INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

38
OCTOBRE 2001

CAHIER DE DIDIREM

DEA DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

L'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre dans le contexte de la résolution de problèmes arithmétiques

Isabelle DEMONTY

DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

UNIVERSITE PARIS 7 - DENIS DIDEROT

DEA DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

L'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre dans le contexte de la résolution de problèmes arithmétiques

Isabelle DEMONTY

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, nous souhaitons remercier les personnes qui nous ont apporté aide et soutien.

Messieurs Colomb et Pressiat ont accepté la direction de ce mémoire. Nous les remercions très sincèrement pour leur grande disponibilité, les réflexions qu'ils nous ont aidée à mener, ainsi que les relectures qu'ils ont effectuées.

Toute notre gratitude va également à Monsieur Crahay, notre Chef de service, pour le soutien qu'il nous a également apporté dans la préparation de ce travail.

Nous adressons également nos plus vifs remerciements aux deux enseignants, ainsi qu'à quinze de leurs élèves qui nous ont permis de mener à bien nos expérimentations.

Enfin, nous tenons à remercier Monsieur Fabian Cheret, pour tout le soutien moral qu'il nous a apporté, ainsi que nos collègues et amis pour les dernières relectures qu'ils ont réalisées.

1. INTRODUCTION

Le passage de l'enseignement primaire à l'enseignement secondaire a fait l'objet de nombreux travaux ces dernières années. Les directives officielles belges préconisent un assouplissement de la transition entre les deux niveaux d'enseignement, afin de concevoir une scolarité fondamentale répartie sur huit années scolaires (six années d'école primaire, et les deux premières années de l'enseignement secondaire)[1]. Dans ce contexte, les deux premières années de l'enseignement secondaire doivent être considérées en continuité avec les apprentissages réalisés à l'école primaire.

D'un point de vue didactique, cette question de la transition entre les deux niveaux d'études correspond, entre autres, à un passage des apprentissages arithmétiques vers les premiers apprentissages algébriques[2]. Dans le cadre de ces derniers, de nombreuses connaissances développées antérieurement vont devoir être remises en question et approfondies.

C'est le cas notamment lorsque l'élève aborde la résolution de problèmes. Il a alors à sa disposition de nombreuses expériences en arithmétique, où, confronté à différents types de situations, il a élaboré des connaissances, des croyances et des techniques autour de ces problèmes. L'introduction de l'algèbre va le confronter à des manières différentes d'approcher la résolution de problèmes et mettre en œuvre des changements conceptuels importants.

Quelle est l'ampleur des remaniements nécessaires pour amener l'élève débutant en algèbre à aborder la résolution de problèmes arithmétiques selon une démarche algébrique ? Tous ces acquis élaborés à l'école primaire pourront-ils être réinvestis dans une approche algébrique ou devront-ils être définitivement abandonnés dès les premiers apprentissages réalisés dans l'enseignement secondaire ?

A travers ces questions, c'est la problématique de l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre qui est posée. Comment cette articulation entre l'arithmétique et l'algèbre se manifeste-t-elle dans le contexte de la résolution des problèmes ?

L'objectif de notre étude exploratoire est de préciser quelques caractéristiques de la transition entre l'arithmétique et l'algèbre dans le contexte des problèmes arithmétiques de type "partages inégaux". Nous avons choisi ce type de problèmes parce qu'il est largement exploité dans les classes primaires de Belgique et qu'il se rencontre également dans l'enseignement secondaire, après l'apprentissage des équations du premier degré à une inconnue. Ces situations s'adaptent donc bien à une étude de l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre dans le contexte de la résolution de problèmes.

---

[1] En Belgique, l'enseignement primaire a une durée de six ans et accueille les élèves de six à douze ans. L'enseignement secondaire, quant à lui, accueille les élèves de 12 à 18 ans. Il a donc une durée de six ans également et est séparé en trois degrés. Le premier accueille les élèves de 12 à 14 ans (première et deuxième secondaires), le deuxième est destiné aux élèves de 14 à 16 ans (troisième et quatrième secondaires) et le troisième, aux élèves de 16 à 18 ans (cinquième et sixième secondaires).

[2] En primaire, la résolution de problèmes est réalisée sur base des connaissances arithmétiques. L'enseignement de l'algèbre débute en première année du secondaire et est orienté vers la maîtrise du calcul algébrique formel. En deuxième année du secondaire débute l'enseignement des équations du premier degré à une inconnue ainsi que des problèmes qui leur sont associés.

Dans la **première partie**, à la lumière d'une revue de la littérature de recherche, nous envisageons cette articulation à travers les obstacles conceptuels auxquels les élèves doivent faire face lors des premiers apprentissages algébriques de la résolution de problèmes. Nous montrons ensuite que, malgré ces ruptures épistémologiques, une complémentarité peut se dégager entre le numérique et l'algébrique. Cette articulation fructueuse peut s'envisager dans le cadre de la mise en œuvre du processus de modélisation. Nous précisons donc également quelques caractéristiques de ce processus complexe.

Dans la **deuxième partie**, nous définissons notre problématique de recherche ainsi que la méthodologie développée. Nous envisageons deux grandes questions de recherche.

- Les problèmes envisagés en arithmétique et en algèbre favorisent-ils une articulation fructueuse entre les deux domaines ?
- Si les élèves sont confrontés à des problèmes qui permettent une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre, comment cette articulation se manifeste-t-elle ?

La première question de recherche sera envisagée à travers un premier axe d'analyse centrée sur la nature des problèmes proposés à la fin de l'enseignement primaire et au début de l'enseignement secondaire.

La deuxième question de recherche sera traitée selon deux axes d'analyse et à partir d'interviews de quinze élèves issus de sixième année primaire, de première et deuxième années du secondaire. Le deuxième axe vise à mettre en évidence les différentes démarches de résolution mises en œuvre par les élèves et le troisième axe propose une exploration plus approfondie de quelques protocoles d'interviews qui témoignent d'une utilisation conjointe de l'arithmétique et de l'algèbre au sein du processus de modélisation et de résolution des différents problèmes proposés.

Enfin, la **troisième partie** est consacrée à l'analyse des résultats obtenus au sein de chacun des trois axes d'analyses.

2. L'ARTICULATION ENTRE L'ARITHMÉTIQUE ET L'ALGÈBRE DANS LE CONTEXTE DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Quels sont les ruptures et les obstacles conceptuels que l'élève devra franchir pour aborder la résolution de problèmes selon un mode algébrique ? Au-delà de ces ruptures, une complémentarité peut-elle s'installer entre les approches arithmétique et algébrique en contexte de résolution de problèmes ? Quel processus de raisonnement pourra permettre une articulation fructueuse entre l'arithmétique et l'algèbre ?

L'objet de cette première partie est d'aborder ces trois questions à travers une revue de la littérature de recherche. Dans un premier temps, nous identifions les ruptures qui existent entre l'arithmétique et l'algèbre au niveau des démarches de raisonnement d'une part, et de l'utilisation du symbolisme d'autre part. Ensuite, nous montrons comment, au-delà de ces obstacles cognitifs majeurs, il est possible d'envisager une complémentarité entre les deux domaines. Dans le contexte de la résolution de problèmes, une telle articulation fructueuse pourra s'installer à travers le processus de modélisation. Nous précisons donc quelques caractéristiques de ce processus complexe et la forme qu'il pourra prendre dans la résolution de problèmes arithmétiques.

2.1 Quels sont les ruptures et les obstacles conceptuels que l'élève devra franchir pour aborder la résolution de problème selon un mode algébrique ?

Vergnaud (1988) identifie une double rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre. Cette discontinuité se manifeste d'une part dans la nature des raisonnements et d'autre part dans le symbolisme utilisé.

a. *Discontinuité au niveau de la nature des raisonnements : analytique ou synthétique*

L'étude historique de l'algèbre en contexte de résolution de problèmes montre une première rupture entre deux modes de pensée : l'analyse et la synthèse. Charbonneaux et Lefebvre (1992) décrivent cette opposition entre les deux types de raisonnement :
"Partant d'un énoncé à prouver, l'analyste suppose vraie ou réalisée la propriété recherchée et, de là, étudie l'environnement de cette propriété pour bien identifier les éléments connus et inconnus et mettre en évidence d'autres propriétés qui, espère-t-on, sont vraies ou peuvent être rendues telles et à partir desquelles, par une démarche inverse dite synthèse, on puisse démontrer la propriété recherchée. Il en va de même dans le cas d'un problème, si ce n'est qu'il s'agisse alors de construction plutôt que de propriétés" (p. 14).
Apparue chez les grecs classiques, la synthèse a longtemps été considérée comme la démarche la plus sûre pour résoudre les problèmes alors que l'analyse, qui a permis une transition vers l'algèbre, est apparue bien plus tard.

Plusieurs études (Bednarz, Janvier, Vergnaud, ...) ont constaté cette rupture dans les raisonnements d'élèves avant toute introduction de l'algèbre et après celle-ci. Bednarz et Janvier (1993) ont précisé la nature des deux modes de pensée développés par les élèves :

- *"Dans la résolution arithmétique, l'élève mobilise des grandeurs connues et organise pas à pas une séquence d'opérations qui, en fin de parcours, mène au résultat recherché. Il procède ainsi du connu vers l'inconnu, chaque nouvelle étape permettant de générer une autre grandeur sur laquelle s'appuyer, ce chemin étant parsemé de repères empruntés au contexte.*
- *La résolution algébrique, quant à elle accepte dès le départ de mobiliser une valeur inconnue par l'intermédiaire (ou non) d'un substitut symbolique et reconstruit globalement, en général sous la forme statique de l'équation, les relations stipulées dans le problème. Les opérations algébriques prennent une distance vis-à-vis du contexte, et s'exercent sur les valeurs inconnues en faisant comme si celles-ci étaient connues."*

D'après ces définitions, bien que la résolution algébrique n'implique pas nécessairement l'utilisation de lettres, il s'agit cependant d'effectuer des opérations sur des quantités inconnues. Lorsque le symbolisme algébrique est utilisé, la démarche peut prendre la forme d'une équation du premier degré à une inconnue ou d'un système de plusieurs équations du premier degré à plusieurs inconnues.

La résolution arithmétique peut, quant à elle, prendre au moins trois formes.

- Une première méthode de type "fausse position", enseignée jadis dans les classes, est expliquée par Chevallard (1989) à partir du problème suivant :

"Un commerçant achète une pièce de drap au prix de quatre francs le mètre. Il revend le cinquième 8 francs le mètre, le quart, 7 francs le mètre, le reste 6 francs le mètre, et réalise ainsi un bénéfice de 424 francs. Quelle était la longueur de la pièce de drap?"

"L'arithmétique opère là-dessus par la méthode fausse position : supposons que la pièce de drap ait été de 20 mètres, le prix d'achat était de 4x20 = 80 francs, le revenu de la vente est égal à :

8 x 4+ 7 x 5 + 6 x (20 - 4 - 5) = 133 francs

Le bénéfice est de 133 - 80 = 53 francs, soit 8 fois moins que le bénéfice effectivement perçu ; la pièce de drap mesurait donc 8 x 20 = 160 mètres" (p.64)

- Une deuxième méthode de type "structure" a été identifiée par Schmidt (1997) sur la base d'une étude visant à mettre en évidence les raisonnements arithmétiques de futurs enseignants. Cette démarche s'appuie dans ce cas sur les relations et les transformations stipulées dans le problème. Il s'agit d'effectuer des opérations à partir de ces relations et transformations connues et de restructurer le problème pour identifier la grandeur inconnue.

  Voici un exemple de cette procédure appliquée au problème suivant :

  "Il y a 576 passagers à transporter entre deux villes. On dispose de deux trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places et l'autre, uniquement des wagons à 16 places. En supposant que le train formé de wagons à 16 places ait 8 wagons de plus que l'autre, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des deux locomotives?

  1) On calcule en premier lieu le nombre de passagers en surplus dans le train à 16 places : 8 x 16 = 128.
  2) On élimine ensuite cette quantité du nombre total de passagers : 576 - 128 = 448.
  3) L'écart éliminé, il reste donc deux trains avec exactement le même nombre de wagons. On restructure alors le problème en considérant que la situation décrite est semblable à celle où il y aurait un seul train comprenant 28 places (16 + 12).
  4) Le problème se résout alors facilement par une division : 448 : 28 = 16. Il y aura donc un train comprenant 16 wagons de 12 places et un train comportant 24 wagons de 16 places.

- Une troisième méthode, de type "essais numériques" consiste à attribuer une valeur approximative à l'une des grandeurs inconnues du problème. Les autres grandeurs inconnues sont alors reconstruites à partir des relations proposées dans le problème, en s'appuyant sur des grandeurs intermédiaires successivement générées. L'écart entre le résultat obtenu et celui fourni dans le problème permettra de décider s'il faut ou non appliquer la procédure en partant d'un autre nombre.

b. *Discontinuités au niveau du symbolisme : des statuts et des significations différents*

1. Le statut du symbolisme

Chevallard (1984) envisage une rupture profonde entre le langage utilisé en arithmétique et en algèbre au point de vue du statut accordé au symbolisme. L'arithmétique utilise principalement le langage ordinaire accompagné du calcul sur les nombres. En ce sens, elle constitue principalement "*un savoir oral, qui ne confie au papier que l'effectuation des opérations sur les nombres*". L'utilisation du symbolisme en algèbre et en particulier les lettres qui désignent des quantités connues ou inconnues, permet de conserver une trace écrite des opérations réalisées et même de mettre à jour de nouvelles connaissances sur l'objet d'étude. L'algèbre permet ainsi de mettre en évidence la "*valeur monstrative*" de l'expression écrite, contrairement à l'arithmétique, qui n'envisage que l'aspect calculatoire du langage numérique.

En partant des difficultés des élèves débutant en algèbre, d'autres études (Booth, 1984, Lee et Wheeler, 1989, ...) ont mis en évidence les ruptures existant au niveau du sens attribué au symbolisme en arithmétique et en algèbre. Deux éléments se dégagent de ces analyses : le sens de la lettre d'une part, le sens des expressions algébriques et de l'égalité d'autre part.

2. Le sens de la lettre

En algèbre élémentaire, les lettres utilisées doivent être considérées comme les *représentants quelconques d'un ensemble de nombres* (dans le cas des expressions algébriques) ou comme des *inconnues spécifiques* (dans le cas des équations du premier degré à une inconnue).

Kuchemann(1978) a constaté que les élèves de 11 à 16 ans envisagent la lettre de six manières différentes:

- **lettre évaluée**
  Cette conception amène les élèves à accorder une valeur numérique aux lettres qu'ils rencontrent. A ce niveau, les calculs littéraux sont transformés en calculs numériques, en accordant par exemple à chaque lettre rencontrée la valeur numérique de sa position dans l'alphabet (par exemple, "$a = 1$", "$b = 2$", ...).
- **lettre ignorée**
  Ici, les élèves ne prennent en considération que les éléments numériques des situations proposées. Face à un calcul algébrique tel que « $3n + 4$ », ces élèves proposeront la réponse « 7 » ou « $7n$ » : les éléments numériques ont été combinés et la lettre n'apparaît pas ou est simplement recopiée.
- **lettre objet**
  La lettre n'a pas un statut de nombre, mais elle correspond simplement à l'abréviation d'un mot. Ainsi, l'expression « $3p$ » correspond à « *trois pommes* » et non pas au « *triple du nombre p* ».
- **lettre, inconnue spécifique**
  Cette conception est impliquée dans les équations du premier degré à une inconnue où l'inconnue apparaît dans les deux membres de l'égalité. A ce niveau, les élèves sont capables d'effectuer des opérations sur la lettre en considérant que celle-ci remplace un nombre dont il faut déterminer la valeur.
- **lettre, nombre généralisé**
  La lettre, nombre généralisé, signifie que la lettre peut prendre plus d'une valeur. Cette conception est envisagée dans les expressions algébriques, où la lettre est le représentant d'un ensemble de nombres.
- **lettre variable**
  Le concept de lettre variable implique que non seulement les lettres désignent des nombres appartenant à des ensembles de nombres, mais qu'en plus, il est possible de dégager un lien entre les valeurs des lettres. Cette conception est notamment impliquée dans les fonctions ou dans les équations à plusieurs inconnues abordées à partir du deuxième degré de l'enseignement secondaire.

Bien que la théorie de Kuchemann ait fait l'objet de plusieurs critiques, il est communément admis (Kieran, 2000) qu'une différence fondamentale apparaît entre les trois premières conceptions de la lettre et les trois dernières : les trois premières sont des conceptions arithmétiques, dans le sens où la lettre est chaque fois traitée suivant un mode numérique. Les autres sont algébriques, dans la mesure où elles amènent à effectuer des opérations à partir d'un nombre dont on ne connaît pas la valeur.

Dans le contexte spécifique des problèmes arithmétiques, la capacité d'opérer sur un nombre inconnu constitue le facteur déterminant dans la complexité des problèmes : que ce soit dans la mise en équation de tels problèmes (Bednarz et Janvier, 1993) ou dans la résolution des équations qui en découlent (Filloy et Rojano, 1984 ; Linchevski et Herscovics, 1996). Historiquement, cette capacité a pris du temps pour s'installer et a nécessité le dépassement d'un certain paradoxe : comment est-il possible d'agir sur quelque chose dont la nature tangible est inconnue? (Charbonneau et Lefebvre, 1992). Il n'est donc guère étonnant d'observer des obstacles similaires chez les élèves débutant en algèbre.

3. Le sens des expressions algébriques et de l'égalité

Le sens des expressions algébriques a été étudié par plusieurs auteurs (Dubinsky, 1991 ; Sfard 1991, Tall, 1996 in Artigue, 1998). Selon Sfard (1991), il existe deux façons de considérer les expressions algébriques : la perspective procédurale et la perspective structurale.

Dans la **perspective procédurale**, l'expression algébrique est envisagée comme une suite d'opérations à appliquer. Les élèves ont une vision dynamique de l'expression : celle-ci n'a de sens qu'au travers de l'algorithme de calcul qu'elle décrit. Ainsi, par exemple, l'expression "*2a + 1*" est envisagée comme "*2 fois le nombre a augmenté de 1*". Parallèlement à cette vision des expressions algébriques est associée une considération particulière de la relation d'égalité : celle-ci n'est envisagée qu'au travers du signe "=" interprété comme l'amorce d'un résultat. Ce sens du signe d'égalité correspond à la touche "=" des machines à calculer classiques : l'utilisation de cette touche implique que l'on veut obtenir le résultat des opérations effectuées.

Dans une **perspective structurale**, les expressions algébriques sont considérées comme des entités statiques. Ainsi par exemple, l'expression "*2a + 1*" est considérée comme un nombre, qui, si la lettre "*a*" désigne un nombre naturel, est impair. A cette vision structurale est associée une autre signification du signe d'égalité : il s'agit bien d'un symbole placé entre deux expressions désignant le même nombre. Le second membre de l'égalité n'est donc plus le résultat des opérations décrites dans le premier membre.

Les enseignements arithmétiques du primaire renforcent principalement une conception procédurale des expressions. En effet, les élèves doivent réaliser des opérations sur des nombres afin d'obtenir un résultat unique et numérique. L'égalité n'est donc pas symétrique : le premier membre indique les actions à effectuer et le second membre correspond au résultat de ces actions. Dans le cadre des premiers apprentissages algébriques, les élèves sont rapidement amenés à réduire ou développer des expressions algébriques. L'expression produite doit être considérée comme une entité statique et non comme la réponse de l'opération décrite dans le premier membre de l'égalité.

Dans le cas de la résolution de problèmes de partages inégaux, la conception procédurale peut suffire dans les situations où la somme à partager est connue. En effet, le signe d'égalité pourra conserver le statut arithmétique d'amorce d'un résultat. En revanche, la perspective structurale devient nécessaire lorsque le tout est inconnu et que chacune des parties est définie en fonction des relations qui l'unissent aux autres et avec le tout. Dans ce cas, la modélisation du problème sous la forme d'une équation du premier degré à une inconnue nécessitera d'exprimer de deux façons différentes une quantité inconnue et aboutira ainsi à une équation du type "$ax + b = cx + d$". Combier, Guillaume et Pressiat (1996) se sont intéressés à la mise en équation de tels problèmes par les élèves du Collège. Ils ont observé que de nombreux élèves produisent un système de deux équations à deux inconnues de la forme suivante où y représente une des variables du modèle, sans être l'inconnue du problème.

$$\begin{cases} f(x) = y \\ g(x) = y \end{cases}$$

Le passage d'une telle modélisation à la mise en équation classique attendue ($f(x) = g(x)$) semble constituer pour les élèves un changement conceptuel important. Cette constatation rejoint le point de vue de Gascon (1994).

2.2 Au-delà de ces ruptures, une complémentarité peut-elle s'installer entre les approches arithmétique ?

La double rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre pourrait laisser sous-entendre que ces deux domaines constituent des univers disjoints. Elaborée à partir de fondements arithmétiques, l'algèbre ne peut toutefois se détacher complètement de l'arithmétique. D'après Chevallard (1989), la structure des nombres, plus généralement l'étude du numérique, constitue le domaine où une complémentarité entre arithmétique et algèbre peut se dégager et prendre la forme d'une "dialectique fonctionnelle" : "*l'algébrique est un outil de l'étude du numérique, le premier outil, le plus élémentaire sans doute. Mais inversement (et c'est ce qui nous autorise à parler de dialectique), pour que le fonctionnement de cet outil soit efficace, il faut quelque peu étudier cet outil. Or en ce point, le numérique lui-même est un outil d'étude à l'algébrique : le flux s'inverse.*" (p. 75).

Comment cette complémentarité peut-elle s'envisager dans le contexte spécifique de la résolution de problèmes ? Dans les lignes qui suivent, nous tentons d'éclairer cette dialectique fonctionnelle dans le cadre de la résolution de problèmes arithmétiques nécessitant la mise en œuvre d'une démarche algébrique de résolution.

L'énoncé du problème présente des relations entre des données dont certaines sont connues et d'autres, inconnues. L'analyse de ces relations permettra à terme de résoudre le problème. Dans une telle perspective, les relations constituent l'objet d'étude et elles appartiennent au domaine arithmétique. L'algèbre apparaît à ce moment comme un outil permettant de modéliser la situation en précisant ainsi, dans un langage qui lui est propre, la nature des relations en jeu. Des transformations algébriques vont ensuite être effectuées sur l'objet modélisé. L'écriture littérale apportera ainsi de nouvelles informations sur l'objet étudié, ce qui permettra de résoudre le problème. Lors des transformations algébriques réalisées, l'arithmétique pourra constituer à son tour un outil permettant de vérifier, en référence au contexte du problème, la justesse des manipulations formelles. Dans ce cas, l'arithmétique apparaît comme un outil d'étude des écritures symboliques. Ces dernières acquièrent à ce moment le statut d'objet d'étude.

Une dialectique fonctionnelle s'installe ainsi entre l'arithmétique et l'algèbre qui, tour à tour, prennent le statut d'outil et d'objet d'étude de la situation problématique à résoudre.

2.3. Quel processus de raisonnement pourra favoriser une articulation fructueuse entre l'arithmétique et l'algèbre ?

La résolution de problèmes implique un processus de modélisation qui consiste à "*simplifier la réalité pour qu'elle rentre dans un cadre connu, c'est-à-dire dans lequel on peut opérer*" (Girard, 1999, p. 8).

D'après Julo (1996), la modélisation des problèmes arithmétiques est souvent assimilée à une traduction d'un énoncé en langage mathématique. Cette manière d'envisager l'élaboration d'un modèle de situation est particulièrement marquée pour la mise en équations. Par exemple, pour le mathématicien Polya (1965, in Julo, 1996) "*mettre en équation, c'est exprimer à l'aide de symboles mathématiques une condition formulée en mots, c'est traduire le langage ordinaire en formules mathématiques. Les difficultés que nous pouvons avoir pour mettre un problème en équation sont identiques à celles d'une traduction.*" (p. 281)

Julo (1996) estime que "*cette manière d'analyser la démarche de modélisation est celle du mathématicien qui sait résoudre le problème et ne correspond pas à ce qui se passe au niveau des processus cognitifs*" (p. 281).

Quels sont les processus cognitifs mis en jeu dans la modélisation? Pour éclairer cette question, nous proposons une présentation succincte de deux théories relatives à la modélisation :

- les travaux de Chevallard (1989) qui envisage la modélisation dans un contexte vaste qui '"*permet de prendre une vue d'ensemble sur l'activité mathématique, de l'école primaire à l'université*" (p. 61).
- les apports de Gascon (1995) : ce dernier a développé la perspective générale de Chevallard (1989) dans le contexte particulier de l'algèbre élémentaire.

a. *La modélisation mathématique selon Chevallard (1989)*

Le processus de modélisation envisage une mise en relation de deux registres : un système (mathématique ou non) et un modèle mathématique de ce système. Trois étapes caractérisent la modélisation mathématique :

1. *"On définit le système que l'on entend étudier, en précisant les "aspects" pertinents par rapport à l'étude que l'on veut faire de ce système, soit l'ensemble des variables par lesquelles on le découpe dans le domaine de réalité où il apparaît..."*
2. *"On construit alors le modèle à proprement parler en établissant un certain nombre de relations R, R', R", etc. entre les variables prises en compte dans la première étape, le modèle du système à étudier étant l'ensemble de ces relations..."*
3. *"On travaille le modèle ainsi obtenu dans le but de produire des connaissances relatives au système étudié, connaissances qui prennent la forme de nouvelles relations entre les variables du système."* (p. 53).

Dans le contexte des problèmes de partages inégaux, la modélisation algébrique prend la forme de l'étude d'un système de deux équations à deux inconnues.

Voici un exemple d'une telle modélisation réalisée à partir du problème suivant :

Trois frères ont reçu 1000 francs d'étrennes qu'ils doivent se partager comme ceci : l'aîné aura 50 francs de plus que le deuxième et le deuxième aura 100 francs de plus que le troisième. Quelle est la part de chaque frère?

Lors de la première étape, on désigne respectivement par x, y et z les parties exprimées en francs du frère cadet, du deuxième frère et du frère aîné.

La deuxième étape consiste à construire le modèle proprement dit, c'est-à-dire les relations entre les variables x, y et z. L'ensemble de ces relations constitue alors le modèle du système à étudier ; ici : $z = y + 50$, $y = x + 100$, $x + y + z = 1000$. Le modèle se présente alors sous la forme du système :

$$\begin{cases} z = y + 50 \\ y = x + 100 \\ x + y + z = 1000 \end{cases}$$

et non pas sous la forme classique attendue par l'enseignant d'une équation à une seule inconnue. Cette dernière s'obtient sur la base d'opérations réalisées lors de l'étude du système présenté ci dessus, et pourra prendre différentes formes :

$$x + (x + 100) + [(x + 100) + 50] = 1000,$$
$$x + (x + 100) + (x + 150) = 1000,$$
$$x + x + 100 + x + 150 = 1000.$$

La troisième étape est obtenue par la résolution du système des trois équations à trois inconnues, qui permet ainsi de déterminer la partie du frère cadet.

b. *L'apport de Gascon (1995) dans la modélisation en algèbre élémentaire*

Le point de départ de la théorie est la technique d'étude d'"*Analyse-Synthèse*" qui "*comporte deux étapes :*

- *un raisonnement régressif ou analyse qui part de l'objet inconnu et aboutit aux données du problème.*
- *un raisonnement progressif ou synthèse qui fait le chemin inverse*" (Pressiat, 1996).

Cette technique ne peut être efficace dans tous les problèmes relatifs à l'algèbre élémentaire : la structure même des problèmes induit la réussite ou l'échec de la technique. Bednarz et Janvier (1996) identifient deux structures : les problèmes "*connectés*" et les problèmes "*déconnectés*" :

- Dans les problèmes connectés, "*une relation peut facilement être établie entre deux données connues, induisant alors un raisonnement de type arithmétique (s'articulant sur les données connues du problème pour aboutir en fin de processus à retrouver la donnée inconnue*".
- Dans les problèmes déconnectés,"*aucun pont ne peut être établi a priori directement entre les données connues*".

La technique s'avèrera efficace dans les problèmes connectés. Par contre, elle ne permettra pas de résoudre les problèmes déconnectés. Pour de tels problèmes, Gascon (1995) propose de modifier la technique d'"*Analyse-Synthèse*" et de définir ainsi une nouvelle technique qu'il appelle "*le patron reformulé*". Ce dernier consiste :

- *"à agrandir le registre des données, en l'étendant des données numériques aux expressions algébriques élémentaires (certaines données sont représentées par des expressions algébriques) ;*
- *à remplacer l'analyse du patron précédent par une **analyse auxiliaire** qui met en évidence les conditions du problème, c'est-à-dire les quantités que l'on peut exprimer de deux façons différentes ;*
- *à procéder ensuite à l'**analyse reformulée** qui consiste à produire ces expressions différentes à l'aide des expressions présentes dans les données élargies ;*
- *à écrire l'expression symbolique des conditions du problème : c'est la **synthèse reformulée** ;*
- *à résoudre la ou les équations ou inéquations obtenues : c'est la **synthèse auxiliaire**"* (Pressiat, p. 23).

Ces deux techniques permettent alors de résoudre l'ensemble des problèmes proposés en algèbre élémentaire.

Illustrons la deuxième technique à travers le problème suivant :

Un père partage une somme entre ses 3 filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 2 fois plus à Béatrice qu'à Aurélie et 100 F de plus à Céline qu'à Béatrice. Finalement, Céline a 150 F de plus qu'Aurélie. Combien chaque enfant a-t-il reçu?

Dans cet exemple, le patron d'"*Analyse-synthèse*" ne fonctionne pas. La technique algébrique "classique" pour résoudre un tel problème est celle du patron reformulé : elle consiste à désigner par la lettre x une des parties (souvent la plus petite).

- Dans ce cas, le registre des données prend cette forme :
  - Partie d'Aurélie : x
  - Partie de Béatrice : $2x$
  - Partie de Céline : $2x + 100$ ou $x + 150$

- L'analyse auxiliaire consiste à mettre en évidence les quantités que l'on peut exprimer de deux façons différentes. Il s'agit ici de la partie de Céline.

- L'analyse reformulée permet de dégager les deux écritures algébriques désignant la partie de Céline :
  Partie de Céline : $2x + 100$ ou $x + 150$

- La synthèse reformulée amène à poser l'équation du premier degré suivante :
  $2x + 100 = x + 150$

- La synthèse auxiliaire permet de résoudre cette équation
  $x = 50$

2.4. Situation de notre étude dans la problématique générale

A travers cette analyse de la littérature, nous avons montré qu'au-delà d'obstacles cognitifs importants, une articulation fructueuse entre l'arithmétique et l'algèbre élémentaire peut exister dans le contexte spécifique de la résolution de problèmes.

Qu'en est-il dans l'enseignement? L'articulation entre arithmétique et algèbre prend actuellement la forme d'une dissociation nette, comme en attestent plusieurs études réalisées dans le domaine :

- Lee et Wheeler (1989) analysent cette dissociation au niveau des élèves après deux ans d'enseignement dans le domaine : face à la résolution d'équations algébriques, ils ne pensent pas à effectuer des vérifications numériques, pouvant attester de la justesse des transformations algébriques réalisées. A l'inverse, ils ne pensent pas à recourir à l'algèbre pour analyser certaines situations numériques.

- Chevallard (1989) montre que le rapport à l'algèbre et l'arithmétique entretenu par les élèves renvoie à deux réalités disjointes. A travers une analyse des manuels et des programmes d'études, il attribue cette situation à l'enseignement même de l'algèbre.

- Bednarz, Janvier (1996) et Schmidt (1994) ont analysé la situation auprès d'enseignants en formation. Par le biais d'un programme d'étude mené auprès d'instituteurs et d'enseignants de collège en formation, elles montrent qu'en résolution de problèmes, les futurs instituteurs développent principalement des démarches arithmétiques, et expliquent cette situation par le fait qu'ils maîtrisent mal les techniques algébriques. A l'inverse, les futurs enseignants de collège abordent tous les problèmes selon un mode algébrique, même dans des situations où les démarches arithmétiques s'avèrent très efficaces.

Dans le contexte particulier de la résolution de problèmes arithmétiques, la situation a été largement développée par Bednarz, Janvier (1996) et Schmidt (1994) auprès d'enseignants en formation. Nous souhaitons approfondir le sujet en focalisant davantage la problématique sur les élèves, dans une optique comparable à celle de Lee et Wheller (1989) : nous pensons que si un fossé s'est établi après 2 ans d'apprentissages algébriques, il n'en est peut-être pas de même après quelques mois d'apprentissage dans le domaine. **Nous souhaitons donc analyser plus en profondeur l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre en contexte de résolution de problèmes auprès d'élèves juste avant et juste après les premiers apprentissages algébriques.**

3. PROBLÉMATIQUE DE RECHERCHE

Afin d'analyser l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre dans le contexte de la résolution de problèmes, nous envisageons d'abord de voir si une articulation se dégage de manière fructueuse à travers des types de problèmes envisagés à deux moments de la scolarité : à la fin de l'enseignement primaire et au début du secondaire. Dans l'affirmative, on pourrait penser que l'enseignement actuel de la résolution de problèmes peut être une bonne façon d'amener les élèves à remettre en question leurs présupposés arithmétiques issus d'un contexte antérieur, afin de pouvoir aborder les premiers apprentissages algébriques selon une logique constructiviste. Par ailleurs, nous souhaitons également confronter des élèves à un même type de problèmes afin d'analyser s'ils parviennent effectivement à gérer ce passage du raisonnement arithmétique vers le raisonnement algébrique dans un contexte qui peut favoriser une articulation plus fructueuse entre l'arithmétique et l'algèbre.

