



ÉCOLE
CENTRALE LYON

N° d'ordre NNT : 2016LYSEC55

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

Opérée au sein de l'École Centrale de Lyon

ÉCOLE DOCTORALE N° 162
MÉCANIQUE – ENERGÉTIQUE – GÉNIE CIVIL – ACOUSTIQUE

Spécialité de doctorat : Génie Civil

Soutenue publiquement le 16 décembre 2016 par :

Duc Kien TRAN

Modélisation numérique discrète de l'érosion
interne par renard hydraulique dans les barrages
ou digues en terre

Devant le jury composé de :

M. J. Y. DELENNE	Dir. de Recherche, IATE Montpellier Supagro	Rapporteur
M. L. SIBILLE	MCF-HDR, Université Grenoble Alpes	Rapporteur
M. C. CALLARI	Professeur, Università del Molise	Examinateur
Mme. N. SAIYOURI	Professeure, Université de Bordeaux 1	Présidente
M. É. VINCENS	MCF-HDR, École Centrale de Lyon	Directeur de thèse
M. F. FROHO	MCF, École Centrale de Lyon	Co-Directeur de thèse

*A mes parents,
pour leur amour inestimable, leurs sacrifices, leur confiance...*

Remerciements

Remontons le temps, trois ans en arrière, lors du premier jour de ma thèse. Sur le chemin où tu m’as accompagné pour faire mon inscription, nous avons failli piétiner un petit escargot. Doucement et soigneusement, tu l’as pris en main et cherché pour lui une bonne place sur la pelouse pour qu’il ne puisse pas se faire écraser. A cet instant-là, j’ai appris que tu étais très gentil et fantastique. Pendant les trois années de thèse, je me disais tout le temps que j’avais vraiment de la chance de t’avoir comme encadrant. Tu m’as appris de nombreuses choses, non seulement liées à la science mais aussi liées à ta philosophie de vie. Les mots ne suffisent certainement pas à exprimer ma gratitude envers toi mais je voudrais quand même te remercier Francesco pour tout ce que tu as fait pour moi.

Un grand merci à Éric, mon directeur de thèse. Je n’oublierai jamais notre conversation lors d’une rencontre du laboratoire où j’ai fait une présentation de ma thèse en 180 secondes. Tu m’as fait un compliment à la fin et je l’ai refusé bizarrement car je n’étais pas content de ma présentation. J’ai beaucoup réfléchi sur ce que tu m’as dit ensuite “*Kien, tu peux refuser mon compliment mais j’ai le droit de te le donner*”. J’ai commencé à apprendre à recevoir des compliments à partir de ce jour-là. Cela m’a rendu évidemment plus confiant dans mon travail et dans ma vie plus généralement. Par ailleurs, les discussions que nous avons eu ensemble, les conseils que tu as pu me prodiguer sont toujours tombés à de bons moments et m’ont aidé à chaque fois à sortir de l’enlisement des calculs numériques. Enfin, sans ton soutien, mon manuscrit de thèse et ma présentation de soutenance n’auraient pas été aussi bien accomplis.

Je remercie le professeur Callari, qui a fait aussi partie du projet d’érosion interne et m’a beaucoup aidé durant ma thèse. J’ai toujours apprécié les discussions scientifiques que nous avons eues lors de tes visites à l’École Centrale de Lyon. Grâce à toi, j’ai pu acquérir une partie de ton expérience de modélisateur dans le domaine de la géotechnique. Grâce à toi, j’ai aussi appris des bêtises que j’ai faites durant mon travail.

Je remercie aussi Noémie, qui a pris beaucoup de temps pour développer le code DEM. Sans toi, je n’aurais pas pu arriver au résultat final. Merci d’avoir toujours été à mes côtés pendant les moments importants de ce travail.

Je remercie vivement Madame Nadia Saiyouri qui m'a fait l'honneur d'accepter d'être la présidente du jury de ma thèse. J'exprime également ma gratitude à Monsieur Jean-Yves Delenne et Monsieur Luc Sibille pour l'intérêt que vous avez porté à mon travail en acceptant d'être rapporteurs de ce mémoire.

Je tiens à remercier tous les membres du bâtiment G8, pour l'ambiance chaleureuse qui a contribué à rendre les conditions de mon travail agréables. Merci à Romain et ta carte magique. Merci à Thierry, qui m'a toujours poussé pour que je puisse finir mon manuscrit avec le moins de retard possible. Merci à M. Cambou, qui a été pour moi un bon exemple de la vraie passion dans le travail et dans la science. Merci à tous les co-bâtiments qui sont tous sympas : Aurélie, Catherine, Ophélie, Agathe, Magali, Laurianne, Hélène, Cécile, M. Fry, Benoit, Thomas, Caroline, Marie, Nathanaël, Khoa, Piétro, Feda, Adi, Duc, James, Jessica, Witold, Emna, Audrey, Andréa pour les moments inoubliables que l'on a partagés.

Enfin, je voudrais dire merci à tous mes amis de Lyon qui ont contribué à rendre mon séjour en France encore plus passionnant.

Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse porte sur la modélisation discrète de l'évolution régressive du front d'un conduit d'érosion qui peut se produire dans les barrages ou digues en remblai. Des outils numériques ont été développés en se basant sur le couplage entre la méthode des éléments discrets (DEM) et la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) pour la description, respectivement, des phases solide et fluide. L'implémentation de la méthode DEM suit une approche standard de type dynamique moléculaire (DM) et les interactions intergranulaires sont modélisées par des contacts unilatéraux visco-élastiques frottants ou bilatéraux (ponts solides) viscoélastiques, afin de permettre la modélisation d'un sol légèrement cohésif. La méthode LBM est implémentée ici avec des temps de relaxation multiples (MRT) et une condition de rebondissement interpolée pour les frontières solides en mouvement, afin d'améliorer la stabilité numérique des calculs. Le schéma du couplage entre les deux méthodes, ainsi que les critères pour le choix des paramètres numériques des deux méthodes.

Pour étudier le phénomène visé, un échantillon représentatif de sol granulaire situé au front d'un conduit d'érosion est d'abord assemblé par une procédure de préparation "à sec", puis testé dans des conditions saturées sous un chargement hydraulique monotone croissant. L'érosion régressive se produit par amas de grains au niveau du front d'érosion ayant subi au préalable une dégradation due à de nombreuses ruptures de ponts solides en traction. L'autre phénomène important observé est la présence d'arcs associés à des chaînes de forces en compression qui parviennent à maintenir parfois totalement, parfois partiellement l'intégrité du matériau non érodé.

Mots-clés : érosion régressive, conduit d'érosion, méthode des éléments discrets, DEM, méthode de Boltzmann sur réseau, LBM

Abstract

The work reported in this thesis consists in a discrete modelling of the backward front propagation of an erosion pipe, as can take place in embankment dams or dikes. Some numerical tools have been developed to this end, based on the coupling between the Discrete Element Method (DEM) and the Lattice Boltzmann Method (LBM) for the representation of the solid and fluid phases, respectively. The implementation of DEM follows a standard molecular dynamics approach and the interaction among grains are regulated by unilateral frictional visco-elastic and breakable visco-elastic bonds, in order to take into account a slightly cohesive soil behaviour. The LBM was implemented according to the Multiple Relaxation Time (MRT) scheme along with an interpolated non-slip conditions for moving boundaries, in order to improve the numerical stability of the calculations. The coupling scheme is described along with the criteria for the numerical parameters of the two methods.

A representative specimen of a granular soil located at the front of an erosion pipe is first assembled by a “dry” preparation procedure and then tested under fully-saturated conditions and increasing hydraulic load over time. Backward erosion is takes place in the form of clusters of grain being eroded at the erosion front after a degradation of the material due to the breakage of tensile bonds. The other interesting feature that was observed is the creation of arches of compressive force chains. These arches enabled the specimen to maintain a stable or metastable configuration under the increasing hydraulic load.

Keywords : backward erosion, piping erosion, Discrete Element Method, DEM, Lattice Boltzmann Method, LBM

Table des matières

1	Érosion interne dans les barrages en terre	13
1.1	Introduction	14
1.2	Vulnérabilité des barrages en remblai	14
1.3	Érosion interne et formation du renard hydraulique	16
1.4	Erosion par renard hydraulique	18
1.4.1	Études expérimentales	19
1.4.2	Études analytiques	22
1.4.3	Études numériques	23
1.5	Modélisation discrète du front d'un conduit d'érosion	25
1.6	Couplage solide-fluide à l'échelle des grains	25
1.6.1	Approche DEM/SPH	25
1.6.2	Approche DEM/PFV	27
1.6.3	Approche DEM/LBM	28
1.7	Outils numériques réalisés	30
1.7.1	Code de calcul	30
1.7.2	Post-traitement	31
1.8	Conclusion	31
2	Méthode des éléments discrets	33
2.1	Introduction	34
2.2	Intégration numérique des équations de la dynamique	35
2.2.1	Algorithme Stömer-Verlet	35
2.2.2	Algorithme Verlet-Vitesse	37
2.3	Lois d'interaction au contact	38
2.3.1	Contact unilatéral entre grains	39
2.3.2	Contact adhésif-cohésif entre grains	41
2.4	Interaction avec les parois	42
2.5	Choix des paramètres intervenant dans l'algorithme	43
2.5.1	Pas de temps de calcul	43
2.5.2	Paramètres du modèle de contact	44
2.6	Conclusion	45

3	Méthode Boltzmann sur Réseau (LBM)	47
3.1	Introduction	48
3.2	Équation de Boltzmann	49
3.3	Fonction de distribution d'équilibre	51
3.4	Équation LBM-BGK à un temps de relaxation	51
3.5	Équation LBM-MRT à temps de relaxation multiples	54
3.6	Algorithme de calcul	56
3.7	Conditions aux limites	56
3.7.1	Conditions périodiques	57
3.7.2	Condition de non-glissement (Bounce-back)	57
3.7.3	Condition de pression (vitesse) imposée	58
3.8	Validation du code LBM	60
3.8.1	Écoulement de Poiseuille	60
3.8.2	Écoulement de Couette plan	62
3.8.3	Écoulement en cavité entraînée	64
3.9	Conclusion	68
4	Modèle et validation du couplage DEM/LBM	69
4.1	Introduction	70
4.2	Traitement des grains en mouvement	70
4.2.1	Représentation des grains dans le réseau fluide	70
4.2.2	Condition de rebondissement interpolée	70
4.3	Force hydrodynamique sur un grain	73
4.4	Problèmes du couplage DEM/LBM	74
4.4.1	Rayon hydraulique	74
4.4.2	Discrétisation spatiale	74
4.4.3	Par de temps de calcul	75
4.4.4	Adimensionalisation des grandeurs physiques	76
4.5	Validation du modèle	77
4.5.1	Écoulement dans un conduit et autour d'un cylindre fixe	77
4.5.2	Écoulement autour d'un cylindre en mouvement	80
4.5.3	Sédimentation d'un grain	82
4.5.4	Sédimentation de deux grains	85
4.6	Conclusion	88
5	Modélisation du comportement du front, cas de l'érosion régressive	91
5.1	Introduction	92
5.2	Préparation de l'échantillon granulaire	92
5.3	Front d'érosion : simulation	96
5.3.1	Configuration de l'essai	96
5.3.2	Simulations	99

5.4	Conclusion	112
-----	----------------------	-----

Table des figures

1.1	Vue d'une coupe d'un barrage à noyau [1]	15
1.2	Érosion régressive conduisant à la formation d'un renard hydraulique, à la formation d'une brèche avant l'effondrement du barrage [2]	19
1.3	Problématiques dans la modélisation de l'érosion régressive : déplacement vers l'amont du front d'érosion (1) ; érosion tangentielle du conduit (2)	19
1.4	Appareil pour l'essai HET [3]	20
1.5	Essai à grande échelle (IJKdijk) [2]	21
1.6	Écoulement axisymétrique dans le conduit d'érosion [4]	23
1.7	Modélisation discrète de l'essai HET [5]	24
1.8	Discrétisation du domaine fluide dans la méthode SPH	26
1.9	Construction d'un sous-domaine Θ_{ij} entre deux pores en 2D [6].	27
1.10	Définition de la décomposition de la force portante provoquée par le fluide dans un pore : distribution de la pression sur la frontière des grains [6].	28
1.11	Discrétisation du domaine fluide par le modèle D2Q9 dans la méthode LBM [7]	29
2.1	Contact représentative entre grain "x" et grain "y"	40
2.2	Modèle rhéologique de contact unilatéral (a; b, ligne discontinue) et de pont solide (b, ligne continue; c)	40
2.3	Contact représentative entre grain "x" et paroi "w"	43
3.1	Réseau rectangulaire et schéma D2Q9	53
3.2	Illustration de condition de périodicité dans le cas 2D	57
3.3	Implémentation de la condition de non-glissement	58
3.4	Noeud générique à l'entrée de l'écoulement	59
3.5	Configuration géométrique de l'écoulement Poiseuille simulé	61
3.6	Simulation de l'écoulement de Poiseuille : Évolution du profil de la vitesse horizontale à $t_1 = 0.015$ s, $t_2 = 0.025$ s, $t_3 = 0.035$ s, $t_4 = 0.1$ s	62

