L'image de l'application de Borel dans les classes de fonctions ultradifférentiables

Céline Esser (travail avec Gerhard Schindl)

Séminaire d'Analyse Fonctionnelle de Lille – 15 février 2019

1 Introduction

Théorème 1.1 (Borel (1895)) *Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes, il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f^{(n)}(0) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Autrement dit, l'application

$$j^\infty : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mapsto \left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

est surjective.

Théorème 1.2 (Unicité du prolongement analytique) *Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ est tel que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \geq 0$, alors $f = 0$.*

Autrement dit, la restriction de j^∞ à $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ est injective. Une question naturelle se pose alors : que peut-on dire sur les classes intermédiaires ? On va adopter un point de vue local.

Notations :

- $\mathcal{O}$ désigne l'espace des germes en 0 des fonctions analytiques réelles : il existe $\varepsilon > 0$, $C, h > 0$ tels que $\sup_{|x|<\varepsilon} |f^{(n)}(x)| \leq Ch^n n!$ pour tout n
- $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de poids, $M_0 = 1$, $M_n \leq M_{n+1}$ pour tout n et M est log-convexe ($M_n^2 \leq M_{n-1}M_{n+1}$).
- $\mathcal{E}_{\{M\}} = \{f \in \mathcal{E} : \exists \varepsilon, h > 0 \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{|x|<\varepsilon} \dfrac{|f^{(n)}(x)|}{h^n M_n} < +\infty\}$ germes de type Roumieu
- $\mathcal{E}_{(M)} = \{f \in \mathcal{E} : \exists \varepsilon > 0 \, \forall h > 0 \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{|x|<\varepsilon} \dfrac{|f^{(n)}(x)|}{h^n M_n} < +\infty\}$ germes de type Beurling
- $\Lambda_{\{M\}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \exists h > 0 \sup_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{|a_n| n!}{h^n M_n} < +\infty\}$
- $\Lambda_{(M)} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \forall h > 0 \sup_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{|a_n| n!}{h^n M_n} < +\infty\}$
- $j^\infty : \mathcal{E}_{[M]} \to \Lambda_{[M]} : f \mapsto \left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

On a $\mathcal{O} \subsetneq \mathcal{E}_{\{M\}} \subseteq \mathcal{E}$ si et seulement si $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{M_n}{n!}\right)^{1/n} = +\infty$ et $\mathcal{O} \subsetneq \mathcal{E}_{(M)} \subseteq \mathcal{E}$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{M_n}{n!}\right)^{1/n} = +\infty$. On a les inclusions strictes correspondantes pour les espaces de suites (avec la suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$).

Définition 1.3 *On dit que la classe $\mathcal{E}_{[M]}$ est* quasi-analytique (q.a.) *si $j^\infty : \mathcal{E}_{[M]} \to \Lambda_{[M]}$ est injective.*

Théorème 1.4 (Denjoy-Carleman (1926)) *La classe $\mathcal{E}_{[M]}$ est quasi-analytique si et seulement si $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M_{n-1}}{M_n} = +\infty$. Dans ce cas, on dit que la suite M est quasi-analytique.*

C'est dans ce contexte qu'on va travailler : on va s'intéresser aux classes quasi-analytiques qui contiennent strictement les germes analytiques.

2 Surjectivité dans les classes quasi-analytiques

Théorème 2.1 (Carleman (1926), Thilliez (2008)) *Si $\mathcal{E}_{[M]}$ est quasi-analytique et si $\mathcal{O} \subsetneq \mathcal{E}_{\{M\}}$, alors j^∞ n'est pas surjectif.*