Plus précisément, notre recherche s'articule autour des questions suivantes :

- Quelle est la nature des problèmes rencontrés en arithmétique? Sont-ils différents de ceux proposés après les premiers apprentissages algébriques? Dans quelle mesure? Ces problèmes, proposés au début de l'enseignement secondaire, constituent-ils une base solide pouvant amener les élèves à utiliser ce nouvel outil, plus performant, qu'est l'algèbre?
- En arithmétique, confrontés à un certain champ de problèmes, les élèves ont également développé des techniques qu'ils emporteront avec eux lors des premiers apprentissages algébriques. Quelle est la nature de ces raisonnements arithmétiques? Quels obstacles les élèves devront-ils franchir pour aborder les situations selon un mode algébrique?
- Les ruptures épistémologiques qui séparent arithmétique et algèbre se manifestent-elles dans les raisonnements des élèves? Quelles formes peuvent-elles prendre? Lorsque l'algèbre est utilisée dans la résolution de problèmes, observe-t-on une complémentarité entre l'arithmétique et l'algèbre? Cette articulation peut-elle prendre l'aspect d'une "*dialectique fonctionnelle*" telle que Chevallard (1984) la définit?

Ci-après, nous développons ces questions et les hypothèses que nous souhaitons mettre à l'épreuve, ainsi que la méthodologie de recherche utilisée. La présentation est envisagée en trois axes, relatifs à chacune des séries de questions présentées ci-dessus :

- problèmes présentés aux élèves aux deux moments de la scolarité ;
- nature des raisonnements développés par les élèves face à des problèmes arithmétiques traditionnels ;
- ruptures et complémentarité entre arithmétique et algèbre dans les raisonnements des élèves.

Nous concluons en proposant une schématisation représentant l'articulation entre les différentes hypothèses et questions de recherche.

3.1 Axe 1 : Problèmes présentés aux deux moments de la scolarité

a. Reformulation de la problématique de recherche : comparaison des problèmes proposés aux élèves antérieurement et postérieurement à l'introduction de l'algèbre.

Une des ruptures épistémologiques caractérisant l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre apparaît au niveau des modes de pensées à la base des raisonnements. Bednarz et Janvier (1996) ont remarqué que la structure même des problèmes avait une influence sur le type de résolution réalisée. Sur base de la nature des relations entre les quantités (connues ou inconnues) et leur interdépendance, deux structures sont envisagées par les auteurs : les problèmes "*connectés*", qui sont aisément résolubles par des stratégies arithmétiques, et les problèmes "*déconnectés*", dans lesquels la démarche algébrique est souvent plus efficace.

On pourrait donc émettre l'**hypothèse (H1)** qu'**une différence se manifeste entre les problèmes présentés dans l'enseignement primaire et ceux présentés dans l'enseignement secondaire : les problèmes connectés devraient apparaître davantage dans l'enseignement primaire qu'en deuxième année de l'enseignement secondaire.** Cela permettrait ainsi aux débutants en algèbre de saisir l'intérêt d'utiliser l'outil "équations" pour résoudre des problèmes dans des situations que l'arithmétique ne peut traiter aisément.

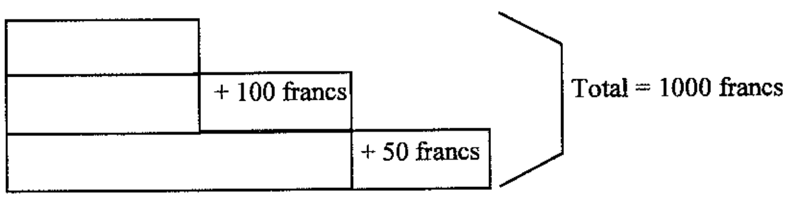
Nous émettons par ailleurs une deuxième **hypothèse (H2)** concernant la nature connectée ou non des problèmes rencontrés : **il est possible de rencontrer des problèmes déconnectés dans l'enseignement primaire**. En effet, la stratégie arithmétique de type "structure" identifiée par Schmidt et Bednarz (1997) permet de résoudre efficacement certains problèmes déconnectés. Cette stratégie fait actuellement partie des programmes d'enseignement primaire : les problèmes sont souvent représentés à l'aide d'un schéma qui met en évidence l'inégalité des parties ainsi que les relations qui unissent ces parties entre elles et avec le tout. L'exemple suivant, issu d'un manuel d'élève classiquement utilisé en sixième primaire[3], illustre ce propos :

1. Trois frères ont reçu 1000 francs d'étrennes qu'ils doivent se partager comme ceci : l'aîné aura 50 francs de plus que le second et le second aura 100 francs de plus que le troisième.
2. Question : Quelle est la part de chaque frère?
3.

frère cadet

deuxième frère

frère aîné



Somme totale si les trois frères avaient reçu le même montant : 1000 francs – 250 francs = 750 francs
Part du frère cadet : 750 francs : 3 = 250 francs
Part du deuxième frère : 250 francs + 100 francs = 350 francs
Part du frère aîné : 250 francs + 150 francs = 400 francs

[3] Réseau mathématique 6b, p. 142.

Par ailleurs, afin que le processus de modélisation puisse être mis en œuvre, il semble important de varier les problèmes. Selon Greer (1997), leur variété permet d'éviter le développement de stratégies superficielles de résolution. Ces dernières consistent à esquiver l'étape de construction du modèle de situation pour chercher d'emblée l'algorithme de calcul qui aboutira à la solution. Il nous paraît donc intéressant d'analyser la variété des problèmes proposés aux deux moments de la scolarité. En référence aux travaux de Greer (1997) qui dénoncent le caractère stéréotypé des énoncés habituellement présentés aux élèves en résolution de problèmes, nous émettons l'**hypothèse (H3)** d'**une faible diversité dans la variété des énoncés.**

b. Présentation de la méthodologie de recherche

Afin de mettre à l'épreuve les trois hypothèses formulées, nous envisageons les problèmes arithmétiques présentés dans les manuels fréquemment utilisés par les enseignants de l'enseignement primaire et du début de l'enseignement secondaire. Pour l'enseignement primaire, deux manuels apparaissent dans les classes de cinquième et sixième année : "*Réseau mathématique*" (Gautiez, Malache, Roegiers, 1991) et "*Ateliers mathématiques*" (Legrand, Jonnaert, Bonnet, 1994). Dans l'enseignement secondaire, le manuel de référence est : "*Espace math*" (Adam, Lousberg, 1999). Les problèmes arithmétiques sont abordés en deuxième secondaire dans le contexte de la résolution des équations du premier degré à une inconnue.

L'analyse des énoncés présentés amènera à identifier la proportion d'énoncés connectés et déconnectés présents dans chaque manuel, et de mettre ainsi à l'épreuve les hypothèses H1 et H2.

En ce qui concerne la troisième hypothèse, les problèmes sont envisagés selon les typologies relatives aux problèmes simples et complexes :

- Pour les problèmes simples, Vergnaud (1989) identifie six catégories : la composition de deux mesures, la transformation d'une mesure, la comparaison de deux mesures, la composition de transformations, la transformation d'une relation et la composition de transformations.

- Pour les problèmes complexes, "*dans lesquels plusieurs relations sont en jeu et plusieurs questions sont possibles*" (Vergnaud, 1991, p. 169), et à partir du concept de "calcul relationnel" défini par Vergnaud (1991), Bednarz et Janvier (1997) ont élaboré une typologie composée de trois classes : les problèmes de partages inégaux, les problèmes impliquant une transformation dans le temps et, enfin, des problèmes comportant des relations entre grandeurs non homogènes et faisant intervenir un taux (un exemple des trois catégories de problèmes figure en annexe 1). Les deux chercheuses ont par ailleurs affiné la classification dans le cas des problèmes de partages inégaux en identifiant quatre paramètres de structure : la place de l'inconnue, le nombre de parties, le type de relation (additive ou multiplicative) et la nature des relations (relation entre deux parties ou relation entre une partie et le tout).

3.2 Axe 2 : Nature des raisonnements développés par les élèves face à des problèmes arithmétiques traditionnels

a. Reformulation de la problématique de recherche : nature des raisonnements arithmétiques et algébriques en résolution de problèmes.

Analyser la nature des raisonnements arithmétiques et algébriques en résolution de problèmes revient à identifier les différentes démarches développées par les élèves dans ce contexte.

Bednarz et Schmidt (1997) ont mis en évidence deux démarches arithmétiques mises au point par les élèves face à la résolution de problèmes de type "*connectés*" et "*déconnectés*". Il s'agit de voir si d'autres démarches peuvent s'observer dans les raisonnements des élèves, antérieurement et postérieurement à l'introduction de l'algèbre.

Le passage des raisonnements arithmétiques aux raisonnements algébriques implique bien plus qu'une simple utilisation du symbolisme. Comme nous l'avons montré précédemment, l'utilisation d'une démarche algébrique nécessite la capacité de réaliser des opérations à partir d'un nombre inconnu, donc sans connaître d'emblée sa valeur. Malgré cette différence conceptuelle majeure, il nous semble intéressant d'analyser plus finement si certaines démarches arithmétiques ne sont pas plus proches d'un raisonnement algébrique que d'autres :

- Dans le contexte de la résolution d'équations, Kieran (1983) a montré que la méthode par essais-erreurs était plus proche de la méthode formelle (ou algébrique) que la méthode arithmétique de type "opérations réciproques".
- Dans le contexte de la résolution de problèmes, la nature des données (états ou relations) sur lesquelles s'appuient les raisonnements arithmétiques et algébriques a permis à Bednarz et al. (1992) de distinguer des raisonnements arithmétiques de type "structure" et des raisonnements algébriques : "*Le raisonnement algébrique prend appui résolument sur les états impliqués du problème, alors que le raisonnement de type "structure" peut évoluer dans la résolution en jouant uniquement sur les relations présentées, sans considération aucune pour les états*" (p. 63). A l'inverse, la stratégie de type "essais-erreurs" s'appuie sur une prise en considération d'un état, tout comme la démarche algébrique.

Dans cette optique, au-delà de la description des démarches mises en œuvre par les élèves, il nous semble également nécessaire de proposer une mise en perspective de ces différentes démarches ; cela afin de mettre en évidence des regroupements réalisés sur la base de la nature de l'élément sur lequel s'appuie le raisonnement.

L'identification des différentes démarches observées ainsi que leur mise en perspective permet d'envisager d'autres aspects de l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre :

- Nous analysons si les démarches des élèves varient en fonction du niveau d'enseignement (primaire ou secondaire).
- A travers l'établissement de profils d'élèves, nous envisageons également dans quelle mesure ceux-ci abordent la résolution de problèmes arithmétiques selon une même approche ou s'ils varient leurs démarches en fonction de la situation qui leur est présentée.
- Et enfin, nous analysons dans quelle mesure la structure des problèmes peut être un facteur explicatif de la variété des démarches utilisées par les élèves.

Précisons à présent ces trois aspects d'analyse.

1. Les raisonnements diffèrent-ils après les premiers apprentissages algébriques?

Selon Schmidt (1994), les enseignants en formation présentent des profils très contrastés : une séparation nette se dégage entre la nature arithmétique des raisonnements développés par les futurs instituteurs et la démarche algébrique utilisée massivement par les futurs enseignants de collège.

Observe-t-on un clivage semblable auprès des élèves belges? Analysons la situation de l'enseignement qui leur a été présenté aux deux moments de la scolarité que nous envisageons. En Belgique, l'enseignement de la démarche arithmétique de type "*structure*" se réalise à l'école primaire à partir d'une représentation graphique mettant en évidence les relations entre les différentes parties. On pourrait donc penser que les élèves de 12 ans utiliseront majoritairement cette démarche. La démarche algébrique de résolution apparaît au programme de deuxième année de l'enseignement secondaire. On pourrait donc émettre l'hypothèse que les élèves de 14 ans utiliseront plutôt cette démarche. Quant aux élèves de première année de l'enseignement secondaire, bien qu'ils aient déjà reçu un enseignement de l'algèbre, ils n'ont pas encore bénéficié d'un enseignement des équations et des problèmes qui en découlent. Nous estimons qu'ayant un certain recul par rapport à ce qu'ils ont appris en sixième année primaire, ils développeront d'autres démarches arithmétiques que celle de type "*structure*".

Nous pensons donc qu'une différence peut se manifester entre les raisonnements des élèves développés aux trois moments de la scolarité (en sixième année de l'enseignement primaire, en première et en deuxième années de l'enseignement secondaire).

2. Les élèves développent-ils des stratégies variées de résolution de problèmes?

L'établissement de profils d'élèves permet de mettre en lumière l'importance des modifications qui seront nécessaires pour aborder la résolution de problèmes selon une démarche algébrique. Sur base de la mise en perspective des différentes techniques observées, nous pourrons analyser dans quelle mesure chacun des élèves interrogés devra ou non modifier le point d'entrée dans les problèmes, afin d'aborder les situations selon un mode algébrique.

3. La structure des problèmes a-t-elle une influence sur le type de démarches mises en œuvre par les élèves?

Par une analyse des différents raisonnements qui permettent de résoudre correctement les problèmes de type "partages inégaux", Bednarz et Janvier (1996) ont identifié des paramètres de structure qui ont une influence sur la nature des raisonnements aboutissant à la réponse correcte :

- la nature (connue ou inconnue) des quantités en jeu ;
- le nombre de parties impliquées dans le problème ;
- le type de relations unissant les données (relations additives ou multiplicatives) ;
- la nature des relations impliquées (relation entre le tout et une partie ou relation entre deux parties).

Observe-t-on une telle influence des paramètres de structure dans la nature des raisonnements développés par les élèves? Si tel est le cas, on pourrait alors penser que, pour aider les élèves à développer une stratégie algébrique de résolution, certaines structures de problèmes sont plus intéressantes à exploiter que d'autres.

b. Présentation de la méthodologie de recherche

1. Participants

Notre recherche a été menée en fin d'année scolaire (mois de mai) auprès de quinze élèves non doublants, répartis en trois groupes selon le niveau d'études : cinq élèves de sixième année de l'enseignement primaire, cinq de première année de l'enseignement secondaire et cinq de deuxième année de l'enseignement secondaire.

Les élèves de sixième année ont reçu un enseignement de la résolution de problèmes de partages inégaux centré sur deux outils de représentation de ceux-ci : soit les schémas présentant les parties sous forme de bandelettes[4], soit la mise en équation qui est présentée comme traduction mathématique du schéma en bandelettes, la partie inconnue étant désignée par la lettre x.

Les élèves de première année n'ont pas résolu de problèmes durant cette première année de l'enseignement secondaire, mais ils ont eu une introduction à l'algèbre, dans le contexte de calcul algébrique.

Les élèves de deuxième année de l'enseignement secondaire ont reçu un apprentissage spécifique des équations, où l'inconnue apparaît dans les deux membres de l'égalité, ainsi qu'une série de trois séances de cours relatives à la mise en équation de problèmes, y compris de type "partages inégaux". Remarquons cependant que la plupart des problèmes résolus par ces élèves sont des problèmes de type "trouve un nombre", où la mise en équation est présentée comme une traduction presque directe de l'énoncé sous forme mathématique.

L'ensemble des élèves interrogés ont eu le même enseignant en sixième année primaire et le même cours de mathématiques en première et deuxième année de l'enseignement secondaire. Ils ont été choisis au hasard au sein de leur classe respective.

2. Instrument d'interviews

L'instrument élaboré est composé de cinq problèmes de partages inégaux. La schématisation de ces problèmes a été élaborée sur base de la typologie des problèmes complexes réalisée par Bednarz et Janvier (1993). L'annexe 2 présente les cinq énoncés. Bien qu'il soit impossible de classer de manière univoque un problème comme relevant du domaine arithmétique ou algébrique (Bednarz, Janvier, 1996 ; Schmitz, 1994) , il est toutefois possible d'établir cette distinction en terme du type de stratégie qui se déduit prioritairement du problème. Ainsi, comme cela apparaît dans l'annexe 2, le premier problème proposé peut être très facilement résolu à partir de la partie réservée à Béatrice. Il est dès lors possible de déterminer les deux autres parties en réalisant des opérations arithmétiques sur des quantités connues. Ce n'est pas le cas pour les autres problèmes qui apparaissent dès lors comme des problèmes relevant d'une tendance algébrique.

[4] Nous présentons un exemple de cette schématisation à la page 17.

Description de l'interview

L'interview, qui dure environ 20 à 30 minutes, se réalise en deux étapes :

- Une première étape consiste à demander à l'élève d'expliquer ce qu'il a compris du problème et de citer les éléments qui lui paraissent importants. Cela permet de s'assurer que l'élève n'éprouve pas de difficultés majeures de compréhension et également de cerner avec plus de précision la nature des éléments sur lesquels s'appuie le raisonnement.
- Une deuxième étape consiste à demander à l'élève de résoudre le problème.

Les éléments qui ont guidé l'élaboration des problèmes

- Nécessité d'une représentation du problème préalable à la résolution

Les quatre premiers problèmes sont relativement familiers aux élèves, dans la mesure où la somme totale est connue et où les parties de chaque enfant sont liées entre elles par des relations additives et/ou multiplicatives. Pour ces problèmes, nous avons veillé à introduire quelques mots clés inverses qui obligent les élèves à analyser la situation avant de la résoudre. Ces "mots clés" induisent une opération inverse à celle nécessaire pour résoudre le problème. Par exemple, pour le premier problème : *Béatrice reçoit 600 F et 200F de moins que Céline* : il faut faire une addition, alors que le mot clé "de moins" suggère plutôt de réaliser une soustraction. Cette tendance à se fier aux mots clés a été largement mise en évidence (Verschaffel et De Corte, 1997) chez les enfants plus jeunes.

Le cinquième problème n'est pas familier aux élèves : en effet, cette fois, la somme totale est inconnue. Ainsi, pour résoudre le problème de façon algébrique, il est nécessaire d'élaborer une équation où l'inconnue apparaît dans les deux membres. Dès lors, le signe d'égalité ne peut plus conserver la signification arithmétique d'amorce d'un résultat. Une analyse du symbolisme utilisé dans ce dernier problème permettra de comprendre davantage le sens donné au signe d'égalité dans ce contexte.

- Variété des démarches de résolution

D'après Bednarz et Janvier (1994), la variété des démarches de résolution peut s'obtenir en modifiant la structure des problèmes. Trois paramètres ont été pris en compte: le nombre de parties (2 ou 3), les relations entre les données (additive, multiplicative ou additive et multiplicative) et la nature des quantités mises en jeu (dans les quatre premiers problèmes, nous avons veillé à ce que la somme totale à répartir soit multiple de 2 ou de 3, de manière à permettre des démarches de résolution basées sur un partage en parties égales). Par ailleurs, nous avons proposé un énoncé connecté afin de voir si les élèves qui développent une démarche algébrique sont sensibles à la nature (arithmétique ou algébrique) du problème. Quatre énoncés déconnectés ont également été proposés afin de fournir aux élèves une opportunité importante de faire apparaître l'arithmétique et l'algèbre au sein d'une même démarche de résolution.

Analyse a priori des problèmes

Cinq démarches de résolution peuvent aboutir à la résolution correcte des problèmes :

- La première démarche - de type essais-erreurs - consiste à donner une valeur à l'une des grandeurs inconnues. Les autres grandeurs inconnues sont alors reconstruites à partir des relations stipulées dans le problème, en s'appuyant sur les grandeurs intermédiaires successivement générées. La démarche est répliquée jusqu'à remplir exactement les différentes contraintes définies dans le problème. Pour le premier problème, comme l'une des parties est connue, cette démarche n'implique qu'un seul essai.
- La deuxième démarche consiste à réaliser un partage égal (diviser le tout par le nombre de parties), puis à répartir les différences entre les parties, en fonction des relations stipulées dans l'énoncé.
- La troisième démarche, appelée de fausse position, est assez proche de la première : elle consiste à poser une valeur à l'une des parties, ensuite, à retrouver les autres parties, puis à calculer la somme totale. Le processus sera éventuellement reproduit au départ d'un autre nombre. Dans ce cas, il s'agira ensuite d'appliquer une règle de trois pour retrouver la valeur de départ.
- La quatrième démarche, appelée démarche de type structure, s'élabore à partir des relations stipulées dans l'énoncé. Il s'agit de réaliser des opérations en partant de ces transformations afin de restructurer le problème en une situation de type partage égal : on obtient ainsi un total à répartir en différentes parts. Une division permettra alors d'obtenir la valeur d'une part qui, à son tour, permettra de déterminer chacune des parties du problème.

  Remarque importante : il s'agit dans ce cas de distinguer les parts et les parties. Le quatrième problème permet de préciser cette nuance :

Un père partage une somme de 1200 F entre ses 3 filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 3 fois plus à Béatrice qu'à Aurélie et 200 F de moins à Céline qu'à Béatrice. Combien chaque enfant a-t-il reçu?

  Le nombre de parties correspond au nombre d'enfants qui se partagent la somme totale, soit 3. Le nombre de parts est dans ce cas égal à 7, puisque dans un raisonnement de type "structure", il s'agit de transformer la situation décrite en considérant qu'une même grandeur, prise 7 fois correspond à un total de 1400.

- La cinquième démarche est la mise en équation du problème et la résolution de l'équation obtenue. La solution ainsi obtenue permettra de retrouver les parties.

L'annexe 3 reprend, pour chaque problème, un exemple de démarche de chaque type. Certaines cases du tableau sont vides parce qu'il nous était impossible d'anticiper une telle procédure en fonction de la structure du problème.

3.3 Axe 3 : Ruptures et complémentarités entre arithmétique et algèbre dans les raisonnements des élèves

a. *Reformulation de la problématique de recherche*

Vergnaud (1988) envisage une double rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre. Une discontinuité se dégage d'une part au niveau de la nature des raisonnements et d'autre part au niveau du symbolisme utilisé. Cette double rupture se manifeste-t-elle dans les démarches de raisonnement des élèves en résolution de problèmes?

D'après Chevallard (1984), une dialectique fonctionnelle peut s'élaborer entre l'arithmétique et l'algèbre sur base de l'étude d'une numérique. Nous avons montré la forme que pouvait prendre cette dialectique dans le contexte spécifique de la résolution algébrique de problèmes. Cette dialectique fonctionnelle s'observe-t-elle à travers les raisonnements des élèves? Suite aux interviews qu'elles ont réalisées avec de futurs enseignants, Schmidt et Bednarz (1997) ont remarqué que certaines personnes ont utilisé l'algèbre pour dégager les données (connues ou inconnues) et les relations en présence dans le problème puis ont ensuite utilisé l'arithmétique pour obtenir la solution du problème. Voici un exemple, issu de l'article de Bednarz et Schmidt (1997) qui illustre ce propos :

Arsène Ponton lègue sa fortune à ses deux nièces, Marie et Chantal. Il donne 19 000$ de plus à Marie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 133 000$, combien recevront Marie et Chantal?

x	Chantal
x + 19 000 $	Marie
133 000 $	

133 000 = 114 000 : 2 = 57 000

"Cette symbolisation intermédiaire aide à maîtriser l'ensemble des relations proposées de manière à voir plus clair dans le problème : la lettre x permet de désigner l'une des grandeurs recherchées et d'indiquer comment les autres inconnues du problème sont reliées à celle-ci. Cette représentation sert alors de support aux raisonnements arithmétiques utilisés : dans ce cas, une procédure de type "structure". (p.143)

Visiblement, pour cette personne, l'arithmétique et l'algèbre ne constituent pas deux univers clos et peuvent s'articuler harmonieusement pour résoudre la situation : l'algèbre est utilisée dans sa fonction de langage, et permet d'obtenir un modèle de situation. Ce dernier est ensuite traité sur le plan arithmétique, qui prend alors à son tour le statut d'outil pour résoudre le problème.

b. *Présentation de la méthodologie de recherche*

Ce troisième axe d'analyse sera réalisé à partir d'études de cas obtenus à la suite des interviews décrites dans l'axe 2 de la présente partie.

3.4 Présentation de l'articulation des trois axes d'analyse

En guise de conclusion, le schéma suivant reprend les différentes questions et hypothèses de recherche qui sont développées dans ce travail, et leur articulation dans le cadre de la problématique de recherche abordée :

Problématique de recherche
L'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre dans le contexte de la résolution de problèmes

Deux grandes questions de recherche

Les problèmes envisagés en arithmétique et en algèbre favorisent-ils une articulation fructueuse entre les deux domaines?	Si les élèves sont confrontés à des problèmes qui permettent une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre, comment se manifeste l'articulation entre les deux domaines?

Premier axe de recherche Quelle est la nature des problèmes proposés en arithmétique et en algèbre?	**Deuxième axe de recherche** Quels sont les raisonnements des élèves avant et après l'introduction de l'algèbre?	**Troisième axe de recherche** Lorsque l'arithmétique et l'algèbre apparaissent dans les raisonnements, quelle articulation se dégage entre les deux domaines?

Hypothèse H1 Une différence se manifeste entre les problèmes présentés dans l'enseignement primaire et secondaire.	*Question 1* Les raisonnements des élèves diffèrent-ils après les premiers apprentissages algébriques?	*Question 1* Comment les ruptures se manifestent-elles?
Hypothèse H2 Il n'est pas impossible de rencontrer des problèmes déconnectés dans l'enseignement primaire.	*Question 2* Les élèves développent-ils des stratégies variées de résolution?	*Question 2* Une dialectique fonctionnelle s'installe-t-elle entre les deux domaines?
Hypothèse H3 Une faible diversité sémantique se dégage dans les problèmes présentés en arithmétique et en algèbre.	*Question 3* La structure des problèmes a-t-elle une influence sur les démarches mises en œuvre par les élèves?	

4. ANALYSE DES RÉSULTATS

4.1. Premier axe de recherche : quelle est la nature des problèmes proposés en arithmétique et en algèbre ?

Problématique de recherche

L'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre dans le contexte de la résolution de problèmes

Deux grandes questions de recherche

Les problèmes envisagés en arithmétique et en algèbre favorisent-ils une articulation fructueuse entre les deux domaines?	Si les élèves sont confrontés à des problèmes qui permettent une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre, comment se manifeste l'articulation entre les deux domaines?

Premier axe de recherche

Quelle est la nature des problèmes proposés en arithmétique et en algèbre?

Hypothèse H1

Les problèmes connectés apparaissent davantage dans l'enseignement primaire qu'en deuxième année de l'enseignement secondaire.

Hypothèse H2

Il est possible de rencontrer des problèmes déconnectés dans l'enseignement primaire.

Hypothèse H3

Une faible diversité sémantique se dégage dans les problèmes présentés en arithmétique et en algèbre.

A travers cet axe de recherche, l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre est envisagée à la lumière de problèmes proposés à deux moments de la scolarité :

- à la fin de l'enseignement primaire, caractérisé par une approche arithmétique des problèmes ;
- au début de l'enseignement secondaire, en deuxième année plus précisément, où la démarche algébrique est développée.

Quelle est la nature des problèmes proposés aux deux moments de la scolarité? Cette question de recherche est analysée à travers la mise à l'épreuve des trois hypothèses. Celles-ci sont envisagées par le biais d'une analyse de deux manuels utilisés dans l'enseignement primaire : "*Réseau mathématique*" et "*Ateliers mathématiques*" et d'un manuel destiné aux élèves de deuxième année de l'enseignement secondaire "*Espace Math 2*$^{\textit{ème}}$".

Les deux premières hypothèses sont traitées en fonction de la nature connectée ou déconnectée des problèmes.

La troisième hypothèse est envisagée sur la base des catégories de problèmes définies par Vergnaud (1989) pour les problèmes simples, et par Bednarz et Janvier (1994) pour les problèmes complexes. Une analyse plus approfondie de la variété des problèmes au sein des catégories ainsi définies permettra d'affiner les commentaires concernant cette troisième hypothèse.

a. *La nature connectée ou déconnectée des problèmes*

Le tableau suivant reprend, pour chaque manuel, la proportion de problèmes connectés et déconnectés :

Année d'étude	Manuel	Proportion de problèmes connectés	Proportion de problèmes déconnectés
5ème année de l'enseignement primaire	Ateliers mathématiques	83 %	17 %
	Réseaux mathématiques	81 %	19 %
6ème année de l'enseignement primaire	Ateliers mathématiques	84 %	16 %
	Réseaux mathématiques	84 %	16 %
2ème année de l'enseignement secondaire	Espace Math 2ème	77 %	23 %

Mise à l'épreuve de l'hypothèse H1 :

Les problèmes connectés apparaissent davantage dans l'enseignement primaire qu'en deuxième année de l'enseignement secondaire

Quel que soit le manuel envisagé, on ne peut que **réfuter cette hypothèse** : aucune différence majeure ne se dégage entre les deux niveaux d'enseignement : **on ne rencontre guère plus de problèmes déconnectés en deuxième année de l'enseignement secondaire que dans l'enseignement primaire.**

Une analyse des manuels français du début du collège menée par Combier, Guillaume et Pressiat (1996) aboutissait à cette même conclusion : "*Dans la plupart des manuels, le problème choisi mène à une équation du type ax+b=c et ne nécessite donc pas un traitement algébrique*" (p. 67).

Chevallard (1984) propose une explication de ce phénomène à travers l'analyse d'un manuel d'algèbre élémentaire de 1924 : pour présenter la spécificité de l'algèbre par rapport à l'arithmétique, "*l'idéal serait de proposer un problème tout semblable à ceux que l'arithmétique permet en principe de résoudre, mais d'une difficulté telle que les seules lumières de l'arithmétique nous laissent impuissants à le résoudre effectivement, et d'en donner alors une solution par le moyen de l'algèbre! Mais le commençant ne maîtrisant pas l'outil algébrique - par définition - ils doivent s'en tenir à un problème de structure assez simple pour que l'introduction du langage et des procédures algébriques demeurent aisément compréhensibles, en soulignant éventuellement ensuite que les mêmes méthodes, présentées sur un exemple qui certes ne les requiert pas, permettraient de résoudre des problèmes "très compliqués" devant lesquels l'arithmétique seule nous laisserait cois*".

Mise à l'épreuve de l'hypothèse H2 :

Il est possible de rencontrer des problèmes déconnectés dans l'enseignement primaire

Cette hypothèse se confirme : quels que soit l'année et le manuel envisagés, environ un problème sur cinq proposés dans l'enseignement primaire est de nature déconnectée.

La technique enseignée pour résoudre ces problèmes correspond à une démarche de type structure, comme l'illustre l'extrait de manuel suivant (Ateliers mathématiques 6ème, p. 80).

J'analyse une situation

1. *Cet après-midi, Pierre a regardé deux émissions TV de **15 h 15 à 16 h 35** : un documentaire et un feuilleton.*

Durée totale des deux émissions = ... h .... min – .... h .... min = ... h .... min

*Le documentaire sur les Alpes avait une durée supérieure de **10 min** au feuilleton.*

– 10 min x 2 + 10 min

..... min • • • • 80 min

+ 10 min : 2 – 10 min

Documentaire

	10 min

Feuilleton

80 min

Durée du feuilleton en min = (........ – ....) : 2 = ...

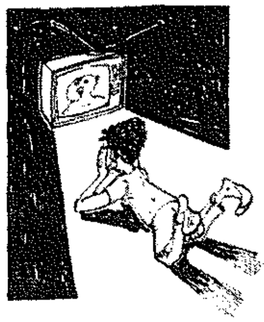
***Colorie** cette durée dans ce rectangle qui représente 1 h.*

30 min 1 h

Durée du documentaire en min = ... + ... = ...

***Colorie** cette durée dans ce rectangle qui représente 1 h.*

30 min 1 h



Je complète et je retiens la structure

2.

– 10 min x 2 + 10 min

.... min • • • • 80 min

+ 10 min : 2 – 10 min

A | | 10 |

B | |

80

2 x B = ... B = ...

A = ...

Je m'applique

3. *Partage **50 billes** entre Pierre et Jacques de sorte que Pierre en ait **6 de moins** que Jacques.*

....

....

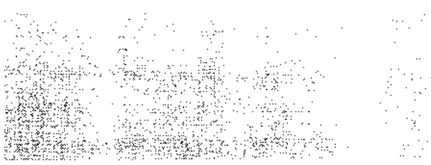
4. *Un kg de cassonade et un bocal de confiture coûtent ensemble **76 F**. Le bocal de confiture coûte **28 F** de plus que le kg de cassonade. **Calcule** le prix de chaque marchandise.*

....

....

5. *Deux amies vont à la rencontre l'une de l'autre. Quand elles se rencontrent, Sabrina dit à Sophie : "J'ai parcouru **200 m** de plus que toi ".*

***Trace** un trait à l'endroit où elles se sont rencontrées.*



0 m 200 m 400 m 600 m 800 m 1 000 m 1 200 m

Sophie **Sabrina**

b. La variété des problèmes

Le tableau suivant reprend la répartition des problèmes en fonction des catégories définies par Vergnaud (1981) pour les problèmes simples et de Bednarz et Janvier (1994) pour les problèmes complexes. Les nombres figurant dans le tableau correspondent aux effectifs d'énoncés de la catégorie correspondante pour le niveau scolaire étudié. Comme peu de variété apparaît entre les manuels "*Réseaux mathématiques*" et "*Ateliers mathématiques*", nous avons opté pour une présentation globale des effectifs obtenus.

		Problèmes connectés			Problèmes déconnectés		
		cinquième année primaire	Sixième année primaire	Deuxième année secondaire	cinquième année primaire	Sixième année primaire	Deuxième année secondaire
	Problèmes simples						
Catégories de G. Vergnaud (1981)	Problèmes additifs						
	Composition de mesures	15	10				
	Transformation d'une mesure	33	25				
	Comparaison de mesures	5	1				
	Composition de transformations						
	Transformation d'une relation						
	Composition de relations						
	Multiplicatifs						
	Isomorphisme de mesures	21	50				
	Un espace de mesure						
	Produit de mesures						
	Problèmes complexes						
Catégories de Bednarz et Janvier (1994)	Partages inégaux	42	10		45	32	2
	Transformations dans le temps						
	Relations entre des grandeurs non homogènes						
	Autres	6	2				
	Trouve un nombre			28			6

L'analyse du tableau nous permet de dégager deux constats.