3.7	Configuration géométrique de l'écoulement Couette plan	63
3.8	Évolution du profil de la vitesse horizontale à $t_1 = 0.005$ s, $t_2 = 0.01$ s, $t_3 = 0.02$ s, $t_4 = 0.1$ s	64
3.9	Configuration géométrique de l'écoulement de Cavité entraînée	65
3.10	Écoulement en cavité entraînée : lignes de courant correspondant à : (a) $Re = 100$; (b) $Re = 400$; (c) $Re = 1000$; (d) $Re = 2000$; (e) $Re = 5000$; (f) $Re = 7500$	66
3.11	Écoulement en cavité entraînée : profil de vitesse horizontale à travers le centre géométrique de la cavité.	67
3.12	Écoulement en Cavité entraînée : profil de vitesse verticale à travers le centre géométrique de la cavité.	67
4.1	Représentation d'un grain dans le réseau fluide	71
4.2	Représentation d'une frontière courbe dans le réseau fluide	72
4.3	Illustration du rayon hydraulique	75
4.4	Cycle de calcul dans l'algorithme DEM/LBM	76
4.5	Écoulement dans un conduit et autour d'un cylindre [8] : a) Configuration géométrique et conditions aux frontières; b) Champ de vitesse à $Re = 20$, dans le régime stationnaire; c) Champs de vitesse à $Re = 100$, dans le régime instationnaire périodique	78
4.6	Cylindre en mouvement de translation à vitesse constante U_c dans un conduit 2D [9] : a) Configuration géométrique et conditions aux frontières b) Champ de vitesse au pas de temps 15000	80
4.7	Force hydrodynamique (F_{h1}, F_{h2}) sur le cylindre à partir du temps de calcul 14000. Résultat obtenu par notre simulation.	82
4.8	Force hydrodynamique (F_{h1}, F_{h2}) sur le cylindre en fonction du temps. Résultats obtenus par Lallemand et al. [9]	82
4.9	Sédimentation d'un grain : configuration géométrique.	83
4.10	Sédimentation d'un grain : trajectoire du grain calculé par le modèle objet de la validation.	84
4.11	Sédimentation d'un grain [10] : trajectoire du grain calculé par la méthode des éléments finis.	85
4.12	Sédimentation de deux grains [11, 12] : configuration géométrique.	86
4.13	Sédimentation de deux grains : positions des grains lors du processus de sédimentation et champ de vitesse à $t = 0$. s (a), $t = 0.5$ s (b), $t = 2.5$ s (c), $t = 3.0$ s (d) et $t = 4.5$ s (e).	87
4.14	Sédimentation de deux grains : comparaison de l'évolution dans le temps de la vitesse verticale des grains. Les traits continu et discontinu se réfèrent respectivement aux grains initialement frontal et supérieur.	88

5.1	Préparation de l'échantillon granulaire : configuration géométrique et chaînes de forces après la compression isotrope (a) et après retrait de la paroi aval (b).	93
5.2	Préparation de l'échantillon : distributions angulaires des contacts entre grains après l'initialisation (a) et après l'ouverture de la paroi aval (b). Les cercles extérieurs correspondent à une densité de 0.25 contacts par grain et par radiant.	95
5.3	Simulation de l'érosion régressive : configurations géométriques ($L = 66.8$ mm, $H = 33$ mm), conditions aux limites et emplacement des grains pour le modèle de couplage DEM (a) et LBM (b).	97
5.4	Illustration d'un VER du sol granulaire au sein du front d'un conduit d'érosion. Le VER est confiné sur la côté en amont (à gauche) par le sol dans la région intacte et latéralement par les interfaces des éléments contigus.	98
5.5	Chargement hydraulique durant la simulation	99
5.6	Évolution de l'essai 1 : chaînes de forces de compression et de traction (lignes rouges et bleues, resp.) et état de l'échantillon à $t = 1.5$ s (a) et 5.625 s (b).	100
5.7	Évolution de la simulation : la différence de pression normalisée (a) et la fraction de la masse érodée (b) aux différents instants $t_A = 0.35$ s, $t_B = 0.75$ s, $t_C = 0.95$ s, $t_D = 1.5$ s et $t_E = 4.0$ s.	102
5.8	Évolution du nombre des ponts solides lors de l'essai 2	103
5.9	Évolution de l'essai 2 : chaîne des forces en compression et en traction (lignes rouges et bleues, resp.) et configurations de l'échantillon à $t = 0.35$ s (a), 0.75 s (b), 0.95 s (c), 1.5 s (d) et 4.0 s (e).	105
5.10	Évolution de l'essai 2 : champs de vitesse et configuration hydraulique de l'échantillon à $t = 0.35$ s (a), 0.75 s (b), 0.95 s (c), 1.5 s (d) et 4.0 s (e).	106
5.11	Évolution de l'essai 2 : chaîne des forces en compression et en traction (lignes rouges et bleues, resp.) et configurations de l'échantillon à $t = 4.075$ s (a) et 4.2 s (b).	107
5.12	Évolution de l'essai 2 : champ de vitesse et configuration hydraulique de l'échantillon à $t = 4.075$ s (a) et 4.2 s (b).	107
5.13	Évolution de l'essai 2 : norme de la force hydrodynamique sur chacun des grains dans l'échantillon pour les configurations à $t = 0.35$ s (a), 0.75 s (b), 0.95 s (c), 1.5 s (d) et 4.0 s (e).	108
5.14	Évolution de l'essai 2 : distribution angulaire des contacts entre les grains à $t = 0.35$ s (a), 0.75 s (b), 0.95 s (c), 1.5 s (d). Le type et l'échelle de la représentation, en termes de densité angulaire du nombre de coordination, sont les mêmes adoptés dans la figure 5.2.	109

5.15	Évolution de l'essai 3 : chaînes de forces de compression et de traction (lignes rouges et bleues, resp.) et état de l'échantillon à (a) $t = 0.6$ s, (b) 0.95 s	110
5.16	Évolution de la masse totale du fluide dans le canal jusqu'au temps $t_D=1.5$ s de la simulation de l'essai 2.	111
5.17	Évolution de la totalité de forces hydrodynamiques durant la simulation de l'essai 2	111

Liste des tableaux

1.1	Nombre de rupture/an/barrage dans le monde de 1970 à 1990 d'après ICOLD [13]	15
1.2	Statistiques globales des ruptures de barrages en remblai jusqu'en 1986, à l'exclusion des barrages construits au Japon avant 1930 et en Chine.	16
3.1	Paramètres de l'écoulement Poiseuille simulé	61
3.2	Paramètres de la simulation pour un écoulement de Couette plan	63
4.1	Tableau de conversion des grandeurs physiques en grandeurs adimensionnelles	77
4.2	Paramètres utilisés dans la simulation de l'écoulement autour d'un cylindre fixe	79
4.3	Coefficients de traînée et de portance : comparaison entre différentes méthodes	79
4.4	Paramètres de la simulation de l'écoulement autour d'un cylindre en mouvement	81
4.5	Sédimentation d'un grain : paramètres physiques et numériques.	84
4.6	Sédimentation d'un grain : valeurs s_7 et s_8 (voir Du et al. [14] pour les valeurs restantes).	84
4.7	Sédimentation de deux grains : paramètres physiques et numériques.	87
5.1	Paramètres de la loi de contact utilisé durant la préparation de l'échantillon granulaire	94
5.2	Nombre de Reynolds de l'écoulement d'infiltration pour les instants identifiés dans la figure 5.7.	101

Introduction générale

Contexte générale de l'étude

Pour les barrages en remblai, l'érosion interne est considérée comme l'une des pathologies les plus courantes pouvant conduire à la rupture, un cas se présente chaque année en France. De 1971 à 1995, de par le monde, 71 incidents, dont 23 ruptures ont été enregistrées sur 550 grands barrages, des milliers de petits barrages et 1000 km de digues [13]. Plus généralement en Europe, le coût annuel des inondations causées par l'érosion interne entre 1980 et 2003 est évalué à 3 milliards de dollars [13]. Actuellement, les méthodes de dimensionnement conventionnelles pour ce type d'ouvrages ne permettent pas une évaluation satisfaisante de cet aléa. Ce constat a motivé, au niveau national et international, un intérêt croissant pour la recherche autour de ce phénomène.

L'érosion interne dans les barrages ou digues en terre peut se développer sous l'effet d'un écoulement d'infiltration au sein de l'ouvrage ou de sa fondation. Lorsque les actions hydrodynamiques dépassent la résistance à l'érosion du matériau, les grains sont alors arrachés et transportés à travers l'espace poral. Une description rationnelle du processus de l'érosion interne repose sur la distinction de quatre phases ordonnées de l'évolution [15, 16] : initiation de l'érosion, continuation de l'érosion, progression vers la formation d'un conduit d'érosion ou vers des instabilités de surface et initiation de la brèche.

L'initiation de l'érosion peut être la conséquence de fuites concentrées, d'instabilités locales dans le volume de sol (cas de la suffusion ou de l'érosion régressive) ou d'instabilités au sein d'une interface solide (érosion d'interface).

La phase de continuation dépend de la dégradation du sol ainsi que de la présence de filtres granulaires (ou géotextiles) éventuels dont le rôle est de stopper la migration de particules sur de grandes distances à travers l'ouvrage et la formation du conduit.

Dans la phase de progression, le conduit potentiellement formé se propage pro-

gressivement vers le côté d'amont du réservoir, en élargissant son diamètre, jusqu'au moment où le processus s'achève en la formation d'une brèche, c'est-à-dire, une perte incontrôlée de l'eau stockée, éventuellement couplée avec des phénomènes d'instabilités générales (effondrement du conduit, instabilité des pentes). Deux mécanismes différents peuvent être distingués décrire l'évolution du conduit hydraulique : l'élargissement du conduit est induit par l'érosion tangentielle au niveau de ses parois, tandis que l'érosion régressive induite par l'écoulement à travers l'espace poral se produit dans la région du front du conduit.

Plusieurs études expérimentales, analytiques et numériques dédiées au mécanisme d'érosion tangentielle ont été réalisées et ont conduit à des progrès substantiels dans la compréhension et la modélisation de l'élargissement cinétique du conduit hydraulique [4, 5, 17, 18, 19]. On notera qu'il existe moins de travaux en lien avec le mécanisme d'érosion régressive et notamment concernant les études analytiques ou numériques. Cependant, pour ce qui est de la modélisation des phénomènes, on peut noter des similitudes pour ces deux derniers cas d'érosion dont les premiers travaux se sont inspirés du problème de production de sable provoquée par des écoulements interstitiels laminaires au niveau des parois dans les puits pétroliers [20, 21, 22]. Ainsi, ce travail de thèse se concentrera-t-il sur l'étude des phénomènes en jeu dans le front d'érosion du conduit, où pour le cas de l'érosion régressive, l'écoulement est normal à l'interface solide-fluide.

Objectifs et démarche

L'objectif de ce travail est de construire des outils conceptuels et numériques afin d'étudier le comportement micromécanique des matériaux granulaires en proximité du front d'un conduit hydraulique sous l'effet d'un écoulement normal lors du processus d'érosion régressive. Parmi ces outils, la "Méthode des éléments discrets" (*Discret Element Method*, DEM), qui est aujourd'hui une approche numérique standard [23] pour la modélisation du comportement mécanique des assemblages granulaires "secs", sera utilisée. Cette approche qui traitera l'équilibre de la fraction solide sera couplée avec une autre méthode qui traitera l'écoulement fluide et son interaction avec les grains individuels.

