois il leur est demandé de produire un calcul afin de les amener à s’intéresser aux actions posées et non plus seulement au nombre de carrés. On oriente ainsi l’attention des élèves sur les éléments de la régularité que nous nommerons « invariants ».

**Etape 3 (question 3) : Produire un calcul pour un cas lointain**

La question est la même que la question 2 mais cette fois, l’élève ne peut plus réaliser le dénombrement direct ; le matériel n’est pas suffisant. La taille relativement grande de la dimension de la mosaïque à **32 carrés** de couleurs a pour but de « forcer » l’élève à expliciter les régularités observées dans les cas précédents pour l’adapter au cas présent.

**Etape 4 (questions 4 et 5) : Généraliser**

**A la** **question 4**, les élèves doivent trouver un moyen général qui donnera le nombre de carrés blancs quel que soit le nombre de carrés de couleur sur un côté du carré coloré. Dans cette question, les invariants ne peuvent plus référer à des cas spécifiques, mais à des cas potentiels. La généralité peut être formulée de manière libre, soit en utilisant le langage ordinaire, ou un langage mixte constitué de symboles mathématiques et non mathématiques, ou encore le langage formel. Finalement, la **question 5** invite l’élève à réfléchir sur la formulation symbolique de la généralité et à représenter de manière explicite et mathématique l’indéterminée.

Cette organisation des différentes questions a pour but de plonger les élèves dans une activité de recherche, de renforcer le développement d’une pensée relationnelle ainsi que le sens attribué à l’indéterminée comme précisé dans les points ci-après.

* 1. **Activité de généralisation et recherche**

L’intérêt de ce type d’activité est qu’il n’y a pas qu’une et une seule règle possible et que très souvent, les élèves ont beaucoup d’idées.

Par exemple :

* Un élève peut visualiser la bordure blanche en la décomposant en 4 bandes ayant la même longueur que le nombre de carrés de couleur sur un côté et 4 carrés de plus (correspondant aux 4 coins de la bordure blanche).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Décomposition visuelle de la bordure blanche | Expression de cette décomposition à l’aide d’un calcul | Expression de cette décomposition à l’aide d’une formule |
|  | Mosaïque réalisée à partir de 5 carrés de couleur sur un côté : | Formule pour une mosaïque réalisée à partir de n carrés de couleur sur un côté : |

* Un autre élève peut décomposer la bordure blanche en considérant qu’on a 2 bandes plus courtes qui comportent le même nombre de carrés colorés qu’il n’y en a sur un côté (par exemple les 2 bandes placées au-dessus et en dessous de la figure formée par les carrés colorés) et deux bandes plus longues qui comportent 2 carrés de plus que le nombre de carrés colorés sur un coté (par exemple les 2 bandes placées à la gauche et à la droite de la figure formée par les carrés colorés)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Décomposition visuelle de la bordure blanche | Expression de cette décomposition à l’aide d’un calcul | Expression de cette décomposition à l’aide d’une formule |
|  | Mosaïque réalisée à partir de 5 carrés de couleur sur un côté : | Mosaïque réalisée à partir de *n* carrés de couleur sur un côté : |

Travailler autour de ce type de situation permet donc de **plonger l’élève dans une activité de recherche** : la façon dont il analyse une figure doit pouvoir s’observer sur d’autres figures également. Amener les élèves à confronter leurs démarches peut les aider à comprendre comment généraliser : il faut trouver une caractéristique particulière, vérifier que celle-ci peut s’appliquer à tous les termes de la suite et l’exprimer à l’aide du support visuel, du langage courant, mais aussi de calculs (en primaire) et de formules qui progressivement se détachent du contexte qui les a fait naitre (en secondaire).

* 1. **Activité de généralisation et pensée relationnelle**

**En matière de pensée relationnelle**, cette activité nécessite que les élèves se concentrent moins sur l’identification du nombre de carrés blancs de chaque mosaïque que sur la structure de la figure, et sur les opérations permettant de trouver ce nombre.