La preuve originelle de ce résultat utilise des arguments variationnels, celle de Thilliez utilise des arguments d'analyse fonctionelle (technique basée sur l'utilisation d'espaces de Hilbert). En particulier, au sein de la preuve, Thilliez obtient une *formule de représentation* : Il existe des complexes $(\omega^M_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ satisfaisant $\lim_{k\to+\infty} \omega^M_{j,k} = 1$ pour tout j, et tels que pour tout $f \in \mathcal{E}_{\{M\}}$, on a

$$f(x) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^{k-1} \omega^M_{j,k} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j$$

pour tout x suffisamment petit. Ainsi, on peut obtenir la non-surjectivité en construisant une suite $\mathbf{F}$ en posant

$$F_{k_p} := \frac{N_{k_p}}{k_p!} \quad \text{et} \quad F_j := 0 \text{ sinon,} \tag{2.1}$$

où la suite croissante $(k_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de nombres entiers est choisie par induction telle que

$$\sup_{p\in\mathbb{N}} \left(n_{k_p}\right)^{\frac{1}{k_p}} = +\infty \quad \text{resp.} \quad \lim_{p\to+\infty} \left(n_{k_p}\right)^{\frac{1}{k_p}} = +\infty \tag{2.2}$$

et

$$\sum_{j=0}^{k_{p-1}} \left|\omega^M_{j,k_p} - 1\right| |F_j| \leq 1, \quad \forall p \in \mathbb{N}_{>0}. \tag{2.3}$$

On montre alors que

$$\limsup_{p\to+\infty} \left| \sum_{j=0}^{k_p-1} \omega^M_{j,k_p} F_j x^j \right| = +\infty$$

pour tout x suffisamment petit.

Rainer et Schindl (2017) ont proposé récemment une nouvelle preuve qui a l'avantage d'être élémentaire (utilise de l'analyse de base) et de montrer un résultat un peu plus fort.

Théorème 2.2 (Rainer-Schindl (2017)) *Si N est quasi-analytique et si $\mathcal{O} \subsetneq \mathcal{E}_{\{N\}}$, alors il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda_{\{N\}}$ tel que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin j^\infty(\mathcal{E}_{\{M\}})$ pour tout M quasi-analytique.*

La preuve de ce théorème est basée sur les deux résultats suivants.

Proposition 2.3 (Bang (1953)) *Soit M quasi-analytique, et soit f une fonction non-identiquement nulle telle que $\sup_{x\in[0,1]} |f^{(n)}(x)| \leq M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [0,1]$ tel que $f^{(n)}(x_n) = 0$, alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x_{n+1} - x_n| = +\infty.$$

Corollaire 2.4 *Soit M quasi-analytique, et soit f une fonction non-identiquement nulle telle que $\sup_{x\in[0,1]} |f^{(n)}(x)| \leq M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $f^{(n)}(0) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $f^{(n)}(x) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$.*

Démonstration: PA. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_n \in [0,1]$ tels que $f^{(n)}(x_n) = 0$. Par le TAF, il existe alors $x_{n+1} < x_n$ tel que $f^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$. On construit ainsi de proche en proche une suite $x_n > x_{n+1} > x_{n+2} > \cdots > 0$ où x_j est un zéro de $f^{(j)}$. Cela contredit la proposition précédente car on a alors

$$\sum_{j=n}^{+\infty} |x_{n+1} - x_n| = \sum_{j=n}^{+\infty} x_{n+1} - x_n < +\infty.$$

■

Nous pouvons maintenant présenter la preuve de la non-surjectivité proposée par Rainer et Schindl.