Concernant le couplage fluide-grains, différentes approches existent et permettent d'effectuer ce couplage plus ou moins finement. Ainsi, certaines approches traitent-elles le problème par utilisation de deux échelles différentes pour étudier les phénomènes dans les phases solide et fluide. La phase solide est ici discrétisée par des grains individuels pendant que la phase fluide est décrite par maillage à une échelle supérieure à la taille des grains [24]. D'autres schémas de couplage s'appuient également sur une approche discrète pour la phase solide et où l'écoulement fluide est traité à l'échelle des pores [25, 26], où à des échelles plus petites que la

taille des grains représentatifs [27, 28, 29]. Parmi ces derniers, le couplage entre la méthode DEM et la méthode de Boltzmann sur réseau (*Lattice Boltzmann Method*, LBM) est fortement représenté par sa souplesse pour le traitement des interfaces fluide-solide en mouvement [30, 31, 32].

En ce qui concerne l'érosion par formation d'un conduit hydraulique, le couplage DEM/LBM a récemment été utilisé pour la modélisation de l'élargissement d'un conduit d'érosion sous l'effet d'un écoulement tangentiel au niveau des parois du conduit [5]. Cette même approche sera utilisée et implémentée ici pour modéliser la propagation du front d'érosion dans le cadre de l'érosion régressive. Ce travail complète donc les études existantes sur le phénomène d'érosion régressive.

Ce mémoire se compose de cinq chapitres :

Dans le premier chapitre, une introduction à l'érosion interne dans les barrages en remblai sera abordée. On s'intéressera plus particulièrement au phénomène d'érosion de conduit en décrivant ses mécanismes d'initiation et son développement lors du processus d'érosion. On montrera qu'elles ont été les études menées sur ce sujet tout comme les approches choisies pour traiter le couplage fluide-grains, tout en brossant leurs avantages ou leurs limites.

Le deuxième chapitre portera les bases fondamentales de la méthode DEM à travers l'intégration des équations de la dynamique, les lois de contact intergranulaires. Les critères pour le choix des paramètres intervenant dans le modèle seront aussi discutés dans le but de faciliter la pratique de cette méthode.

La méthode Boltzmann sur réseau est présentée dans le troisième chapitre. Des éléments essentiels de cette méthode seront détaillés, y compris l'algorithme de calcul, des techniques pour l'implémentation des conditions aux frontières (notamment la condition de non-glissement, de pression imposée). Une série de simulations numériques d'écoulements fluides sera réalisée par le code de calcul développé dans le cadre de ce travail.

Le quatrième chapitre est dédié à la présentation du schéma du couplage DEM/LBM. Le calcul de la force hydrodynamique sur les grains et le traitement de leur mouvement seront, dans un premier temps, discutés. Par la suite, on présentera des aspects relatifs à l'implémentation du modèle pour sa mise en oeuvre. Le schéma du couplage sera validé par des simulations numériques impliquant un écoulement autour d'un cylindre fixe ou en mouvement, puis la sédimentation des grains dans un fluide au repos.

Enfin, dans le cinquième chapitre, on présentera l'application du modèle développé au cas de l'érosion régressive, en particulier pour étudier les phénomènes en jeu dans le front d'érosion. Plusieurs simulations numériques du comportement du front d'un conduit d'érosion seront réalisées et suivies par des analyses micromécaniques des phénomènes observés.

Une conclusion générale de ce travail portera essentiellement sur les résultats obtenus au cinquième chapitre. Mais elle mettra aussi en avant les avantages et inconvénients du couplage DEM/LBM dans la modélisation discrète du phénomène d'érosion interne ainsi que d'autres phénomènes qui impliquent des interactions fluide-grains. Le mémoire se terminera par des perspectives sur les applications possibles du code de calcul développé tout comme les questions encore en suspens pour comprendre le problème d'érosion régressive.

Une partie de ce travail a fait l'objet d'un article publié dans Tran et al., 2016 [33].

Chapitre 1

Érosion interne dans les barrages en terre

Contents

1.1	Introduction	14
1.2	Vulnérabilité des barrages en remblai	14
1.3	Érosion interne et formation du renard hydraulique	16
1.4	Erosion par renard hydraulique	18
1.4.1	Études expérimentales	19
1.4.2	Études analytiques	22
1.4.3	Études numériques	23
1.5	Modélisation discrète du front d'un conduit d'érosion	25
1.6	Couplage solide-fluide à l'échelle des grains	25
1.6.1	Approche DEM/SPH	25
1.6.2	Approche DEM/PFV	27
1.6.3	Approche DEM/LBM	28
1.7	Outils numériques réalisés	30
1.7.1	Code de calcul	30
1.7.2	Post-traitement	31
1.8	Conclusion	31

1.1 Introduction

Ce chapitre constitue une introduction à la problématique de cette thèse. Tout d'abord, le phénomène d'érosion interne est brièvement présenté comme l'un des aléas les plus courants et les plus dangereux pour les barrages et digues en terre. Certains travaux expliquant ce phénomène d'érosion seront résumés, y compris les approches expérimentale, analytique et numérique, avec une attention particulière sur l'érosion interne par formation d'un conduit (renard) hydraulique et en particulier l'érosion dite régressive.

La modélisation numérique discrète est une technique de calcul qui permet de modéliser les phénomènes à l'échelle du grain et constituera l'outil privilégié d'analyse de l'érosion régressive dans ce travail de thèse. Plusieurs schémas numériques permettant d'étudier les phénomènes impliquant une forte interaction entre une phase solide et fluide, qui est le cas de l'érosion régressive seront reportés. Enfin, les outils numériques seront présentés.

1.2 Vulnérabilité des barrages en remblai

Un barrage est défini comme un obstacle artificiel construit en travers d'un cours d'eau et destiné à en réguler le débit et/ou à stocker de l'eau, notamment pour le contrôle des crues, l'irrigation, l'industrie, l'hydroélectricité, ou une réserve d'eau potable. En particulier, on appelle barrage en remblai tout barrage composé de matériaux meubles compactés qui peuvent être fins (terre) ou grossiers (enrochements). En fonction des matériaux utilisés et de la manière dont l'étanchéité du barrage est assurée, trois catégories de barrages en remblai sont identifiés :

- Barrage homogène, construit avec un matériau suffisamment étanche (argile, limon) ;
- Barrage avec noyau, qui est un barrage zoné ; il est composé d'un noyau central dont le matériau constitutif a une perméabilité très faible (argile, marne) et de recharges amont et aval permettant d'assurer la stabilité du barrage ;
- Barrage avec masque amont ; généralement le remblai est en enrochement ; la face amont est recouverte d'un masque, souvent en béton, qui permet d'assurer l'étanchéité de l'ouvrage.

Selon ICOLD¹, les barrages en remblai représentent environ 75% des barrages dans le monde mais leur structure est beaucoup plus vulnérable par rapport à d'autres types de barrages. Le tableau 1.1 explicite cette vulnérabilité au travers du nombre de ruptures qui sont quatre fois plus importantes que celles associées

1. International Commission On Large Dams

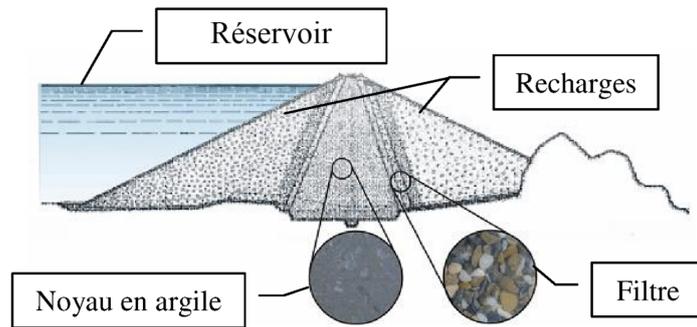


Figure 1.1 – Vue d'une coupe d'un barrage à noyau [1]

aux barrages en béton ou en maçonnerie. Sur la base des données de l'ICOLD.,

Type de barrage	Nombre de barrages	Nombre de rupture	Nombre de rupture par 100000 années*barrages
Béton ou maçonnerie	5500	2	2
Remblai	16500	26	9

Tableau 1.1 – Nombre de rupture/an/barrage dans le monde de 1970 à 1990 d'après ICOLD [13]

1974, 1983a, 1995 [34, 35, 36], Foster et al. [37, 38] ont analysé les statistiques de ruptures des grands barrages construits entre les années 1800 et 1986. Le résultat de ce travail est présenté dans le tableau 1.2, à l'exclusion des barrages construits au Japon avant 1930 et en Chine. D'après les données, trois modes de rupture principaux ont été identifiés : le glissement (instabilité générale de l'ouvrage), l'érosion externe ou surverse (débordement du niveau d'eau du réservoir par-dessus la crête et érosion des recharges), et l'érosion interne.

Récemment, l'enquête lancée par RAI² montre que durant 26 mois (de février 2010 à avril 2012), 47 ruptures ont été enregistrées, dont 8 ruptures de grands barrages. Au niveau des modes de rupture, 23 cas sur 44 ont été associés à une érosion interne, 20 cas sur 44 à une érosion externe et un seul cas à un glissement. Ainsi pour les 8 cas de grands barrages, l'érosion externe (5 cas sur 8) et l'érosion interne (3 cas sur 8) sont les pathologies les plus représentées. On note alors que l'érosion interne, ayant une fréquence comparable à celle de l'érosion externe, est responsable d'environ la moitié des ruptures des barrages en remblai. Ce proces-

2. Risk Assessment International

sus d'érosion se déroule à l'intérieur du remblai ou de la fondation et n'est donc pas aisément identifiable. Sans un suivi attentif de l'ouvrage, les signes extérieurs peuvent n'être visibles que dans une phase avancée du processus alors que son développement en phase finale vers une rupture peut être extrêmement rapide.

Mode de rupture	Nombre de cas		% rupture (endroits connus)		Probabilité moyenne de rupture (10^{-3})	
	Toutes les ruptures	Rupture en opération	Toutes les ruptures	Rupture en opération	Toutes les ruptures	Rupture en opération
Capacité inadéquate de l'évacuateur	46	40	36	34	4	3.5
Dysfonctionnement de porte	16	15	12	13	1.5	1.5
Totalité de rupture par surverse	62	55	48	47	5.5	5
Érosion interne à travers le remblai	39	38	30	33	3.5	3.5
Érosion interne à travers la fondation	19	18	15	15	1.5	1.5
Érosion interne initiée dans le remblai à travers la fondation	2	2	1.5	1.5	0.2	0.2
Totalité sur érosion interne	59	57	46.5	48.5	5	5
Glissement en aval	6	4	5	3.5	0.5	0.4
Glissement en amont	1	1	1	1	0.1	0.1
Totalité sur glissement	7	5	6	4.5	0.6	0.5
Séisme/liquéfaction	2	2	1.5	1.5	0.2	0.2
Mode inconnu	8	7				
Totalité de ruptures	136	124			12	11
Totalité de rupture (où le mode est connu)	128	117				
Nombre des barrages en remblai	11192	11192				

Tableau 1.2 – Statistiques globales des ruptures de barrages en remblai jusqu'en 1986, à l'exclusion des barrages construits au Japon avant 1930 et en Chine.

1.3 Érosion interne et formation du renard hydraulique

L'érosion interne est définie comme la migration de grains initiés par les forces érosives de l'eau le long de fissures dans les matériaux cohésifs ou dans le volume des vides d'un sol pulvérulent entraînant une instabilité interne de l'ouvrage [39]. Plusieurs facteurs peuvent influencer l'apparition d'un tel processus : des fissures préexistantes dans le matériau, une granulométrie très étalée ou lacunaire, et même des interactions chimiques entre des éléments dans l'eau et l'argile du sol. En général, ce phénomène se développe lorsqu'il y a combinaison de deux conditions : l'arrachement des grains et leur transport sur de grandes distances. Une

description rationnelle du processus de l'érosion interne repose sur la distinction de quatre phases ordonnées de l'évolution [15, 16] : initiation de l'érosion, continuation de l'érosion, progression vers la formation d'un conduit hydraulique ou d'instabilités de surface et formation d'une brèche à travers l'ouvrage.

Selon les conditions aux limites associées au problème, on distingue actuellement quatre mécanismes d'initiation de l'érosion interne [13] :

- Érosion régressive ; l'érosion s'initie en un point au pied aval du barrage, là où le gradient hydraulique est élevé permettant l'arrachement des grains solides. Ce mécanisme se propage vers l'amont du barrage par une évacuation régressive des grains érodés. Il s'articule autour d'une déstabilisation du matériau qui forme le squelette du sol ou d'une augmentation du gradient hydraulique local, favorisant la formation d'un réseau de conduits d'érosion à travers l'ouvrage.