* Visuellement, il s’agit en effet d’identifier une structure mettant en relation le nombre de carrés blancs sur la bordure en fonction du nombre du nombre de carrés colorés qu’il y a sur un côté de la figure.
* Ensuite, il s’agit d’exprimer cette structure à l’aide d’un calcul ou d’une formule :

Par exemple, on peut trouver les calculs suivants dans une mosaïque de…

5 carrés = 24 carrés blancs

7 carrés = 32 carrés blancs

32 carrés = 132 carrés blancs

Dans tous les cas, on multiplie le nombre de carrés sur un côté de couleur par 4 puis on ajoute 4 à la réponse. Pour généraliser, il faut regarder non pas la réponse découlant de la décomposition, mais plutôt les opérations réalisées.

La présence du support visuel accompagnant la suite va avoir comme conséquence de favoriser la variété de démarches (Cai, Moyer, Wang, Wang & Nie, 2011; Geraniou, Mavrikis, Hoyles & Noss, 2011 ; Warren et al, 2016) et partant, de fournir des opportunités de discuter de l’équivalence de ces démarches. Il sera alors possible de donner du sens **aux propriétés des opérations** et à l’**égalité** par la comparaison des différentes opérations produites.

Par exemple, en demandant aux élèves pourquoi on peut dire sans calculer que …

Différents arguments peuvent être produits pour soutenir la réflexion sur le sens et les propriétés des opérations (en particulier sur la distributivité de la multiplication par rapport à l’addition) : des actions sur le dessin, une transformation des calculs ou des expressions algébriques permettant de comprendre finalement pourquoi les expressions sont équivalentes. Le tableau ci-dessous illustre cette idée.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Arguments basés sur les actions sur le dessin | | | |
| « Plutôt que de prendre 2 paquets de 32 et 2 paquets de 34… | | on peut décomposer les 2 paquets de 34 en 2 paquets de 32 et encore 2 paquets de 2… | ça revient donc au même que de prendre 4 paquets de 32 et d’ajouter 4 » |
|  | |  |  |
| Arguments basés sur le sens et les propriétés des opérations | | | |
| Arithmétique |  |  |  |
| Algèbre |  |  | *=* |

**2.3 Activité de généralisation et raisonnement analytique (indéterminée)**

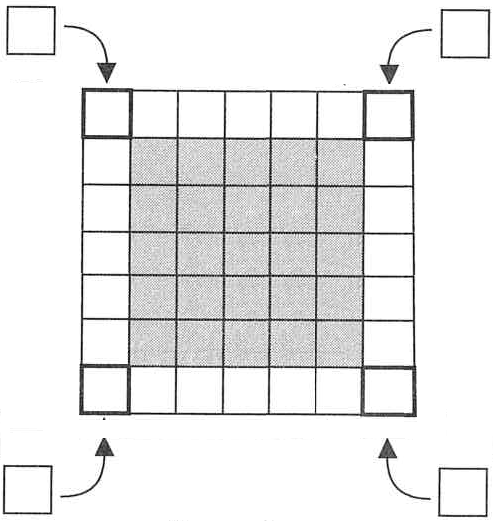
Le questionnement de ce type d’activité amènera également les élèves à raisonner sur une **indéterminée** à savoir le nombre de carrés colorés sur un côté de la mosaïque. Celle-ci peut apparaître dans le discours oral des élèves qui expliquent leur démarche, à l’aide de gestes ou en pointant des éléments des figures sur le dessin. Elle devra également s’exprimer par écrit en réponse aux questions 4 et 5 de l’activité.

Radford a observé trois façons de symboliser par écrit l’indéterminée

* ***La généralisation algébrique contextuelle :***

L’élève symbolise l’indéterminée à partir d’un nombre : il choisit un nombre et exprime la généralisation au départ de celui-ci.

Par exemple, dans le cas de la visualisation



Cela consiste à écrire : *«*Si, par exemple, il y a 5 carrés de couleur sur un côté, on fait 4 fois 5 et on ajoute 4 ». Le « 5 » n’est pas considéré comme un nombre précis mais bien comme un exemple générique qui pourrait être transposé à tous les cas.

* ***La généralisation algébrique contextuelle :***

L’inconnue est symbolisée par un substitut symbolique (point d’interrogation, cadre vide, lettre, …). La lettre est parfois utilisée mais la symbolisation élaborée garde des traces de la situation qui l’a vue naître : par exemple, l’élève utilise des parenthèses pour indiquer l’ordre des opérations à réaliser, sans que cela ne soit nécessaire selon la règle de priorité des opérations.

Par exemple, dans le cas de la visualisation précédente, cela revient à écrire :

* ***La généralisation algébrique symbolique :***

Elle se détache quant à elle de la situation, pour proposer une écriture tout à fait correcte sur le plan mathématique, qui n’est plus enracinée dans le contexte de la suite.