Démonstration: Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\Lambda_{\{N\}}$ telle que $a_n > 0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \Lambda_{\{n!\}}$.
PA. Supposons qu'il existe $f \in \mathcal{E}_{\{M\}}$ où M est quasi-analytique, satisfaisant $j^\infty f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors il existe $\varepsilon, C, h > 0$ tels que

$$\sup_{|x|\leq\varepsilon} |f^{(n)}(x)| \leq Ch^n M_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En posant $\widetilde{f}(x) = \frac{1}{C} f(\varepsilon x)$ et $\widetilde{M}_n = (\varepsilon h)^n M_n$, on trouve que

$$\sup_{x\in[0,1]} |\widetilde{f}^{(n)}(x)| \leq \widetilde{M}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme $j^\infty f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\widetilde{f}^{(n)}(0) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le corollaire précédent implique alors que $\widetilde{f}^{(n)}(x) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$. On a donc aussi $f^{(n)}(x) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,\varepsilon]$. Par le théorème de Berstein, on a $f \in \mathcal{O}$. ■

Pour le passage aux classes de type Beurling, on peut utiliser la représentation suivante :

$$\Lambda_{(M)} = \bigcup \left\{ \Lambda_{\{L\}} : \Lambda_{\{L\}} \subseteq \Lambda_{(M)}, \left(\frac{L_n}{n!}\right)^{1/n} \to +\infty \right\}.$$

3 Taille de l'image

La question posée était la suivante : à quel point l'application de Borel est-elle non-surjective ? Plusieurs résultats ont été obtenus, notamment dans le contexte mixte, motivé par le résultat précédent. Autrement dit, on aimerait savoir si $\Lambda_{[M]} \setminus j^\infty(\mathcal{E}_{\{N\}})$ est grand. En ce qui concerne les résultats de généricité, on se place dans les espaces de type Beurling.

Proposition 3.1 *Supposons que M et N sont quasi-analytiques et que $\mathcal{O} \subsetneq \mathcal{E}_{(N)}$. Alors l'image $j^\infty(\mathcal{E}_{\{M\}}) \cap \Lambda_{(N)}$ est maigre et Haar-nul dans $\Lambda_{(N)}$.*

Démonstration: Présentons l'idée pour la généricité au sens de Baire. Soit $\mathbf{F} \in \Lambda_{(N)}$ et $a_0 \in (0, 1]$ tel que

$$\limsup_{k\to+\infty} \left| \sum_{j=0}^{k-1} \omega_{j,k}^M F_j a^j \right| = +\infty \tag{3.1}$$

pour tout $0 < a \leq a_0$. Fixons une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $(0, a_0]$ qui décroit vers 0. On pose

$$\mathcal{G} = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \left\{ \mathbf{b} \in \Lambda_{(N)} : \limsup_{k\to+\infty} \left| \sum_{j=0}^{k-1} \omega_{j,k}^M b_j a_p^j \right| = +\infty \right\} \subseteq \Lambda_{(N)} \setminus j^\infty(\mathcal{E}_{\{M\}})$$

Remarquons que

$$\mathcal{G} = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{P\in\mathbb{N}} \bigcap_{K\in\mathbb{N}_{>0}} \bigcup_{k\geq K} G(p, P, k)$$

où

$$G(p, P, k) = \left\{ \mathbf{b} \in \Lambda_{(N)} : \left| \sum_{j=0}^{k-1} \omega_{j,k}^M b_j a_p^j \right| > P \right\}.$$

Il est facile de voir que $\bigcup_{k\geq K} G(p, P, k)$ est ouvert. Il reste à montrer qu'il est dense dans $\Lambda_{(N)}$. Soit $\mathbf{b} \in \Lambda_{(N)}$ arbitraire, et $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $k \geq K$ tel que

$$\left| \sum_{j=0}^{k-1} \omega_{j,k}^M F_j a_p^j \right| \geq \frac{P}{\varepsilon}. \tag{3.2}$$