- Suffusion ; l'érosion se produit lorsque la vitesse locale (ou le gradient local) de l'écoulement d'infiltration à travers la matrice du sol est suffisamment élevé pour que des fins grains fins du volume de sol soient érodés à travers les pores d'une matrice granulaire plus grossière. Ce processus conduit à des zones de haute perméabilité où le débit d'infiltration est relativement élevé. Cela peut provoquer un effondrement du squelette du sol.

- Érosion de contact ; il y a érosion sélective de la fraction des grains fins due à un écoulement parallèle à l'interface entre un sol fin et un sol grenu. L'érosion de contact peut conduire dans des cas particuliers au développement d'un conduit d'érosion dans le sol fin.

- La fuite concentrée, un tassement différentiel, une fracture hydraulique ou un mauvais compactage induisant la présence de fissures dans le remblai ou dans la fondation du barrage. Sous l'effet de l'écoulement, l'érosion se produit le long des parois des fissures. Il peut alors y avoir formation et élargissement d'un conduit qui relie l'aval et l'amont du barrage.

Dans la majorité des cas, un renard hydraulique³ peut être initié dans le remblai ou dans la fondation du barrage par un des mécanismes décrits ci-dessus (à l'aval, dans le corps du remblai ou dans la fondation).

Si l'érosion ne suit pas une fissure déjà ouverte, la continuation de l'érosion par renard hydraulique dépend de la relation géométrique entre la granulométrie des grains fins mobilisables pour l'érosion et les constriction du milieu granulaire (étranglement dans l'espace poral entre deux pores voisins) que pourront traverser ces fines. Le processus d'érosion peut s'arrêter si ces dernières sont suffisamment

3. Le terme "renard" évoque l'idée d'un trou de renard alors que son équivalent en anglais "piping" traduit l'idée d'un conduit, mais il s'agit bien de la même chose.

petites pour retenir les particules arrachées en amont.

Dans la phase de progression, les pressions interstitielles et la vitesse de l'écoulement d'infiltration augmentent. L'élargissement du renard dépend de plusieurs facteurs incluant le type de sol, le caractère adhésif/cohésif du sol et le régime hydraulique. La propagation du front d'érosion, dans le cas de l'érosion régressive, peut impacter les zones amonts du barrage créant un conduit continu entre l'aval du barrage et le réservoir.

La formation d'une brèche constitue la phase ultime de l'érosion qui conduit à l'effondrement du barrage.

1.4 Erosion par renard hydraulique

La séquence d'image dans la figure 1.2 illustre les différentes phases conduisant à l'effondrement du barrage à la suite de l'érosion par renard hydraulique dans le cas de l'érosion régressive. Lors du processus d'érosion, deux mécanismes simultanés mais différents sont à l'œuvre : l'élargissement du renard est induit par une érosion tangentielle au niveau de ses parois, tandis qu'un écoulement de Darcy dans la région du front du renard fait progresser ce dernier vers l'amont. L'érosion est ici normale à l'interface solide-fluide du conduit (figure 1.3).

Dans la suite, nous allons présenter certains travaux essentiels permettant d'aborder le problème d'érosion régressive par des approches expérimentale, analytique et numérique.

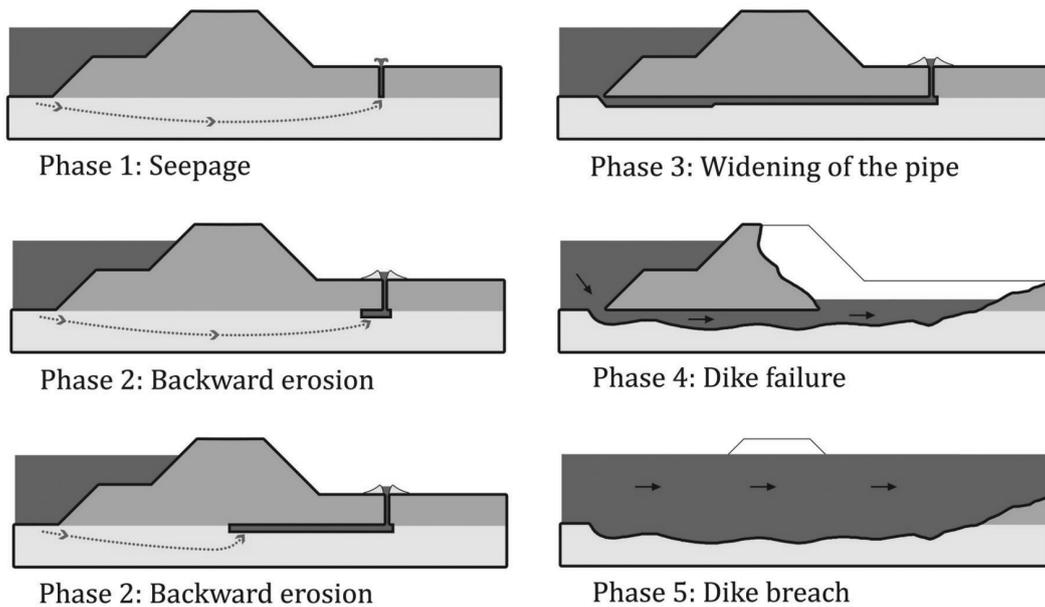


Figure 1.2 – Érosion régressive conduisant à la formation d'un renard hydraulique, à la formation d'une brèche avant l'effondrement du barrage [2]

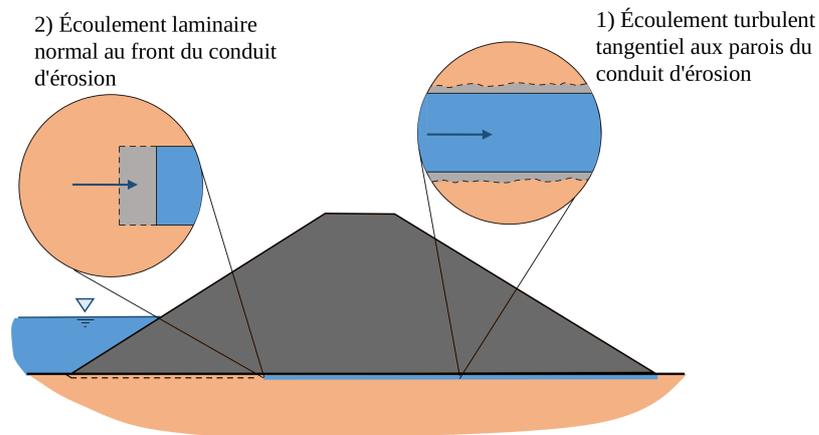


Figure 1.3 – Problématiques dans la modélisation de l'érosion régressive : déplacement vers l'amont du front d'érosion (1) ; érosion tangentielle du conduit (2)

1.4.1 Études expérimentales

Essai en laboratoire

Le phénomène d'érosion interne est classiquement étudié grâce à l'essai HET (*Hole Erosion Test*) en laboratoire. Cet essai, introduit par Wan et Fell [17, 18] et développé ensuite par Pham [40], Benahmed [3], permet de représenter le processus d'érosion de conduit, initié par la formation d'une fissure dans les barrages en remblai. La figure 1.4 illustre le dispositif expérimental et l'échantillon dans un essai HET.

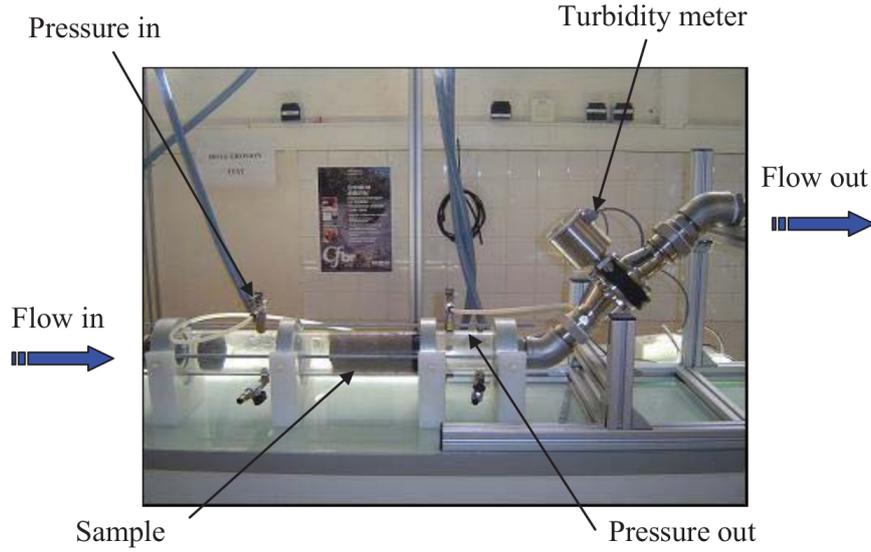


Figure 1.4 – Appareil pour l'essai HET [3]

L'échantillon cylindrique du sol cohésif est de longueur 150 mm et de diamètre 80 mm. Un trou de diamètre 6 mm est ensuite créé le long de l'axe central de l'échantillon pour simuler une fissure préexistante et inciter le développement du mécanisme érosif le long des seules parois du trou. Un écoulement fluide est imposé à travers le trou en maintenant constant le débit Q pendant que le gradient de pression est mesuré par des jauges. Si le débit Q est suffisamment élevé, l'érosion se produit et le diamètre du trou augmente au cours du temps. Le dépouillement de l'essai HET s'effectue à travers la détermination de deux quantités caractéristiques τ_c et k_{er} , qui sont respectivement la contrainte de cisaillement critique et le coefficient d'érosion, tout deux associés à loi d'érosion :

$$\dot{m} = \begin{cases} 0 & \text{si } |\tau_b| \leq \tau_c \\ k_{er}(|\tau_b| - \tau_c) & \text{si } |\tau_b| > \tau_c \end{cases} \quad (1.1)$$

où \dot{m} est la masse érodée en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, τ_b est la contrainte de cisaillement en Pa, τ_c est la contrainte critique au-dessus de laquelle le sol est détaché, k_{er} est le

coefficient d'érosion en $s \cdot m^{-1}$, lié à la cinétique du processus érosif.

Essai in situ

Un essai à grande échelle a été effectué par Van Beek et al, 2011 [2] pour comprendre le processus d'érosion régressive (projet "IJKdijk"). Pour cela, un remblai de longueur 15 m et de hauteur 3.5 m avec une pente de 1 : 2 a été construit (figure 1.5). Le remblai est constitué d'argile et repose sur une fondation constituée de sable. Plusieurs rangées de jauges ont été placées à l'interface entre la couche sableuse et l'argile. Ces jauges permettent la mesure de la pression de l'eau dans les pores et par là-même de suivre la formation du renard.

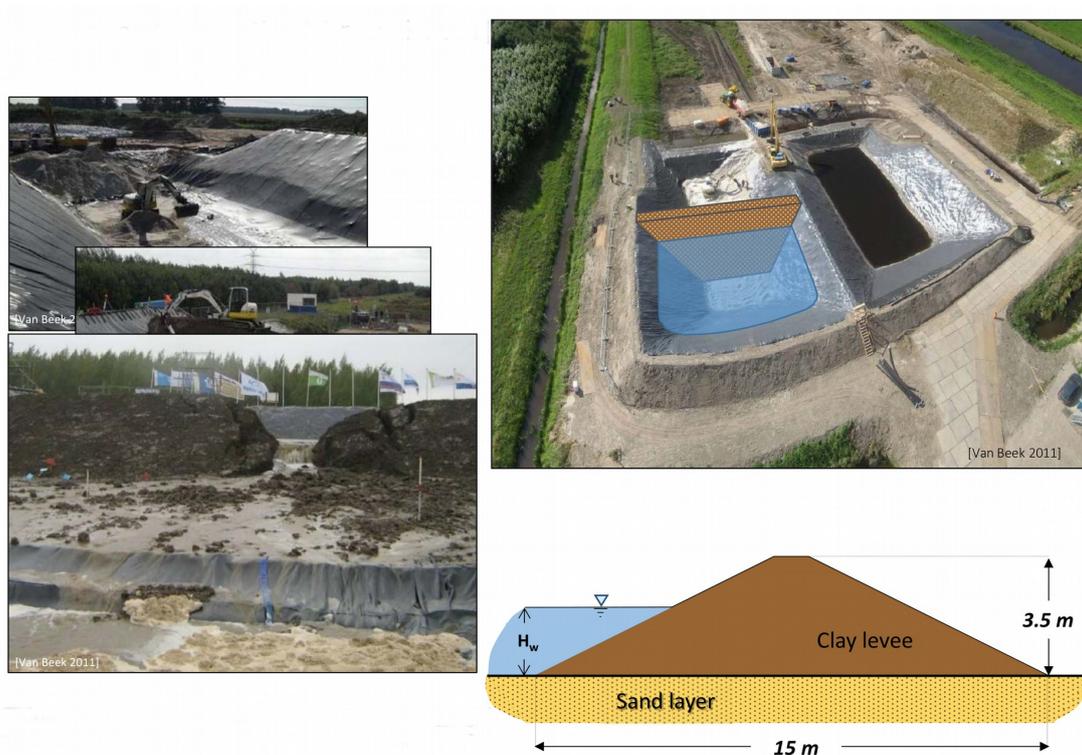


Figure 1.5 – Essai à grande échelle (IJKdijk) [2]

Durant l'essai, le niveau d'eau en amont a été augmenté progressivement pour atteindre un niveau de 3 m au-dessus de la couche du sable. Sous l'effet du chargement hydraulique, des résurgences avec cônes de sable sont apparues à l'aval du remblai, signes de la formation de renards dans la fondation. Alors que le niveau

d'eau a continué à augmenter à l'amont, l'érosion s'est développée progressivement avec un élargissement du diamètre et un accroissement de la longueur du renard. Enfin, le renard hydraulique a atteint le réservoir amont et a entraîné la formation d'une brèche à travers le remblai.