- Globalement, on observe **peu de variété de problèmes au sein d'un même niveau d'étude.** En primaire, la plupart des problèmes simples se regroupent en trois catégories : "composition de mesures", "transformation d'une mesure" et "isomorphisme de mesures". Les problèmes complexes sont majoritairement situés dans la catégorie "partages inégaux". En deuxième année de l'enseignement secondaire, la majorité des problèmes correspondent à deux catégories : "partages inégaux" et "trouve un nombre[5]". Cette dernière catégorie n'apparaît pas dans la classification des problèmes complexes élaborée par Bednarz et Janvier (1994). Cette constatation n'est pas étonnante, dans la mesure où ces problèmes ne peuvent réellement être considérés comme tels, en ce sens qu'*"ils ne se réfèrent pas à un contexte (réel ou imaginé) porteur de sens : le domaine strictement mathématique est suffisant pour le définir"* (Verschaffel, Greer et de Corte, 2000, p.5). La mise en équation de ces problèmes se rattache plutôt à une traduction directe de l'énoncé sous forme de symboles (lettres, signes d'opérations et d'égalité), contrairement aux autres

[5] Voici un exemple de problème appartenant à cette catégorie:
Trouve un nombre tel que le double de ce nombre augmenté de 7 est égal à 49.

types de problèmes, dont la résolution nécessite la mise en œuvre d'un processus de modélisation beaucoup plus riche.

- Une même proportion de **problèmes déconnectés se répartit très différemment** entre les catégories en primaire et en secondaire. En primaire, les problèmes déconnectés n'appartiennent qu'à la catégorie "partages inégaux". En deuxième année du secondaire, en revanche, la majorité des problèmes rencontrés appartiennent à la catégorie "trouve un nombre".

1. Analyse approfondie des problèmes de type "partages inégaux"

Dans l'enseignement primaire, tous les problèmes complexes se regroupent au sein d'une seule et même catégorie. On pourrait se demander s'il existe une variété des problèmes au sein de cette catégorie. Dans le prolongement des travaux de Vergnaud (1981) concernant les problèmes simples, N. Bednarz et B. Janvier (1994) ont identifié quatre facteurs qui peuvent influencer les procédures de résolution des problèmes complexes par les élèves :

- la nature (connue ou inconnue) des quantités en jeu, qui permet ainsi d'identifier la place de l'inconnue dans le problème ;
- le nombre de parties impliquées dans le problème ;
- le type de relations unissant les données et l'inconnue ;
- la nature des relations.

L'analyse des problèmes de type partages inégaux réalisée en fonction de ces quatre paramètres apporte les résultats suivants.

- La place de l'inconnue :

  Tous les problèmes proposés aux élèves sont des problèmes où la somme totale à partager et les relations entre les parties sont connues. Les quantités inconnues sont chaque fois une ou plusieurs parties. La difficulté de la mise en équation consiste donc à exprimer le tout à partir d'une inconnue. Dans une telle perspective, le signe d'égalité présent dans l'équation qui modélise le problème pourra conserver une signification arithmétique d'amorce d'un résultat.
- Le nombre de parties :

  Une majorité des problèmes envisagés comporte deux parties (75%). Les autres en comportent 3 (25%). Ce n'est donc pas non plus à ce niveau qu'une réelle variété apparaît.
- Le type de relation :

  C'est là qu'une variété se dégage; elle se répartit de façon assez homogène entre les différentes combinaisons possibles de relations :
  - relations additives : 37%
  - relations multiplicatives : 35%
  - relations mixtes : 28 % (multiplicative puis additive : 12 % ; additive puis multiplicative : 16%).
- La nature des relations :

  Toutes les relations présentes dans les énoncés concernent deux parties. Aucun problème ne présente de relation entre une partie et la somme totale à partager.

Cette analyse montre qu'un seul critère parmi ceux retenus permet de différencier les problèmes de type "partages inégaux" : le type de relations impliquées dans le problème. Ce constat majeur va de pair avec la démarche de résolution qui est développée traditionnellement dans l'enseignement primaire : le raisonnement de type structure. En effet, ce dernier consiste à développer une démarche arithmétique à partir des relations entre les données. Il n'est donc pas étonnant que les différences ne se manifestent qu'à ce niveau.

2. Analyse approfondie des problèmes de type "trouve un nombre"

Cette nouvelle catégorie de problèmes est largement développée dans le manuel de deuxième année de l'enseignement secondaire. Les problèmes proposés ont cette particularité que l'inconnue est toujours clairement identifiée dans le problème. Ces problèmes peuvent comporter un nombre variable d'opérations (entre 3 et 8). Ils sont précédés d'un apprentissage spécifique du "vocabulaire algébrique". Les élèves sont alors confrontés à l'expression mathématique de propositions telles que "le double de a", "la somme de a et de b", "la somme du produit de a par b et du triple de a"....

Dans ces problèmes, la mise en équation apparaît clairement comme une traduction mathématique de l'énoncé : le choix de l'inconnue est précisé de façon très claire, puisque tous les énoncés commencent par l'expression "trouve un nombre...". La situation induit ensuite des transformations à partir de ce nombre inconnu pour obtenir soit un nombre (problèmes de type arithmétique, dans lesquels la résolution par opérations réciproques pourrait largement suffire et où le signe d'égalité a le sens d'amorce d'un résultat), soit une autre transformation à partir du nombre inconnu. C'est alors qu'apparaissent les énoncés déconnectés, qui nécessitent une conception structurale de l'égalité.

c. Conclusion

Les problèmes envisagés en arithmétique et en algèbre favorisent-ils une articulation fructueuse entre les deux domaines? Cette question est envisagée à travers l'analyse des énoncés présents dans trois manuels fréquemment utilisés dans les classes concernées.

A travers la mise à l'épreuve de trois hypothèses de recherche, nous ne pouvons répondre par l'affirmative à cette question.

- Seule une situation sur cinq en algèbre peut permettre de percevoir l'intérêt d'abandonner les démarches arithmétiques au profit d'une stratégie algébrique.
- L'arithmétique et l'algèbre apparaissent comme deux domaines disjoints utilisés pour résoudre des problèmes totalement différents : les problèmes envisagés dans l'enseignement primaire sont principalement de type "partages inégaux", qui permettent une utilisation efficace de la stratégie arithmétique de type "structure". A l'inverse, en algèbre, les situations sont des énoncés rédigés dans un langage très proche du langage mathématique. La méthode efficace pour résoudre de tels problèmes est algébrique, en ce sens qu'elle consiste à traduire l'énoncé sous la forme d'une équation. Cette démarche est amplement facilitée par le caractère stéréotypé des énoncés, qui donne une vision assez pauvre du processus de modélisation en tant que simple traduction mot à mot de l'énoncé.

4.2 Deuxième axe de recherche

Problématique de recherche
L'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre dans le contexte de la résolution de problèmes

Deux grandes questions de recherche

Les problèmes envisagés en arithmétique et en algèbre favorisent-ils une articulation fructueuse entre les deux domaines ?	Si les élèves sont confrontés à des problèmes qui permettent une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre, comment se manifeste l'articulation entre les deux domaines ?

Deuxième axe de recherche
Quels sont les raisonnements des élèves avant et après l'introduction de l'algèbre ?

Question 1
Les raisonnements des élèves diffèrent-ils après les premiers apprentissages algébriques ?

Question 2
Les élèves développent-ils des stratégies variées de résolution ?

Question 3
La structure des problèmes a-t-elle une influence sur les démarches mises en œuvre par les élèves ?

Par le biais d'interviews de quinze élèves de sixième année de l'enseignement primaire, de première et de deuxième année de l'enseignement secondaire, nous décrivons les démarches développées face à des problèmes connectés et déconnectés de type "partages inégaux". Nous proposons ensuite un organigramme présentant une mise en perspective des différentes démarches observées. Les regroupements de démarches sont réalisés sur la base de l'élément sur lequel se fonde chacun des raisonnements.

A partir de cette mise en perspective, nous apportons des éléments de réponse aux trois questions suivantes :

1. Les raisonnements des élèves diffèrent-ils après les premiers apprentissages algébriques ?
2. Les élèves développent-ils des stratégies variées de résolution ?
3. La structure des problèmes a-t-elle une influence sur les démarches mises en œuvre par les élèves ?

a. Description et mise en perspective des démarches observées

Les démarches observées ont été sensiblement différentes en fonction de la nature (connue ou inconnue) de la somme totale à partager. Nous présentons donc les démarches recueillies séparément en illustrant chacune de celles-ci par des extraits d'interviews.

1. Démarches obtenues lorsque la somme totale est connue (problèmes 1 à 4)

- Démarche 1
  Il s'agit d'une démarche inachevée qui consiste simplement à diviser la somme totale à partager par le nombre de parties.

  Voici un exemple de ce type de procédure réalisée au départ du problème 3.

Rappel du problème

Un père partage une somme de 1000 F entre ses deux filles : Aurélie et Béatrice. Il donne 4 fois plus à Aurélie qu'à Béatrice. Combien chaque enfant a-t-il reçu ?

Extrait d'une interview illustrant cette démarche (J : élève)

J : *Ben, comme il a 1000F, il donne normalement la moitié à chacun, ça fait 500... "4 fois plus"... On fait "4 fois"... "divisé en 2". Euh, celui-là, c'est dur...*

- Démarche 2
  Cette démarche consiste à diviser la somme totale à partager par le nombre de parties. On détermine alors des parties égales. Une procédure de type "compensation" amène ensuite à appliquer une opération sur une partie et l'opération réciproque sur une autre partie.

  Voici un exemple de ce type de procédure réalisée au départ du problème 4.

Rappel du problème

Un père partage une somme de 1200 F entre ses 3 filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 3 fois plus à Béatrice qu'à Aurélie et 200 F de moins à Céline qu'à Béatrice. Combien chaque enfant a-t-il reçu ?

Extrait d'une interview illustrant cette démarche (Q : élève ; I : interviewer)

Q écrit *:*

1200 : 3 = 400

I : *Pourquoi divises-tu par 3 ?*
Q : *Parce qu'il y a 3 filles.*
Q écrit :

B : 400 + **200** = **600**

I : *Explique...*
Q : *Ben ... il donne 200F de moins à Céline, donc "- 200" pour Céline et "+ 200" pour Béatrice.*
Q *écrit :*

C : 400
A : 400
B : 600

Puis, Q écrit :

C : 400 - **200** = **200**
A : 400

Q : *3 fois plus à Béatrice qu'à Aurélie, donc il faudrait 200F à Aurélie, donc j'enlève 200F à Aurélie et je les rajoute à Céline.*
Q écrit :

C : 400 - 200 = 200   200 + **200** = **400**
A : 400 - **200** = **200**
B : 400 + 200 = 600

- <u>Démarche 3</u>

Assez proche des deux premières démarches, il s'agit de diviser la somme totale à partager par le nombre de parties et d'effectuer ensuite des opérations correspondant aux relations afin de trouver la partie de la personne qui a le moins. Cette recherche de la plus petite partie ne se réalise cependant pas sous la forme d'un raisonnement de type compensation, comme c'était le cas dans la démarche précédente.

Voici un exemple de cette démarche appliquée pour résoudre le problème 2.

Rappel du problème

Un père partage une somme de 600 F entre ses deux filles : Aurélie et Béatrice. Il donne 150 F de plus à Aurélie qu'à Béatrice. Combien chaque enfant a-t-il reçu ?

Extrait d'une interview illustrant cette démarche (Z : élève)

Z : *Normalement, ça fait 300 pour chacune. Comme il y a une différence de 150, ben ... Aurélie, elle a 450 et l'autre 150, parce que 600 - 450, ça fait 150 .*

- <u>Démarche 4</u>

Cette démarche consiste dans un premier temps à éliminer les relations additives, s'il y en a. On dégage ensuite le nombre de parts comprises dans le tout (qui peut être différent du nombre de parties). On divise alors le premier résultat par le nombre de parts et on obtient la plus petite partie. On peut alors déterminer les autres. Il s'agit du raisonnement de type "structure" relevé dans la littérature de recherche (Bednarz, Janvier, 1994). Cette démarche arithmétique, lorsqu'elle est bien utilisée, peut s'avérer très efficace dans les problèmes de partages inégaux où la somme totale à partager est connue.

Voici un exemple de cette démarche appliquée pour résoudre le problème 4 :

Rappel du problème

Un père partage une somme de 1200 F entre ses 3 filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 3 fois plus à Béatrice qu'à Aurélie et 200 F de moins à Céline qu'à Béatrice. Combien chaque enfant a-t-il reçu ?

Extrait d'une interview illustrant cette démarche (J : élève ; I : interviewer)

J : *Je vais déjà retirer les 200 F, ça fait 1000.*
J écrit :

$$1000 : 4 = 250$$

I : *Pourquoi as-tu divisé par 4 ?*
J : *Parce que Béatrice, elle a 3 fois plus, donc en tout, il faut diviser par 4.*
J : *Ca fait... 750 pour Béatrice et 250 pour Aurélie... euh non, ça n'ira pas, avec Céline, on n'arrive pas à 1200.*

- Démarche 5

  Ce type de raisonnement est assez proche du précédent : il s'agit d'abord d'éliminer les relations additives s'il y en a. Ensuite, il s'agit de diviser ce nombre par le nombre de parties (c'est à dire d'enfants) et de déterminer ainsi la somme qu'aura l'enfant qui a la plus petite partie. On peut alors retrouver les parties des autres enfants.

  Voici un exemple de cette démarche appliquée au problème 2.

Rappel du problème

Un père partage une somme de 600 F entre ses deux filles : Aurélie et Béatrice. Il donne 150 F de plus à Aurélie qu'à Béatrice. Combien chaque enfant a-t-il reçu ?

Extrait d'une interview illustrant cette démarche (M : élève ; I : interviewer)

M : *"600 - 150", ça fait 450 et euh... "450 : 2=225".. Ah oui, 225 pour Béatrice et 375 pour Aurélie et ça tombe juste, ça fait 600 F.*
I : *Pourquoi as-tu divisé 450 en 2?*
M : *Comme il y a 2 filles.*

- Démarche 6

  A nouveau cette démarche est assez proche des deux précédentes, puisqu'il s'agit d'abord d'éliminer les relations additives. Ensuite, il faut éliminer les relations multiplicatives en divisant le résultat obtenu par le nombre représentant la relation multiplicative. Cela permet ainsi d'obtenir une partie, puis de générer les autres en appliquant les relations dans l'autre sens (remarque : dans ce type de raisonnement, un des enfants obtient comme partie la relation additive qui l'unit à un autre enfant).

  Voici un exemple de cette démarche appliquée au problème 4.

Rappel du problème

Un père partage une somme de 1200 F entre ses 3 filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 3 fois plus à Béatrice qu'à Aurélie et 200 F de moins à Céline qu'à Béatrice. Combien chaque enfant a-t-il reçu?

Extrait d'une interview illustrant cette démarche (T : élève ; I : interviewer)

T : *Bon, ben je vais déjà retirer les 200 F, ça fait "1200 - 200", ça fait 1000 F. Comme il y a "3 fois plus", je vais diviser par 3, ça fait 333. Donc Aurélie, elle a 333. Béatrice, elle aura 666 et Céline, 200.*
I : *Comment as-tu trouvé la partie de Céline?*
T : *Ben comme en tout, il y a 1200. Il va rester 200 F à Céline.*

- <u>Démarche 7</u>
  Cette démarche est celle de type "essais-erreurs", qui consiste à poser une valeur à un des enfants (souvent celui qui a la plus petite partie) et déterminer ensuite la partie des autres enfants. On compare ensuite la somme totale obtenue avec la somme totale précisée dans l'énoncé et on applique à nouveau la démarche à partir d'un autre nombre jusqu'à arriver à la somme totale attendue.

  Voici un exemple de cette démarche appliquée au problème 3.

  Rappel du problème

Un père partage une somme de 1000 F entre ses deux filles : Aurélie et Béatrice. Il donne 4 fois plus à Aurélie qu'à Béatrice. Combien chaque enfant a-t-il reçu?

  Extrait d'une interview illustrant cette démarche (V : élève)

  V écrit :

  150F x 4 = 600... 600 + 150 = 750

  V : *c'est trop peu.*

  V (essaie avec 250): *250 x 4, ça va faire, euh je ne sais pas combien ; ça fera de trop et si en plus après il faut encore ajouter 250, ça fera de trop.*

  V (essaie avec 200): *200 x 4 = 800 + 200 = 1000. Béatrice = 200F et Aurélie = 800F*

- <u>Démarche 8</u>
  Il s'agit de la démarche algébrique qui consiste à désigner une des parts par une lettre puis à exprimer la somme totale en fonction de l'inconnue. La résolution de l'équation permet de retrouver l'une des parties, qui permettra à son tour de générer les autres parties.

  Voici un exemple de cette démarche appliquée au problème 1.

  Rappel du problème

Un père partage une somme de 1800 F entre ses trois filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 2 fois plus à Céline qu'à Aurélie et il donne 200 F de moins à Béatrice qu'à Céline. Béatrice reçoit 600 F. Combien les autres enfants ont-ils reçu?

  Extrait d'une interview illustrant cette démarche (C : élève ; I : interviewer)

  C : *Ben, euh quand on dit Béatrice a 200 F de moins que Céline, ça fait "2 fois Aurélie moins 200F", donc ça fait "2x - 200 = 600 F". Je peux faire comme si je ne connaissais pas ça* (montre le 600)... *ça fait : x + 2x + (2x - 200) = 1800*

  C résout l'équation :

  $$5x = 1800 + 200$$
  $$5x = 2000$$
  $$x = 2000 : 5$$
  $$x = 400$$

  C : *Donc ça fait... Aurélie : 400 F.*

  I : *Comment trouves-tu 400 F?*

  C (en montrant le x dans l'équation de départ) *: Ben c'est le x, là-bas.*

  C : *Céline, ça fait" 2 fois 400F".*

  I : *Comment le trouves-tu?*

  C : *Parce qu'il faut regarder dans l'énoncé : il donne 2 fois plus à Céline... et Béatrice, ça fait 800 F - 200F, ça fait 600 F, parce qu'il donne 200F de moins à Béatrice qu'à Céline.*

2. Démarches obtenues lorsque la somme totale est inconnue (problème 5)

Rappel du problème

Un père partage une somme entre ses 3 filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 2 fois plus à Béatrice qu'à Aurélie et 100 F de plus à Céline qu'à Béatrice. Finalement, Céline a 150 F de plus qu'Aurélie. Combien chaque enfant a-t-il reçu?

- Démarches 1,2 et 3

Ces trois démarches sont fondées sur les relations entre les parties, avec une priorité donnée aux relations additives. Dans ces trois cas, il s'agit d'additionner 100 et 150. Cette combinaison de relations additives est alors assimilée à un état : la partie d'Aurélie (démarche 1), la partie de Béatrice (démarche 2) ou la partie de Céline (démarche 3). Les autres parties sont alors générées à partir de cet état connu.

Extrait d'une interview illustrant cette démarche (D : élève)

D : *Euh, Aurélie, elle a 2 fois moins que Béatrice et 150 F de moins que Céline... donc .. Euh ... je ne saurai pas le savoir tout de suite.*
D : *Alors, Céline, elle a 100F de plus que Béatrice et 150 F de plus qu'Aurélie. Donc, on peut déjà dire qu'elle a 250 F. Donc euh Aurélie, elle a déjà 100 F et à la fin, Béatrice devrait avoir 100 F de moins que Céline. Donc ... euh Béatrice a 150F : on fait 250 - 100.*

- Démarche 4

Cette démarche consiste à construire un raisonnement prenant en compte les relations du problème. Il s'agit de la démarche de type structure, déjà expliquée précédemment, mais qui prend une dimension particulière, étant donné la structure différente de ce problème. L'interview suivante décrit bien cette démarche, bien que l'enfant transforme en fin de processus une relation en un état.

Extrait d'une interview illustrant cette démarche (C : élève ; I : interviewer)

C : *Je vais relire ... ah oui, comme Céline a 150F de plus qu'Aurélie... il y a 50F en plus, euh non, divisé en 2, ça fait 25.*
I : *Comment as-tu trouvé ce résultat?*
C : *Ben, on a "fois 2 plus 100" d'un côté et "plus 150" de l'autre. Donc si on fait "fois 2+100", on a la même chose que "plus 150".*
C : *Donc Aurélie, ça doit faire 25 parce qu'on fait 150 - 100, ça fait 50... divisé en 2, ça fait 25...*
C : *Donc, Aurélie, elle a 25 ; Céline, elle a 175 et Béatrice, 50.. Euh non, ça ne va pas...Céline n'a pas 100 de plus que Béatrice...*

- Démarche 5

Cette démarche, de type "essais erreur" prend comme point de départ du raisonnement une des parties à laquelle on pose d'emblée une valeur. Il s'agit ensuite de déduire les autres parties. Contrairement aux quatre autres problèmes, on ne peut pas comparer la somme totale obtenue avec celle attendue puisque cette dernière n'est pas connue. Certains enfants vérifient leur démarche en comparant les relations obtenues avec celles attendues. D'autres ne vérifient pas leur démarche, en argumentant que c'est impossible puisque la somme totale n'est pas connue.

Voici un exemple de cette démarche (Z : élève ; I : interviewer)

Z :*Oh, si on n'a pas la somme, on ne sait pas démarrer...*
Z :*Si Céline, elle a 150, alors Béatrice, elle aura 50, puisque Céline a 100F de plus que Béatrice.*
Z :*Et Aurélie, elle aura 25, comme Béatrice a 2 fois plus qu'Aurélie.*
Z :*Et en tout, ça fait 225.*
I : *Comment es-tu partie de 150 pour Céline ?*
Z : *Euh ben je ne sais pas... J'ai essayé comme ça.*
I : *Comment es-tu sûre que ta réponse est correcte ?*
Z :*Ben, on ne sait pas dire, on ne connaît pas la somme.*

- Démarches 6 et 7

Ces deux démarches sont des démarches algébriques qui consistent à désigner par une lettre une quantité inconnue. Elles diffèrent dans la façon de concevoir la modélisation. Dans la démarche 6, il s'agit de réaliser une mise en équation "standard" pour ce type de problèmes, qui amène à exprimer la somme totale à partager en fonction d'une seule inconnue (une des parties). Dans ce problème, cette mise en équation ne convient pas puisque le tout est inconnu. La seule démarche algébrique (démarche 7) efficace consiste à exprimer de deux façons différentes la partie de Céline, en fonction d'une inconnue et de résoudre l'équation ainsi obtenue. Plusieurs élèves ont réalisé des tentatives de résolution algébrique. Seuls deux sont parvenus à résoudre correctement le problème, avec des réticences à poser correctement l'équation.

Voici un exemple de cette démarche 7 (G : élève ; I : interviewer)

G écrit :

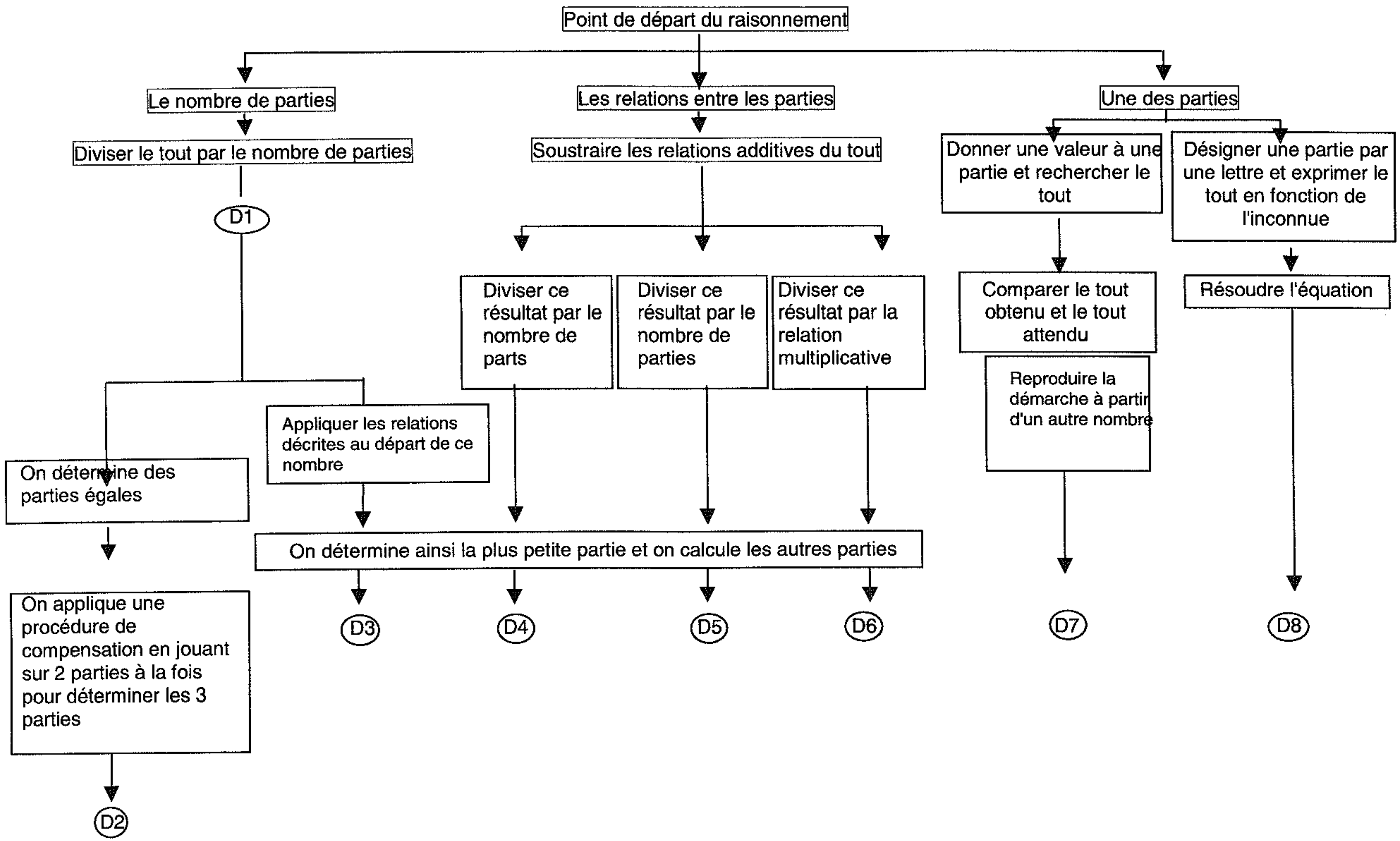
$$2.A = B$$
$$B + 100 = C$$
$$150 + A = C$$

G : ...*Et je vais essayer de voir un peu les rapports.*
G écrit :

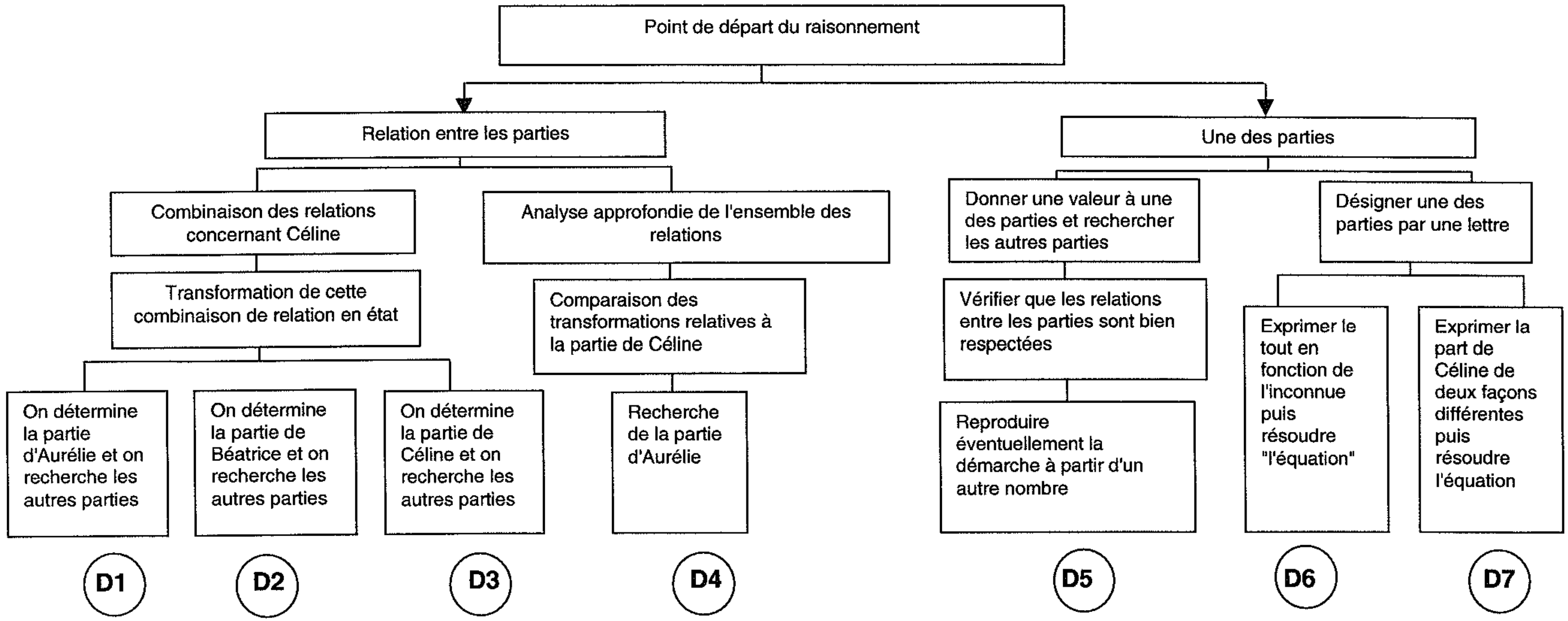
$$2A + 100 = C$$
$$150 + A = C$$

G : ... *Donc je fais passer le "100" de l'autre côté, ça fait "2A" là...*
Et "50 +A" là, puis je mets les A ensembles ..."A = 50".

Mise en perspective des démarches obtenues lorsque la somme totale est connue (problèmes 1 à 4)



Mise en perspective des démarches obtenues lorsque la somme totale est inconnue (problème 5)



b. Les raisonnements diffèrent-ils après les premiers apprentissages algébriques?

Afin d'apporter des éléments de réponse à cette question, nous dégageons des profils d'élèves, révélant d'éventuelles régularités dans leurs démarches de résolution des problèmes. Sur base des profils dégagés, nous présentons les résultats en réponse à deux questions sous jacentes :

1. Y a-t-il plus de sujets "algébriques" dans l'enseignement secondaire que dans l'enseignement primaire?
2. Les élèves développent-ils un même type de démarche face aux différents problèmes proposés?

1. Y a-t-il plus de sujets "algébriques" dans l'enseignement secondaire que dans l'enseignement primaire?

Lors de leur étude sur les professeurs en formation, Bednarz et Janvier (1994) ont mis en évidence trois profils, réalisés sur la base des démarches arithmétiques ou algébriques mises en œuvre pour aborder des problèmes connectés et déconnectés :

- des sujets "algébriques" qui développent majoritairement cette stratégie ;
- des sujets à tendance mixte (dans certaines situations, ils utilisent des démarches algébriques et dans d'autres, des démarches arithmétiques) ;
- des sujets "arithmétiques", qui utilisent principalement des démarches arithmétiques.

Elles avaient par ailleurs constaté que les enseignants du secondaire développaient plutôt des démarches algébriques, à l'inverse des enseignants du primaire qui développaient prioritairement des démarches arithmétiques.

Voici comment les enfants interviewés se répartissent selon le mode de résolution adopté pour les problèmes déconnectés :

	Profil algébrique	**Profil mixte**	**Profil arithmétique**
6ème primaire	3		2
1ère secondaire			5
2ème secondaire	2		3

Assez étonnamment, trois enfants de sixième année primaire développent majoritairement une procédure algébrique. Cela s'explique par le fait que, deux semaines avant les interviews, l'enseignant a expliqué cette démarche en la présentant comme une traduction mathématique de la procédure de type "structure". Par ailleurs, lors des exercices, il laisse le choix aux élèves pour l'utilisation de l'une ou l'autre démarche.

Les élèves de première année de l'enseignement secondaire présentent tous un profil arithmétique. La mise en équation n'a pas encore fait l'objet d'un apprentissage chez ces enfants, bien qu'ils l'aient abordé l'année précédente avec leur instituteur.

Enfin, seuls deux élèves de deuxième année présentent un profil algébrique. Bien que la mise en équation ait fait l'objet d'un apprentissage récent, très peu de problèmes de type "partages inégaux" ont été résolus par les élèves. L'analyse des manuels a montré qu'en effet, en deuxième année, la plupart des problèmes à résoudre sont des énoncés de type "trouve un nombre". Dans ce contexte, la mise en équation, présentée comme une traduction directe de l'énoncé à l'aide de symboles mathématiques, demande des compétences différentes de celles nécessaires pour résoudre algébriquement des problèmes de type "partages inégaux".

Remarquons enfin qu'il n'y a aucun sujet à tendance mixte dans les interviews réalisées.

Cette analyse ne permet pas de conclure en faveur d'une modification des démarches de raisonnements des élèves après un enseignement de l'algèbre. Plusieurs élèves de deuxième année développent des démarches arithmétiques et à l'inverse, des enfants de sixième année primaire envisagent les problèmes de type "partages inégaux" selon une approche algébrique.

2. Les élèves développent-ils un même type de démarche pour résoudre les problèmes?

Un premier élément de réponse à cette question peut découler du tableau ci-dessus : aucun des enfants interrogés ne présente un profil mixte, où sont développées à la fois des procédures arithmétique et algébrique.