Alors, soit $\mathbf{b} + \varepsilon\mathbf{F}$ soit $\mathbf{b} - \varepsilon\mathbf{F}$ appartient à $\bigcup_{k\geq K} G(p, P, k)$: En effet, sinon on aurait

$$2\varepsilon \left| \sum_{j=0}^{k-1} \omega_{j,k}^M F_j a_p^j \right| \leq \left| \sum_{j=0}^{k-1} \omega_{j,k}^M (b_j - \varepsilon F_j) a_p^j \right| + \left| \sum_{j=0}^{k-1} \omega_{j,k}^M (b_j + \varepsilon F_j) a_p^j \right| \leq 2P$$

ce qui contredit (3.2). De plus, pour tout $h > 0$, on a

$$|\mathbf{b} - (\mathbf{b} \pm \varepsilon\mathbf{F})|_h^N = \varepsilon |\mathbf{F}|_h^N,$$

d'où la densité de $\bigcup_{k\geq K} G(p, P, k)$ in $\Lambda_{(N)}$. ■

On va à présent s'intéresser à la construction d'algèbres de $\Lambda_{[N]}$ ne rencontrant pas l'image $j^\infty(\mathcal{E}_{\{M\}})$. Pour cela, il faut munir $\Lambda_{[N]}$ d'un produit. Le produit naturel dans notre cas est le produit de convolution ; en effet

$$(fg)^{(j)} = \sum_{k=0}^{j} C_j^k f^{(k)} g^{(j-k)},$$

de sorte que

$$j^\infty(fg) = j^\infty(f) * j^\infty(g)$$

où dans $\Lambda_{[M]}$, on pose

$$(\mathbf{F} * \mathbf{G})_j = \sum_{k=0}^{j} F_k G_{j-k}$$

(cela donne bien un produit interne si M est log-convexe (on utilise $M_j M_k \leq M_{j+k}$)).

Remarque 3.2 *L'espace $\Lambda_{[N]}$ est une algèbre pour le produit poncutel si et seulement si $\mathcal{E}_{[N]} \subseteq \mathcal{O}$.*

Proposition 3.3 *Supposons que M et N sont quasi-analytiques et que $\mathcal{O} \subsetneq \mathcal{E}_{(N)}$. Alors $\Lambda_{(N)} \setminus j^\infty(\mathcal{E}_{\{M\}})$ est algebrable dans $\Lambda_{(N)}$.*

On va construire une algèbre générée par un seul élément, mais ce résultat se généralise à une famille non-dénombrable d'éléments.

Démonstration: Soit $(k_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que

(i) $k_0 = 1$ et $k_p > pk_{p-1}$

(ii) $\sup_{p\in\mathbb{N}} \left(n_{k_p}\right)^{\frac{1}{k_p}} = +\infty$

(iii) $\sum_{j=0}^{pk_{p-1}} \left|\omega^M_{j,k_p} - 1\right| n_j \leq 1$

et on pose

$$F_j := \begin{cases} n_j & \text{for } j \in \mathcal{A} = \{k_p : p \in \mathbb{N}\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Posons $\mathbf{F}^{(1)} := \mathbf{F}$ et pour tout $l \in \mathbb{N}_{>1}$, $\mathbf{F}^{(l)} = \underbrace{\mathbf{F} * \cdots * \mathbf{F}}_{l \text{ fois}}$. Remarquons que

$$F_j^{(l)} = \sum_{(k_{p_1},\ldots,k_{p_l})\in\mathcal{A}^l(j)} F_{k_{p_1}} \cdots F_{k_{p_l}} = \sum_{(k_{p_1},\ldots,k_{p_l})\in\mathcal{A}^l(j)} n_{k_{p_1}} \cdots n_{k_{p_l}} \tag{3.4}$$

où

$$\mathcal{A}^l(j) := \left\{(k_{p_1},\ldots,k_{p_l}) \in \mathcal{A}^l : k_{p_1} + \cdots + k_{p_l} = j\right\}.$$