Cette expérience a permis de scinder le processus d'érosion par renard hydraulique en quatre étapes : infiltration, érosion régressive, développement du renard et formation d'une brèche. Le projet "IJKdijk" a fourni également des données précieuses pour la modélisation numérique du phénomène d'érosion à grande échelle.

1.4.2 Études analytiques

Un modèle analytique a été proposé par Bonelli et Brivois [4], permettant l'explication de l'élargissement du conduit d'érosion lors d'un essai HET. L'érosion se produit sous l'effet de l'écoulement tangentiel, qui, pour les nombres de Reynolds classiques in situ est turbulent. Dans ce modèle, le processus d'érosion amène une transition progressive d'un comportement solide à un comportement fluide pour les matériaux constitutifs de la paroi du conduit. Cette transition est décrite par une décomposition en trois phases d'un volume matériel : phase du solide, phase du solide fluidisé et phase du fluide. Ces trois phases interagissent à travers les équations du bilan de la masse. La figure 1.6 illustre l'écoulement entraînant l'érosion et le transport du sol érodé.

La quantité de sol érodé dans l'écoulement est suffisamment petite, et donc n'affecte pas de manière significative les propriétés du fluide. Une transformation des équations de bilan par des équations de saut de Rankine-Hugoniot permet d'établir une loi exponentielle pour l'évolution du flux de la masse érodée lors du processus de l'érosion sous une pression hydraulique constante :

$$\dot{m} = \begin{cases} 0 & \text{si } |\tau_b| \leq \tau_c \\ k_{er}\tau_c\left(\frac{|\tau_b|}{\tau_c} - 1\right)^p & \text{si } |\tau_b| > \tau_c \end{cases} \quad (1.2)$$

où \dot{m} est le flux de la masse érodée en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$, τ_b est la contrainte de cisaillement en Pa, τ_c est la contrainte critique au dessus de laquelle le sol est détaché, k_{er} est le coefficient de l'érosion en $\text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ et $0 < p \leq 1$ est l'exposant empirique. Le paramètre p a pour but d'améliorer l'adéquation entre prédiction du modèle et résultats expérimentaux. Les auteurs ont aussi conclu que la valeur $p = 1$ est souvent suffisante pour l'interprétation des essais d'érosion par trou.

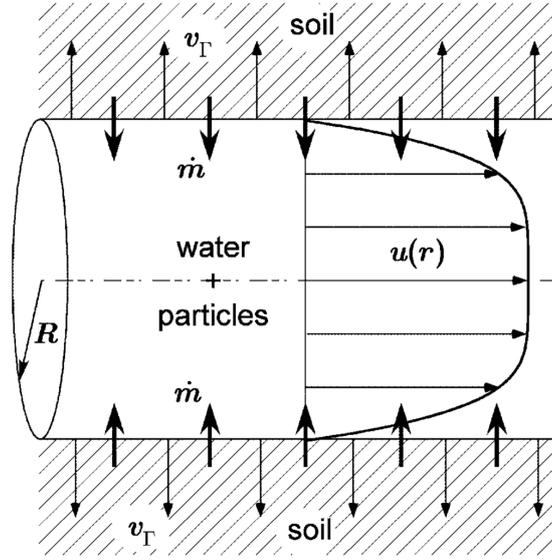


Figure 1.6 – Écoulement axisymétrique dans le conduit d'érosion [4]

1.4.3 Études numériques

Approche continue

Le problème de l'évolution du front d'un conduit d'érosion est similaire au problème de la production de sable provoquée par des écoulements interstitiels laminaires sur les parois des puits pétroliers [20, 21, 22]. Dans ce modèle, le comportement du milieu granulaire saturé est modélisé par la théorie et les équations de la poro-élastoplasticité. Le mécanisme d'érosion de la matrice solide est décrit par l'équation de continuité pour la phase solide :

$$\frac{\dot{m}}{\rho_s} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1.3)$$

- l'équation constitutive de l'érosion :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (\lambda \phi_{,i})_{,i} \quad (1.4)$$

- la loi de perméabilité :

$$k = k_0 \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2} \quad (1.5)$$

dans lesquelles, \dot{m} est la fraction de la masse érodée par unité de volume, ϕ est la porosité, ρ_s est la densité de la phase solide, k_0 est la perméabilité.

Des données expérimentales sur le phénomène étudié permettent d'évaluer le coefficient de production de sable λ dans l'équation constitutive (1.4). Ce dernier dépend de l'état plastique du sable granulaire et peut être adapté au modèle numérique en faisant le coefficient λ en fonction de la contrainte plastique de cisaillement γ^p , c'est-à-dire $\lambda = \lambda(\gamma^p)$. Les résultats obtenus sont en accord avec les observations expérimentales. Ils montrent que la fraction de sable érodé diminue au cours du temps soit à zéro, soit à une valeur constante lors de l'élargissement de la zone d'érosion. Ceci se produit lorsque l'augmentation de la porosité du milieu devient important pour conduire à nouveau le processus d'érosion.

Approche discrète

À l'échelle des grains, Lominé et al. ont proposé une modélisation discrète en 2D de l'essai HET [5] pour le régime laminaire de l'écoulement. Le modèle présente un couplage complet fluide/grains, basé sur la méthode de Boltzmann sur réseau pour la partie fluide et la méthode des éléments discrets pour la fraction solide composée de grains circulaires. La loi d'érosion déduite par les simulations numériques s'est montrée en accord avec celle reportée par des travaux expérimentaux, ce qui valide la modélisation effectuée. Les auteurs ont montré que le taux d'érosion est proportionnel à la contrainte de cisaillement provoquée par l'écoulement fluide. La figure 1.7 représente l'évolution dans le temps du trou d'érosion lors de l'essai numérique HET.

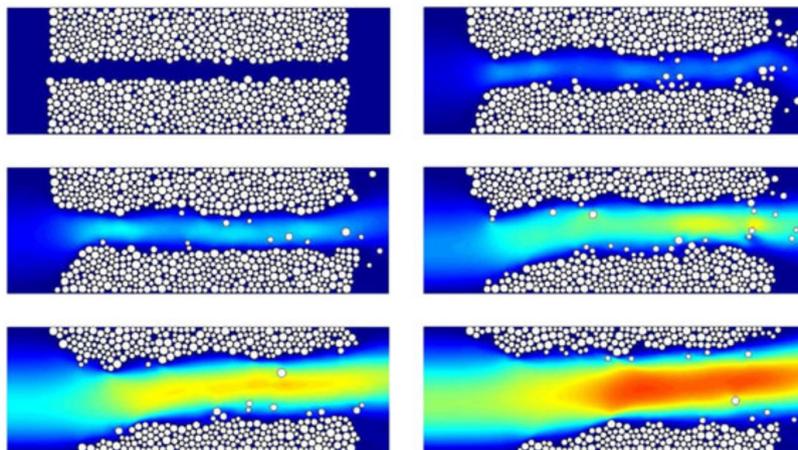


Figure 1.7 – Modélisation discrète de l'essai HET [5]

1.5 Modélisation discrète du front d'un conduit d'érosion

La modélisation numérique du phénomène d'érosion peut compléter les essais expérimentaux aux différentes échelles d'analyse, celle de l'ouvrage, celle de l'échantillon ou celle des grains. Elle peut aussi apporter de nouveaux éléments pour la compréhension des phénomènes en jeu.

Lors du processus d'érosion, le mouvement des grains dépend des forces en jeu au niveau des contacts entre les grains ainsi que des forces hydrodynamiques du fluide interstitiel. Cependant, la présence de grains en suspension influencera à son tour l'écoulement fluide. Une approche numérique capable de prendre en compte les interactions entre le fluide et le milieu granulaire est donc un atout pour modéliser précisément les phénomènes en jeu.

Dans une approche de modélisation des phénomènes physiques à l'échelle des grains, la phase solide est discrétisée en grains individuels par la "Méthode des éléments discrets" qui est aujourd'hui une approche numérique standard pour la modélisation du comportement mécanique des assemblages granulaires. Par contre, différents modèles permettent de modéliser le comportement de la phase fluide interstitielle et d'effectuer un couplage avec la phase solide. Une description par maillage à une échelle supérieure à la taille des grains pour la phase fluide est proposée par McNamara et al. [24] pour l'étude de l'écoulement granulaire en présence d'interactions hydrauliques. D'autres auteurs traitent l'écoulement fluide à l'échelle des pores [25, 26], où à des échelles plus petites que la taille des grains représentatifs [27, 28, 29].

Certaines techniques ont été utilisées en particulier pour apporter des informations sur les phénomènes d'érosion, elles seront développées plus précisément.

1.6 Couplage solide-fluide à l'échelle des grains

1.6.1 Approche DEM/SPH

La méthode SPH ("*Smoothed-particle hydrodynamics*") est une méthode lagrangienne sans maillage, développée par une nécessité de résoudre des problèmes complexes que le maillage eulérien n'était pas en mesure de gérer facilement [41, 42]. En particulier, elle est avantageuse pour le traitement des problèmes à surface libre, des interfaces mobiles et des frontières déformables [43, 44]. La méthode SPH fonctionne par une discrétisation du domaine fluide en un ensemble

d'éléments distincts, appelés particules dont la taille n'a pas à proprement parlé de sens physique. Dans le domaine fluide, ces particules individuelles transportent des informations physiques, interagissent entre elles et se déplacent selon l'équation de mouvement. Les quantités physiques telles que la vitesse, la densité d'une particule dans l'espace sont évaluées par une interpolation des propriétés physiques correspondantes dans un domaine d'influence fini pour chaque particule fluide (figure 1.8)).

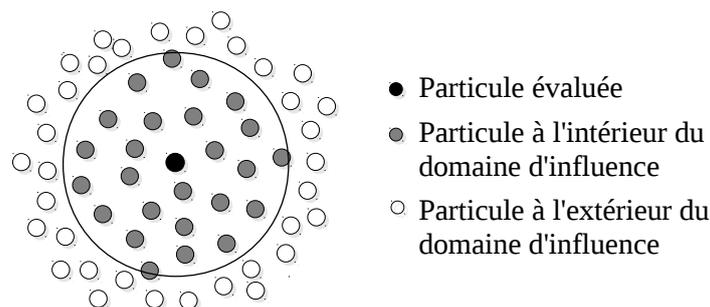


Figure 1.8 – Discrétisation du domaine fluide dans la méthode SPH

L'inconvénient principal de la méthode SPH par rapport aux méthodes eulériennes traditionnelles est la nécessité d'un grand nombre de particules pour produire des simulations avec une résolution équivalente, ce qui augmente le coût de calcul.

Les conditions limites aux parois solides (telles que un grain) sont considérées comme une interface d'un problème de Riemann partiel [45, 46]. La solution de ce problème de Riemann partiel, obtenue en considérant les propriétés de l'état fluide et les conditions imposées par la paroi solide, est ensuite utilisée pour le calcul du flux de pression. Les forces hydrodynamiques sont enfin calculées à partir de l'intégration du champ de pression sur la frontière solide (grain).