Par exemple, dans le cas de la visualisation précédente, cela revient à écrire :

Il importe de souligner que la généralisation algébrique symbolique, tout en s’appuyant dans les deux autres types de généralisation, représente une véritable rupture. Les élèves passent en effet d’une expression de la généralisation sur un mode « narratif » (déroulant les actions posées) et fortement ancrée dans le contexte (dans les généralisations factuelles ou contextuelles) à une modélisation abstraite, régie par des règles algébriques et non plus par les actions concrètes.

* 1. **Expérimentation de l’activité « Antoine fait des mosaïques »**

1. *Organisation de l’activité*

Cette activité a été proposée dans le courant du mois de janvier 2016 dans deux classes de secondaire technique au Grand-Duché du Luxembourg, l’une de 1ère année (grade 7) avec 14 élèves et l’autre de 2e année (grade 8) avec 20 élèves. Cette activité était une première pour les élèves des deux niveaux scolaires. Si les élèves de grade 8 suivaient un cours d’algèbre depuis près d’un an où ils avaient été initiés à la résolution des équations et aux techniques algébriques comme la réduction de termes semblables, etc. – ils maîtrisaient donc «l’algèbre» impliquée dans l’activité - les élèves de la classe de 1ère secondaire (grade 7) n’avaient reçu aucun enseignement de l’algèbre.

Deux moments étaient planifiés. Tout d’abord, deux périodes de temps (2 × 50’) ont été consacrées au travail en groupe pour répondre aux différentes questions de l’activité, puis deux autres périodes de temps (2 × 50’) ont été consacrées à la mise en commun. Nos analyses sont issues des deux premières périodes pendant lesquelles les élèves travaillaient en groupes. L’enseignante et deux chercheurs passaient dans les groupes et aidaient ceux qui étaient en difficulté. Très peu de consignes ont été fournies concernant la tâche à réaliser si ce n’est les consignes d’organisation. Les élèves des deux classes étaient répartis en groupes de deux ou trois. Les données ont été collectées sur la base des productions écrites des groupes d’élèves et d’enregistrements audio ou vidéo des interactions des élèves dans les groupes. Il convient de souligner que les élèves n’avaient jamais résolu de problèmes de généralisation. Pour soutenir les premières actions des élèves, du matériel concret avait été mis à leur disposition pour représenter les mosaïques.

1. *Quelques résultats d’expérimentations*

**Etape 1 (question 1) : Utiliser le matériel pour un cas proche (5 carrés de côté)**

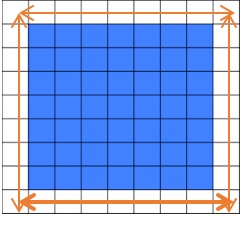
La plupart des groupes ont pu construire, à l’aide du matériel, la mosaïque avec 5 carrés colorés de côté. Seuls 2 groupes (un de 1ère et un de 2e année) n’a pas perçu de suite le sens du questionnement, et l’enseignante est intervenue afin de clarifier la situation qui, rappelons-le, était une première pour les élèves.

**Etape 2 (question 2) : Produire un calcul pour un cas proche (7 carrés de côté)**

* ***Des difficultés à identifier les invariants***

Certains groupes ont éprouvé des difficultés à produire le calcul correct, autrement dit à identifier les éléments de la régularité (invariants), c’est-à-dire les opérations chaque fois appliquées sur le nombre 7.

Par exemple, certains calculent le périmètre. Et comme il y a 9 carrés de côté, il proposent le calcul , (en comptant ainsi 2 fois les quatre coins de la mosaïques, voir schéma ci-dessous) plutôt que de rédiger .



L’erreur des élèves semble venir d’une compréhension de la situation basée sur une visualisation de la figure en termes de périmètre : les carrés blancs correspondent visuellement en effet au contour de la figure. Puisqu’il est demandé de produire un calcul pour trouver le nombre de carrés blancs autour des carrés colorés, les élèves pensent à la formule du périmètre, en l’occurrence, « côté × 4 ».

