Sur quelques généralisations des équations de Cauchy et de Fréchet

Arman Molla

Université de Liège

November 2018

L'équation de Cauchy

L'équation fonctionnelle suivante a été étudiée par Cauchy au XVIIème siècle :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

où $x, y \in \mathbb{R}$.

Propriétés des solutions

(1) Si f est continu, alors $f(x) = ax$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$.

(2) Tout solution discontinue n'est continue nulle part.

(3) Il existe des solutions nulle part continues (**AC**)

Solutions nulle part continues

- Soit B une base de $\mathbb{R}$ vu comme $\mathbb{Q}$-vectoriel.
- $\forall b \in B$, fixons $f_b \in \mathbb{Q}$ et supposons qu'il existe $b_0, b_0' \in B$ tels que $f_{b_0} = f_{b_0'} = 1$.
- Si $x = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$, posons

$$f(x) = \lambda_1 f_{b_1} + \cdots + \lambda_n f_{b_n}.$$

Remarque

Le graphe de f est dense dans $\mathbb{R}^2$.

Opérateurs de différences finies

Si $h \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{cases} \Delta_h f(x) & = f(x+h) - f(x) \\ \Delta_h^{m+1} f(x) & = \Delta_h(\Delta_h^m f)(x) \end{cases}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $m \in \mathbb{N}$.

Développement de la différence finie d'ordre m

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} C_m^j f(x+jh)$$

Equation de Cauchy généralisée et de Fréchet

L'équation de départ dans $\mathbb{R}^n$ peut se réécrire

$$\Delta_y f(x) = f(y)$$

et sa généralisation à l'ordre supérieur

$$\Delta_h^m f(x) = m! f(h).$$

Remarquons que

$$\Delta_h^{m+1} f(x) = 0.$$

La seconde équation sera dite *de Fréchet*.

Résolution de l'équation de Fréchet (dimension 1)

Lemme

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée presque partout sur $]a, b[$ et si $\Delta_h^m f = 0$ sur $]a, b[$ pour presque tout h dans $]-\varepsilon, \varepsilon[$, alors f est borné sur $]a, b[$.

Théorème

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée presque partout sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et si $\Delta_h^m f = 0$ au voisinage de x_0 pour presque tout h dans un voisinage de 0, alors f est un polynôme de degré inférieur ou égal à $m - 1$ au voisinage de x_0.

Passage en dimension n et résolution de l'équation de Cauchy

Généralisation possible du résultat précédent à $\mathbb{R}^n$.

Corollaire

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée presque partout sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et si $\Delta_h^m f(x) = m! f(h)$ pour tout x au voisinage de x_0 et pour presque tout h dans un voisinage de 0, alors f est un polynôme homogène de degré m au voisinage de x_0, i.e.

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

au voisinage de x_0.

Différence finie dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\int \Delta_h^m f(x)\varphi(x)\ dx = \int f(x)\Delta_{-h}^m\varphi(x)\ dx \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Définition

Si T est une distribution de $\mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}^n$, on définit $\Delta_h^m T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ par

$$(\Delta_h^m T)(\varphi) = T(\Delta_{-h}^m\varphi).$$

Equation de Fréchet au sens distributions

Proposition

Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ vérifie $\Delta_h^m T = 0$ pour presque tout h dans $\mathbb{R}^n$, alors T est une distribution associée à un polynôme de degré inférieur ou égal à $m-1$.

Corollaire : même résultat dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Quid de l'équation de Cauchy ?

Généralisation de la différence finie dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Equation de Cauchy équivalente dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$:

$$\iint \Delta_h^m f(x)(\psi \otimes \varphi)(x,h)\, dx\, dh = m! \iint f(h)(\psi \otimes \varphi)(x,h)\, dx\, dh$$

pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, l'équation peut s'étendre après changement de variables

$$\iint f(x)[\Delta^m_{-h}\varphi(\cdot,h)](x)\, dx\, dh = m! \iint f(h)\varphi(x,h)\, dx\, dh$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Second membre $\rightarrow$ Distribution associée à la fonction $p_2^* f$

Pullback d'une distribution par une submersion

Définition

Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications entre deux espaces topologiques. Alors le pullback de g par f est $f^* g = g \circ f$.

Théorème

Si U est ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et V ouvert dans $\mathbb{R}^m$ et si $f : U \to V$ est une submersion de classe C^∞ et T une distribution sur U alors il existe une unique extension continue de $f^* : C^0(V) \to C^0(U)$ en une application

$$f^* : \mathcal{D}'(V) \to \mathcal{D}'(U)$$

Seconde généralisation de la différence finie dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Proposition

Les projections de $\mathbb{R}^n$

$$p_j : (x, y) \mapsto x + jy, \quad q_j : (x, y) \mapsto jx + y$$

sont des submersions.

Définition

L'opérateur de différence finie généralisé au sens distribution $\Delta^m : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ est définie par

$$\Delta^m = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} C_m^j \, p_j^* .$$

L'équation de Cauchy au sens distribution

L'équation de Cauchy au sens distribution s'écrit alors

$$\Delta^m T = m! q_0^* T.$$

Théorème

Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ vérifie $\Delta^m T = m! q_0^* T$, alors T est une distribution associée à un polynôme homogène de degré m.

Développement de Δ^m

$$\Delta^m T(\varphi) = \int \Delta_h^m T(\varphi(\cdot, h))\, dh \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$