On peut trouver dans la littérature plusieurs applications de cette approche telles que la sédimentation d'un grain dans une colonne fluide en 3D [47], des problèmes plus complexes sur le transport de "*slurry*" dans un semi autogene [48] ou sur la rupture de barrage [49]. Plus récemment, Sjah et al. [50] ont présenté une simulation numérique de l'essai de l'érosion par trou dans l'étude de l'érosion interne.

1.6.2 Approche DEM/PFV

Le couplage DEM/PFV “(*Pore-scale Finite Volume*)” est destiné à fournir un outil numérique pour l’analyse du comportement des milieux granulaires saturés denses [6, 25, 26]. Dans cette approche, l’espace poral 3D est partitionné à l’aide d’une technique de pavage de Delaunay pondérée et de son graphe dual qui est la partition de Voronoï [51]. Le réseau de pores est présenté comme des canaux connectés dont les dimensions sont définies par l’introduction de la notion de rayon hydraulique associé à chaque pore et leur section transversale est définie par la relation Hagen-Poiseuille [52]. La figure 1.9 illustre la construction d’un sous-domaine entre deux pores.

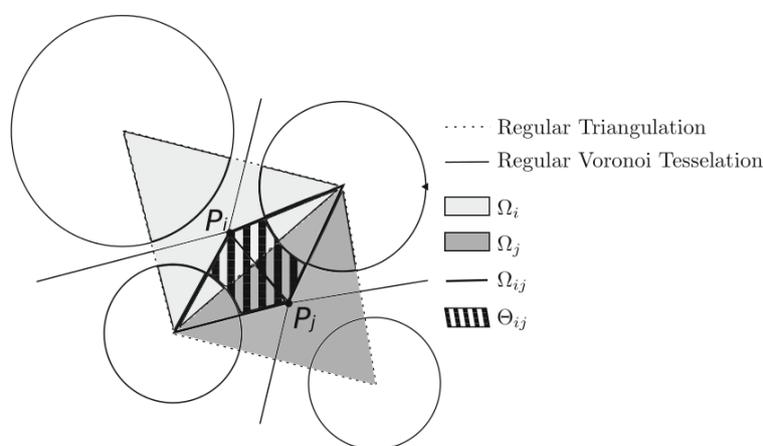


Figure 1.9 – Construction d’un sous-domaine Θ_{ij} entre deux pores en 2D [6].

Les forces hydrodynamiques sur les grains incluent les effets de la pression absolue et de la contrainte visqueuse du fluide. Un schéma de calcul est illustré sur la figure 1.10 avec une décomposition de la force de portance visqueuse dans un pore. Chaque composante est déterminée par l’intégration de la pression et de la contrainte visqueuse sur la partie de la frontière locale en jeu dans le calcul. Enfin, la force totale appliquée sur un grain est obtenue par la somme des composantes des forces correspondantes. On note que l’effet de gravité peut être calculé de manière indépendante et présenté par une force d’Archimède.

Le couplage DEM/PFV a été notamment validé par la simulation numérique d’un essai œdométrique [26] dans le cas limite du fluide incompressible, et a été utilisée pour des études rhéologiques des milieux granulaires saturés et denses avec prise en compte des forces de lubrification [53]. Cette approche est robuste en particulier au niveau du coût de calcul. Cependant, elle ne peut pas être utilisée

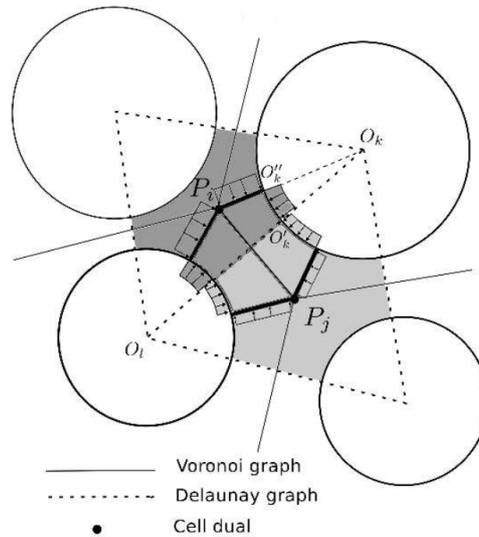


Figure 1.10 – Définition de la décomposition de la force portante provoquée par le fluide dans un pore : distribution de la pression sur la frontière des grains [6].

lorsque l'écoulement fluide entre dans le régime de turbulence, ce qui se passe souvent dans le phénomène d'érosion.

1.6.3 Approche DEM/LBM

La méthode de Boltzmann sur réseau (*Method Lattice Boltzmann* (LBM)) est une méthode eulérienne de dynamique des fluides (*Computational fluid dynamics* (CFD)), qui est basée sur la résolution de l'équation de Boltzmann de la théorie cinétique des gaz, à la place des équations de Navier-Stokes, pour simuler le comportement de fluides newtoniens [54, 55, 56]. Dans cette méthode, le domaine fluide est discrétisé par un réseau régulier fixe dans lequel les particules fluides sont représentées par des fonctions de distribution. Elles sont vues comme la densité de probabilité de trouver une particule de fluide à une position et à un temps donnés avec une vitesse microscopique. Le mouvement des particules fluides est alors discrétisé en un nombre limité de vitesses de déplacement spatial possible (figure 1.11).

L'évolution de l'écoulement fluide est caractérisée par la "propagation" et la "collision" entre les particules appartenant au réseau discrétisé jusqu'au moment où son état d'équilibre thermodynamique est établi. Le point fort de la méthode LBM est la simplicité dans l'implémentation de l'algorithme, des conditions aux limites ainsi que sa capacité à simuler des écoulements avec nombres de Reynolds

élevés. Par contre, cette méthode nécessite une grande quantité de mémoire lors de la simulation.

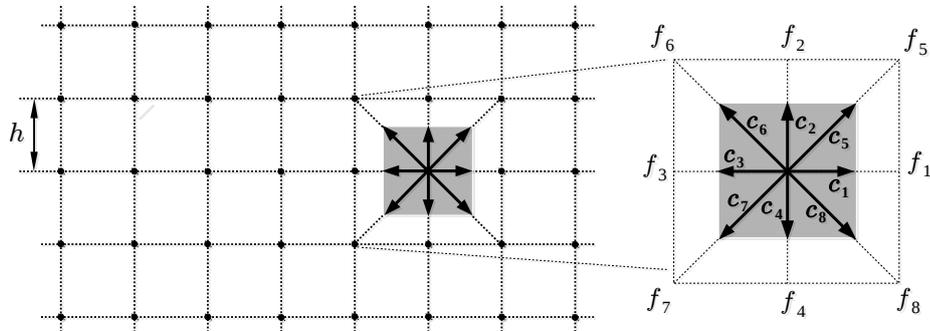


Figure 1.11 – Discrétisation du domaine fluide par le modèle D2Q9 dans la méthode LBM [7]

Dans le couplage DEM/LBM, l’interaction fluide-solide peut être évaluée par la variation de la quantité de mouvement sur la frontière solide avec des méthodes “Bounce-back” [27, 57] ou “Immersed boundary” [12, 58]. Cette approche a été développée et utilisée pour des études de sédimentation [12] ou des avalanches sous-marines [59]. Concernant le phénomène d’érosion, Sibille et al. [5] ont proposé une modélisation 2D de l’essai de HET en régime laminaire d’écoulement. Plus récemment, une modélisation 2D de l’essai JET a été réalisée par Cuéllar et al. [60] en tenant compte d’une transition d’un régime laminaire vers le régime turbulent de l’écoulement.

La validation quantitative de ces travaux existants ainsi que les avantages de la méthode LBM pour la simulation de la phase fluide démontre la capacité du modèle DEM/LBM à être utilisée pour modéliser le phénomène d’érosion interne à l’échelle des grains. En gardant à l’esprit qu’une description précise du fluide interstitiel est un élément essentiel pour la modélisation des interactions fluide-grains complexes, cette approche a été choisie et développée dans le cadre de cette thèse.

1.7 Outils numériques réalisés

1.7.1 Code de calcul

L'équipe de recherche GCD du LTDS, laboratoire d'accueil de cette thèse, est impliquée depuis plusieurs années dans la recherche sur les lois de comportement pour les matériaux granulaires [61, 62, 63]. Ces études s'appuient souvent sur des simulations numériques réalisées à l'aide de codes DEM commerciaux, open-source ou académiques non développés en interne, afin de mettre en évidence l'importance des mécanismes microscopiques dans le comportement phénoménologiques des matériaux granulaires. Ces codes, performants mais d'accès limité pour l'utilisateur, peuvent ne pas répondre de manière satisfaisante aux nécessités parfois très spécifiques d'une étude. Par conséquent, un code a été développé en interne en se basant sur l'algorithme DEM de la méthode des éléments discrets. Ce code réalisé pourra en revanche évoluer de manière flexible et dans plusieurs directions e.g., généralisation 3D, formes complexes des particules ou interaction solide-fluide, ce qui est le cas envisagé dans cette thèse. L'implémentation du code est effectué à l'aide du langage de programmation C selon la norme ANSI, cf. Kernighan et Ritchie, 2000 [64].

Le traitement de la phase fluide constituera la partie principale de cette thèse avec l'implémentation de la méthode de Boltzmann sur Réseau. Ce code, écrit en langage C, est ensuite couplé au code aux éléments discrets, et utilisé pour la modélisation du comportement du front d'un conduit d'érosion dans le cas du problème de l'érosion régressive. On notera que le choix du langage C a pour but d'optimiser au maximum le temps de calcul pour les simulations et pour les études paramétriques qui nécessitent de lancer en même temps plusieurs simulations. Ce langage est ainsi qualifié de langage de bas niveau⁴ et bénéficie d'un large gamme de bibliothèques scientifiques, de compilateurs particulièrement performants (e.g., *GNU Compiler Collection* avec plusieurs d'options d'optimisation), ainsi qu'une grande communauté d'utilisateurs dans le monde de l'informatique. L'interface de programmation OpenMP (*Open Multi-Processing*) est utilisée pour le calcul parallèle. Cette interface, basée sur une architecture à mémoire partagée, est portable et utilisable sur différentes plateformes de calcul.

4. Un langage de programmation est qualifié de bas niveau lorsque le codage de celui-ci se rapproche du langage machine (i.e., binaire), et donc permet de programmer à un degré très avancé.

1.7.2 Post-traitement

Le post-traitement des données obtenues par des simulations numériques est réalisé avec le logiciel de calcul numérique Scilab⁵ (*Scientific Laboratory*) pour la visualisation des données (e.g., échantillon granulaire sans ou avec la chaîne des forces, le champ de vitesses de l'écoulement fluide, les lignes de courant) ainsi que pour les analyses des résultats. On note que Scilab est libre et disponible pour plusieurs systèmes d'exploitation et fournit des figures ou des vidéos de très bonne qualité.

1.8 Conclusion

L'érosion interne par création d'un conduit hydraulique a été décrite dans ce chapitre comme l'une des pathologies les plus dangereuses pour les barrages en remblai. Ce phénomène impliquant des interactions fluide-solides complexes ont fait objet d'un certain nombre de recherches, surtout concernant l'évolution du diamètre du conduit lors du processus d'érosion. Pour compléter cette étude par une modélisation l'évolution du front du conduit d'érosion, plusieurs approches numériques ont été envisagées permettant la réalisation d'un couplage fluide-grain complet. Le couplage DEM/LBM a été choisi pour sa souplesse dans le traitement des géométries complexes pour la phase solide.

5. <http://www.scilab.org>

Chapitre 2

Méthode des éléments discrets

Contents

2.1	Introduction	34
2.2	Intégration numérique des équations de la dynamique	35
2.2.1	Algorithme Stömer-Verlet	35
2.2.2	Algorithme Verlet-Vitesse	37
2.3	Lois d'interaction au contact	38
2.3.1	Contact unilatéral entre grains	39
2.3.2	Contact adhésif-cohésif entre grains	41
2.4	Interaction avec les parois	42
2.5	Choix des paramètres intervenant dans l'algorithme	43
2.5.1	Pas de temps de calcul	43
2.5.2	Paramètres du modèle de contact	44
2.6	Conclusion	45

2.1 Introduction

On désigne comme matériaux granulaires les assemblages de grains interagissant par des actions de contact mutuelles à travers les points ou régions de contact. Le terme “Méthode des éléments discrets” (*Discret Element Method*, (DEM)) indique de manière générique les différentes méthodes de simulation numérique discrète du comportement mécanique des assemblages granulaires. Cette approche de modélisation a été introduite dans les années 80 par P.A.Cundall et O.Strack [65] à partir des algorithmes propres à la dynamique moléculaire (DM). Elle considère que le comportement global de l’assemblage est décrit par intégration en temps des équations de la dynamique pour chacun des éléments le constituant. L’écriture de ces équations nécessite des modèles adaptés pour les actions de contact et pour les actions extérieures (e.g., pesanteur ou forces hydrodynamiques dues à la présence d’un fluide interstitiel).