* ***Différents types d’invariants corrects***

Dans d’autres cas, cette volonté de généraliser est déjà bien présente dans les travaux de groupes. La figure 7 ci-dessous illustrent les 4 démarches observées dans les classes, avec le type de calculs produits ainsi que la formule sous-jacente (*n* = nombre de carrés colorés sur un côté) :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**Figure 7** : Quatre types d’invariants corrects identifiés par les élèves à la question 2

**Etape 3 (question 3) : Produire un calcul pour un cas lointain (32 carrés de côté)**

Certains groupes qui avaient identifié correctement les invariants à la question 2 (pour 7 carrés colorés de côté) n’utilisent pas cette réflexion pour trouver le calcul qui donnera le nombre de carrés blancs à la question 3 (32 carrés colorés de côté).

Un groupe, par exemple, trouve 8 × 4 car 8 × 4 ça fait 32, puis tentent de réaliser la mosaïque avec les 32 carrés colorés de côtés mais vu qu’ils manquent de carrés, ils réalisent un rectangle avec les carrés disponibles qui ne correspond évidemment plus à la structure des mosaïques proposées dans l’activité.

Cette étape pose problème aux élèves qui n’ont pas analysé de manière approfondie les figures précédentes. Dans ce cas, il est nécessaire de revenir sur des cas connus pour chercher et valider une démarche de construction de la figure, et faire réfléchir les élèves sur les invariants identifiés dans ces exemples.

**Etape 4 (questions 4 et 5) : La généralisation**

**A la question 4**, il était demandé aux élèves de généraliser mais sans qu’une symbolisation particulière soit exigée. Les élèves ont écrit leur généralisation soit avec des mots, soit avec des calculs et des mots. Si cette étape de la généralisation n’a pas posé trop de difficultés aux yeux des élèves, la plupart des expressions en mots de la généralisation manquaient de précision comme dans les deux exemples suivants qui correspondent à la formule :

|  |  |
| --- | --- |
| 1. |  |
| 2. |  |

Très peu de groupes d’élèves ont pu produire une formulation complète et correcte. Les réponses à cette question peuvent être l’occasion pour l’enseignant de travailler le vocabulaire et la précision mathématique, dans l’idée que ceux-ci permettent une communication mathématique claire et compréhensible par tous.

**A la question 5**, les élèves ont produit différents types d’expressions qui correspondent aux 3 types de symbolisation identifiés par Radford (2006, 2008).

* La généralisation algébrique factuelle

Dans cette expression, l’indéterminée (variable) est symbolisée au départ d’un cas numérique précis, comme dans l’exemple ci-dessous correspondant à la formule :



Ce type de symbolisation a été produit par des élèves qui n’avaient pas encore reçu d’apprentissage de l’algèbre. Cette symbolisation présente malgré tout un caractère de généralité car soit l’opération est précédée du mot « **exemple** » montrant bien que son statut n’est qu’un cas générique et va au-delà du cas précis des nombres impliqués.

* La généralisation algébrique contextuelle

Même si l’indéterminée (variable) est exprimée à l’aire d’une lettre, la formule garde la trace des actions et des opérations issues de la situation comme dans les deux exemples ci-dessous :

|  |
| --- |
|  |
|  |

Les symbolisations factuelles et contextuelles sont les deux types de symbolisations les plus fréquemment observées tant chez les élèves de 1ères mais aussi chez les élèves de 2e année qui avaient pourtant reçu un enseignement de l’algèbre depuis 1 an. Dans le premier exemple ci-dessus ), on observe une difficulté qui a été observée dans certains groupes, celle d’exprimer une variable au départ d’une autre. Cette difficulté concerne la nécessité de choisir une lettre qui permettra de désigner non pas une, mais plusieurs quantités exprimées dans l’énoncé. Dans le cas de la production n°1 avec la formule , les élèves ont utilisé une lettre pour les deux « grands côtés » et une autre lettre pour les deux « petits côtés ». Les deux « petits côtés » correspondent en fait au nombre de carrés colorés sur un côté (*x*). Les deux « grands côtés » au nombre de carrés colorés sur un côté + 2 autrement dit *x + 2*.