Notons que si $j = lk_p$ pour un $p \geq l$ et si$k_{p_1} + \cdots + k_{p_l} = lk_p$, alors $k_{p_1} = \cdots = k_{p_l} = k_p$ puisque la suite $(k_q)_{q\in\mathbb{N}}$ est strictement croissanet et puisque $k_{p+1} > (p+1)k_p > lk_p$. En particulier, on a

$$F_{lk_p}^{(l)} = \left(n_{k_p}\right)^l, \quad \forall p \geq l. \tag{3.5}$$

De plus, si $j \in \{pk_{p-1}+1, \ldots, k_p - 1\}$ avec $p \geq l$, alors $\mathcal{A}^l(j) = \emptyset$ pour tout $l \in \{0, \ldots, L\}$ (puisque $k_p > pk_{p-1}$). Donc

$$F_j^{(l)} = 0, \quad \forall j \in \{pk_{p-1}+1, \ldots, k_p - 1\}$$

Soit $\mathbf{G} \neq 0$ un élément de l'algèbre générée par $\mathbf{F}$,

$$\mathbf{G} = \sum_{l=1}^{L} \alpha_l \mathbf{F}^{(l)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\alpha_1 F_j^{(1)} + \cdots + \alpha_L F_j^{(L)}\right)}_{:=G_j} x^j.$$

Montrons que

$$\limsup_{p \to +\infty} \left| \sum_{j=0}^{k_p - 1} \omega_{j,k_p}^M G_j a^j \right| = +\infty. \tag{3.6}$$

Vu les remarques précédentes, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k_p-1} \omega_{j,k_p}^M G_j a^j &= \sum_{j=0}^{pk_{p-1}} \omega_{j,k_p}^M G_j a^j & (3.7)\\
&= \sum_{j=0}^{pk_{p-1}} G_j a^j + \sum_{j=0}^{pk_{p-1}} \left(\omega_{j,k_p}^M - 1\right) G_j a^j. & (3.8)
\end{aligned}$$

Le premier terme est une série de puissances, on peut donc facilement montrer qu'il n'est pas borné : pour tout $p \geq L$, on a des termes de l'ordre de $\frac{N_{k_p}}{k_p!}$ qui tend vers l'infini. Pour le deuxième, on a

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=0}^{pk_{p-1}} \left(\omega_{j,k_p}^M - 1\right) G_j a^j \right| = \sum_{j=0}^{pk_{p-1}} \left| \omega_{j,k_p}^M - 1 \right| |G_j| a^j &\leq C \sum_{j=0}^{pk_{p-1}} \left| \omega_{j,k_p}^M - 1 \right| n_j (ha)^j \\
&\leq C \sum_{j=0}^{pk_{p-1}} \left| \omega_{j,k_p}^M - 1 \right| n_j \\
&\leq C
\end{aligned}$$

si $p \geq L$ et $a < \frac{1}{h}$, vu (iii). ■

4 Matrices de poids

Une *matrice de poids* est une famille de suites de poids $\mathcal{M} := \{M^{(\lambda)} \in \mathbb{R}_{>0}^{\mathbb{N}} : \lambda > 0\}$ telle que

$$M^{(\lambda)} \leq M^{(\kappa)} \text{ pour tout } \lambda \leq \kappa.$$

On peut définir les classes de germes de fonctions ultradifférentiables de type Roumieu et Beurling comme suit :

- $\mathcal{E}_{\{\mathcal{M}\}} = \bigcup_{\lambda > 0} \mathcal{E}_{\{M^\lambda\}}$
- $\mathcal{E}_{(\mathcal{M})} = \{f : f \in \mathcal{E}_{(M)} \; \forall \lambda > 0 \text{ avec le même voisinage de } 0\}$

et on peut introduire les espaces de suites correspondants $\Lambda_{\{\mathcal{M}\}}$ et $\Lambda_{(\mathcal{M})}$, ainsi que l'application de Borel.

L'intérêt de ces matrices de poids est qu'elles permettent d'unifier les deux méthodes classiques pour définir les fonctions ultradifférentiables : l'approche de Denjoy-Carleman et Komatsu basée sur les suites de poids, et l'approche de Braun, Meise et Taylor basée sur les fonctions de poids ω (ces deux approches sont distinctes, cfr Bonet, Meise, Melikov 2007).