Plusieurs variantes de la formulation initiale de la méthode ont été proposées : celle qui se distingue le plus remarquable est la méthode de la Dynamique des Contacts (DC), introduite par J.J.Moreau [66] et M.Jean [67] et souvent citée en opposition à la famille d’algorithmes DEM empruntés à la DM. Selon l’approche DC, les interactions aux contacts sont non régulières. Elles sont calculées à partir des impulsions entre les grains en se basant sur le principe de conservation de la quantité de mouvement et également des règles de dissipation d’énergie.

En tant qu’outil “d’expérimentation numérique” à des échelles proches du VER, la méthode DEM constitue aujourd’hui un complément important à l’expérimentation en laboratoire. Elle peut être appliquée à des systèmes constitués d’un grand nombre de grains, avec diamètres à partir du micromètre, sous conditions de chargement arbitraires (quasi-statiques ou dynamiques). La performance des processeurs et des compilateurs actuels permet de simuler des systèmes avec des dizaines de milliers des grains. Les grains peuvent avoir des formes simples (sphères en 3D ou disques en 2D) ou relativement complexe (e.g., Pena et al. [68]).

Dans cet esprit, un code de calcul DEM en 2D avait été développé en interne au LTDS avant le commencement de cette thèse, selon la formulation standard proposée par Cundall et Strack [65]. Son couplage avec la méthode LBM (Chapitres 3 et 4) a fait l’objet de ce travail de thèse, ainsi que l’application de deux méthodes pour l’étude micromécanique du front d’érosion dans le phénomène de renard hydraulique (Chapitre 5). Ce chapitre porte sur un encadrement de la méthode DEM à travers des éléments clés comme l’intégration des équations de la dynamique, les lois de contact intergranulaire, et les critères pour le choix de paramètres intervenant dans son implémentation.

2.2 Intégration numérique des équations de la dynamique

Dans un but de simplification, les grains dans notre modèle sont représentés par des disques circulaires. En tant que corps rigide, un grain “x” à un temps donné est caractérisé par sa position $\mathbf{x}^{(x)}$, sa rotation $\theta^{(x)}$ et les vitesses $\dot{\mathbf{x}}^{(x)}$ et $\dot{\theta}^{(x)}$. Les équations de la dynamique expriment les relations entre la force résultante $\mathbf{F}^{(x)}$ sur le grain “x” (resp., le moment résultant $\mathbf{M}^{(x)}$ en son barycentre) et l’accélération $\ddot{\mathbf{x}}^{(x)}$ (resp., l’accélération angulaire $\ddot{\theta}^{(x)}$).

$$\mathbf{F}^{(x)} - m^{(x)}\ddot{\mathbf{x}}^{(x)} = 0 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{M}^{(x)} - \mathbf{I}^{(x)}\ddot{\theta}^{(x)} = 0 \quad (2.2)$$

dans lesquelles $m^{(x)}$, $\mathbf{I}^{(x)}$ sont respectivement la masse et le moment d’inertie du grain en son barycentre. Les actions $\mathbf{F}^{(x)}$ et $\mathbf{M}^{(x)}$ sont calculées en tant que résultantes des interactions de contact, des actions volumiques, hydrodynamiques, etc.

Plusieurs schémas d’intégration numérique peuvent être trouvés dans la littérature, et sont particulièrement adaptés aux algorithmes de type DM. La méthode de Stömer-Verlet proposée par Verlet [69], utilisée dans la première implémentation de la méthode DEM [65], permet d’avoir une approximation d’ordre 3 dans le calcul des incréments de configuration des grains à chaque pas de temps. Cependant, son principal désavantage est de ne pas permettre le calcul simultané sous forme explicite de la vitesse des grains avec une précision satisfaisante. Plusieurs variantes de la méthode de Stömer-Verlet ont été proposées afin de surmonter cette limite, e.g. : la méthode Verlet-Vitesse [70], la méthode leap-frog [71]. Sur une base différente, la méthode de type “prédicteur-correcteur” [72] permet d’atteindre en même temps une précision d’ordre 3 pour les configurations et les vitesses des grains.

Dans la suite de cette section, on limite la présentation aux algorithmes Stömer-Verlet et Verlet-Vitesse, implémentés dans le code développé en interne.

2.2.1 Algorithme Stömer-Verlet

Pour l’intégration des équations de la dynamique, l’axe temporel est d’abord décomposé en intervalles réguliers d’amplitude δt , suffisamment petit, à partir du temps $t = 0$; on définit les temps $t_0 = 0$, $t_1 = t_0 + \delta t$, $t_2 = t_1 + \delta t, \dots, t_n = t_{n-1} + \delta t$. La position du grain “x” au temps générique t_n peut être estimée à partir d’un

développement en série de Taylor, pour $\delta t \rightarrow 0$:

$$\mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{x}(t_n) + \dot{\mathbf{x}}(t_n)\delta t + \ddot{\mathbf{x}}(t_n)\frac{\delta t^2}{2} + \dddot{\mathbf{x}}(t_n)\frac{\delta t^3}{6} + o(|\delta t^3|) \quad (2.3)$$

Un développement en arrière donne de manière équivalente la position du grain au temps t_{n-1} :

$$\mathbf{x}(t_{n-1}) = \mathbf{x}(t_n) - \dot{\mathbf{x}}(t_n)\delta t + \ddot{\mathbf{x}}(t_n)\frac{\delta t^2}{2} - \dddot{\mathbf{x}}(t_n)\frac{\delta t^3}{6} + o(|\delta t^3|) \quad (2.4)$$

En combinant la (2.3) et la (2.4) on obtient

$$\mathbf{x}(t_{n+1}) = 2\mathbf{x}(t_n) - \mathbf{x}(t_{n-1}) + \ddot{\mathbf{x}}(t_n)\delta t^2 + o(|\delta t^3|) \quad (2.5)$$

qui justifie une précision d'ordre 3 en δt dans le calcul de la position du grain :

$$\mathbf{x}(t_{n+1}) \simeq 2\mathbf{x}(t_n) - \mathbf{x}(t_{n-1}) + \ddot{\mathbf{x}}(t_n)\delta t^2 \quad (2.6)$$

La substitution de la (2.2) dans la (2.6) donne :

$$\mathbf{x}(t_{n+1}) \simeq 2\mathbf{x}(t_n) - \mathbf{x}(t_{n-1}) + \frac{\mathbf{F}^{(x)}(t_n)}{m^{(x)}}\delta t^2 \quad (2.7)$$

et la démarche conduit, pour l'orientation des axes principales d'inertie du grain "x", à l'expression analogue :

$$\theta(t_{n+1}) \simeq 2\theta(t_n) - \theta(t_{n-1}) + \frac{\mathbf{M}^{(x)}(t_n)}{\mathbf{I}^{(x)}}\delta t^2 \quad (2.8)$$

On remarque bien que les expressions (2.7) et (2.8) ne permettent pas d'évaluer la configuration du grain au temps t_1 en fonction de sa configuration initiale. Pour remplir cette lacune et afin de démarrer le processus d'intégration, il est nécessaire d'utiliser un développement en série de Taylor jusqu'à l'ordre 2 pour le premier pas de temps :

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_0) + \dot{\mathbf{x}}(t_0)\delta t + \ddot{\mathbf{x}}(t_0)\frac{\delta t^2}{2} + o(|\delta t^2|),$$

$$\theta(t_1) = \theta(t_0) + \dot{\theta}(t_0)\delta t + \ddot{\theta}(t_0)\frac{\delta t^2}{2} + o(|\delta t^2|)$$

c'est-à-dire :

$$\mathbf{x}(t_1) \simeq \mathbf{x}(t_0) + \dot{\mathbf{x}}(t_0)\delta t + \frac{\mathbf{F}^{(x)}(t_0)}{m^{(x)}}\frac{\delta t^2}{2} \quad (2.9)$$

$$\theta(t_1) \simeq \theta(t_0) + \dot{\theta}(t_0)\delta t + \frac{\mathbf{M}^{(x)}(t_0)}{\mathbf{I}^{(x)}}\frac{\delta t^2}{2} \quad (2.10)$$

Les expressions (2.9) et (2.10) ont une précision d'ordre 2, donc moindre que dans les expressions (2.7) et (2.8). Cependant, elles sont utilisées seulement pour le premier pas de temps.

L'estimation des vitesses est le principal désavantage de la méthode Stömer-Verlet. Notamment, en se basant sur les développements exprimés dans les équations (2.3) et (2.4), mais arrêtés à l'ordre 2, on peut déduire les

$$\dot{\mathbf{x}}(t_n) = \frac{\mathbf{x}(t_{n+1}) - \mathbf{x}(t_{n-1})}{2\delta t} + o(|\delta t^2|) \simeq \frac{\mathbf{x}(t_{n+1}) - \mathbf{x}(t_{n-1})}{2\delta t} \quad (2.11)$$

et

$$\dot{\theta}(t_n) = \frac{\theta(t_{n+1}) - \theta(t_{n-1})}{2\delta t} + o(|\delta t^2|) \simeq \frac{\theta(t_{n+1}) - \theta(t_{n-1})}{2\delta t} \quad (2.12)$$

qui expriment les vitesses de translation et de rotation du grain avec une précision d'ordre 2. Cependant, elles demandent de connaître la configuration du grain au temps t_{n+1} dans la mesure des vitesses au temps t_n . Par conséquent, lorsque les résultantes des forces $\mathbf{F}^{(x)}(t_n)$ et des moments $\mathbf{M}^{(x)}(t_n)$ dépendent des vitesses du grain au temps t_n , ces équations ne peuvent pas être utilisées avec les (2.7) et (2.8) pour déterminer configuration du grain. Les vitesses doivent nécessairement, dans ce cas, être estimées selon

$$\dot{\mathbf{x}}(t_n) \simeq \frac{\mathbf{x}(t_n) - \mathbf{x}(t_{n-1})}{\delta t} \quad (2.13)$$

et

$$\dot{\theta}(t_n) \simeq \frac{\theta(t_n) - \theta(t_{n-1})}{\delta t} \quad (2.14)$$

c'est-à-dire avec une précision d'ordre 1. Toutefois, compte tenu de la structure des lois d'interactions décrites dans la section 2.3, cela n'a pas d'effet sur la précision attendue dans les (2-4)-(2-8).

2.2.2 Algorithme Verlet-Vitesse

L'objectif de cette méthode est d'améliorer la précision dans l'estimation des vitesses du grain. Pour cela, on considère d'abord un développement en série de Taylor d'ordre 2, au temps t_n , de la vitesse. En particulier, pour la vitesse de translation :

$$\dot{\mathbf{x}}(t_{n+1}) = \dot{\mathbf{x}}(t_n) + \ddot{\mathbf{x}}(t_n)\delta t + \frac{\ddot{\mathbf{x}}(t_n)\delta t^2}{2} + o(|\delta t^2|)$$

L'accélération $\ddot{\mathbf{x}}(t_n)$ peut être exprimée en fonction de $\mathbf{F}^{(x)}(t_n)$, on obtient :

$$\dot{\mathbf{x}}(t_{n+1}) = \dot{\mathbf{x}}(t_n) + \frac{\mathbf{F}^{(x)}(t_n)}{m^{(x)}}\delta t + \frac{\dot{\mathbf{F}}^{(x)}(t_n)\delta t^2}{m^{(x)}} + o(|\delta t^2|) \quad (2.15)$$

En utilisant dans la (2.15) un développement en arrière de $\mathbf{F}^{(x)}(t_n)$, c'est-à-dire l'expression

$$\mathbf{F}^{(x)}(t_{n-1}) = \mathbf{F}^{(x)}(t_n) + \dot{\mathbf{F}}^{(x)}(t_n)\delta t + o(|\delta t|) \quad (2.16)$$

On obtient enfin une approximation d'ordre 2 pour la vitesse de translation du grain :

$$\dot{\mathbf{x}}(t_{n+1}) \simeq \dot{\mathbf{x}}(t_n) + \frac{1}{m^{(x)}} \left(3 \frac{\mathbf{F}^{(x)}(t_n)}{2} - \frac{\mathbf{F}^{(x)}(t_{n-1})}{2} \right) \delta t \quad (2.17)$$

On obtient de manière analogue une approximation du même ordre pour la vitesse angulaire :

$$\dot{\theta}(t_{n+1}) \simeq \dot{\theta}(t_n) + \frac{1}{\mathbf{I}^{(x)}} \left(3 \frac{\mathbf{M}^{(x)}(t_n)}{2} - \frac{\mathbf{M}^{(x)}(t_{n-1})}{2} \right) \delta t \quad (2.18)$$

Les expressions (2.17) et (2.18), en remplacement des (2.13) et (2.14), caractérisent l'algorithme Verlet-vitesse comme une variante de la méthode de Störmer-Verlet permettent le calcul sous forme explicite des vitesses du grain avec une précision améliorée (d'ordre 2). Son implémentation nécessite en revanche la mémorisation des résultantes des actions sur les grains pour leur utilisation au pas de temps suivant.