Suite à la mise en perspective des différentes démarches possibles de résolution aux problèmes 1 à 4, nous pouvons affiner cette analyse afin de cerner si des régularités apparaissent au sein notamment de la catégorie "profils arithmétiques". Dans cette perspective, trois profils ont pu être dégagés :

- Le premier profil comprend les enfants qui n'ont appliqué qu'une seule et même démarche de résolution à l'ensemble des quatre problèmes. Deux enfants ont exclusivement utilisé une démarche algébrique (même si celle-ci n'était pas nécessaire, comme c'est le cas dans le premier problème, où ils ont tous deux fait remarquer qu'une information était inutile). Un enfant a uniquement utilisé la première démarche de résolution (division du tout par le nombre de parties puis répartition des différences grâce à l'utilisation d'une procédure de type "compensation").
- Le deuxième profil réunit les 9 enfants qui ont utilisé, pour les problèmes 2 à 4, plusieurs démarches différentes mais appartenant cependant à une même catégorie : leurs stratégies ont toutes le même point de départ[6].
  - Pour quatre enfants, il s'agit du nombre de parties.
  - Trois enfants ont basé leurs raisonnements sur les relations entre les parties.
  - Pour deux enfants, c'est une des parties.
- Le troisième profil correspond aux enfants qui ont utilisé les trois catégories de démarches. Trois enfants appartiennent à ce profil.

---

[6]Nous n'avons pas tenu compte dans cette catégorie de la méthode de résolution du premier problème parce que beaucoup ont appliqué la même approche de ce problème.

Le tableau suivant reprend, pour chacun des trois niveaux envisagés, le nombre d'élèves appartenant aux trois profils définis :

	Profil 1 : une seule démarche	Profil 2 : une seule catégorie de démarche	Profil 3 : les trois catégories sont utilisées
6ème primaire	2 (algébrique)	3	
1ère secondaire		3	2
2ème secondaire	1 (compensation)	3	1

Deux constats se dégagent de ces analyses :

- Seuls trois élèves utilisent des catégories variées de démarches face aux différents problèmes. **Une grande majorité des élèves interrogés applique une seule démarche ou une seule catégorie de démarches et ce, quelle que soit l'année envisagée.**
- Une des particularités du raisonnement de type algébrique réside dans le fait que le point de départ fait porter l'attention sur une des parties. Or, on constate ici que la majorité des sujets non algébriques prend comme point de départ du raisonnement soit les relations entre les parties (3 enfants), soit le nombre de parties (4 enfants). **Afin de développer une démarche de type algébrique, la moitié des enfants interrogés devra donc impérativement modifier l'approche du problème.**

c. La structure des problèmes a-t-elle une influence sur les démarches mises en œuvre par les élèves ?

Les tableaux suivants présentent, pour chaque problème, le nombre d'enfants ayant utilisé chaque démarche :

	Point de départ du raisonnement								
	Nombre de parties			Relations entre les parties			Une des parties		
	D 1	D 2	D 3	D 4	D 5	D 6	D 7	D 8	D 9
P 1		1	1			1	12		3
P 2	1	3	3	2	4	2			4
P 3	1	2	3	2		3	2		5
P 4	1	2	4	2	1	2			5

	Point de départ du raisonnement						
	Relations entre les parties				Une des parties		
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7
P 5	2	1	3	2	4	3	3

Plusieurs constats peuvent être dégagés :

- Le problème 1 se distingue nettement des autres problèmes, dans la mesure où une large majorité des démarches observées sont de type 7, ce qui n'est pas étonnant puisqu'une partie était connue. Remarquons cependant que 3 enfants ont développé la stratégie algébrique pour résoudre ce problème, et ont donc ignoré une des données pour développer cette stratégie.
- Il semble difficile d'établir des profils contrastés pour les autres problèmes : malgré de petites différences (pas de démarche de type "essais-erreurs" pour le deuxième problème et plusieurs démarches de type D5 ; tendance inverse pour le troisième problème), les situations semblent assez comparables, que l'on analyse la situation au niveau des démarches ou au niveau des points de départ du raisonnement.

- Le nombre de démarches algébriques observées est assez semblable pour tous les problèmes (entre 3 et 5 enfants, pour les quatre premiers problèmes et 6 pour le cinquième).

Contrairement à Bednarz et Janvier (1994), l'analyse réalisée ne nous permet pas de conclure à une influence de la structure des problèmes sur les raisonnements développés par les élèves. Les seules différences qui apparaissent permettent d'isoler le premier problème (connecté) des autres (déconnectés). Une hypothèse explicative de la discordance des résultats obtenus pourrait être la suivante : dans notre analyse, nous n'avons pas pris en compte la variable "efficacité de la démarche", contrairement aux deux chercheuses, qui ont constaté qu'en fonction de la structure des problèmes, certaines démarches s'avèrent plus efficaces que d'autres.

d. Conclusions

Quels sont les raisonnements dégagés par les élèves avant et après l'introduction de l'algèbre ?

A travers ce deuxième axe d'analyse et sur la base d'une mise en perspective des différentes démarches observées, nous apportons plusieurs éléments de réponse à cette question.

On ne peut pas conclure à une réelle modification des démarches de raisonnements après les premiers apprentissages algébriques. Ce constat n'est guère étonnant si l'on se réfère aux résultats mis en évidence dans le premier axe de recherche : les apprentissages algébriques en résolution de problèmes se réalisent à partir de situations très différentes des problèmes que nous avons soumis aux élèves dans le cadre de ces interviews. On pourrait émettre l'hypothèse que les élèves ne parviennent pas à transférer les acquis qu'ils ont développés dans les situations de type "trouve un nombre". Cette hypothèse semble assez plausible, dans la mesure où les compétences nécessaires pour modéliser les deux types de situations ("partages inégaux" et "trouve un nombre") sont très différentes.

Une analyse plus approfondie des démarches de type arithmétique fait apparaître que beaucoup d'élèves utilisent une seule catégorie de démarche, en abordant le problème selon une même logique de départ. Il s'avère également que, pour 7 enfants, cette logique de départ est assez éloignée de la logique sous-jacente à la démarche algébrique. Ces résultats s'inscrivant dans une recherche de type exploratoire, des expérimentations supplémentaires devraient être entreprises afin de voir si la tendance se généralise dans d'autres situations. Si tel était le cas, nous pensons que ces résultats pourraient être utilisés dans le cadre de l'élaboration d'une ingéniérie didactique destinée à amener les élèves débutant en algèbre à développer une démarche algébrique de résolution de problèmes.

4.3. Troisième axe de recherche

Problématique de recherche
L'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre dans le contexte de la résolution de problèmes

Deux grandes questions de recherche

Les problèmes envisagés en arithmétique et en algèbre favorisent-ils une articulation fructueuse entre les deux domaines?	Si les élèves sont confrontés à des problèmes qui permettent une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre, comment se manifeste l'articulation entre les deux domaines?

Troisième axe de recherche
Lorsque l'arithmétique et l'algèbre apparaissent dans les raisonnements, quelle articulation se dégage entre les deux domaines?

Question 1
Comment les ruptures se manifestent-elles?

Question 2
Une dialectique fonctionnelle s'installe-t-elle entre les deux domaines?

Parmi les quinze élèves interrogés, sept ont entremêlé l'arithmétique et l'algèbre dans leurs démarches de raisonnement. Quelles caractéristiques de l'articulation entre les deux domaines transparaissent dans les protocoles d'interview? C'est à cette question que l'analyse présentée ici tente d'apporter des réponses. Deux questions de recherche sont envisagées :

1. Comment les ruptures épistémologiques se manifestent-elles?
2. Une dialectique fonctionnelle s'observe-t-elle entre les deux domaines?

a. *Comment les ruptures épistémologiques se manifestent-elles?*

La revue de la littérature a permis de caractériser une double rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre : celle-ci se manifeste d'une part au niveau des démarches de raisonnements (arithmétiques et algébriques) et, d'autre part, au niveau du statut du symbolisme et de la signification de ce dernier.

Par le bais d'analyses de cas, nous présentons la façon dont ces ruptures se révèlent dans les productions des élèves interrogés.

- Une rupture entre les modes de pensée arithmétique et algébrique peut se dégager à travers l'interview de Céline ;
- Le statut attribué au symbolisme est analysé à partir des interviews de Gilles et de Julien d'une part, de Lise et de Julien d'autre part et enfin de Céline ;
- Le sens attribué à la lettre et à l'égalité est envisagé sur la base des interviews de Vanessa, de Gilles et de Céline.

1. Des ruptures au niveau des démarches de résolution : comparaison de la méthode arithmétique de type "structure" et de la méthode algébrique.

Céline est une élève de sixième année primaire qui a traité les quatre premiers problèmes selon la démarche algébrique. Elle aborde le cinquième problème de la même façon et constate que cette démarche ne pourra fonctionner : la somme totale n'étant pas connue, elle ne parvient pas à élaborer la mise en équation du problème. Elle aborde ensuite le problème selon une démarche arithmétique de type "structure".

Les échanges entre Céline et l'interviewer illustrent l'écart qu'il peut y avoir entre le raisonnement arithmétique de type "structure" et le raisonnement algébrique. Ces échanges montrent également la difficulté, pour un sujet arithmétique de type structure, de trouver dans la démarche algébrique, l'explication de son raisonnement arithmétique.

Rappel du problème

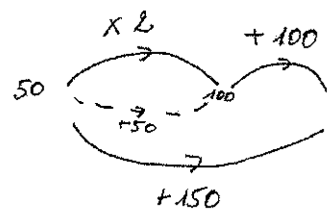
Un père partage une somme entre ses 3 filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 2 fois plus à Béatrice qu'à Aurélie et 100 F de plus à Céline qu'à Béatrice. Finalement, Céline a 150 F de plus qu'Aurélie. Combien chaque enfant a-t-il reçu?

Retranscription d'un extrait de l'interview
(C : Céline et I : Interviewer)

C : ... *Ah oui, comme Céline a 150 francs de plus qu'Aurélie... il y a 50 francs en plus, euh non, divisé en 2, ça fait 25.*
I : *Comment trouves-tu, ça ?*
C : *Ben, on a "fois 2 plus 100" pour Céline et "plus 150" pour Céline aussi. Donc si on fait "fois 2 plus 100", on peut faire aussi "plus 150".*
C : *Donc Aurélie, ça doit faire 25 parce qu'on fait "150 moins 100", ça fait 50... divisé en 2, ça fait 25...*
C : *Donc, Aurélie, elle a 25 ; Céline, elle a 175 et Béatrice, 50.. Euh non, ça ne va pas...Céline n'a pas 100 de plus que Béatrice...*
C : *Ben, comment ça se fait?*
I : *Regarde : tu dis quand on fait "fois 2 plus 100", c'est pareil que "plus 150", tu peux l'écrire par l'algèbre :*

$$2x + 100 = x + 150$$

C : *Ah oui, puis il faut mettre les x ensemble.*
I : *Oui c'est ça.*
(I et C résolvent ensembles, et C constate que la réponse obtenue est correcte).
C : *Bon, je comprends toujours pas pourquoi j'ai pas juste...*
I : T*on raisonnement était juste, regarde, on va l'écrire comme ça :*



C : *Donc, le "fois 2", ça donne la même chose que "+ 50"....*
Ben oui, c'est ça que je disais, donc après on divise par 2... Ah non, Céline elle n'a pas 50f, elle a 50F en plus...
C : *Oui, euh alors, c'est Aurélie qui a 50F, comme ça "plus 50", ce sera pareil que "fois 2".*

L'élaboration du modèle de situation qui, dans ce problème, consiste à établir les relations pertinentes entre les états, est réalisée par Céline oralement : elle verbalise ce modèle de cette façon : *Donc, si on fait "fois 2 plus 100", on peut faire aussi "plus 150".*

La caractéristique majeure de ce modèle de situation réside dans le fait qu'aucun état n'est identifié de façon précise : il s'agit d'une comparaison de deux relations qui, si elles sont appliquées à la partie d'Aurélie, permettent de retrouver la partie de Céline. Le passage de ce modèle de situation à une mise en équation n'a pas aidé Céline à prendre conscience de son erreur (qui consiste en fin de processus à associer la relation "*plus 50*" à un état "*Béatrice a 50 F*"). Cela n'est pas étonnant dans la mesure où le point de départ du raisonnement algébrique n'est pas celui sur lequel s'est fondée la démarche de Céline. Par contre, une modélisation sous la forme d'un schéma fléché a permis à Céline d'identifier son erreur. Nous pensons qu'une hypothèse explicative de ce fait pourrait être la suivante : la présence de flèches matérialise le statut des nombres sur lesquels se fonde le raisonnement : il s'agit bien de nombres désignant des relations qui doivent donc être affectés d'un signe. Focaliser l'attention de Céline sur la nature des nombres lui a ainsi permis de trouver la réponse au problème.

Cet extrait d'interview permet de cerner de façon plus précise une différence fondamentale entre le raisonnement arithmétique de type "structure" et le raisonnement algébrique, déjà mise en évidence par Bednarz (1994) : c'est bien le statut des nombres (état ou relation) sur lesquels se fonde le raisonnement qui est fondamentalement différent.

2. Des ruptures au niveau du statut du symbolisme : quel statut les élèves accordent-ils aux expressions algébriques?

Par son aspect "monstratif", Chevallard (1984) attribue à l'algèbre cette caractéristique de garder une trace écrite des opérations réalisées et même de mettre à jour de nouvelles connaissances sur l'objet d'étude.

A travers quelques analyses de cas, nous pouvons mettre en évidence des statuts accordés par les élèves aux expressions algébriques et ce, à deux étapes du processus de modélisation : lors de l'élaboration du modèle de situation et lors de l'interprétation dans le contexte du problème du résultat fourni par le travail sur modèle de situation.

Trois statuts des expressions algébriques ont ainsi pu être dégagés :
- L'algèbre permet de garder une trace écrite de la construction du modèle de situation ;
- L'algèbre permet d'interpréter la solution de l'équation dans le contexte du problème ;
- L'algèbre permet d'exprimer une nouvelle relation entre les données du système.

1) L'algèbre permet de garder une trace écrite de la modélisation du problème

Afin d'illustrer le statut attribué au symbolisme algébrique, nous proposons une analyse comparée de deux interviews qui révèlent deux utilisations différentes de l'algèbre dans l'élaboration du modèle de situation.

Pour Julien, élève de sixième primaire, l'algèbre est utilisée pour garder une trace de l'élaboration du modèle de situation. Les expressions algébriques produites sont très proches des relations définies dans le problème. A l'opposé, Gilles, élève de deuxième année de l'enseignement secondaire, produit une écriture algébrique du modèle de situation qui, dès le départ, est très éloignée des relations stipulées dans l'énoncé. Deux extraits d'interviews, relatifs au problème 4, permettent d'illustrer cette situation :

Rappel du problème

Un père partage une somme de 1200 F entre ses 3 filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 3 fois plus à Béatrice qu'à Aurélie et 200 F de moins à Céline qu'à Béatrice. Combien chaque enfant a-t-il reçu?

Retranscription d'un extrait de l'interview de Gilles et de Julien
(G : Gilles, J : Julien et I : Interviewer)

Gilles	Julien
G écrit : $5x - 200 = 1200$ I : *Comment as-tu trouvé ça?* G : *Ben, "5x" : on en a 1 avec Aurélie, 3 avec Béatrice et 1 avec Céline ...* *et "- 200", parce que Céline a 200F de moins.* G résout l'équation : $5x = 1000$ $x = 200$ G identifie les parts d'Aurélie et de Béatrice : A : 200 B : 600	J : *Donc la part à partager, c'est 1200. On dit que Béatrice a 3 fois plus qu'Aurélie. On ne sait pas elle a combien Aurélie, donc on ne sait pas dire elle a combien, Béatrice...* J : *Mais avec ça, on dit que Céline a 200 F de moins que Béatrice...* J : *Donc finalement, Céline, elle a 3 fois plus qu'Aurélie, avec 200 F de moins.* J (modélise le problème par l'algèbre) : *On va mettre des x donc Aurélie, elle a 1x + Béatrice, ça fait 3x ...plus Céline qui a 3x – 200F.* J écrit : $1x + 3x + 3x - 200 = 1400$ $7x = 1200 + 200$ $1x = 1400 : 7 = 200$

Oralement, Julien dégage les différentes relations entre les données du problème. Les expressions algébriques sont ensuite utilisées pour exprimer sous forme mathématique l'analyse réalisée de façon orale. Le modèle mathématique élaboré par Julien constitue ainsi une ecriture mathématique assez proche de l'énoncé présenté.

Ce n'est pas le cas pour l'équation produite par Gilles : cette dernière décrit d'emblée une nouvelle relation du système ($5x - 200 = 1200$), qui n'apparaît pas sous cette forme dans l'énoncé. Dans ce cas, l'équation produite ne permet pas de garder trace de la modélisation du problème.

2) L'algèbre est utilisée pour interpréter la solution de l'équation dans le contexte du problème

Lise est une élève de deuxième année de l'enseignement secondaire et Julien est en sixième année primaire. Ces deux élèves ont utilisé la démarche algébrique pour résoudre correctement les problèmes 2, 3 et 4.

Après avoir résolu les équations, chacun calcule les parties respectives de chaque enfant et c'est à ce moment qu'une différence apparaît au niveau du statut attribué aux expressions algébriques, comme le montrent les deux extraits suivants, relatifs au problème 3.

Rappel du problème

Un père partage une somme de 1000 F entre ses deux filles : Aurélie et Béatrice. Il donne 4 fois plus à Aurélie qu'à Béatrice. Combien chaque enfant a-t-il reçu?

Retranscription d'un extrait de l'interview de Lise et de Julien
(L : Lise, J : Julien et I : Interviewer)

Lise	Julien
L écrit : $4x + x = 1000$ $5x = 1000$ $x = 1000 : 5$ $x = 200$ L : *Donc Béatrice a 200 et Aurélie a "4 fois 200", ça fait 800* I : *Que représente le x, là ?* E : *Ben la somme de Béatrice ... et 4x, c'est la somme d'Aurélie, c'est pour ça que j'ai fait "4 fois 200".*	J : *Euh je vais faire une équation euh Aurélie elle a 4x, puisqu'elle a 4 fois plus ... + 1x, pour Béatrice ... est égale à 1000F.* J écrit : $4x + 1x = 1000$ J : *Bon on fait ...* (et J écrit en même temps) $5x = 1000$ $1x = 1000 : 5$ $1x = 200$ J : *Donc puisqu'elle a 4 fois plus, on fait "fois 4", ça fait 800F pour Aurélie et Béatrice, elle a le reste, ça fait 1000 - 800F, 200F.*

Une fois l'équation résolue, ces deux élèves se distinguent par l'utilisation respective qu'ils font du symbolisme algébrique, comme en témoignent les dernières lignes des interviews :

- Lise utilise les expressions algébriques "x" et "$4x$" pour retrouver les parties d'Aurélie et Béatrice, expressions qui avaient été dégagées lors de l'élaboration du modèle de situation;
- Julien, quant à lui, fait une utilisation différente de la solution de l'équation : Pour lui, cette solution est réinvestie dans le contexte du problème et n'a pas de valeur en soi : pour retrouver la partie de Béatrice (qui était désignée par "$1x$" dans la mise en équation), il utilise une autre relation stipulée dans l'énoncé : elle a ce qu'il reste lorsqu'on a retiré du total la partie d'Aurélie. Une fois l'équation résolue, Julien n'exploite donc plus l'analyse qu'il avait effectuée pour élaborer l'équation.

Cette différence peut, selon nous, s'interpréter en terme de statut accordé au symbolisme. Contrairement à Julien, Lise parvient à utiliser des expressions algébriques présentes dans l'équation pour déterminer les parties respectives de chaque enfant. Les expressions algébriques utilisées ont dans ce cas une valeur "monstrative", ce qui, dans ce contexte, n'est pas le cas pour Julien. En effet, bien que pour lui, la mise en équation du problème permette de garder trace de l'analyse du modèle de situation, cette trace n'est plus réutilisée pour déterminer les autres inconnues du système.

Cette particularité se manifeste également dans les autres problèmes résolus par les deux enfants, dont nous ne reprenons ici que la dernière étape du raisonnement. Lise a résolu le premier problème de façon arithmétique. Les extrait d'interviews concernent donc les problèmes 2 et 4.

	Lise	Julien
Problème 2	L écrit $x = 225$ L : *Donc Béatrice, elle a 225 et Aurélie ... 375.* I : *Que représente le x, là?* L : *Ben, c'est la somme de Béatrice et "x + 150", c'est Aurélie.*	J écrit $x = 225$ J : *Alors Aurélie, elle a 150F en plus, ça fait 375 et Béatrice, elle aura 600 - 375, ça fait 225F.*
Problème 4	L écrit $x=200$ I : *Que représente x?* L : *C'est la part d'Aurélie. Donc Aurélie, elle a 200F, Béatrice, euh, c'était 3x, donc 600 et Céline, c'était 3x - 200, donc c'est 400.*	J : *Donc Béatrice, elle a 3 fois plus, donc 200F multiplié par 3, ça fait 600. Et Céline, elle a le reste donc 400.*

3) <u>L'algèbre permet d'exprimer de nouvelles relations entre les données du système</u>

L'extrait de l'interview de Céline, élève de sixième année primaire, concernant le problème 4 illustre sa volonté d'exprimer sous forme algébrique une nouvelle relation découverte à propos du système étudié.

Rappel du problème

Un père partage une somme de 1200 F entre ses 3 filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 3 fois plus à Béatrice qu'à Aurélie et 200 F de moins à Céline qu'à Béatrice. Combien chaque enfant a-t-il reçu?

Retranscription d'un extrait de l'interview
(C : Céline et I : Interviewer)

C écrit :

Somme à partager : 1200F
Aurélie : x
Céline : $3x$-200F
Béatrice : $3x$

I : *Comment as-tu trouvé cela?*
C: *Ben, euh... Béatrice a 3 fois plus qu'Aurélie, donc 3x.*
Céline a 200F de moins que Béatrice, donc 3x - 200.
C écrit :

$$x + (3x - 200) + 3x = 1200$$
$$7x = 1200+200$$
$$7x = 1400$$
$$x = 1400 : 7$$
$$x = 200$$

C : *Donc... Euh... Aurélie, elle a 200F.*
Béatrice, elle a 3 fois plus qu'Aurélie, donc 600F et Céline, elle a 200F de moins que Béatrice, donc 400F. Ah oui, donc Céline, elle a 2x.
(C va réécrire $2x$ au dessus, dans l'énoncé du problème)
I : *Donc, finalement, Céline a combien par rapport à Aurélie?*
C: *Euh, ben elle a 2 fois plus.*

L'étude du modèle de situation sous forme algébrique, puis arithmétique, a permis à Céline de dégager une relation supplémentaire qui n'était pas stipulée au départ dans l'énoncé : Céline a deux fois plus qu'Aurélie. Cette relation a été découverte selon un mode arithmétique mais l'utilisation de l'expression algébrique "$2x$" lui permet de garder trace de cette nouvelle relation élaborée.

3. Des ruptures au niveau du sens du symbolisme

Trois extraits d'interviews permettent d'illustrer les difficultés des élèves concernant d'une part, le sens de la lettre (premier extrait d'interview) et d'autre part, le sens de l'égalité (deuxième et troisième extraits d'interview).

1) <u>La lettre utilisée à des fins désignatoires</u>

Le sens que Vanessa, élève de deuxième année de l'enseignement secondaire, donne à la lettre permet d'illustrer une difficulté réelle de concevoir la lettre comme une inconnue spécifique : dans tous les problèmes, Vanessa utilise la lettre x, qui apparaît toujours dans le premier membre des égalités posées. A titre d'exemple, voici la retranscription de son interview relative au premier problème.

Rappel du problème

Un père partage une somme de 1800 F entre ses trois filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 2 fois plus à Céline qu'à Aurélie et il donne 200 F de moins à Béatrice qu'à Céline. Béatrice reçoit 600 F. Combien les autres enfants ont-ils reçu?

Retranscription d'un extrait de l'interview
(V : Vanessa et I : Interviewer)

V écrit :

$x = 1800$ F : 3
$x = 600$ F

I : *Pourquoi divises-tu en 3?*
V : *Parce qu'il y a 3 enfants.*
V écrit :

$x = 600$ F : 2
$x = 300$

I : *Pourquoi divises-tu en 2?*
V : *Parce qu'il donne 2 fois plus à Céline qu'à Aurélie.*
I (montre "x = 1800 : 3"): *le x là-bas représente quoi ?*
V : *Euh ... Ben les parts.*
I (montre "x = 600F : 2") : *Et celui-là?*
V: *Ben aussi les parts.*
V : *Euh ..., ça ne marche pas, on n'arrive pas à 1800. Je vais relire.*
V : *Ah ... on dit que Béatrice a 600 F donc Céline reçoit ... "x = 600F + 200F = 800F", donc ... "Céline = 800F" et Béatrice elle a ... "x = 600F", c'est dit dans l'énoncé et ... Aurélie, elle reçoit le reste, ça fait : "x = 1800 - 600 - 800 = 400F".*

Dans le cas de Vanessa, le symbolisme algébrique apparaît dans un raisonnement tout à fait arithmétique : à aucun moment, Vanessa ne réalise des opérations sur l'inconnue. Par ailleurs, la lettre n'a pas qu'une seule valeur mais plusieurs, en fonction de la partie qu'elle désigne. Il s'agit donc bien d'une utilisation de la lettre à des fins de présentation d'un raisonnement : chacune des parties est précédée de l'écriture "x = ...", signifiant que l'on détermine ainsi une partie. Une hypothèse plausible visant à expliquer un tel sens accordé par Vanessa à la lettre pourrait être qu'il s'agit là d'une manifestation de l'effet de contrat disciplinaire.

2) *La difficulté de désigner, à travers le signe d'égalité, une relation d'équivalence entre deux expressions algébriques.*

Les rapports des élèves à l'égalité ont pu être étudiés au travers de la résolution du problème 5. En effet, dans ce problème, l'égalité ne doit plus être perçue en terme d'amorce d'un résultat (approche procédurale de l'égalité, Sfard, 1992), mais selon une optique structurale, qui est en rupture avec la conception de l'égalité développée en arithmétique. Seuls deux enfants ont développé un raisonnement algébrique face à ce problème et une même résistance apparaît dans l'utilisation du symbole d'égalité chez ces deux enfants, comme cela apparaît dans les deux extraits d'interviews suivants.

Rappel du problème

Un père partage une somme entre ses 3 filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 2 fois plus à Béatrice qu'à Aurélie et 100 F de plus à Céline qu'à Béatrice. Finalement, Céline a 150 F de plus qu'Aurélie. Combien chaque enfant a-t-il reçu?

Retranscription d'un extrait des deux interviews
(C : Céline ; G : Gilles ; I : interviewer)

Céline	Gilles
C : *Donc euh Aurélie, elle a x, Béatrice, elle a 2x et Céline, elle a 100 + 2x...* C : *Et Céline, elle a aussi 150 de plus qu'Aurélie.* C : *En fait 100 + 2x, c'est 150 + 1x et c'est égal à une même chose, mais je ne sais pas l'écrire... euh...* C : *Donc euh, je mets tous les x ensemble... 2x - 1x, ça fait 150 - 100, donc 1x = 50.* C : *Donc euh... la part d'Aurélie, ça fait "50F". Béatrice, elle a "2x", donc elle a "2 fois ça", ça fait "100F" et Céline, elle a "2x + 100", donc ça fait "200 F".* I : *Comment pourrais-tu écrire ton raisonnement?* C : *Ben euh, je ne sais pas parce qu'ici, on ne sait pas au départ combien ça fait la somme de Céline. Donc on ne saurait pas écrire une équation...* C : *Dans les autres, j'y arrivais parce qu'on savait chaque fois que en tout ça donnait quelque chose, mais ici, on ne le sait pas.* I : *Mais tu m'as dit que "100 + 2x", c'est "150 + 1x", et c'est égal à une même chose... Tu ne pourrais pas l'écrire par l'algèbre?* C : *ben non, il me faut la part de Céline, alors ça marche :* C écrit : $100 + 2x = 200$ et $150 + 1x = 200$.	G écrit : $2 . A = B$ $B + 100 = C$ $150 + A = C$ G : *Et je vais essayer de voir les rapports...* G écrit : $2A + 100 = C$ $150 + A = C$ I : *Comment trouves-tu ça?* G : *En fait, ces deux équations-là sont égales...* G : *Donc je fais passer le 100 de l'autre côté, ça fait "2A" là et "50 + A" là, puis je mets les "A" ensemble, "A = 50".* I : *Saurais-tu écrire ça par l'algèbre ?* G (réfléchit) : ... *non, ça ne va pas, j'ai trop d'égal...regarde...* G écrit : $2A + 100 = C$ $150 + A = C$

Ces deux interviews illustrent les difficultés relatives à l'écriture de l'égalité en terme structural de deux expressions égales d'un même nombre, malgré une procédure, exprimée oralement, tout à fait correcte de la résolution d'équation. Céline montre bien qu'elle a toujours une conception arithmétique de l'égalité et Gilles, quant à lui, reste focalisé sur l'écriture d'un système de deux équations à deux inconnues. Combier, Guillaume et Pressiat (1996) font état de difficultés comparables lors de la modélisation de problèmes par les élèves de Collège.

b . *Une dialectique fonctionnelle s'observe-t-elle entre les deux domaines?*

L'analyse des protocoles des élèves qui ont utilisé à la fois l'arithmétique et l'algèbre dans leurs procédures de résolution nous permet de dégager quatre facettes de l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre :

- une juxtaposition des deux raisonnements dans la résolution du problème ;
- un traitement sur le mode arithmétique infructueux ouvre la voie vers un traitement sur un mode algébrique ;
- l'algèbre est utilisée pour identifier les relations pertinentes du système que l'arithmétique permettra alors de traiter pour résoudre le problème.
- l'arithmétique permet d'avoir un contrôle sur le traitement algébrique du problème.

1. Une juxtaposition des deux raisonnements dans la résolution du problème

L'arithmétique permet de résoudre aisément le premier problème. En effet, une des parties est connue et les relations unissant cette partie aux autres sont également connues. Céline et Julien, deux élèves de sixième année primaire, ont tous deux abordé ce problème selon une logique algébrique. Ils se sont tous les deux très vite rendus compte que toutes les données n'étaient pas nécessaires pour résoudre le problème par cette voie. Après cette analyse algébrique du problème, ces deux enfants n'ont pas interprété la solution de l'équation dans le contexte du problème, mais ont recommencé une analyse arithmétique du problème, comme en témoignent les deux extraits suivants.

Rappel du problème

Un père partage une somme de 1800 F entre ses trois filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 2 fois plus à Céline qu'à Aurélie et il donne 200 F de moins à Béatrice qu'à Céline. Béatrice reçoit 600 F. Combien les autres enfants ont-ils reçu?

Retranscription d'un extrait des deux interview
(C : Céline ; G : Gilles ; I : interviewer)

Céline	Julien
C écrit: 800 $x + (2 \text{ x } x) + 600 = 1800$ $1x + (800 + 600) = 1800$ $1x = 1800 - 1400 = 400$ I : *Pourquoi as-tu écrit "800" au dessus de"2x"?* C : *Ben parce qu'on le sait déjà, comme Céline a 200 F de plus que Béatrice.* C : *Donc Céline, elle a "x", ça fait 800 F et Béatrice, elle a "x - 200", ça fait 600. Et Aurélie ; elle aura ... "800 : 2", ça fait 400 et ça fait 1800 en tout, c'est juste.*	J : *La somme à partager, c'est 1800. Céline a 2 fois plus qu'Aurélie et Béatrice reçoit 600 F et Béatrice a 200 F de moins qu'à Céline.* J : *Donc "x + x", non on va mettre "2x"...* J écrit : $2x + 2x - 200 + 1x = 1800.$ I : *Que représente le "x", là ?* J : *En fait, on sait pas c'est quoi x. On met 2x.* J : *Céline a 2 fois plus, donc on lui met "2x". Béatrice a 200F de moins que Céline, donc on lui met "2x - 200", ça fait aussi 600 mais on ne l'écrit pas parce qu'il faut des x et ensuite , il reste encore Aurélie, elle a "1x".* J : *Donc ça fait "5x = 1800 + 200" donc "2000F". Maintenant je fais : "1x = 2000 : 5 = 400".* J : *Après il faut mettre la part de Céline, ben c'est "200F de plus que Béatrice", c'est écrit dans l'énoncé, donc ça fait "800".* *La part d'Aurélie, c'est "2 fois moins que Céline", donc "800 : 2 = 400".*

Très rapidement, Céline et Julien constatent qu'une donnée n'est pas nécessaire pour résoudre le problème selon une voie algébrique : pour Julien, il s'agit de l'information "*Béatrice a 600 F*" et pour Céline, c'est l'information " *Il donne 2 fois plus à Céline qu'à Aurélie*", comme en témoignent les deux extraits suivants :

- Julien : "*Béatrice a 200F de moins que Céline, donc on lui met 2x - 200, ça fait aussi 600 mais on ne l'écrit pas parce qu'il faut des x*".
- Céline pose l'équation suivante : "$x + (2.x) + 600 = 1800$", puis écrit 800 au dessus de l'expression algébrique 2x. Elle explique cela en disant "*qu'on le sait déjà, comme Céline a 200 F de plus que Béatrice*".