Proposition 4.1 (Bonet, Meise (2013)) *Si $\mathcal{E}_{[\omega]}$ est quasi-analytique et si $\mathcal{O} \subsetneq \mathcal{E}_{[\omega]}$, alors j^∞ n'est pas surjectif.*

Cette preuve nécessite des outils d'analyse fonctionelle et complexe.

Tous les résultats présentés plus tôt restent valide dans le cas des matrices de poids (et donc également dans le cas des fonctions de poids). L'idée est d'effectuer une réduction.

Proposition 4.2 *Soit $\mathcal{M}$ une matrice quasi-analytique. Alors il existe deux suites quasi-analytique N, L telles que*

$$\mathcal{O} \subsetneq \mathcal{E}_{\{N\}} \subseteq \mathcal{E}_{(\mathcal{M})} \subseteq \mathcal{E}_{\{\mathcal{M}\}} \subseteq \mathcal{E}_{(L)}.$$

Remarque 4.3 *Les matrices de poids permettent également d'obtenir des classes stables pour le produit ponctuel (pas pour les fonctions de poids).*

5 Sous-espace et enveloppe solides

Un espace vectoriel A de suites est *solide* si

$$(a_n)_n \in A, \quad |b_n| \leq |a_n| \ \forall n \implies (b_n)_n \in A.$$

Si A un un espace de suites, on définit

- $s(A)$ le plus grand sous-espace solide de A
- $S(A)$ l'enveloppe solide de A, i.e. le plus petit espace solide qui contient A.

Anderson et Shields (1976) ont montré que ces définitions avaient bien du sens et que

$$s(A) = \{(\lambda_n)_n \,:\, (\lambda_n a_n)_n \in A \quad \forall (a_n)_n \in \ell^\infty\}$$

et

$$S(A) = \{(\lambda_n)_n \,:\, \exists (a_n)_n \in A \text{ tel que } |\lambda_n| \leq |a_n| \ \forall n\}$$

Proposition 5.1 *On a*

$$S(j^\infty(\mathcal{E}_{[M]})) = \Lambda_{[M]}\,.$$

et si $\mathcal{O} \subsetneq \mathcal{E}_{[M]}$, alors

$$s(j^\infty(\mathcal{E}_{[M]})) = \Lambda_{n!}\,.$$

En particulier, l'image $j^\infty(\mathcal{E}_{[M]})$ est solide si et seulement si j^∞ est surjectif.

Démonstration: Bien sûr, on a $S(j^\infty(\mathcal{E}_{\{M\}})) \subseteq \Lambda_{[M]}$ puisque $\Lambda_{\{M\}}$ est solide. Soit $(a_n)_n \in \Lambda_{\{M\}}$. On peut construire une fonction $\theta \in \mathcal{E}_{\{M\}}$ telle que $|\theta^{(n)}(0)| \geq n!|a_n|$ pour tout n. On en tire que $(a_n)_n \in S(j^\infty(\mathcal{E}_{\{M\}}))$.

D'autre part, $\Lambda_{\{n!\}} \subseteq s(j^\infty(\mathcal{E}_{\{M\}}))$ puisque c'est un espace solide qui est égal à $j^\infty(\mathcal{E}_{\{M\}})$ qui est inclus dans $j^\infty(\mathcal{E}_{\{M\}})$. De plus, si $(a_n)_n \in s(j^\infty(\mathcal{E}_{\{M\}}))$, alors $(|a|_n)_n \in j^\infty(\mathcal{E}_{\{M\}})$. PA. Si $(a_n)_n \notin \Lambda_{\{n!\}}$, alors son module n'appartient pas non plus à l'espace. Par la preuve de la non-surjectivité, on peut conclure que la suite n'appartient pas à $j^\infty(\mathcal{E}_{\{M\}})$, d'où une contradiction.

■