* La généralisation algébrique formelle

Très peu de groupes pensent à réduire d’emblée les expressions sous une forme conventionnelle comme dans l’exemple suivant :



1. *Quelques constats sur l’activité*

L’expérimentation de l'activité apporte des éclairages sur les conditions favorisant le développement de la généralisation algébrique chez des élèves avant ou au début de l’enseignement de l'algèbre. Tout d’abord, il importe de faire travailler les élèves par groupe, afin qu’ils puissent comparer leurs différents points de vue au sein des groupes. Durant cette phase, on a pu observer le rôle important de l’enseignant qui passe dans les groupes et soutient la réflexion des élèves. La phase de mise en commun des différentes formules produites joue également un rôle important dans la progression vers la généralisation algébrique symbolique dans la mesure où les élèves seront confrontés à l’expression de différent(e)s moyens/formules pour généraliser un processus basé sur une même figure, et qu’il s’agira de rendre ces diverses formules comparables.

Ensuite, nos résultats montrent que, comme nous l’avions souligné précédemment, la généralisation algébrique symbolique où l’élève est amené à produire une formule conventionnelle n’est pas spontanée chez les élèves qui pourtant avaient déjà une année d’algèbre derrière eux. Ce constat a également été observé dans ce même type d’activité avec des élèves plus âgés (fréquentant une 4e année du secondaire). La tendance également observée dans ce contexte était, comme dans le cas de la présente étude, de produire des symbolisations contextualisées.

Enfin, il convient de souligner que les débats et discussions au sein des groupes et de la classe ont permis également aux élèves de développer les compétences mathématiques transversales telles que résoudre, raisonner et argumenter, etc.

La diversité des formules proposées par les élèves témoignent du potentiel de ce type d’activité pour l’articulation arithmétique-algèbre et confirme les constats déjà pointés dans d’autres recherches : les élèves sont capables de généraliser un processus et ce, dès l’école primaire (Cooper & Warren, 2011; Moss & McNab, 2011; Radford, 2008, 2014).

**Conclusions et perspectives**

« *Il y a quelque chose de profondément algébrique dans l’arithmétique et quelque chose de profondément arithmétique dans l’algèbre, et les activités de généralisation rapprochent ces deux domaines* » (Radford, 2014, p. 2).

Articuler les compétences arithmétiques et algébriques n’implique pas d’enseigner de manière précoce l’algèbre, ni même de réformer fondamentalement les activités réalisées à la transition entre l’enseignement primaire et secondaire.

Bien plus que les activités en tant que telles, c’est donc le regard porté sur celles-ci qui doit évoluer. En amenant les élèves à analyser des calculs, non pas en comparant leur réponse, mais plutôt les opérations qu’ils impliquent, les instituteurs peuvent susciter une meilleure compréhension des propriétés des opérations et de l’égalité, ces dernières constituant également le fondement des transformations algébriques. De la même façon, les enseignants du secondaire ont un rôle à jouer pour que les premiers apprentissages algébriques s’insèrent plus directement dans les stratégies numériques des élèves, de manière à ce que l’algèbre ne constitue plus cette matière isolée des mathématiques, sans lien avec les apprentissages du primaire.

Dans cette recherche de complémentarités entre l’arithmétique et l’algèbre, les activités de généralisation ont fait l’objet d’une attention particulière dans la recherche (Radford, 2008, 2014 ; Riviera, 2013). Si l’activité même de généralisation est à la portée des élèves et ce, bien avant l’introduction de l’algèbre formelle, un travail approfondi doit être réalisé en matière de symbolisation, particulièrement lorsque les expressions algébriques sont introduites dans les classes.

**Références**

Britt, M. S., & Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. In *Early Algebraization. A dialogue for multiple perspective.* (pp. 277-301). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg

Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., Wang, C., & Nie, B. (2011). Longitudinal investigation of the curricular effect: An analysis of student learning outcomes from the LieCal Project in the United States. *International Journal of Educational Research*, *50*(2), 117-136.

Cai, J., & Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A dialogue for multiple perspective*. New York: Springer.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM –Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *37*(1), 53-59.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Cooper, T. J., & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students’ ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. In J. Cai & E. Knuth (Eds), *Early algebraization.* *A dialogue for multiple perspective*. (pp. 187-214). New York: Springer.

Coppé, S., & Grugeon, B. (2009). Le calcul littéral au collège. Quelle articulation entre sens et technique?. In *Colloque de la CORFEM* (COmmission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques). Caen : IUFM de Basse Normandie.

Coulange, L., & Grugeon, B. (2008). Pratiques enseignantes et transmissions de situations d’enseignement en algèbre. *Petit x, 78*, 5-23.

Demonty, I. (2017). *Regard croisé sur le développement de la pensée algébrique : entre raisonnements des élèves et connaissances des enseignants*. Thèse de doctorat. Université de Liège.