Les deux enfants résolvent ensuite l'équation qu'ils ont posée, pour aboutir ainsi à la solution "$x = 400$". Chez ces deux enfants, la solution de l'équation n'est ensuite plus utilisée pour retrouver les parties inconnues : les deux enfants élaborent une démarche arithmétique, qui n'utilise en rien la solution de l'équation :

- Céline : "*Donc Céline, elle a x, ça fait 800 F et Béatrice, elle a x - 200, ça fait 600. Et Aurélie ; elle aura ... 800 : 2, ça fait 400 et ça fait 1800 en tout, c'est juste*".
- Julien : "*Après il faut mettre la part de Céline, ben c'est ..200F de plus que Béatrice, c'est écrit dans l'énoncé, donc ça fait 800. La part d'Aurélie, c'est 2 fois moins que Céline, donc 800 : 2 = 400.*"

Bien que Céline et Julien utilisent l'arithmétique et l'algèbre pour résoudre le problème, il ne se dégage cependant pas d'articulation entre les deux domaines. Il s'agit plutôt d'une simple juxtaposition de deux raisonnements qui aboutissent tous deux à la résolution du problème. Nous n'avons rencontré ce type de relation entre les démarches arithmétiques et algébriques que dans ce premier problème. On pourrait donc émettre l'hypothèse que la présence dans le problème d'une donnée inutile a peut-être orienté les enfants à simplement juxtaposer les deux démarches. Par ailleurs, dans l'entretien de Céline, l'intervention de l'interviewer a peut-être focalisé l'attention sur la donnée "800", l'incitant ainsi à démarrer un raisonnement arithmétique à partir de cette donnée.

2. Une démarche arithmétique infructueuse ouvre la voie vers l'utilisation de la démarche algébrique

L'interview de Julien, élève de sixième année primaire, concernant le troisième problème montre qu'il est parvenu à élaborer une articulation fructueuse entre l'arithmétique et l'algèbre.

Rappel du problème

U n père partage une somme de 1000 F entre ses deux filles : Aurélie et Béatrice. Il donne 4 fois plus à Aurélie qu'à Béatrice. Combien chaque enfant a-t-il reçu?

Retranscription d'un extrait de l'interview
(J : Julien et I : interviewer)

J : *Ben, il a 1000F, il donne normalement la moitié à chacun, ça fait 500. 4 fois plus... on fait 4x....divisé en 2...euh, celui-là c'est dur.*
J : *Bon Béatrice a 4 fois moins, ça c'est sûr.*
J : *Euh je vais faire une équation euh Aurélie elle a "4x", puisqu'elle a 4 fois plus ... "+ 1x", pour Aurélie... est égale à 1000F.*
J écrit :

$$4x + 1x = 1000$$

J : *Bon on fait "1x = 1000 : 5", ça fait 200 F.*
J : *Donc puisqu'elle a 4 fois plus, on fait "fois 4", ça fait 800F pour Aurélie et Béatrice, elle a le reste, ça fait "1000 - 800F", ça fait 200F*

Au départ, Julien aborde la situation de manière arithmétique : le point de départ du raisonnement est le nombre de parties stipulées dans l'énoncé. Il s'intéresse ensuite aux relations entre les données "*4 fois plus*", puis se rend compte qu'il ne parviendra pas à résoudre le problème s'il continue dans cette voie. Il passe alors à une démarche algébrique qui aboutit à la résolution correcte du problème. Dans cette situation, l'algèbre semble constituer aux yeux de cet élève un outil efficace pour résoudre des situations où l'arithmétique s'avère impuissante.

3. L'algèbre, comme outil de modélisation, ouvre la voie vers l'utilisation d'une démarche arithmétique

L'interview de Morgane, élève de première année de l'enseignement secondaire, concernant le cinquième problème, illustre une articulation fructueuse entre l'arithmétique et l'algèbre, même si cette articulation n'a pas permis de résoudre correctement le problème.

Rappel du problème

Un père partage une somme entre ses 3 filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 2 fois plus à Béatrice qu'à Aurélie et 100 F de plus à Céline qu'à Béatrice. Finalement, Céline a 150 F de plus qu'Aurélie. Combien chaque enfant a-t-il reçu?

Retranscription d'un extrait de l'interview
(M : Morgane et I : interviewer)

M : *La somme on ne sait pas...*
M : *Donc on sait que "quelque chose fois 2" c'est la somme de Béatrice.*
... *100 F de plus à Céline qu'à Béatrice, Céline aura plus que Béatrice, elle aura 100 F de plus ...*
M : *Et euh ... Céline a 150 F de plus qu'Aurélie, c'est Céline elle a déjà 100 F, c'est une somme plus 100, donc Béatrice, c'est "moins 100".*
M : *Céline a 150 F de plus qu'Aurélie, donc Aurélie c'est "- 150" et Céline aura "+ 150"...*
M : *Et il donne deux fois plus à Béatrice, donc elle aura "cette somme-là fois 2".*
M écrit :

	200			
Aurélie :	·	−150	50	
Béatrice :	·	−100	100	
Céline :	·	+100	+150	~~150~~ 200

M : *Et on va essayer avec des nombres ...*
M : *Par exemple 200... "200-150", ça fait 50... Béatrice, "- 100F", il lui restera 100F et ...Céline, "+ 100 + 150", ça fait "450" et euh, il donne 2 fois plus à Béatrice, c'est bon ...*
M : *Mais Céline, ça ne va pas : "150F de plus qu'Aurélie", il faudrait "200F". Alors ça marche... Et en tout, il y a 350F.*

Bien qu'aucune lettre n'apparaisse dans son raisonnement, Morgane utilise un substitut symbolique (un point) pour indiquer la partie réservée à Céline. La situation est alors modélisée sous la forme de trois expressions "algébriques", qui permettent de garder la trace de l'analyse orale réalisée. Morgane applique ensuite la méthode arithmétique de type "essais-erreurs" pour résoudre le problème modélisé par l'algèbre.

Une complémentarité entre arithmétique et algèbre se dégage donc de cette résolution du problème : l'algèbre permet de garder trace de l'analyse du modèle de situation et l'arithmétique a une fonction d'outil permettant de résoudre le système d'équations élaboré. Soulignons toutefois que Morgane est une élève débutant en algèbre et qu'elle n'a pas utilisé dans son raisonnement la lettre qu'elle est pourtant amenée à employer pour réduire des expressions algébriques.

4. L'arithmétique permet de constater une erreur dans un raisonnement algébrique

L'interview de Gilles, élève de deuxième année de l'enseignement secondaire, montre qu'une interprétation de la solution de l'équation selon un mode arithmétique lui a permis de retrouver une erreur dans les transformations algébriques effectuées.

Rappel du problème

Un père partage une somme de 1200 F entre ses 3 filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 3 fois plus à Béatrice qu'à Aurélie et 200 F de moins à Céline qu'à Béatrice. Combien chaque enfant a-t-il reçu?

Retranscription d'un extrait de l'interview

(G : Gilles et I : Interviewer)

G écrit

$$5x - 200 = 1200$$

I : *Comment as-tu trouvé ça?*

G : *Ben, "5x", on en a 1 avec Aurélie, 3 avec Béatrice et 1 avec Céline et "- 200", parce que Céline a 200F de moins.*

G résout l'équation :

$$5x = 1000$$
$$x = 200$$

G (identifie les parts d'Aurélie et de Béatrice) écrit:

A : 200
B : 600

G : *Oh ben je me suis trompé quelque part.*

I : *Comment le vois-tu?*

G : *Ben à la fin, j'ai pas assez.*

(G relit l'énoncé, puis sa mise en équation puis vérifie l'équation).

G : *Ah oui, c'est là*

(G barre 1000 F dans l'équation "$5x = 1000$" et remplace par "1400").

G écrit :

$$x = 280....$$

G : *Aurélie a 280, Béatrice, 840 et Céline ... (regarde dans l'énoncé) a 80.*

G : *Et ça tombe juste ...*

G écrit :

$$280 + 840 + 80 = 1200$$

Comme cet extrait le montre, Gilles modélise la situation par l'algèbre. Il pose l'équation "$5x - 200= 1200$". Il résout ensuite celle-ci très rapidement et aboutit à la solution "$x = 200$". Il détermine ensuite les parties de chaque enfant et c'est en comparant la somme des parties avec la somme totale à répartir qu'il se rend compte d'une erreur. Il procède alors à une vérification en relisant l'énoncé, puis la mise en équation et enfin la démarche de résolution : il corrige l'erreur présente dans la technique de résolution de l'équation.

Dans le raisonnement de Gilles, l'arithmétique est utilisée comme un outil de contrôle de la démarche algébrique. L'utilisation sous une forme arithmétique de la relation "la somme des parties est égale à la somme totale à partager" permet de constater une erreur dans les transformations algébriques réalisées au départ de l'équation.

c. *Conclusion*

Lorsque l'arithmétique et l'algèbre apparaissent dans les raisonnements, quelle articulation se dégage entre elles?

Par le biais de diverses analyses de cas, nous avons montré les ruptures et les complémentarités qui peuvent se manifester entre l'arithmétique et l'algèbre.

Trois ruptures ont été constatées :

- la différence entre la stratégie arithmétique de type structure et le raisonnement algébrique dans un problème où aucun état n'est connu;
- le sens accordé à la lettre et à l'égalité;
- différentes utilisations des expressions algébriques : pour modéliser la situation, pour interpréter la solution de l'équation et même pour exprimer de nouvelles relations entre des données du système étudié.

Plusieurs complémentarités se sont également dégagées de cette analyse. Une approche infructueuse par l'arithmétique peut ouvrir la voie vers un traitement algébrique. A l'inverse un traitement sur un mode algébrique facilite l'utilisation d'une démarche arithmétique. Enfin, l'arithmétique sert de contrôle au résultat obtenu par l'algèbre.

Soulignons également que ces résultats s'inscrivent dans une recherche de type exploratoire. Ils doivent donc être considérés comme des manifestations possibles de l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre à travers les raisonnements d'élèves dans un contexte très particulier, lié aux problèmes proposés dans les interviews.

Ces résultats permettent cependant de soutenir l'hypothèse suivante : si les élèves sont confrontés à des problèmes qui permettent une articulation fructueuse entre l'arithmétique et l'algèbre, les ruptures classiques ainsi que des complémentarités originales peuvent s'installer.

5. CONCLUSIONS

L'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre nous amène à envisager d'un point de vue didactique la transition entre deux niveaux d'étude : l'enseignement primaire et l'enseignement secondaire. Ce dernier est marqué, entre autres, par l'introduction de l'algèbre dans le contexte de la résolution de problèmes.

Quelle forme peut prendre l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre dans le contexte spécifique de la résolution de problèmes ?

Une revue de la littérature de recherche nous amène à dégager une double rupture épistémologique entre les deux domaines : des discontinuités se manifestent d'une part, au niveau des modes de raisonnements et d'autre part, au niveau du symbolisme utilisé. Par ailleurs, au-delà de ces obstacles cognitifs majeurs, une articulation fructueuse peut exister entre le numérique et l'algébrique. Cette complémentarité pourra notamment se manifester lors de la mise en œuvre du processus de modélisation.

Quelle forme peut prendre cette articulation dans l'enseignement actuel de l'arithmétique et de l'algèbre ? D'après plusieurs études menées dans le domaine auprès d'élèves ayant déjà un bagage de deux années d'algèbre (Lee et Wheeler, 1989) ou auprès d'enseignants en formation (Bednarz, Janvier et Schmidt, 1996), l'arithmétique et l'algèbre semblent réellement constituer deux mondes séparés, avec des règles de fonctionnement et des conditions d'utilisation très différents.

Qu'en est-il pour les élèves qui se situent juste avant et juste après les premiers apprentissages algébriques ? Observe-t-on déjà un tel clivage des deux domaines ou assiste-t-on à des complémentarités fructueuses entre les deux approches ? C'est dans le contexte de cette problématique générale que nous situons notre étude exploratoire. Elle vise à dégager quelques manifestations de l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre à la fin de l'enseignement primaire et au début de l'enseignement secondaire, dans le contexte particulier des partages inégaux.

Le premier axe de recherche vise à étudier les formes que prend l'articulation au travers des problèmes proposés aux élèves à la fin de l'enseignement primaire et au début de l'enseignement secondaire. Une dissociation profonde se dégage de l'analyse de trois manuels scolaires : on ne résout pas le même type de problèmes en arithmétique ou en algèbre et les techniques développées pour résoudre les problèmes sont fondamentalement différentes. Comment, dans une telle perspective, peut-on espérer que les élèves remettent en question les présupposés arithmétiques lorsqu'ils abordent l'algèbre ? Comment pourront-ils percevoir la puissance de ce nouvel outil algébrique dans la résolution de problèmes, puisque son champ d'application semble se limiter à des problèmes très spécifiques ?

Pourtant, une articulation fructueuse pourrait se dégager entre l'arithmétique et l'algèbre, à travers l'étude du numérique. Nous avons donc prolongé notre analyse en plongeant des élèves dans des situations qui favorisent une telle complémentarité entre l'arithmétique et l'algèbre. Notre choix s'est porté sur les problèmes de type "partages inégaux" pour deux raisons :

- ces problèmes sont beaucoup exploités dans l'enseignement primaire, on peut donc espérer que les élèves débutant en algèbre pourront faire appel d'une part, à leurs connaissances arithmétiques antérieures et d'autre part, à leurs acquis algébriques ;
- en proposant des structures variées de problèmes, il est possible de faire émerger les ruptures épistémologiques entre l'arithmétique et l'algèbre.

Le deuxième axe d'analyse est centré sur les démarches de quinze élèves face à la résolution de problèmes de partages inégaux. Nous n'observons pas de modifications manifestes dans les raisonnements des élèves après l'introduction de l'algèbre. Au début de l'enseignement secondaire, du point de vue des élèves, l'algèbre ne semble donc pas encore constituer un outil plus efficace pour résoudre les problèmes. Un autre constat intéressant se dégage : les élèves semblent souvent aborder les situations selon une même approche et ce, quelle que soit la structure du problème proposé. Pour plusieurs élèves, cette voie d'entrée est assez éloignée de celle nécessaire pour aborder les situations selon un mode algébrique. Si cette tendance se vérifie dans d'autres contextes, on pourrait émettre l'hypothèse que, pour amener les élèves à développer une approche algébrique de la résolution de problèmes, il serait intéressant de les confronter à des situations didactiques qui les amènent à modifier leur approche du problème.

Enfin, le troisième axe d'analyse est destiné à explorer plus en profondeur les protocoles d'interviews des élèves qui ont utilisé l'arithmétique et l'algèbre dans leurs raisonnements. Différentes études de cas ont mis en évidence des manifestations d'une part, de ruptures épistémologiques entre l'arithmétique et l'algèbre et d'autre part, de complémentarités parfois originales qui pouvaient s'installer entre les deux domaines. Ces dernières analyses nous amènent à penser que, contrairement à ce qui semble être le cas pour les élèves plus âgés (Lee et Wheeler, 1989), certains élèves débutant en algèbre parviennent à intégrer harmonieusement l'arithmétique et l'algèbre dans leurs raisonnements en vue de résoudre des problèmes arithmétiques variés. Si les tendances révélées à travers ces études de cas se généralisent à d'autres situations et contextes, nous pensons qu'elles pourraient ouvrir la voie vers la mise au point de situations didactiques qui amènent les élèves à approfondir leurs démarches d'intégration entre l'arithmétique et l'algèbre, afin que ces deux domaines ne constituent plus à leurs yeux deux univers complètement disjoints.

En conclusion, loin de mettre à jour des certitudes concernant la problématique de l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre, l'étude exploratoire menée permet de penser que d'une part, les débutants en algèbre ne perçoivent pas encore tous la puissance de cet outil dans la résolution des problèmes et d'autre part, qu'il est possible de dégager une articulation fructueuse entre l'arithmétique et l'algèbre : en plongeant les élèves dans des situations qui favorisent l'intégration des deux domaines, nous avons pu montrer qu'au-delà d'obstacles conceptuels majeurs, des complémentarités originales peuvent se manifester.

Des approfondissements s'avèrent nécessaires dans d'autres champs de problèmes et auprès d'un public plus varié. Si ces résultats se généralisent, nous pensons qu'il serait intéressant de concevoir des ingénieries didactiques susceptibles d'amener les élèves à modifier le point de départ de leur raisonnement pour leur permettre de mieux percevoir l'intérêt de développer des démarches algébriques de résolution de problèmes. Un autre prolongement pourrait viser à élaborer une classification plus approfondie des ruptures et des complémentarités de ces deux domaines dans les raisonnements des élèves.

6. BIBLIOGRAPHIE

- Adam, A. & Lousberg, F. (1999). *Espace math 2ème*. Bruxelles : De Boeck Wesmael.

- Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol. 18/2, 231-262.

- Bednarz, N. & Janvier, B. (1991). Illustration de problèmes mathématiques complexes mettant en jeu un changement ou une séquence de changements par des enfants du primaire. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th Annual meeting of the international Group for the Psychology of mathematics education.* Vol. I, Assisi, Italy : PME Program Commitee, 112-119.

- Bednarz, N. & Janvier, B. (1993). The arithmetic-algebra transition in problem solving : Continuities and discontinuities. In J.R. Becker & B.J. Pence (Eds), *Proceedings of the 15th Annual Meeting of the international Group for the Psychology of mathematics education* (North American chapter PME-NA), Vol. II, Asilomar, California, 19-25.

- Bednarz, N. & Janvier, B. (1994). The emergence and development of algebra in a problem solving context : An analysis of problems. In J.P. Du Ponte & J.F. Matos (Eds), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of mathematics Education* (PME), Vol. II, Lisbon, Portugal, 64-71.

- Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz *et al.* (Eds), *Approaches to algebra.* Netherlands : Kluwer Academic Publishers, 115-136.

- Bednarz, N., Radford, L., Janvier, B. & Lepage, A. (1992). Arithmetical and algebraic thinking in problem solving. In W. Geeslin & K. Graham (Eds), *Proceedings of the 16th Annual Conference of the international Group for Psychology of mathematics Education* (PME), Vol. I, New Hampshire, USA, 65-72.

- Booth L.R. (1984). *Algebra : children's strategies and errors.* Windsor, UK : Nfer-Nelson.

- Charbonneau, L. & Lefebvre, J. (1992). Grandes lignes dans l'évolution de l'algèbre : de la pluralité à l'unicité. In *Actes du colloque portant sur l'émergence de l'algèbre, Cahier du CIRADE*, Université du Québec à Montréal.

- Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. 1re partie : l'évolution de la transposition didactique. *Petit x, 5*, 51-95.

- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. 2e partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x, 19*, 43-72.

- Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. 3e partie : voies d'attaques et problèmes didactiques. *Petit x, 23*, 5-38.

- Combier, G., Guillaume, J-C., Pressiat, A. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre!* Paris : Institut National de Recherche pédagogique. Didactique des disciplines.

- Filloy, E., Rojano T. (1984). *From an arithmetical to an algebra thought (a clinical studie with 12-13 year old).* In D. Kirschner (Ed.), *Proceedings of the 6th annual meeting of the international Group for the Psychology of mathematics education* (North American chapter PME-NA). Madison, 51-56.

- Gautiez, J.M., Malache, B., Roegiers, X. (1991). *Réseau mathématique 5a.* Bruxelles : De Boeck.

- Gautiez, J.M., Malache, B., Roegiers, X. (1991). *Réseau mathématique 5b.* Bruxelles : De Boeck.

- Gautiez, J.M., Malache, B., Roegiers, X. (1991). *Réseau mathématique 6a.* Bruxelles : De Boeck.

- Gautiez, J.M., Malache, B., Roegiers, X. (1991). *Réseau mathématique 6b.* Bruxelles : De Boeck.

- Gascon, J. (1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'"arithmétique généralisée". *Petit x, 37,* Irem de Grenoble, 43-63.

- Girard, J.-C. (1999). Le professeur de mathématiques doit-il enseigner la modélisation? *Repères – Irem, 36,* 7-14.

- Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms : the case of word problems. *Learning and instruction,* 7(4), 293-307.

- Julo, J. (1996). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques.* Rennes : Presse Universitaire de Rennes.

- Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. In A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12* (1988 Yearbook, 91-96). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

- Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In P. Nescher & J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and cognition.* Cambridge : Cambridge University Press, 96-112.

- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York : Mac Millan Publishing Company

- Kuchemann, D. (1978). Children understanding of numerical variables. *Mathematics in school,* 7(4), 23-26.

- Lee, L., Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection. *Educational Studies of Mathematics* (E.S.M.), *18,* 75-90.

- Legrand, J., Jonnaert, P., Bonnet, J.-P. (1994). *Ateliers mathématiques 5a.* Bruxelles : Editions Plantyn.

- Legrand, J., Jonnaert, P., Bonnet, J.-P. (1994). *Ateliers mathématiques 5b.* Bruxelles : Editions Plantyn.

- Legrand, J., Jonnaert, P., Bonnet, J.-P. (1994). *Ateliers mathématiques 6a.* Bruxelles : Editions Plantyn.

- Legrand, J., Jonnaert, P., Bonnet, J.-P. (1994). *Ateliers mathématiques 6b.* Bruxelles : Editions Plantyn.

- Linchevski, L., Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra : operation on the unknown in the context of equation. *Educational Studies of Mathematics, 30,* 39-65.

- Schmidt, S. & Bednarz, N. (1997). Raisonnements arithmétiques et algébriques dans un contexte de résolution de problèmes : difficultés rencontrées par les futurs enseignants. *Educational Studies in Mathematics, 32,*127-155.

- Schmidt, S. (1996). La résolution de problèmes, un lieu privilégié pour une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre. *Revue des sciences de l'éducation, XXVII*(2), 277-294.

- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conception : reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* (E.S.M.), *22,* 1-36.

- Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Berne : P. Lang.

- Vergnaud G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. In *Actes du colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique.* Grenoble : La pensée sauvage, 189-199.

- Vergnaud G. (1989). L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction à l'algèbre. In *Construction des savoirs.* Ottawa : CIRADE, Editions Agence d'ARC Inc.

- Verschaffel, L. & De Corte, E. (1997). Word problems : A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school ? In T. Nunes & P. Bryant (Eds), *Learning and Teaching Mathematics : An international perspective* (69-97). UK : Psychology Press Ltd.

- Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems.* Lisse, The Netherlands : Swets & Zeitlinger.

TABLE DES MATIÈRES

UNIVERSITE PARIS 7 - DENIS DIDEROT
CENTRE DE FORMATION ET D'ETUDES SUR L'ENSEIGNEMENT DES DISCIPLINES

ANNEE ACADEMIQUE 2000-2001

L'ARTICULATION ENTRE L'ARITHMETIQUE ET L'ALGEBRE DANS LE CONTEXTE DE LA RESOLUTION DE PROBLEMES ARITHMETIQUES

LE CAS DES PARTAGES INEGAUX

ANNEXES

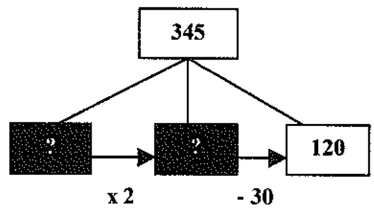
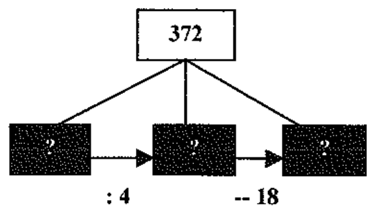
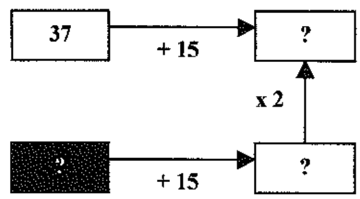
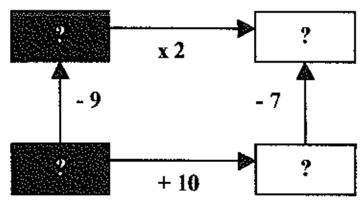
ISABELLE DEMONTY

MEMOIRE PRESENTE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'ETUDE APPROFONDIE EN DIDACTIQUE DES DISCIPLINES
Option : Didactique des mathématiques

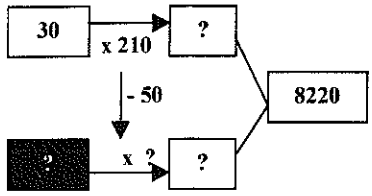
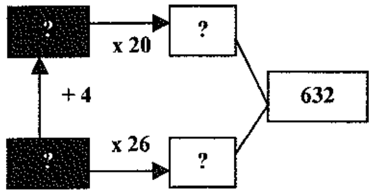
TABLE DES MATIÈRES

ANNEXE 1
Catégories de problèmes selon Bednarz et Janvier (1996)

Le tableau suivant présente la classification des problèmes complexes, en proposant, pour chaque type de problèmes, un exemple et la schématisation correspondante élaborée par Bednarz et Janvier (1996).

Catégorie sémantique	Type de problème	Exemple	Schématisation [1]
Partages inégaux	Connecté	Une école primaire composée de 345 enfants organise une journée sportive. Les enfants peuvent choisir entre le tennis, la natation et le vélo. Il y a deux fois plus d'enfants qui choisissent le tennis que le vélo et il y a 30 enfants de moins qui choisissent la natation que le tennis. 120 enfants veulent nager. Combien d'enfants feront du vélo et combien feront du tennis?	
	Déconnecté	372 personnes travaillent dans une grande entreprise. Il y a 4 fois plus d'ouvriers que d'employés et 18 employés de plus que de cadres. Combien y a-t-il d'ouvriers, d'employés et de cadres dans cette compagnie?	
Transformation	Connecté	Dans 15 ans, Jérôme sera deux fois plus âgé que Steve. Si Jérôme a actuellement 37 ans, quel est l'âge de Steve?	
	Déconnecté	L'année passée, le fermier A avait un terrain qui faisait 9 hectares de moins que le terrain du fermier B. Cette année, le fermier B a acheté 10 hectares de terrain en plus et le fermier A a doublé sa parcelle de terrain. Maintenant, le terrain du fermier A n'est plus que de 7 hectares plus petit que celui du fermier B. Quelle était la superficie du terrain de chaque fermier l'année passée?	

[1] Les cases noires indiquent les inconnues des problèmes. Les points d'interrogation désignent les variables des systèmes sous-jacent aux problèmes.

Relation entre les quantités	Connecté	Après la dernière séance de cinéma, la caissière compte 8220 francs dans sa caisse. Ce soir, elle a vendu 30 tickets pour adulte, à 210 francs le ticket. Les tickets pour enfant coûtent 50 francs de moins que ceux pour adultes. Combien la caissière a-t-elle vendu de tickets pour enfant ce soir?	
	Déconnecté	Une entreprise de transport utilise des petits et des grands camions pour transporter 632 lits de l'Angleterre à l'Allemagne. Les grands camions peuvent contenir 26 lits et les petits camions peuvent en transporter 20. Dans le convoi qui transporte les lits, il y a 4 petits camions de plus que les grands camions. Combien de camions de chaque type le convoi contient-il?	

ANNEXE 2
Enoncés soumis aux élèves

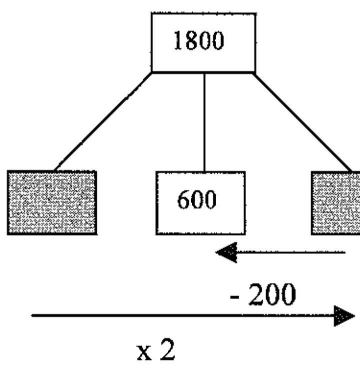
Dans cette annexe, nous présentons chacun des problèmes ainsi que la schématisation correspondante établie en référence aux travaux de Bednarz et Janvier (1996). Cette schématisation permet de dégager :

- la nature (connue ou inconnue) des quantités mises en jeu : les cases ombrées désignent les inconnues du problème et les cases vides indiquent les grandeurs qui ne figurent pas dans l'énoncé;
- le nombre de parties impliquées dans le problème;
- le type de relations unissant les données (relations additives ou multiplicatives, symbolisées par des flèches);
- la nature des relations impliquées (relation entre le tout et une partie ou relation entre deux parties).

1. <u>Problème connecté - 3 parties (relations additive et multiplicative)</u>

   Un père partage une somme de 1800 F entre ses trois filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 2 fois plus à Céline qu'à Aurélie et il donne 200 F de moins à Béatrice qu'à Céline. Béatrice reçoit 600 F. Combien les autres enfants ont-ils reçu?

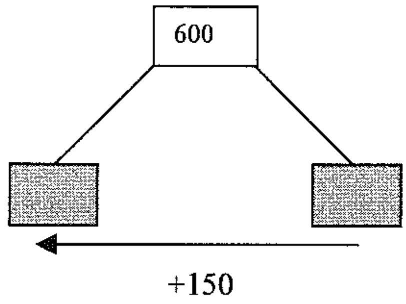
   Structure du problème



2. <u>Problème déconnecté - 2 parties - relation additive</u>

Un père partage une somme de 600 F entre ses deux filles : Aurélie et Béatrice. Il donne 150 F de plus à Aurélie qu'à Béatrice. Combien chaque enfant a-t-il reçu?

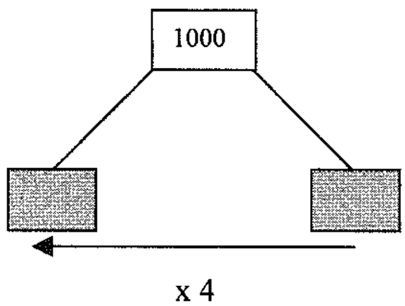
Structure du problème



3. <u>Problème déconnecté - 2 parties - relation multiplicative</u>

Un père partage une somme de 1000 F entre ses deux filles: Aurélie et Béatrice. Il donne 4 fois plus à Aurélie qu'à Béatrice. Combien chaque enfant a-t-il reçu?

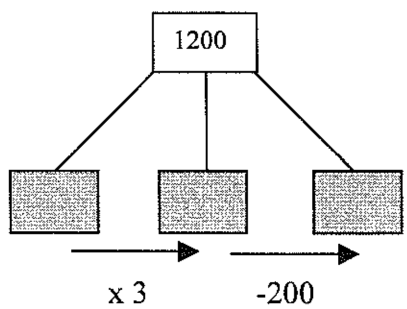
Structure du problème



4. <u>Problème déconnecté - 3 parties - relations additive et multiplicative</u>

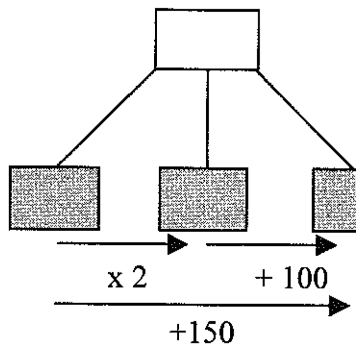
Un père partage une somme de 1200 F entre ses 3 filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 3 fois plus à Béatrice qu'à Aurélie et 200 F de moins à Céline qu'à Béatrice. Combien chaque enfant a-t-il reçu?

Structure du problème

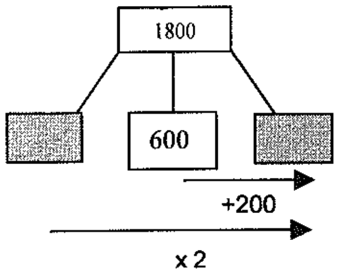
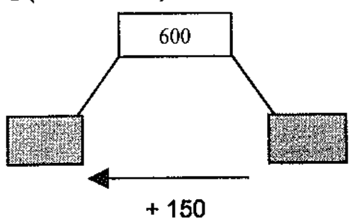


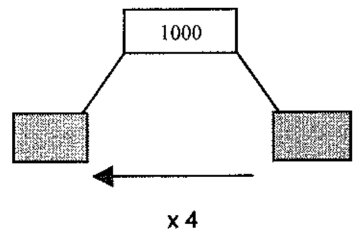
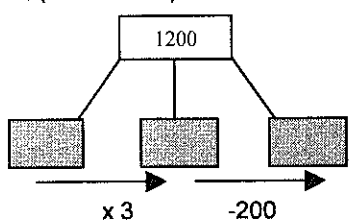
5. Problème déconnecté - 3 parties - relations additive et multiplicative
Un père partage une somme entre ses 3 filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 2 fois plus à Béatrice qu'à Aurélie et 100 F de plus à Céline qu'à Béatrice. Finalement, Céline a 150 F de plus qu'Aurélie. Combien chaque enfant a-t-il reçu?

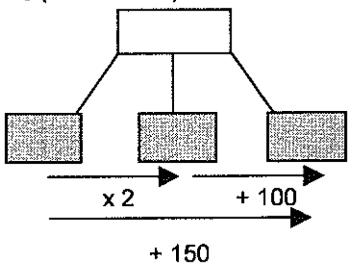
Structure du problème



ANNEXE 3
Exemples de démarches de résolution des différents problèmes

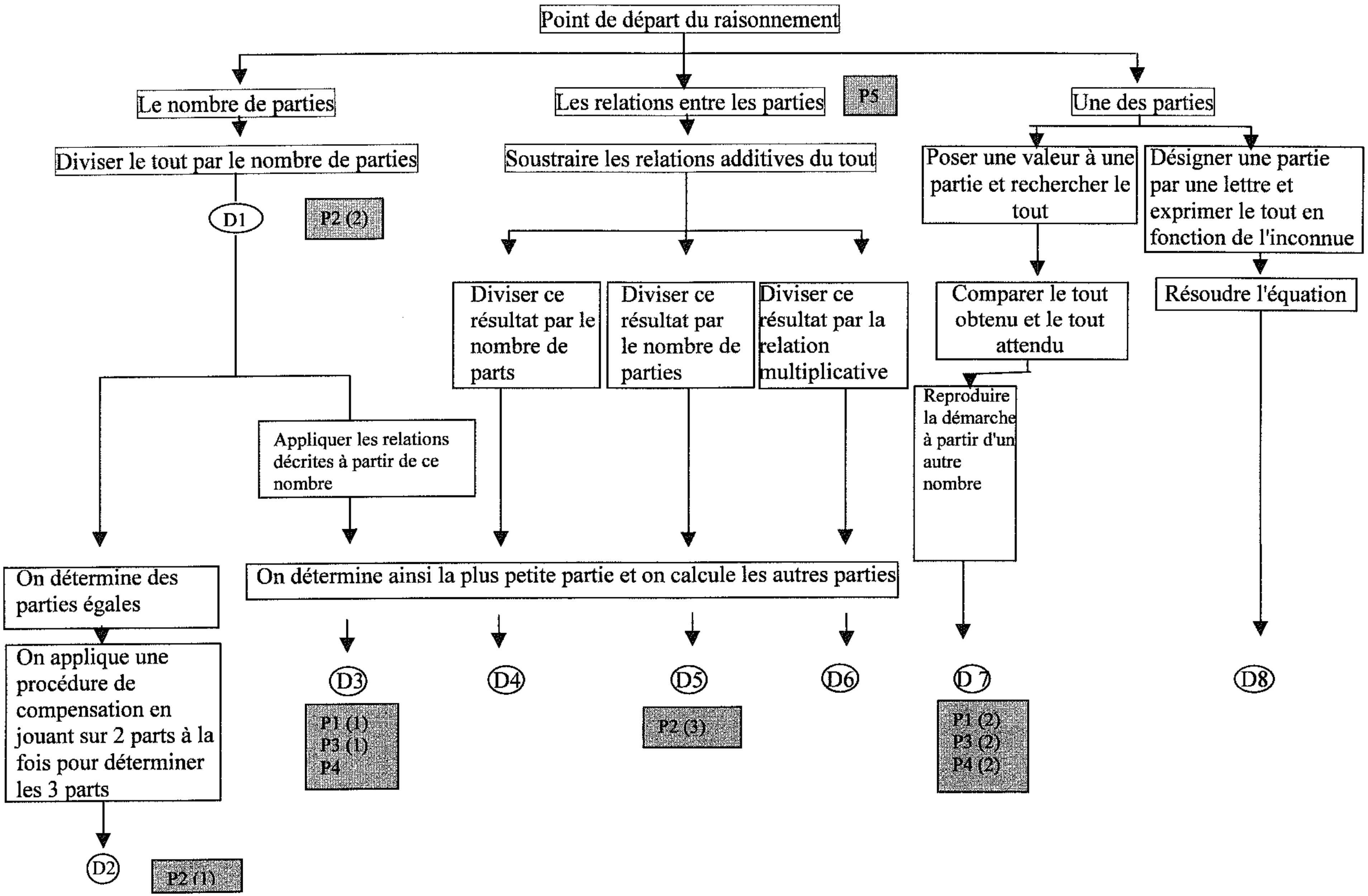
	Démarches arithmétiques				Démarche algébrique
	Essais-erreurs	Partage égal puis répartition des différences	Fausse position	Structure	
P_1 (connecté) 	1) B : 600 C : 600+200 = 800 A : 800 : 2 = 400 2) B : 600 C : 600+200 = 800 A : 1800-(600+800) = 400	1800 : 3 = 600 A : 600-200 = 400 B : 600 C : 600+200 = 800	Cette méthode ne s'utilise pas comme une partie et la somme totale sont connues	1) 1800+200 = 2000 2000 : 5 = 400 Aurélie : 400 F Béatrice : 600 F Céline : 800 F 2) 1800 - 600 = 1200 1200 : 3 = 400 Aurélie : 400 F Céline : 800 F	<u>Mise en équation usuelle</u> 1) Soit x, la part d'Aurélie $x + 2x - 200 + 2x = 1800$ $5x = 2000$ $x = 400$ Aurélie a 400 F Céline a 800 F 2) Soit x, la part d'Aurélie $x + 600 + 2x = 1800$ $x = 400$ <u>Modélisation algébrique sous forme de système</u> Soit x, y et z, les parts respectives d'Aurélie, de Béatrice et de Céline. $\begin{cases} x = z : 2 \\ y = 600 \\ z = y + 200 \\ x + y + z = 1800 \end{cases}$ Remarque : on obtient un système de quatre équations à trois inconnues. Une équation est donc inutile pour résoudre le système
P_2 (déconnecté) 	1) Posons : A = 300 B = 150 A + B = 450 On essaie avec d'autres nombres jusqu'à obtenir 600 2) Posons : A = 300 Alors B = 300 On essaie avec d'autres nombres jusqu'à obtenir l'égalité A = B + 150	600 : 2 = 300 B : 300 – 75 = 225 A : 300 + 75 = 375	Si B vaut 100, alors le total vaut 350 et si b vaut 300, alors le total vaut 750. Donc lorsque la partie de B augmente de 200, le total augmente de 400 Le total doit augmenter de 250, donc B doit augmenter de125. B : 225 A : 225+150 = 375	600 – 150 = 450 450 : 2 = 225 B = 225 A = 225 + 150 = 375	<u>Mise en équation usuelle</u> Soit x la part d'Aurélie $x + x - 150 = 600$ $x = 375$ Aurélie a 375 F Béatrice a 225 F <u>Modélisation algébrique sous forme de système</u> Soit x et y, les parts respectives d'Aurélie et de Béatrice $\begin{cases} x = y + 150 \\ x + y = 600 \end{cases}$

P$_3$ (déconnecté)  	1) Posons : A = 400 Alors B = 100 A + B = 500 . On essaie avec d'autres nombres jusqu'à obtenir 1000 2) Posons : A = 400 Alors B = 600, comme le total vaut 1000. On essaie avec d'autres nombres jusqu'à obtenir l'égalité A = 4B.	1000 : 2 = 500 A : 500 B : 500 On ajoute ensuite une partie à A et on la retire de B, jusqu'à obtenir l'égalité A = 4B: A : 500 + 300 = 800 B : 500 - 300 = 200	Si B vaut 100, alors le total vaut 500. Le total doit doubler, donc B doit doubler aussi Donc on obtient : B : 200 A : 200 x 4 = 800	B a une part et A en a 4. Donc en tout, il y a 5 parts égales 1000 : 5 = 200 A : 200 x 4 = 800 B : 200	Mise en équation usuelle Soit x, la partie de Béatrice x + 4x = 1000 5x = 1000 x = 200 Béatrice a 200 F Aurélie a 800 F Modélisation algébrique sous forme de système Soit x et y, les parts respectives d'Aurélie et de Béatrice $\begin{cases} x = y \cdot 4 \\ x + y = 1000 \end{cases}$
P$_4$ (déconnecté)  	Posons A = 100 Dans ce cas, B = 300 C = 100 A + B + C ≠ 1000 On essaie avec d'autres nombres jusqu'à obtenir 1000	1200 : 3 = 400 A : 400 B : 400 C : 400 On ajoute ensuite une partie à A et on la retire de B, jusqu'à obtenir l'égalité B = 3A. A = 400 - 200 B = 400 + 200 C = 400	Si A vaut 100, alors le total vaut 500 et si A vaut 300, alors le total vaut 1900. Donc lorsque la partie de A augmente de 200, le total augmente de 1400 Le total doit augmenter de 700, donc B doit augmenter de100. Donc on obtient : A : 200 B : 200 x 3 = 600 C = 600 - 200 = 400	1200 + 200 = 1400 En tout, il y a 7 parts égales 1400 : 7 = 200 A = 200 B = 600 C = 400	Mise en équation usuelle Soit x la part d'Aurélie x + 3x + 3x – 200 = 1200 7x = 1400 x = 200 Aurélie a 200 F Béatrice a 600 F Céline a 400 F Modélisation algébrique sous forme de système $\begin{cases} x \cdot 3 = y \\ y - 200 = z \\ x + y + z = 1200 \end{cases}$

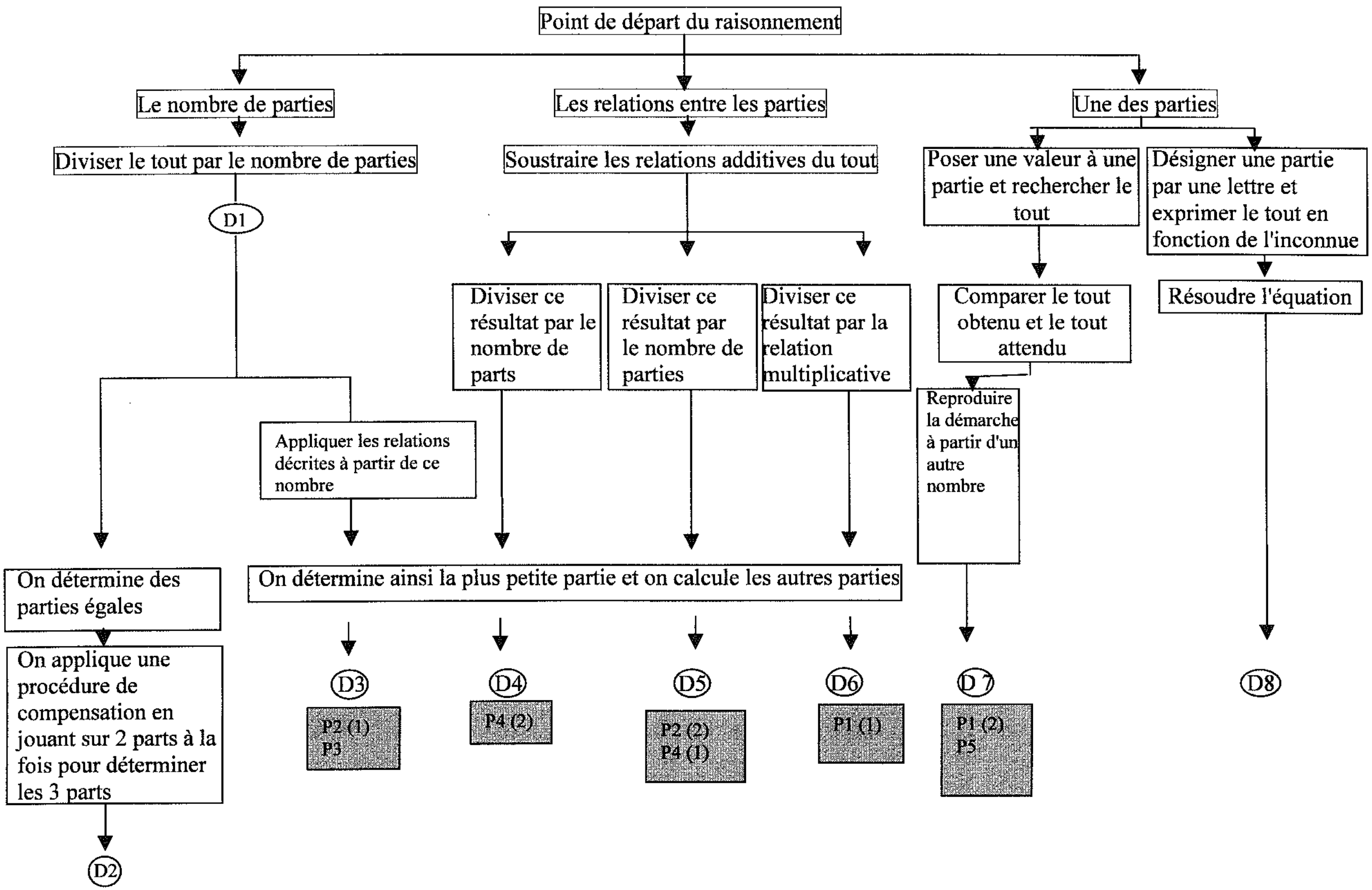
P_5 (déconnecté)  	Posons A = 100 B = 200 C = 300 $C \neq A + 150$ On essaie avec d'autres nombres jusqu'à obtenir une différence de 150 entre Aurélie et Céline	Impossible à mettre en œuvre comme le total n'est pas connu.	Si A vaut 100, alors la différence entre A et C vaut 200. Si A vaut 300, la différence entre A et C vaut 400. Donc lorsque la partie de A augmente de 200, la différence entre A et C augmente de 200 La différence entre A et C doit diminuer de 50, donc A doit aussi diminuer de 50. Donc on obtient : A : 50 B : 50 x 2 = 100 C : 100 + 100 = 200	150 – 100 = 50 Si on multiplie par 2, c'est la même chose que si on ajoute 50. Donc Aurélie a 50 F. Béatrice a 100 F Céline a 200 F	<u>Mise en équation usuelle</u> Soit x la part d'Aurélie $x - 2 + 100 = x + 150$ $2x - x = 150 - 100$ $x = 50$ Aurélie a 50 F Béatrice a 100 F Céline a 200 F <u>Modélisation algébrique sous forme de système</u> $\begin{cases} x \cdot 2 = y \\ y + 100 = z \\ x + 150 = z \end{cases}$

ANNEXE 4
Analyse des démarches par enfant

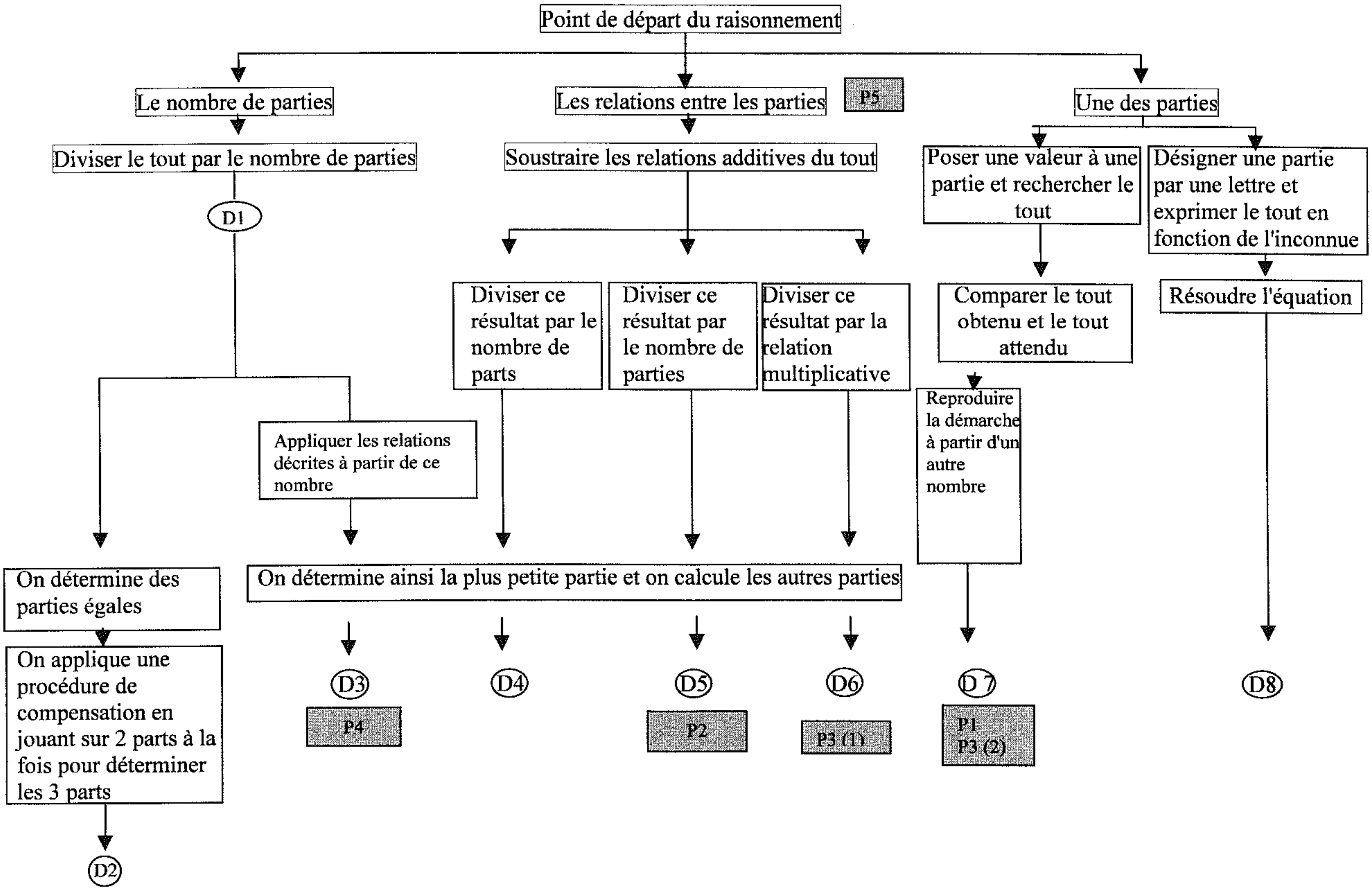
Vanessa (2S)


Point de départ du raisonnement
Le nombre de parties
Les relations entre les parties
P5
Une des parties
Diviser le tout par le nombre de parties
D1
P2 (2)
Soustraire les relations additives du tout
Poser une valeur à une partie et rechercher le tout
Désigner une partie par une lettre et exprimer le tout en fonction de l'inconnue
Diviser ce résultat par le nombre de parts
Diviser ce résultat par le nombre de parties
Diviser ce résultat par la relation multiplicative
Comparer le tout obtenu et le tout attendu
Résoudre l'équation
Appliquer les relations décrites à partir de ce nombre
Reproduire la démarche à partir d'un autre nombre
On détermine des parties égales
On détermine ainsi la plus petite partie et on calcule les autres parties
On applique une procédure de compensation en jouant sur 2 parts à la fois pour déterminer les 3 parts
D3
D4
D5
D6
D 7
D8
P1 (1)
P3 (1)
P4
P2 (3)
P1 (2)
P3 (2)
P4 (2)
D2
P2 (1)

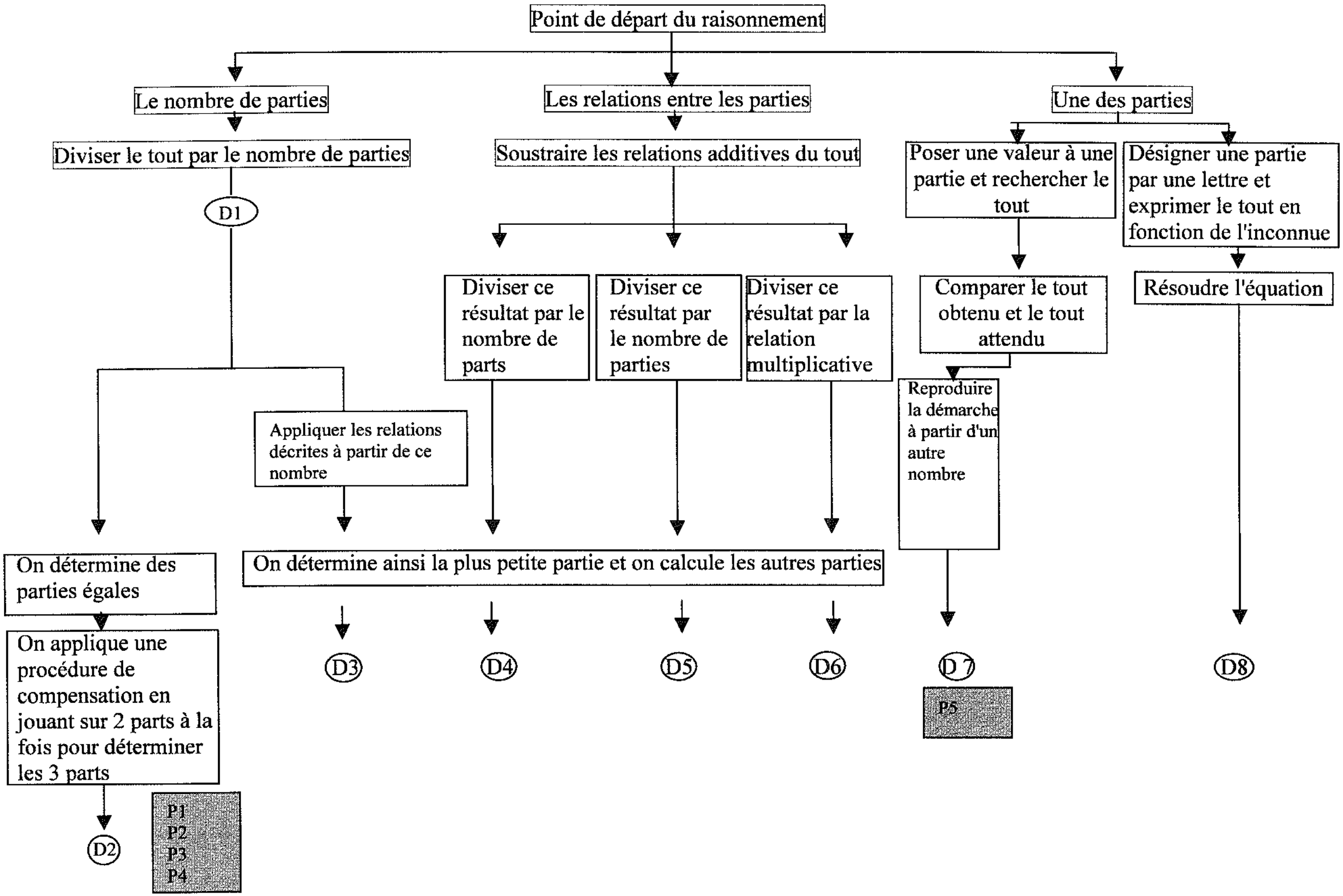
Morgane (1S)


Point de départ du raisonnement
Le nombre de parties
Les relations entre les parties
Une des parties
Diviser le tout par le nombre de parties
Soustraire les relations additives du tout
Poser une valeur à une partie et rechercher le tout
Désigner une partie par une lettre et exprimer le tout en fonction de l'inconnue
D1
Diviser ce résultat par le nombre de parts
Diviser ce résultat par le nombre de parties
Diviser ce résultat par la relation multiplicative
Comparer le tout obtenu et le tout attendu
Résoudre l'équation
Reproduire la démarche à partir d'un autre nombre
Appliquer les relations décrites à partir de ce nombre
On détermine des parties égales
On détermine ainsi la plus petite partie et on calcule les autres parties
On applique une procédure de compensation en jouant sur 2 parts à la fois pour déterminer les 3 parts
D2
D3
P2 (1)
P3
D4
P4 (2)
D5
P2 (2)
P4 (1)
D6
P1 (1)
D 7
P1 (2)
P5
D8

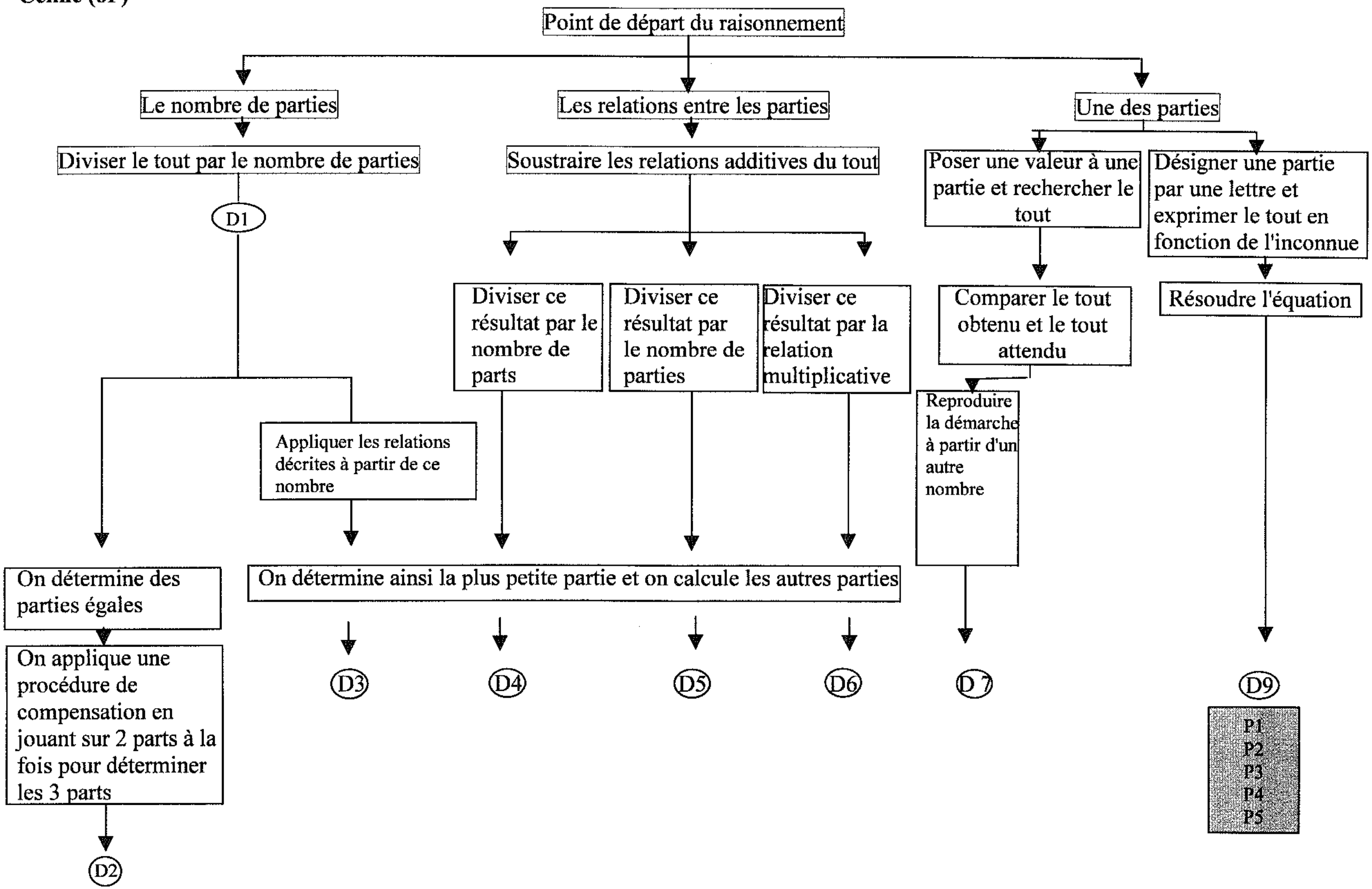
Justine (1S)


Point de départ du raisonnement
Le nombre de parties
Les relations entre les parties
P5
Une des parties
Diviser le tout par le nombre de parties
Soustraire les relations additives du tout
Poser une valeur à une partie et rechercher le tout
Désigner une partie par une lettre et exprimer le tout en fonction de l'inconnue
D1
Diviser ce résultat par le nombre de parts
Diviser ce résultat par le nombre de parties
Diviser ce résultat par la relation multiplicative
Comparer le tout obtenu et le tout attendu
Résoudre l'équation
Reproduire la démarche à partir d'un autre nombre
Appliquer les relations décrites à partir de ce nombre
On détermine des parties égales
On détermine ainsi la plus petite partie et on calcule les autres parties
On applique une procédure de compensation en jouant sur 2 parts à la fois pour déterminer les 3 parts
D3
P4
D4
D5
P2
D6
P3 (1)
D 7
P1
P3 (2)
D8
D2

Quentin (2S)

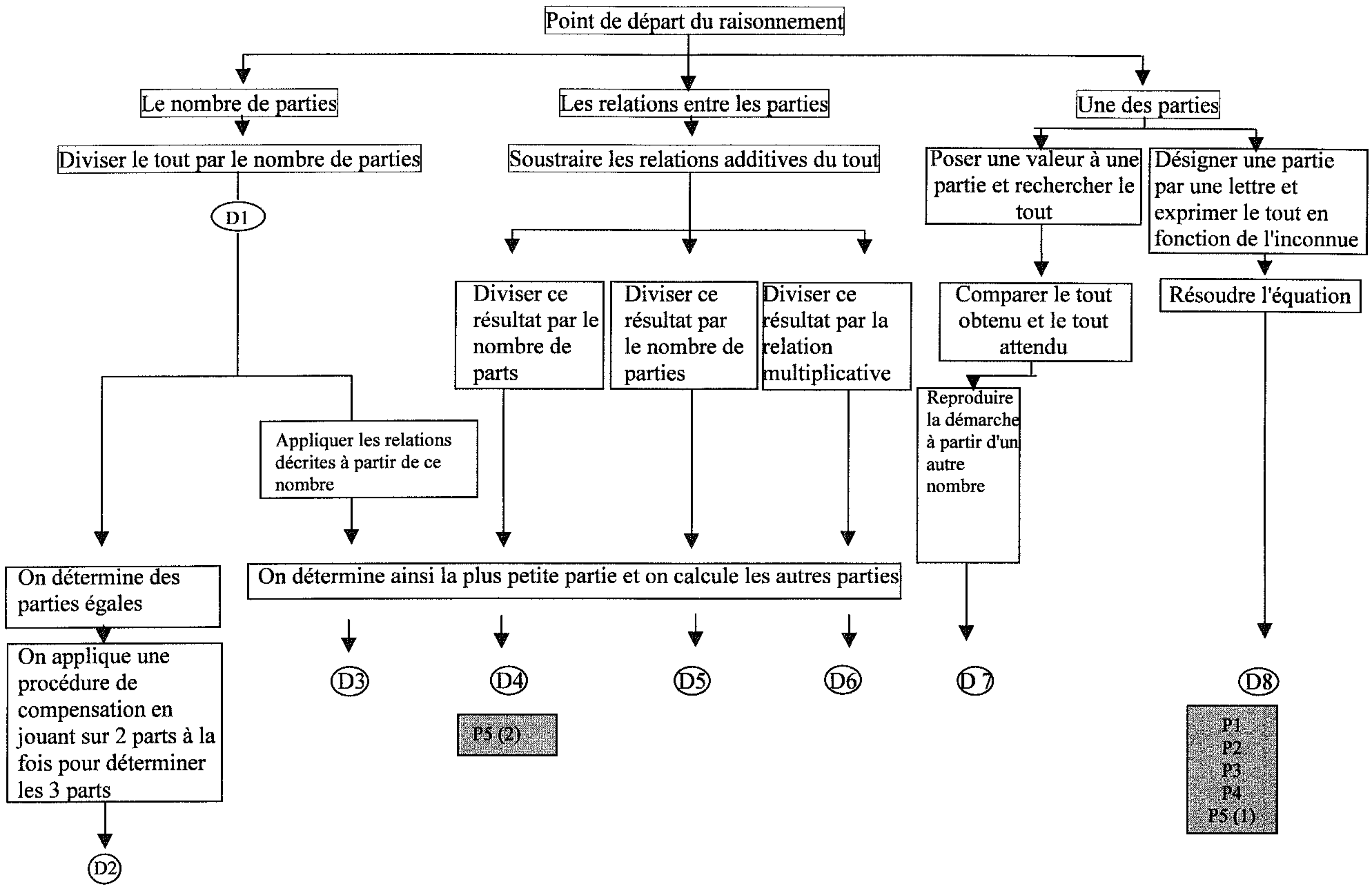

Point de départ du raisonnement
Le nombre de parties
Les relations entre les parties
Une des parties
Diviser le tout par le nombre de parties
Soustraire les relations additives du tout
Poser une valeur à une partie et rechercher le tout
Désigner une partie par une lettre et exprimer le tout en fonction de l'inconnue
D1
Diviser ce résultat par le nombre de parts
Diviser ce résultat par le nombre de parties
Diviser ce résultat par la relation multiplicative
Comparer le tout obtenu et le tout attendu
Résoudre l'équation
Reproduire la démarche à partir d'un autre nombre
Appliquer les relations décrites à partir de ce nombre
On détermine des parties égales
On détermine ainsi la plus petite partie et on calcule les autres parties
On applique une procédure de compensation en jouant sur 2 parts à la fois pour déterminer les 3 parts
D3
D4
D5
D6
D 7
D8
P5
D2
P1
P2
P3
P4

Céline (6P)

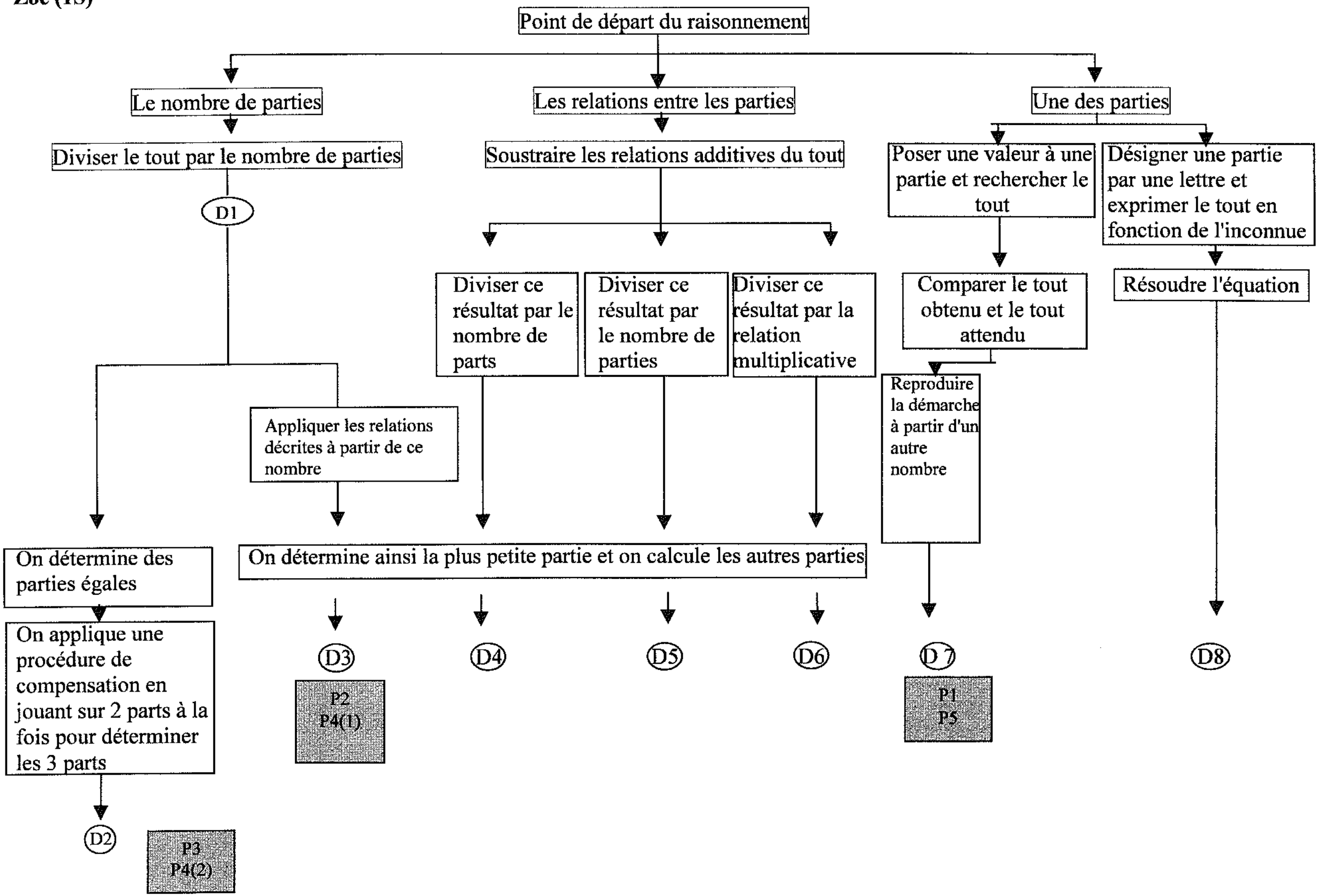


Point de départ du raisonnement
Le nombre de parties
Les relations entre les parties
Une des parties
Diviser le tout par le nombre de parties
Soustraire les relations additives du tout
Poser une valeur à une partie et rechercher le tout
Désigner une partie par une lettre et exprimer le tout en fonction de l'inconnue
D1
Diviser ce résultat par le nombre de parts
Diviser ce résultat par le nombre de parties
Diviser ce résultat par la relation multiplicative
Comparer le tout obtenu et le tout attendu
Résoudre l'équation
Appliquer les relations décrites à partir de ce nombre
Reproduire la démarche à partir d'un autre nombre
On détermine des parties égales
On détermine ainsi la plus petite partie et on calcule les autres parties
On applique une procédure de compensation en jouant sur 2 parts à la fois pour déterminer les 3 parts
D3
D4
D5
D6
D 7
D9
P1
P2
P3
P4
P5
D2