Demonty, I., & Vlassis, J. (2018). *Développer l’articulation arithmétique entre le primaire et le secondaire.* Bruxelles : Van In-De Boeck.

Demonty, I., & Vlassis, J. (2017). Evaluer les connaissances pour enseigner l'algèbre élémentaire: élaboration d'un outil diagnostique. *Evaluer : Journal International de Recherche en Education et Formation, 2*(2), 18.

Demonty, I., Vlassis, J., & Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Educational Studies in Mathematics, 99*(1)1-19.

Demonty, Fagnant, & Vlassis (2015). Le développement de la pensée algébrique: quelles différences entre les raisonnements mis en place par les élèves avant et après l'introduction de l'algèbre? *Actes du congrès EMF 2015. Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*. Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene. Alger.

Demonty, I., Fagnant, A., & Dupont, V. (2015). Analyse d’un outil d’évaluation en mathématiques: entre une logique de compétences et une logique de contenu. *Mesure et évaluation en éducation, 38*(2), 1-29.

Geraniou, E., Mavrikis, M., Hoyles, C., & Noss, R. (2011). Students’ justification strategies on the equivalence of quasi-algebraic expressions. *Proceedings of PME 35, 2,* 393–400. Ankara: Turkey.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer.

Krysinska, M. (2018). Production des premières expressions littérales dans le cadre des suites figurées. *Losange, 41*, 28-47.

Moss, J., & McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students’ reasoning and generalizing about functions and co-variation. In J. Cai & E. Knuth (Eds), *Early Algebraization.* *A dialogue for multiple perspective*. (pp. 277-301)*.* New York: Springer.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *6*(2), 257-277.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in Different Contexts. *ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. DOI 10.1007/s11858-007-0061-0.

Rivera, F. D. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics: Psychological and pedagogical considerations.* New York, NY: Springer.

Oliveira, I., & Rhéaume, S. (2014) Comment s’y prennent-ils? La résolution de problèmes de partage inéquitable par des élèves avant enseignement formel de l’algèbre, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *14:4*, 404-423.

Vlassis, J. Fagnant, A. & Demonty, I. (2015). Symboliser et conceptualiser, une dialectique intrinsèque aux mathématiques et à leur apprentissage. In M. Crahay & M. Dutrevis (eds), *Psychologie des apprentissages scolaires – 2e édition* (pp. 221-255). Bruxelles : De Boeck.

Vlassis, J., & Demonty, I. (2002). *L'algèbre par des situations-problèmes au début du secondaire: guide méthodologique et CD-ROM*. Bruxelles : De Boeck.

Warren, E., Trigueros, M., & Ursini, S. (2016). Research on the Learning and Teaching of Algebra. In A. Gutiérrez, G. Leder, & P. Boero (Eds). *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. The journey continues* (pp. 73-108). Rotterdam : Sense Publishers.

**Annexe : Activité “Antoine fait des mosaïques »**

**Antoine fait des mosaïques**

Antoine veut réaliser des mosaïques carrées réalisées à partir de carrés, dont certains sont colorés et d’autres pas. Ces mosaïques sont de différentes tailles mais elles sont toutes produites sur le même modèle comme dans les exemples ci-dessous :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |
| Mosaïque réalisée à partir de  **3** carrés de couleur sur un côté | Mosaïque réalisée à partir de  **4** carrés de couleur sur un côté |

Antoine veut réaliser des mosaïques de différentes tailles. Pour prévoir le matériel, il cherche un moyen de calculer le nombre de carrés blancs dont il aura besoin à partir du nombre de carrés de couleurs qu’il veut mettre sur un côté de la mosaïque.

1) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 5 carrés de couleur sur un côté. A l’aide du matériel, construisez cette mosaïque. Combien de petits carrés blancs sont-ils nécessaires pour réaliser cette mosaïque?

2) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 7 carrés de couleur sur un côté.

Cherchez cette fois un calcul qui lui permettra de trouver combien de carrés blancs sont nécessaires dans ce cas.

3) Faites de même pour une mosaïque construite à partir de 32 carrés de couleur sur un côté.

4) Trouvez un moyen qui permette de calculer, à chaque fois, le nombre de carrés blancs nécessaires pour réaliser une mosaïque, quel que soit le nombre de carrés colorés de côté.

5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.