Céline (6P)

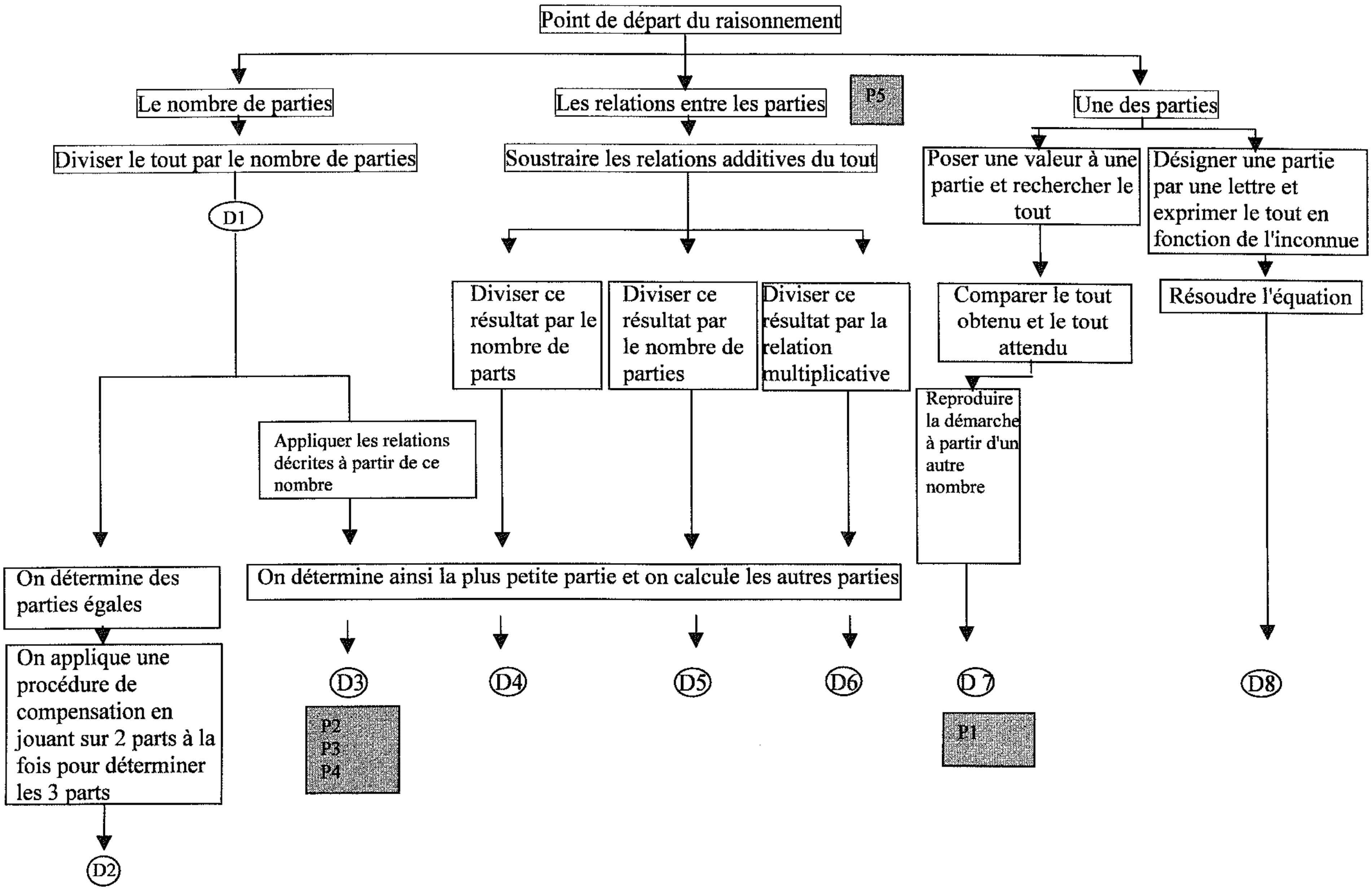

Point de départ du raisonnement
Le nombre de parties
Les relations entre les parties
Une des parties
Diviser le tout par le nombre de parties
D1
Soustraire les relations additives du tout
Poser une valeur à une partie et rechercher le tout
Désigner une partie par une lettre et exprimer le tout en fonction de l'inconnue
Diviser ce résultat par le nombre de parts
Diviser ce résultat par le nombre de parties
Diviser ce résultat par la relation multiplicative
Comparer le tout obtenu et le tout attendu
Résoudre l'équation
Appliquer les relations décrites à partir de ce nombre
Reproduire la démarche à partir d'un autre nombre
On détermine des parties égales
On détermine ainsi la plus petite partie et on calcule les autres parties
On applique une procédure de compensation en jouant sur 2 parts à la fois pour déterminer les 3 parts
D3
D4
D5
D6
D 7
D8
P5 (2)
P1
P2
P3
P4
P5 (1)
D2

Zoé (1S)

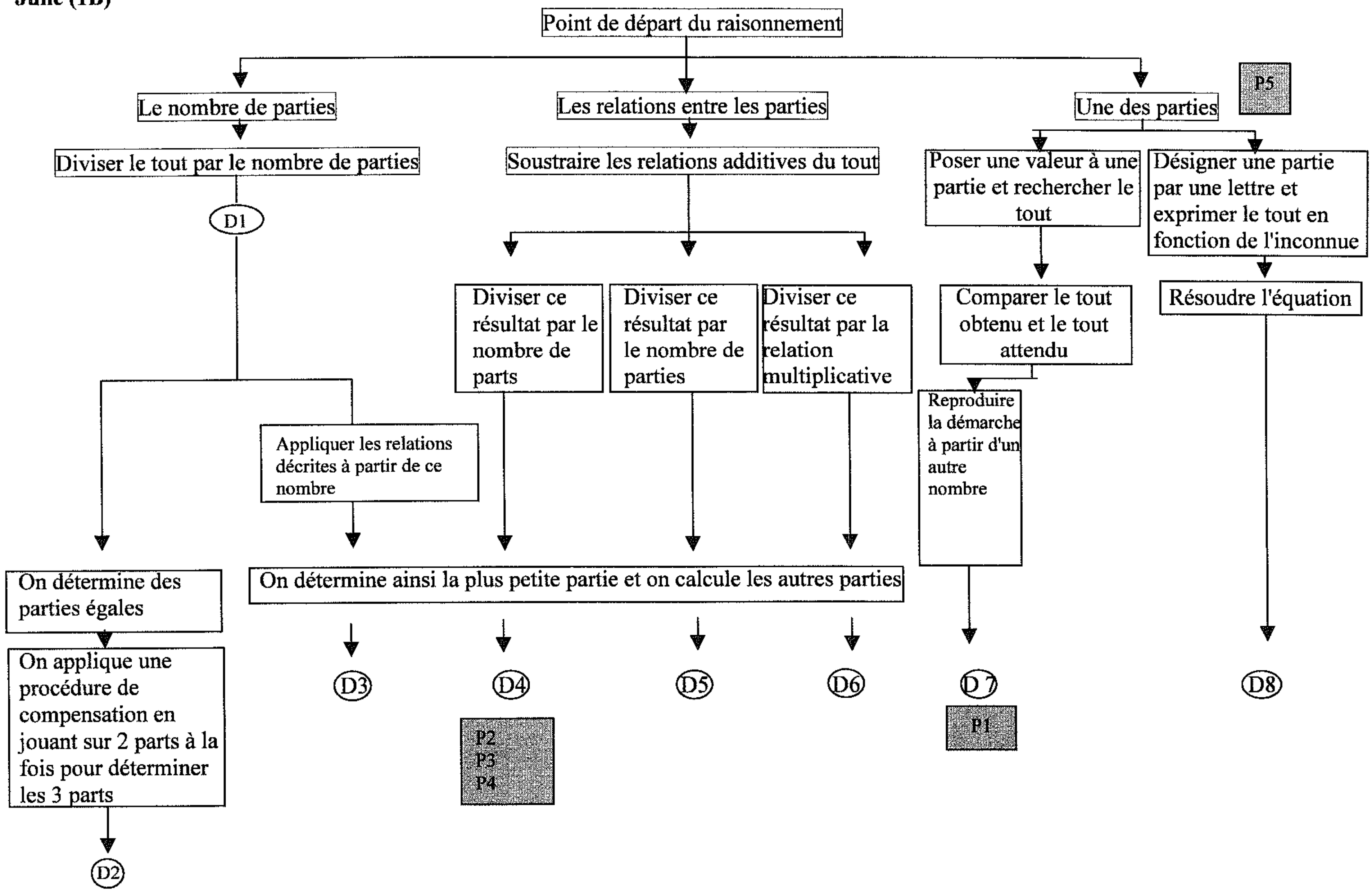


Point de départ du raisonnement
Le nombre de parties
Les relations entre les parties
Une des parties
Diviser le tout par le nombre de parties
D1
Soustraire les relations additives du tout
Poser une valeur à une partie et rechercher le tout
Désigner une partie par une lettre et exprimer le tout en fonction de l'inconnue
Diviser ce résultat par le nombre de parts
Diviser ce résultat par le nombre de parties
Diviser ce résultat par la relation multiplicative
Comparer le tout obtenu et le tout attendu
Résoudre l'équation
Appliquer les relations décrites à partir de ce nombre
Reproduire la démarche à partir d'un autre nombre
On détermine des parties égales
On détermine ainsi la plus petite partie et on calcule les autres parties
On applique une procédure de compensation en jouant sur 2 parts à la fois pour déterminer les 3 parts
D3
D4
D5
D6
D 7
D8
P2
P4(1)
P1
P5
D2
P3
P4(2)

Mélanie (1S)

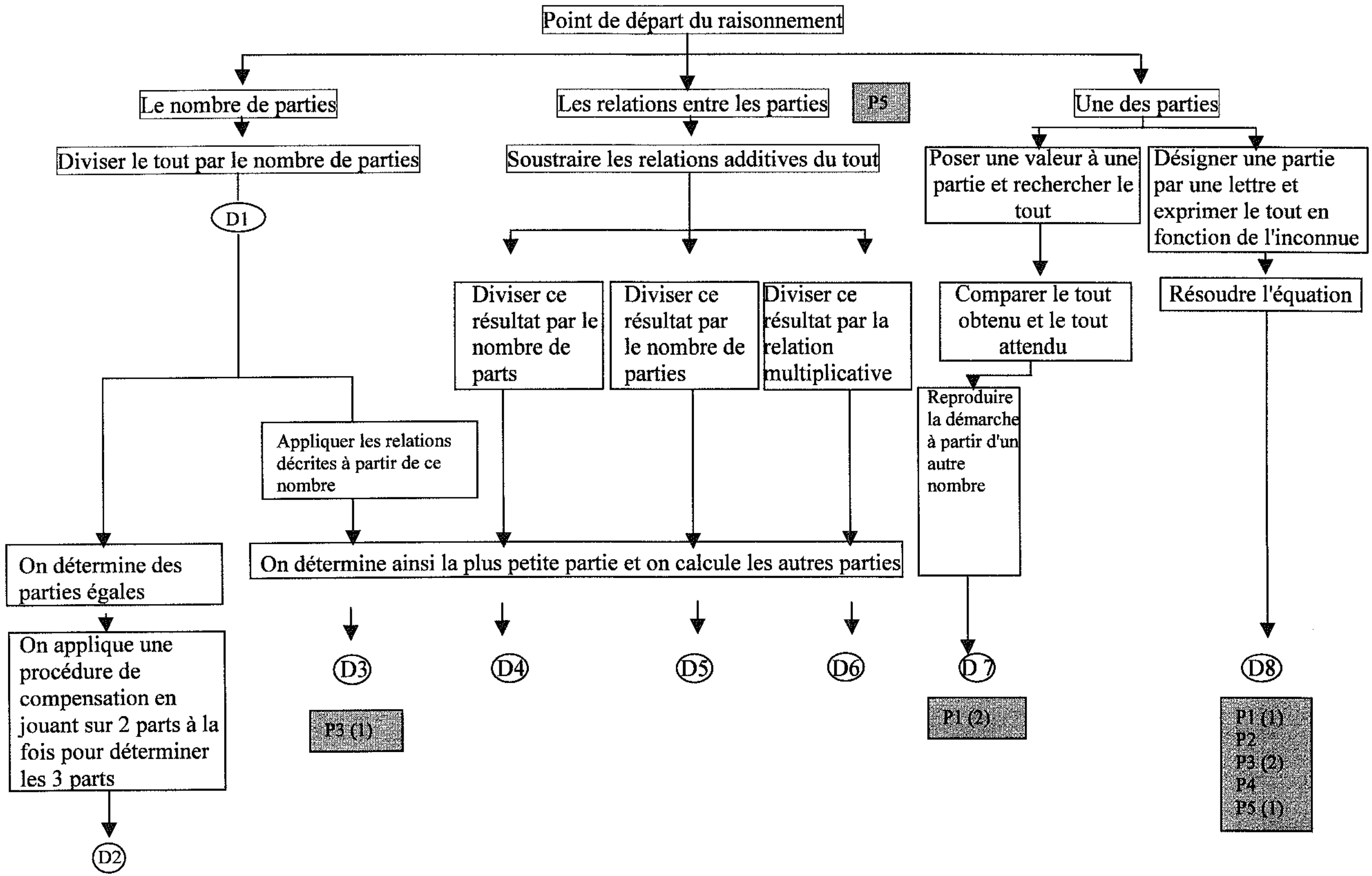

Point de départ du raisonnement
Le nombre de parties
Les relations entre les parties
P5
Une des parties
Diviser le tout par le nombre de parties
Soustraire les relations additives du tout
Poser une valeur à une partie et rechercher le tout
Désigner une partie par une lettre et exprimer le tout en fonction de l'inconnue
D1
Diviser ce résultat par le nombre de parts
Diviser ce résultat par le nombre de parties
Diviser ce résultat par la relation multiplicative
Comparer le tout obtenu et le tout attendu
Résoudre l'équation
Appliquer les relations décrites à partir de ce nombre
Reproduire la démarche à partir d'un autre nombre
On détermine des parties égales
On détermine ainsi la plus petite partie et on calcule les autres parties
On applique une procédure de compensation en jouant sur 2 parts à la fois pour déterminer les 3 parts
D3
D4
D5
D6
D 7
D8
P2
P3
P4
P1
D2

Julie (1B)

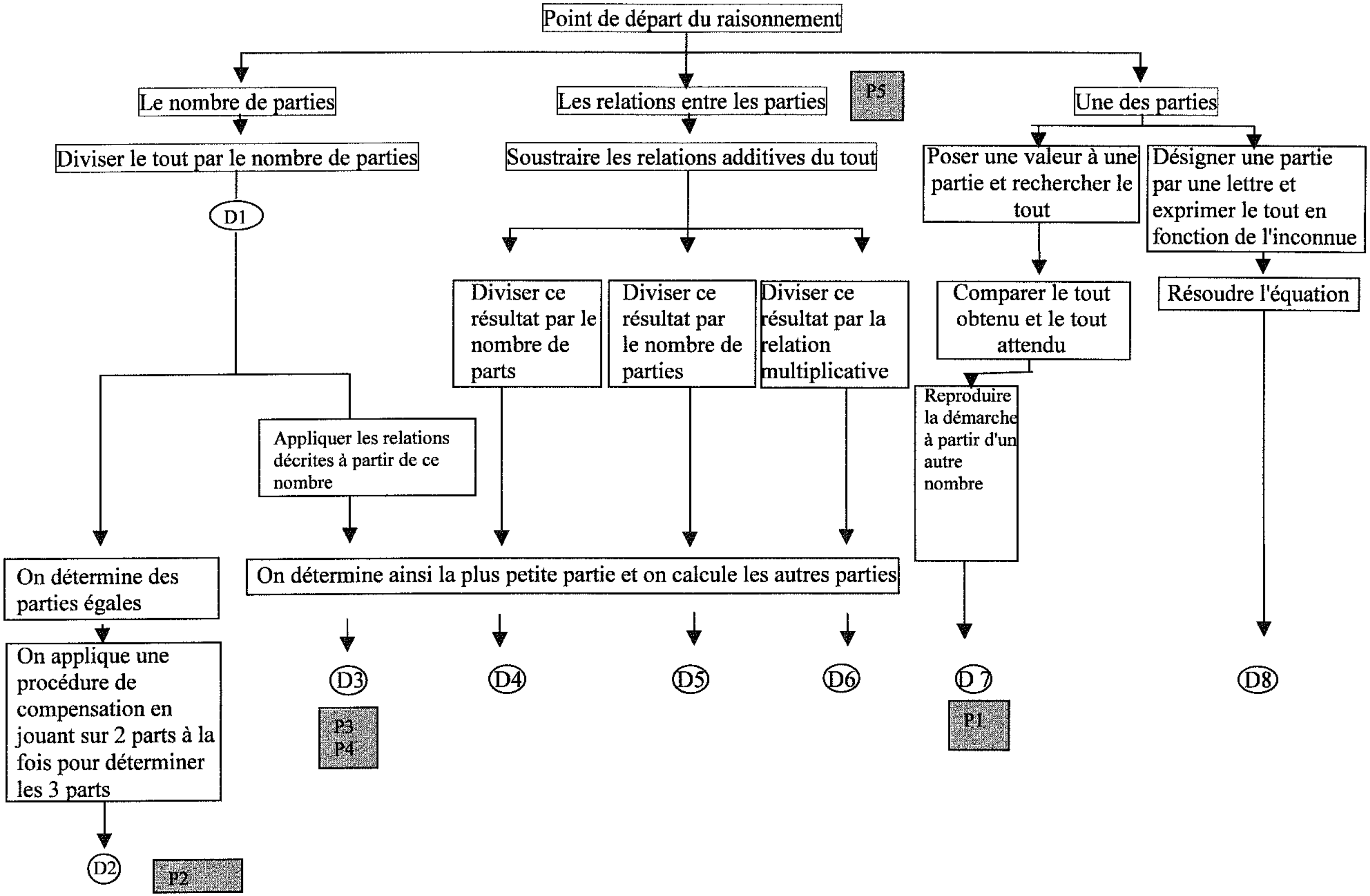


Point de départ du raisonnement
Le nombre de parties
Les relations entre les parties
Une des parties
P5
Diviser le tout par le nombre de parties
D1
Soustraire les relations additives du tout
Poser une valeur à une partie et rechercher le tout
Désigner une partie par une lettre et exprimer le tout en fonction de l'inconnue
Diviser ce résultat par le nombre de parts
Diviser ce résultat par le nombre de parties
Diviser ce résultat par la relation multiplicative
Comparer le tout obtenu et le tout attendu
Résoudre l'équation
Reproduire la démarche à partir d'un autre nombre
Appliquer les relations décrites à partir de ce nombre
On détermine des parties égales
On détermine ainsi la plus petite partie et on calcule les autres parties
On applique une procédure de compensation en jouant sur 2 parts à la fois pour déterminer les 3 parts
D3
D4
D5
D6
D 7
D8
P2
P3
P4
P1
D2

Julien (6P)

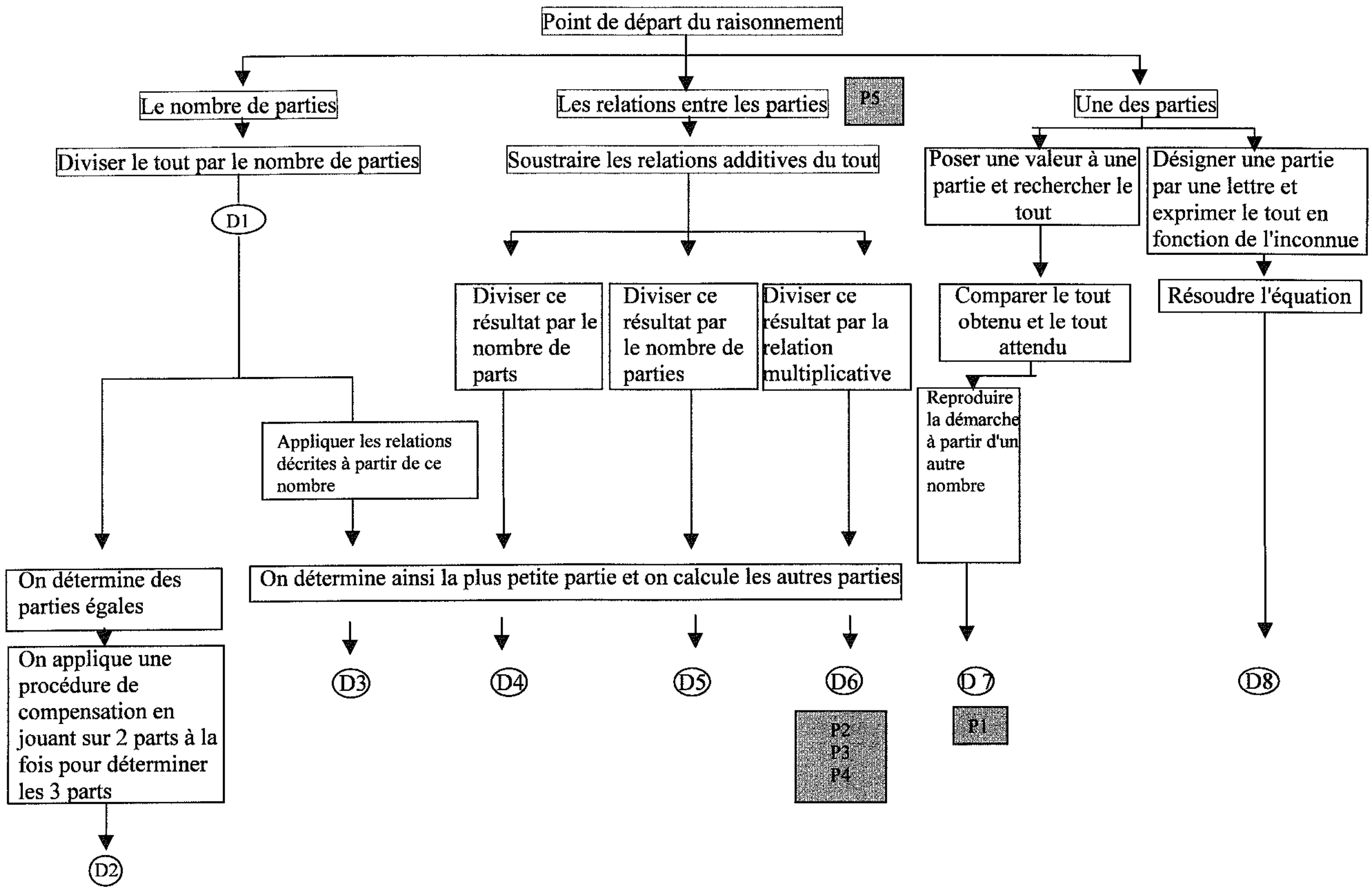

Point de départ du raisonnement
Le nombre de parties
Les relations entre les parties
P5
Une des parties
Diviser le tout par le nombre de parties
D1
Soustraire les relations additives du tout
Poser une valeur à une partie et rechercher le tout
Désigner une partie par une lettre et exprimer le tout en fonction de l'inconnue
Diviser ce résultat par le nombre de parts
Diviser ce résultat par le nombre de parties
Diviser ce résultat par la relation multiplicative
Comparer le tout obtenu et le tout attendu
Résoudre l'équation
Reproduire la démarche à partir d'un autre nombre
Appliquer les relations décrites à partir de ce nombre
On détermine des parties égales
On détermine ainsi la plus petite partie et on calcule les autres parties
On applique une procédure de compensation en jouant sur 2 parts à la fois pour déterminer les 3 parts
D2
D3
P3 (1)
D4
D5
D6
D 7
P1 (2)
D8
P1 (1)
P2
P3 (2)
P4
P5 (1)

Damien (6P)

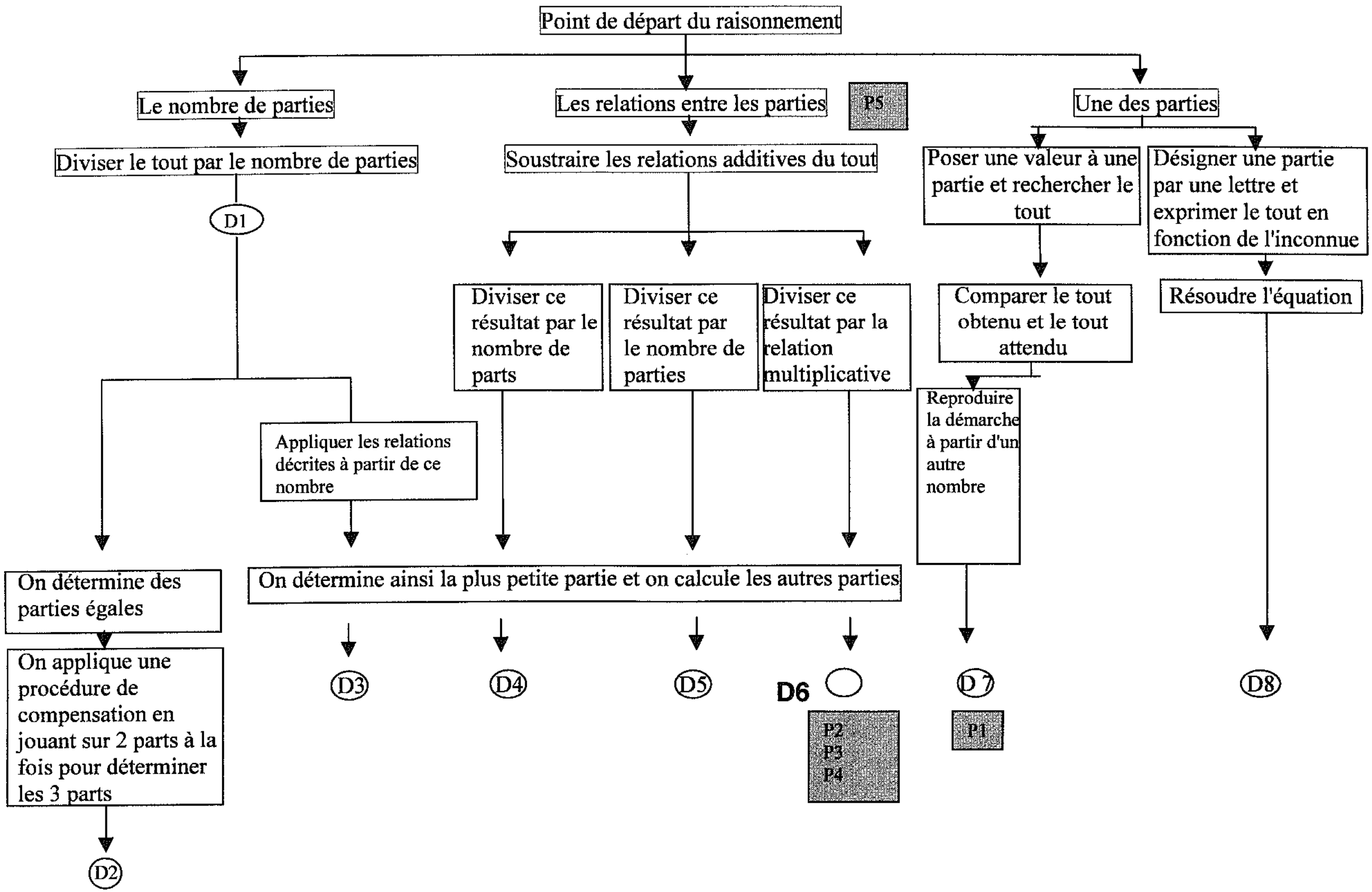


Point de départ du raisonnement
Le nombre de parties
Les relations entre les parties
P5
Une des parties
Diviser le tout par le nombre de parties
Soustraire les relations additives du tout
Poser une valeur à une partie et rechercher le tout
Désigner une partie par une lettre et exprimer le tout en fonction de l'inconnue
D1
Diviser ce résultat par le nombre de parts
Diviser ce résultat par le nombre de parties
Diviser ce résultat par la relation multiplicative
Comparer le tout obtenu et le tout attendu
Résoudre l'équation
Reproduire la démarche à partir d'un autre nombre
Appliquer les relations décrites à partir de ce nombre
On détermine des parties égales
On détermine ainsi la plus petite partie et on calcule les autres parties
On applique une procédure de compensation en jouant sur 2 parts à la fois pour déterminer les 3 parts
D3
D4
D5
D6
D 7
D8
P3
P4
P1
D2
P2

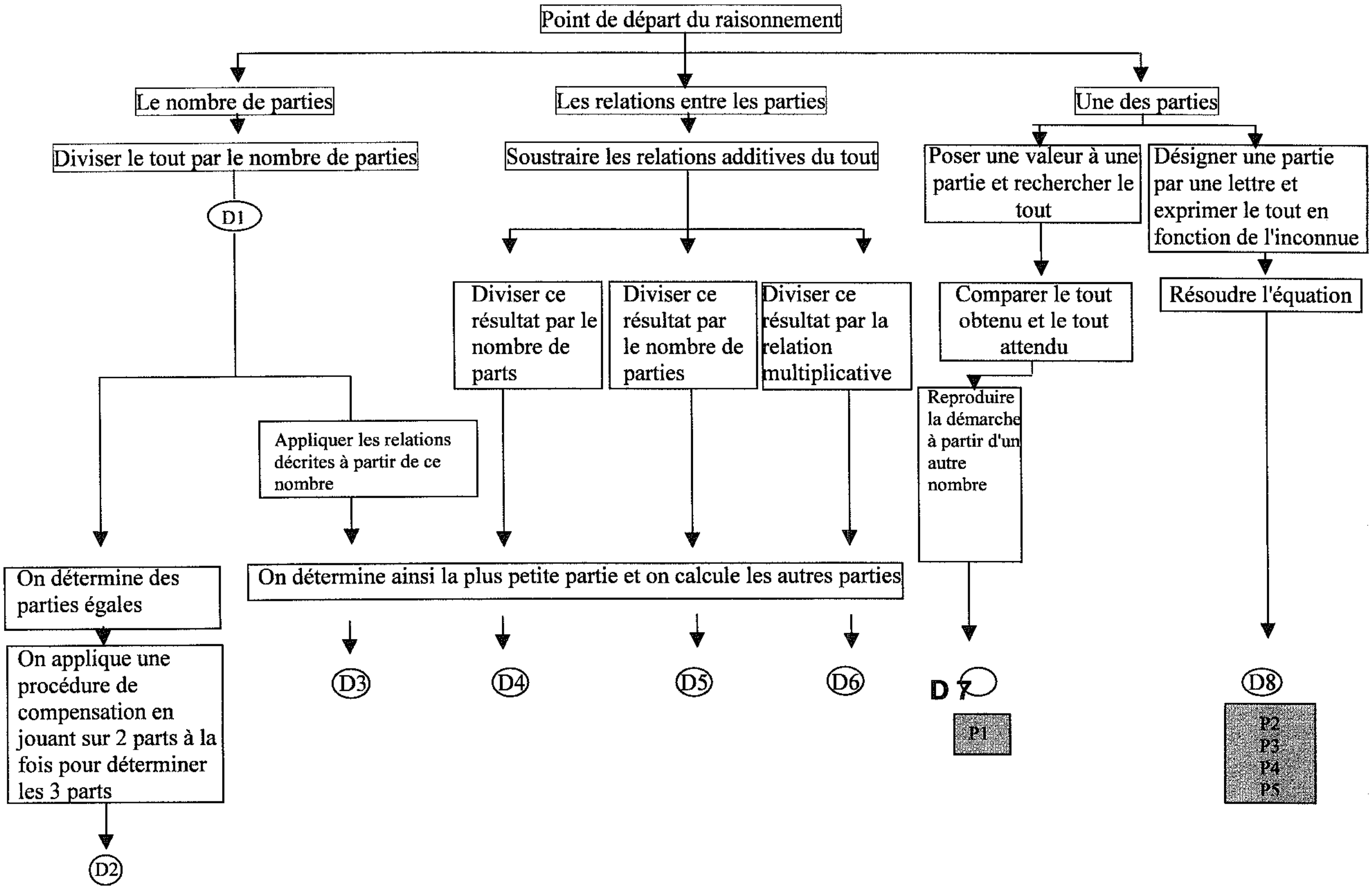
Thomas (6P)


Point de départ du raisonnement
Le nombre de parties
Les relations entre les parties
P5
Une des parties
Diviser le tout par le nombre de parties
Soustraire les relations additives du tout
Poser une valeur à une partie et rechercher le tout
Désigner une partie par une lettre et exprimer le tout en fonction de l'inconnue
D1
Diviser ce résultat par le nombre de parts
Diviser ce résultat par le nombre de parties
Diviser ce résultat par la relation multiplicative
Comparer le tout obtenu et le tout attendu
Résoudre l'équation
Appliquer les relations décrites à partir de ce nombre
Reproduire la démarche à partir d'un autre nombre
On détermine des parties égales
On détermine ainsi la plus petite partie et on calcule les autres parties
On applique une procédure de compensation en jouant sur 2 parts à la fois pour déterminer les 3 parts
D3
D4
D5
D6
D 7
D8
P2
P3
P4
P1
D2

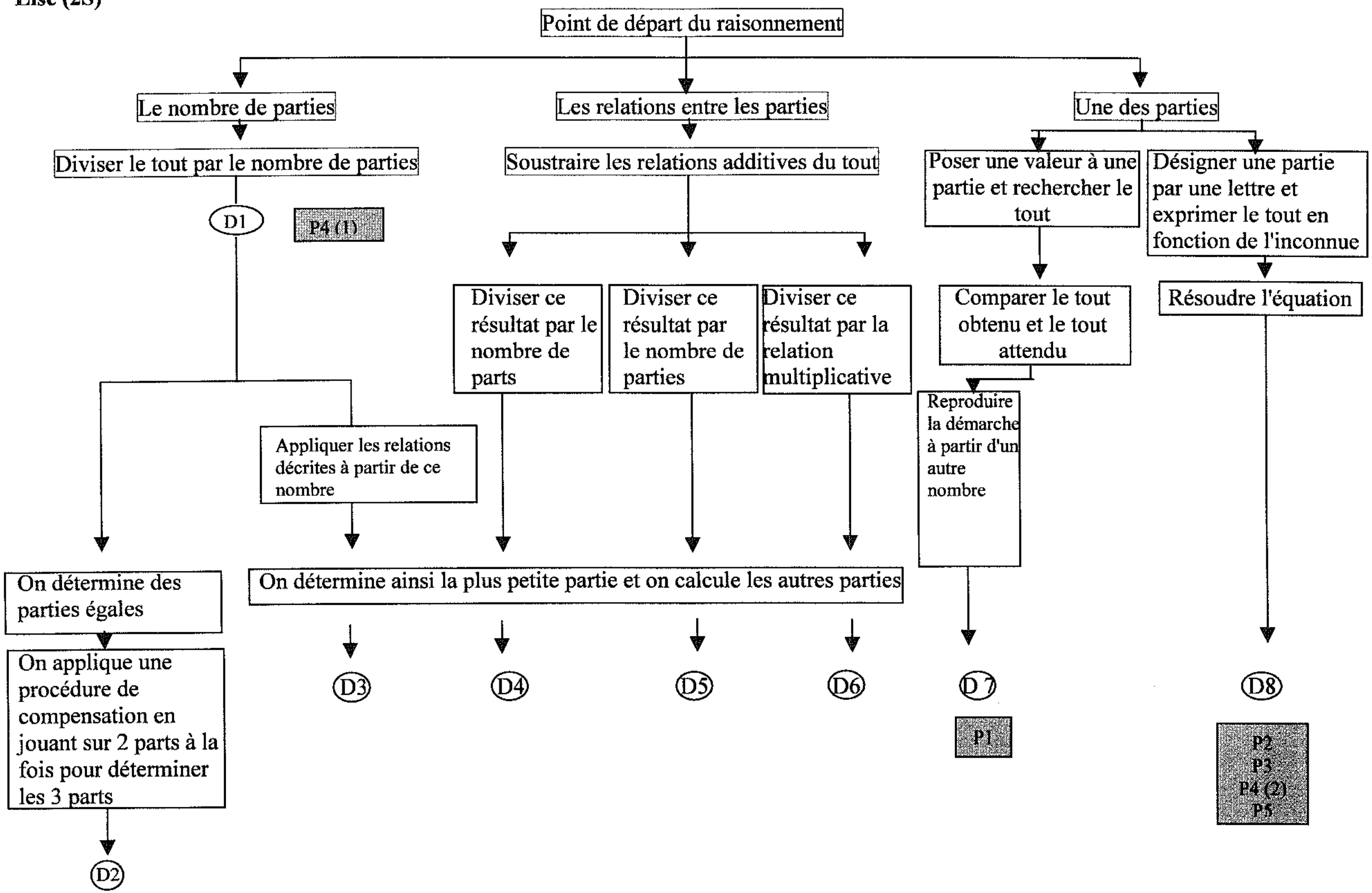
Aurélien (2S)


Point de départ du raisonnement
Le nombre de parties
Les relations entre les parties
P5
Une des parties
Diviser le tout par le nombre de parties
Soustraire les relations additives du tout
Poser une valeur à une partie et rechercher le tout
Désigner une partie par une lettre et exprimer le tout en fonction de l'inconnue
D1
Diviser ce résultat par le nombre de parts
Diviser ce résultat par le nombre de parties
Diviser ce résultat par la relation multiplicative
Comparer le tout obtenu et le tout attendu
Résoudre l'équation
Reproduire la démarche à partir d'un autre nombre
Appliquer les relations décrites à partir de ce nombre
On détermine des parties égales
On détermine ainsi la plus petite partie et on calcule les autres parties
On applique une procédure de compensation en jouant sur 2 parts à la fois pour déterminer les 3 parts
D3
D4
D5
D6
D 7
D8
P2
P3
P4
P1
D2

Gilles (2S)

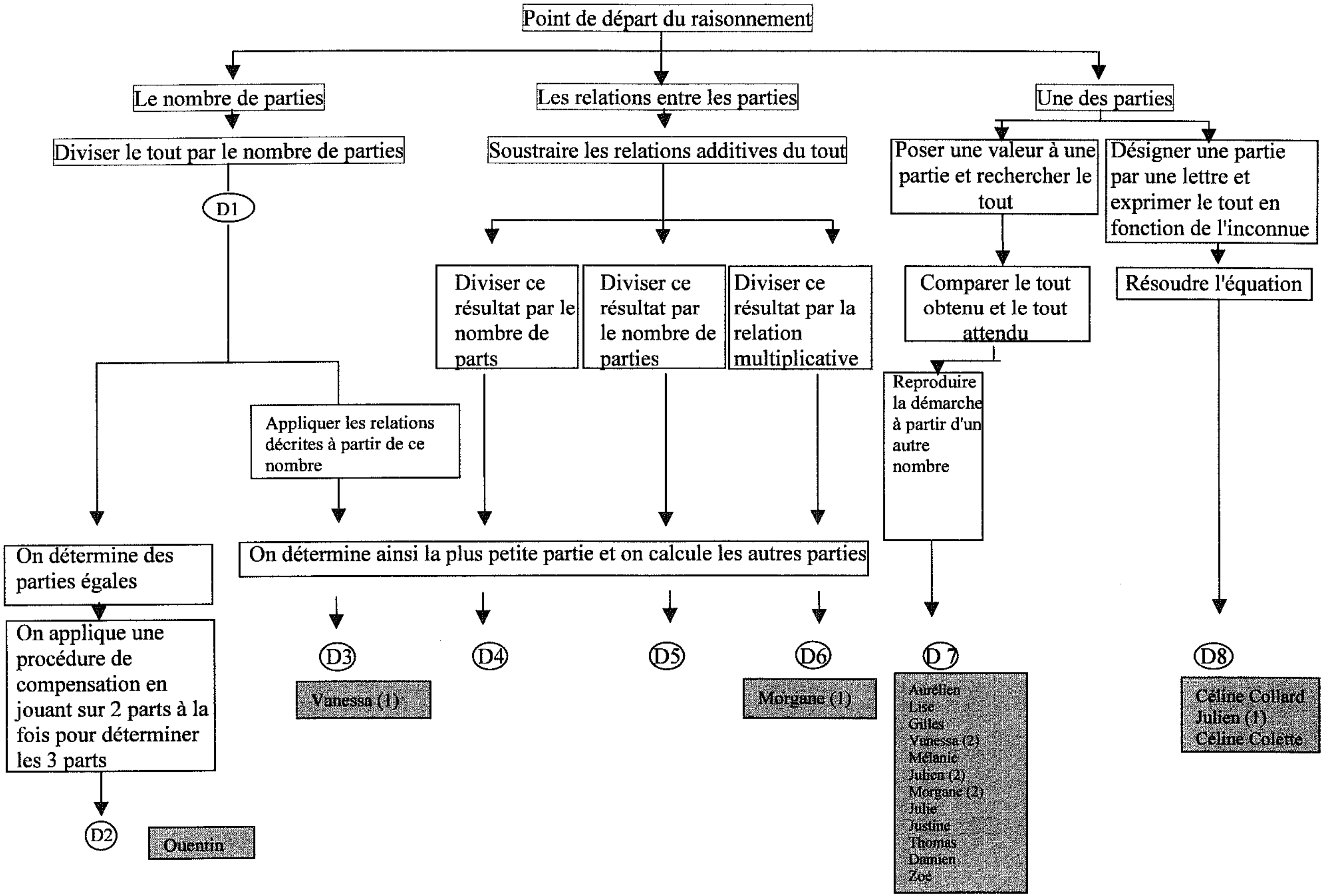

Point de départ du raisonnement
Le nombre de parties
Les relations entre les parties
Une des parties
Diviser le tout par le nombre de parties
Soustraire les relations additives du tout
Poser une valeur à une partie et rechercher le tout
Désigner une partie par une lettre et exprimer le tout en fonction de l'inconnue
D1
Diviser ce résultat par le nombre de parts
Diviser ce résultat par le nombre de parties
Diviser ce résultat par la relation multiplicative
Comparer le tout obtenu et le tout attendu
Résoudre l'équation
Reproduire la démarche à partir d'un autre nombre
Appliquer les relations décrites à partir de ce nombre
On détermine des parties égales
On détermine ainsi la plus petite partie et on calcule les autres parties
On applique une procédure de compensation en jouant sur 2 parts à la fois pour déterminer les 3 parts
D3
D4
D5
D6
D 7
D8
P1
P2
P3
P4
P5
D2

Lise (2S)

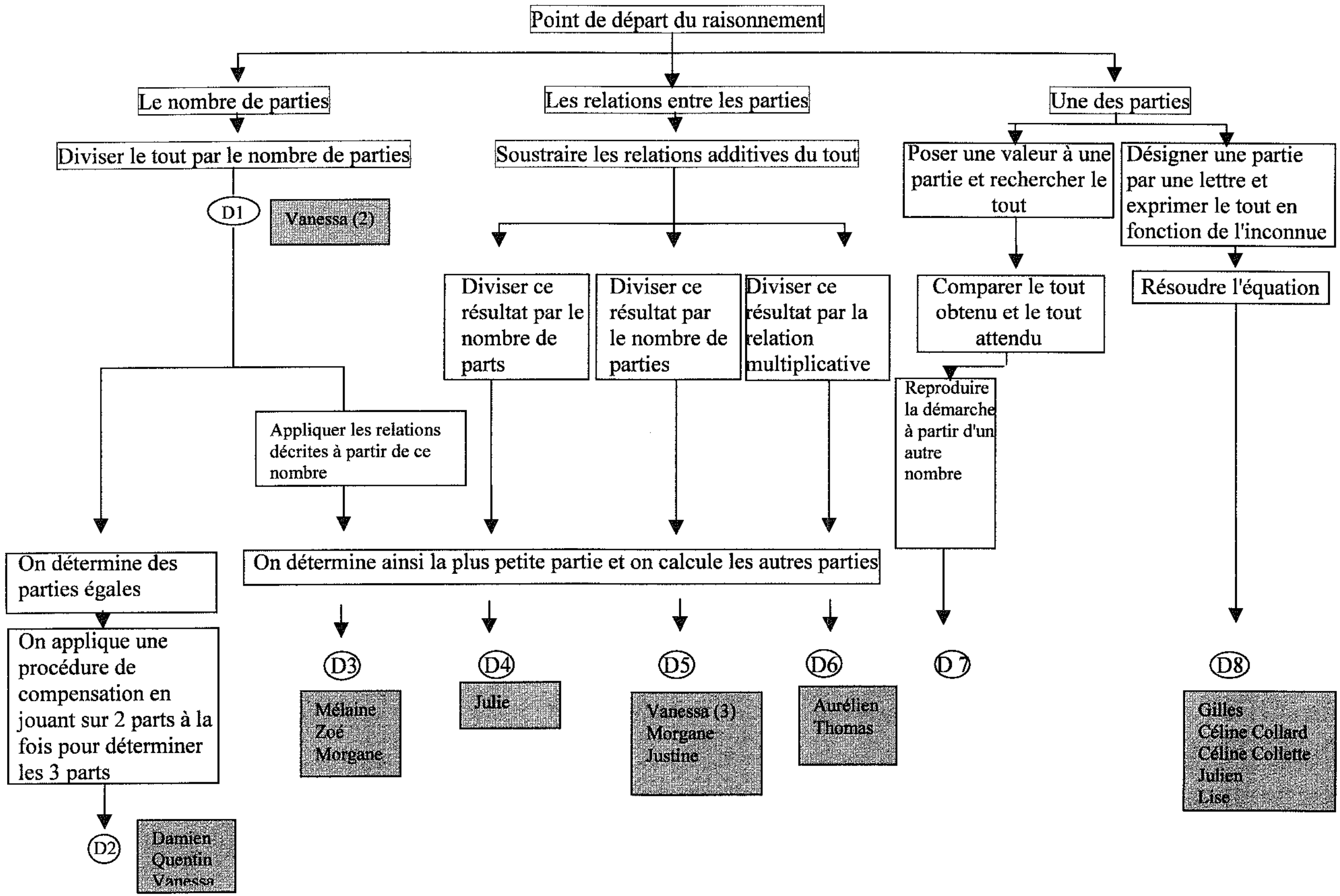

Point de départ du raisonnement
Le nombre de parties
Les relations entre les parties
Une des parties
Diviser le tout par le nombre de parties
Soustraire les relations additives du tout
Poser une valeur à une partie et rechercher le tout
Désigner une partie par une lettre et exprimer le tout en fonction de l'inconnue
D1
P4 (1)
Diviser ce résultat par le nombre de parts
Diviser ce résultat par le nombre de parties
Diviser ce résultat par la relation multiplicative
Comparer le tout obtenu et le tout attendu
Résoudre l'équation
Reproduire la démarche à partir d'un autre nombre
Appliquer les relations décrites à partir de ce nombre
On détermine des parties égales
On détermine ainsi la plus petite partie et on calcule les autres parties
On applique une procédure de compensation en jouant sur 2 parts à la fois pour déterminer les 3 parts
D2
D3
D4
D5
D6
D 7
D8
P1
P2
P3
P4 (2)
P5

ANNEXE 5
Analyse des démarches par problème

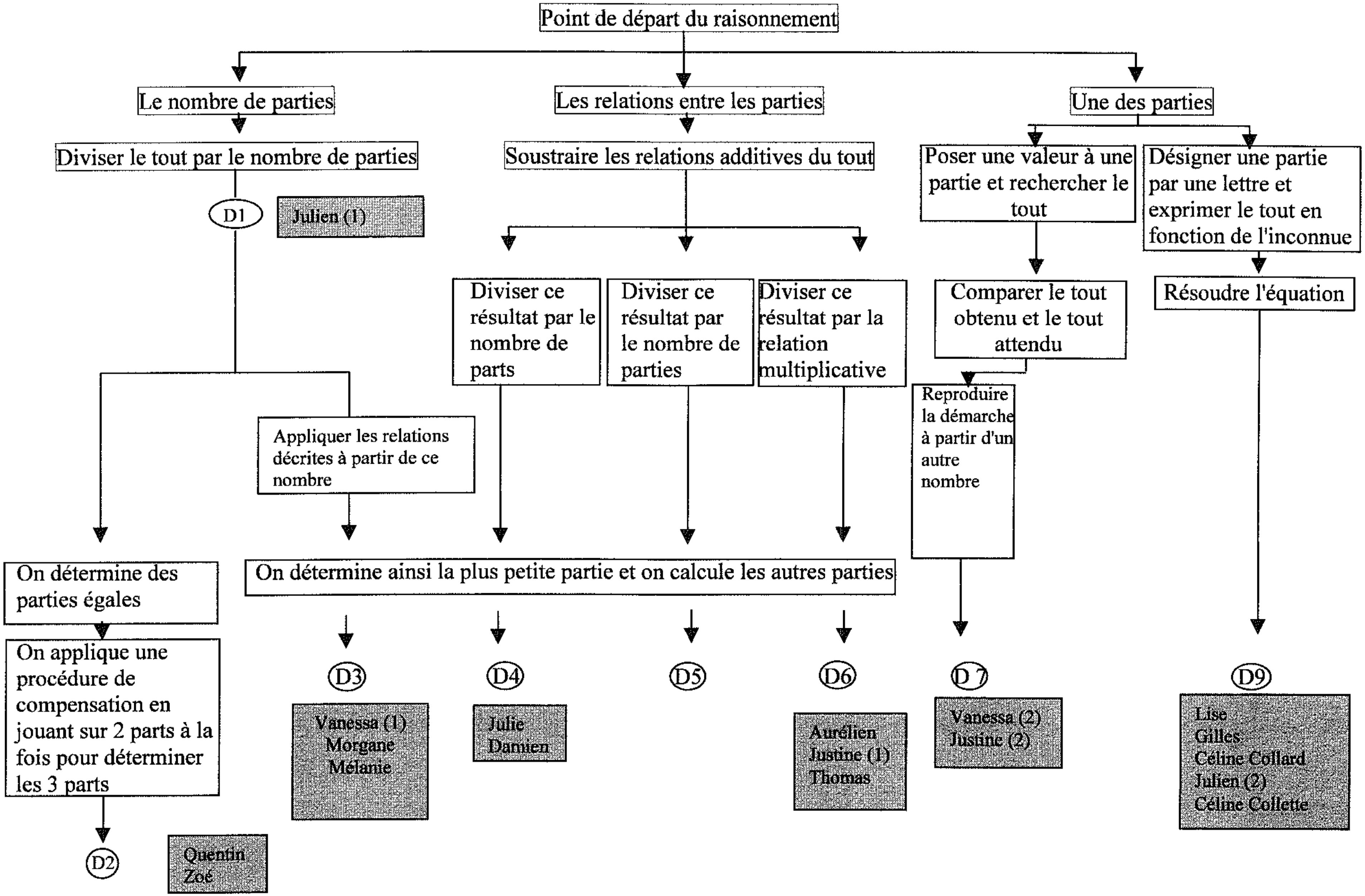
Problème 1


Point de départ du raisonnement
Le nombre de parties
Les relations entre les parties
Une des parties
Diviser le tout par le nombre de parties
Soustraire les relations additives du tout
Poser une valeur à une partie et rechercher le tout
Désigner une partie par une lettre et exprimer le tout en fonction de l'inconnue
D1
Diviser ce résultat par le nombre de parts
Diviser ce résultat par le nombre de parties
Diviser ce résultat par la relation multiplicative
Comparer le tout obtenu et le tout attendu
Résoudre l'équation
Reproduire la démarche à partir d'un autre nombre
Appliquer les relations décrites à partir de ce nombre
On détermine des parties égales
On détermine ainsi la plus petite partie et on calcule les autres parties
On applique une procédure de compensation en jouant sur 2 parts à la fois pour déterminer les 3 parts
D2
Quentin
D3
Vanessa (1)
D4
D5
D6
Morgane (1)
D 7
Aurélien
Lise
Gilles
Vanessa (2)
Mélanie
Julien (2)
Morgane (2)
Julie
Justine
Thomas
Damien
Zoé
D8
Céline Collard
Julien (1)
Céline Colette

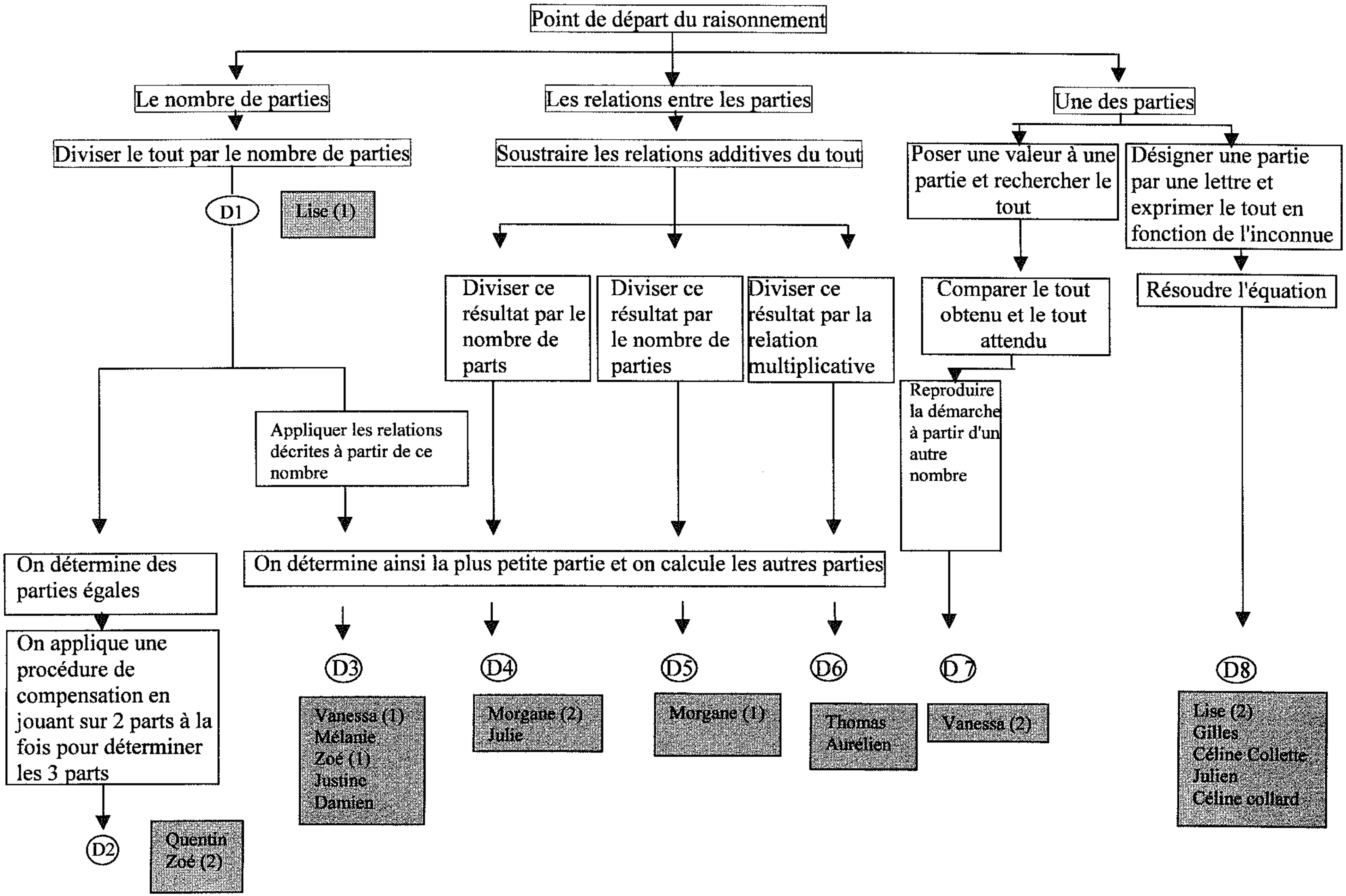
Problème 2


Point de départ du raisonnement
Le nombre de parties
Les relations entre les parties
Une des parties
Diviser le tout par le nombre de parties
D1
Vanessa (2)
Soustraire les relations additives du tout
Poser une valeur à une partie et rechercher le tout
Désigner une partie par une lettre et exprimer le tout en fonction de l'inconnue
Diviser ce résultat par le nombre de parts
Diviser ce résultat par le nombre de parties
Diviser ce résultat par la relation multiplicative
Comparer le tout obtenu et le tout attendu
Résoudre l'équation
Reproduire la démarche à partir d'un autre nombre
Appliquer les relations décrites à partir de ce nombre
On détermine des parties égales
On détermine ainsi la plus petite partie et on calcule les autres parties
On applique une procédure de compensation en jouant sur 2 parts à la fois pour déterminer les 3 parts
D2
Damien
Quentin
Vanessa
D3
Mélaine
Zoé
Morgane
D4
Julie
D5
Vanessa (3)
Morgane
Justine
D6
Aurélien
Thomas
D 7
D8
Gilles
Céline Collard
Céline Collette
Julien
Lise

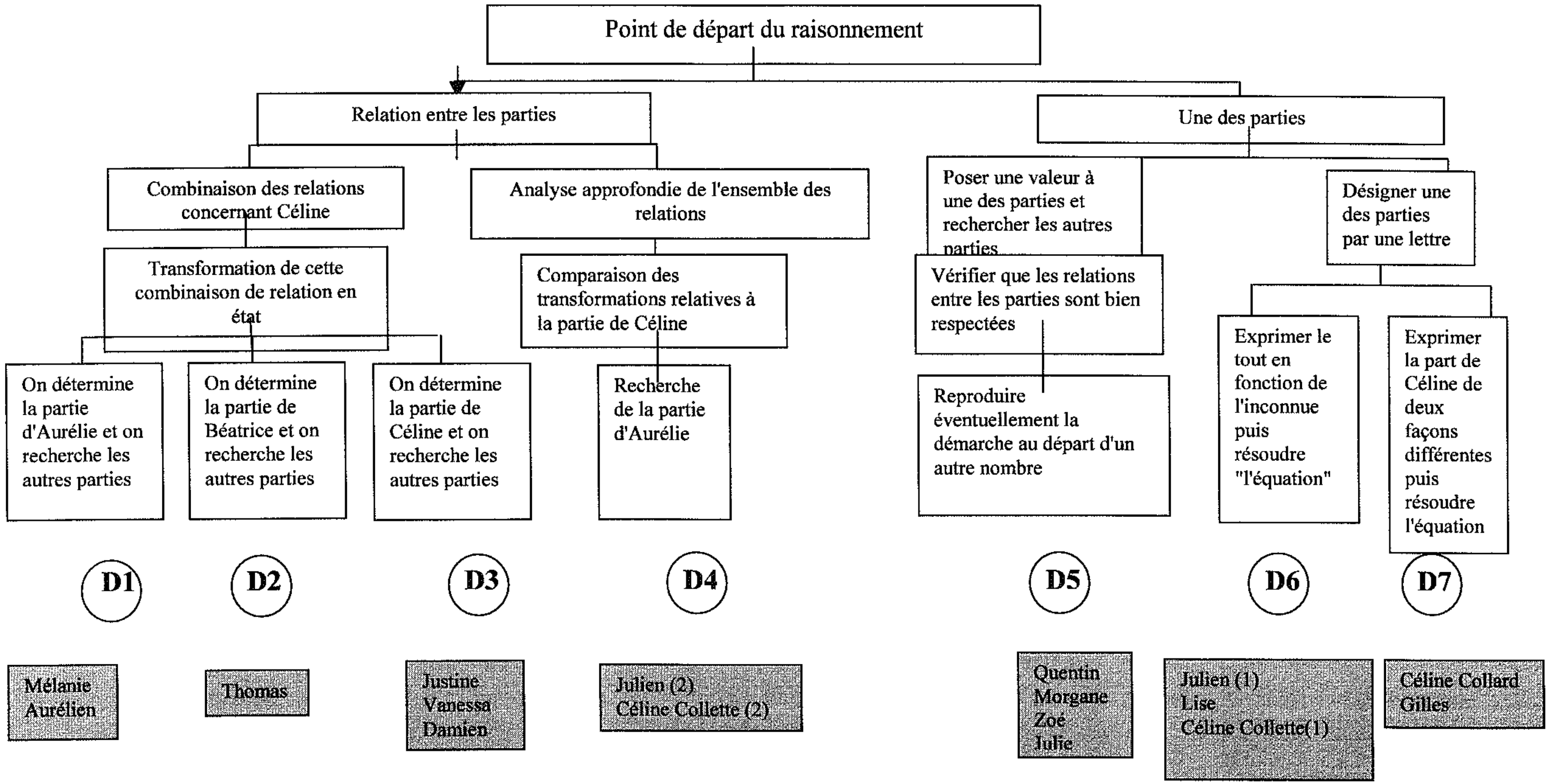
Problème 3


Point de départ du raisonnement
Le nombre de parties
Les relations entre les parties
Une des parties
Diviser le tout par le nombre de parties
D1
Julien (1)
Soustraire les relations additives du tout
Poser une valeur à une partie et rechercher le tout
Désigner une partie par une lettre et exprimer le tout en fonction de l'inconnue
Diviser ce résultat par le nombre de parts
Diviser ce résultat par le nombre de parties
Diviser ce résultat par la relation multiplicative
Comparer le tout obtenu et le tout attendu
Résoudre l'équation
Reproduire la démarche à partir d'un autre nombre
Appliquer les relations décrites à partir de ce nombre
On détermine des parties égales
On détermine ainsi la plus petite partie et on calcule les autres parties
On applique une procédure de compensation en jouant sur 2 parts à la fois pour déterminer les 3 parts
D3
Vanessa (1)
Morgane
Mélanie
D4
Julie
Damien
D5
D6
Aurélien
Justine (1)
Thomas
D 7
Vanessa (2)
Justine (2)
D9
Lise
Gilles
Céline Collard
Julien (2)
Céline Collette
D2
Quentin
Zoé

Problème 4


Point de départ du raisonnement
Le nombre de parties
Les relations entre les parties
Une des parties
Diviser le tout par le nombre de parties
D1
Lise (1)
Soustraire les relations additives du tout
Poser une valeur à une partie et rechercher le tout
Désigner une partie par une lettre et exprimer le tout en fonction de l'inconnue
Diviser ce résultat par le nombre de parts
Diviser ce résultat par le nombre de parties
Diviser ce résultat par la relation multiplicative
Comparer le tout obtenu et le tout attendu
Résoudre l'équation
Reproduire la démarche à partir d'un autre nombre
Appliquer les relations décrites à partir de ce nombre
On détermine des parties égales
On détermine ainsi la plus petite partie et on calcule les autres parties
On applique une procédure de compensation en jouant sur 2 parts à la fois pour déterminer les 3 parts
D2
Quentin
Zoé (2)
D3
Vanessa (1)
Mélanie
Zoé (1)
Justine
Damien
D4
Morgane (2)
Julie
D5
Morgane (1)
D6
Thomas
Aurélien
D 7
Vanessa (2)
D8
Lise (2)
Gilles
Céline Collette
Julien
Céline collard

Problème 5


Point de départ du raisonnement
Relation entre les parties
Une des parties
Combinaison des relations concernant Céline
Analyse approfondie de l'ensemble des relations
Poser une valeur à une des parties et rechercher les autres parties
Désigner une des parties par une lettre
Transformation de cette combinaison de relation en état
Comparaison des transformations relatives à la partie de Céline
Vérifier que les relations entre les parties sont bien respectées
On détermine la partie d'Aurélie et on recherche les autres parties
On détermine la partie de Béatrice et on recherche les autres parties
On détermine la partie de Céline et on recherche les autres parties
Recherche de la partie d'Aurélie
Reproduire éventuellement la démarche au départ d'un autre nombre
Exprimer le tout en fonction de l'inconnue puis résoudre "l'équation"
Exprimer la part de Céline de deux façons différentes puis résoudre l'équation
D1
D2
D3
D4
D5
D6
D7
Mélanie Aurélien
Thomas
Justine Vanessa Damien
Julien (2) Céline Collette (2)
Quentin Morgane Zoé Julie
Julien (1) Lise Céline Collette(1)
Céline Collard Gilles

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

L'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre dans le contexte de la résolution de problèmes arithmétiques

AUTEUR :

Isabelle DEMONTY

RESUME :

D'un point de vue didactique, le passage de l'enseignement primaire à l'enseignement secondaire correspond, entre autres, à un passage des apprentissages arithmétiques vers les premiers apprentissages algébriques. L'objectif de cette étude exploratoire est de préciser quelques caractéristiques de l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre dans le contexte des problèmes arithmétiques de type "Partages inégaux". A la lumière d'une revue de la littérature de recherche, nous dégageons d'une part les obstacles conceptuels majeurs entre les deux approches et d'autre part les complémentarités qui peuvent se rencontrer dans le contexte de la résolution de problèmes.

Deux questions de recherches sont ensuite traitées par le biais d'une analyse de manuels scolaires et d'interviews de quinze élèves de 11 à 14 ans.

Les problèmes envisagés en arithmétique et en algèbre favorisent-ils une articulation fructueuse entre les deux domaines?

Si les élèves sont confrontés à des problèmes qui permettent une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre, comment cette articulation se manifeste-t-elle?

MOTS CLES :

Transition arithmétique – algèbre - partages inégaux - symbolisme algébrique - problèmes arithmétiques - didactique de l'algèbre

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : R. CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : octobre 2001
ISBN : 2-86612-215-1