2.3 Lois d'interaction au contact

Dans les algorithmes de type DM, les grains sont modélisés comme des solides quasi-rigides et admettent une certaines déformations en proximité des régions de contact (interpénétrations). Les forces de contact sont calculées en utilisant des modèles reliant directement aux mesures correspondantes de déformations.

La force de contact entre deux grains génériques "x" et "y" est normalement décomposée en une composante normale (au plan de contact) d'intensité F_n et une composante tangentielle (c'est-à-dire dans le plan de contact) d'intensité F_t . Ceci afin de permettre l'écriture de deux modèles couplés mais disjoints pour, respectivement, F_n et F_t . On trouve dans la littérature plusieurs modèles de contact unilatéral ou bilatéral (avec présence de ponts solide ou liquide) de type élastique, visco-élastique ou élastique frottant, visco-élastique frottant (avec frottement à la Coulomb), etc. Le modèle élastique de Mindlin-Hertz [73], bien connu dans le cas des grains sphériques lisses, fournit une relation non-linéaire¹ entre la composante normale de la force de contact F_n et la déflexion élastique au contact. Ce modèle

1. Le caractère non-linéaire du modèle Mindlin-Hertz est une conséquence de la courbure à l'interface du contact.

provient également la partie élastique de la composante tangentielle F_t , calculée de manière incrémentale et bornée par le critère de Coulomb dans le cas du comportement élastique frottant. Dans la pratique et ainsi que pour les applications en 2D, ces derniers sont souvent choisis de manière plus simple par une loi linéaire unilatérale [74]. Le comportement visqueux des contact est prise en compte par l'introduction des amortisseurs dans les modèles précédents. Ces amortisseurs provient une force linéaire à la vitesse relative du contact. Les modèles bilatéraux sont construits par l'addition des ponts solide ou liquide, etc [75, 76, 77, 78] au niveau des contacts unilatéraux. Ces modèles permettent de prendre en compte des effets adhésif-cohésif dus à la présence de matière solide ou de liquide formant des jonctions entre les grains.

Dans le cadre du travail présent on se bornera à des modèles de contact basés sur des lois rhéologiques simples (Kelvin-Voigt et Coulomb) dûment composés selon les directions normale et tangentielle au contact et formulés aussi bien pour les contacts de type unilatéral que bilatéral avec la présence des ponts solides entre les grains.

2.3.1 Contact unilatéral entre grains

La figure 2.1 illustre un contact générique entre deux grains avec rayons respectivement $R^{(x)}$, $R^{(y)}$. Le contact est établi lorsque la distance séparant les centres de deux grains est inférieure à celle obtenue par la somme de leur rayon. Cette condition est exprimée par une valeur positive de l'affaissement δ_n entre deux grains :

$$\delta_n = R^{(x)} + R^{(y)} - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (2.19)$$

dans laquelle \mathbf{x} et \mathbf{y} sont les vecteurs position associés aux centres de masses, respectivement, des grains "x" et "y". Également, dans la figure 2.1, \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal au point de contact, porté par la droite joignant les centres de 2 grains et orienté du grain "x" vers le grain "y", défini par :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}$$

; \mathbf{t} est le vecteur unitaire tangentiel obtenu à partir de \mathbf{n} par une rotation anti-oratoire de 90° ; les vecteurs $\mathbf{v}_c^{(x)}$, $\mathbf{v}_c^{(y)}$ sont les vitesses aux points de contact sur les grains "x" et "y" respectivement. La vitesse relative au contact entre les deux grains donc peut s'écrire : $\Delta \mathbf{v}_c = \mathbf{v}_c^{(y)} - \mathbf{v}_c^{(x)}$.

Pour le calcul des forces d'interaction, le contact normal est décrit ici selon le modèle de Kelvin-Voigt (figure 2.2(a), haut), constitué d'un ressort linéaire et

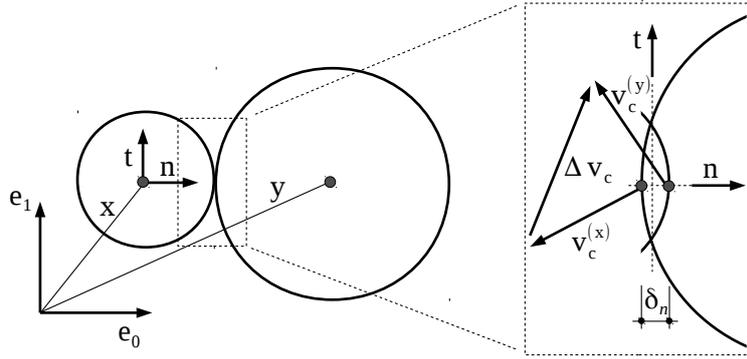


Figure 2.1 – Contact représentative entre grain “x” et grain “y”

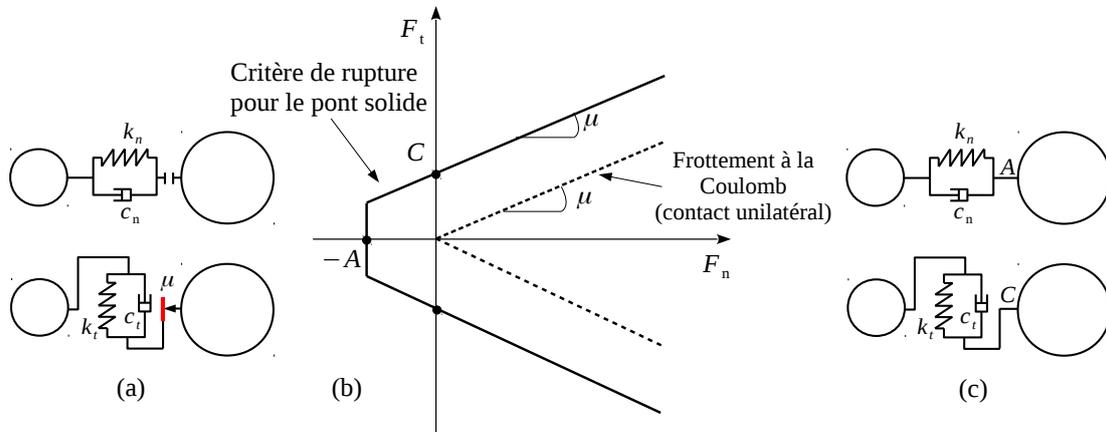


Figure 2.2 – Modèle rhéologique de contact unilatéral (a ; b, ligne discontinue) et de pont solide (b, ligne continue ; c)

d’un amortisseur linéaire assemblés en parallèle. La force normale résulte donc de la somme d’une force élastique et d’une force dissipative visqueuse :

$$\mathbf{F}_n = F_n \mathbf{n}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F_n = -k_n \delta_n - c_n (\Delta \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{n}) & \text{si } \delta_n > 0 \\ F_n = 0 & \text{si } \delta_n \leq 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

dans laquelle, k_n est la raideur du ressort et c_n est le coefficient d’amortissement dans le modèle de Kelvin-Voigt.

La force tangentielle de contact est calculée de manière incrémentale sur la base d’un modèle analogue à celui de la force normale, mais bornée par une loi de frottement à la Coulomb (figure 2.2(a), bas ; figure 2.2(b), ligne discontinue). Par

conséquent, on a :

$$\mathbf{F}_t = F_t \mathbf{t}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F_t = \overbrace{-k_t \delta_t - c_t (\Delta \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{t})}^{=: F_t^*}, & \text{si } |F_t^*| \leq \mu F_n \\ F_t = \text{sign}(-k_t \delta_t - c_t (\Delta \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{t})) |F_n \mu|, & \text{si } |F_t^*| > \mu F_n \end{cases} \quad (2.21)$$

Cette expression de la force tangentielle traduit essentiellement un modèle de Kelvin-Voigt dans lequel k_t et c_t assemblé en série avec un patin frottant à la Coulomb avec coefficient de frottement μ .

Le déplacement tangential relatif cumulé δ_t au temps générique t_n est déterminé de manière incrémentale à partir de la dernière formation au contact entre les grains :

$$\delta_t(t_n) = \begin{cases} \delta_t(t_{n-1}) + \Delta \delta_t(t_n) & \text{si } \delta_n(t_n) > 0 \\ 0 & \text{si } \delta_n(t_n) \leq 0 \end{cases}$$

dans lesquelles $\Delta \delta_t(t_n)$ est l'incrément de déplacement tangential relatif au contact, entre les temps t_{n-1} et t_n , obtenu par l'intégration en temps de $\Delta \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{t}$.

2.3.2 Contact adhésif-cohésif entre grains

Des forces d'adhésion peuvent apparaître par la présence de ponts capillaires ou de ponts solides (ex., sables faiblement cimentés) entre les grains. Quel que soit le mécanisme en jeu, on peut considérer que l'influence de la force de cohésion disparaît au-delà d'une certaine distance entre les grains, ou que le pont "casse" selon un critère à définir.

Plusieurs modèles rhéologiques ont été proposés pour prendre en compte l'action adhésive-cohésive au contact, e.g : le modèle JKR (Johnson, Kendall, Robert) [79] et DMT (Derjaguin, Muller, Toporov) [80] considèrent le contact entre deux grains sphériques lisses. Ces derniers constituent des extensions du modèle de contact de Mindlin-Hertz, et sont appropriés éventuellement suivant la taille, la rigidité et l'énergie de surface des grains. Dans ces modèles, la séparation de deux grains se produit par une force de traction maximale qui est une fonction de leur énergie de surface et de leurs rayons. La loi affine de cohésion capillaire proposée par Urso et al., 2002 [75] permet de décrire l'évolution uniforme du pont capillaire formé par un volume liquide constant au contact entre deux grains sphériques dans le régime pendulaire.² Des lois plus compliquées et précises ont été proposées

2. Le régime où la quantité de liquide dans le milieu granulaire est faible, donc seuls les ponts

par Mikami et al.,1998 [76], Soulié et al.,2006 [77] en prenant en compte la forme du pont capillaire à partir d’une résolution numérique de l’équation de Laplace. Concernant les modèles de cohésion solide, à titre d’exemple, un modèle 2D a été proposé par Delenne.,2004 [78], basé sur un critère de rupture associé aux trois degrés de liberté de translation et de rotation au niveau du pont solide.

Dans un but de simplification, le modèle de pont solide utilisé dans ce travail consiste une extension du modèle de contact unilatéral (présenté dans la section 2.4.1) au cas d’actions de traction entre les grains, c’est-à-dire pour $F_n < 0$ (figure 2.2(c), cf. figure 2.2(a)). La condition de rupture pour les ponts solides y est décrite à l’aide d’un paramètre A , dit adhésion, et C , dit cohésion, intervenant à travers les inégalités suivantes, qui fixent les limites de résistance en traction et en cisaillement (figure 2.4(b), ligne continue) :

$$F_n > -A \quad \text{et} \quad |F_t| < \mu F_n + C \quad (2.22)$$

où le coefficient de frottement μ est choisi tel que $C \geq \mu A$.

Après rupture du pont solide, le contact normal devient unilatéral et la valeur limite de la force de contact tangentiel est calculée en s’appuyant sur un modèle purement frottant comme illustré dans la figure 2.2(c) et les lignes discontinues dans la figure 2.2(b). Un modèle plus fin peut être défini en distinguant les rôles du paramètre μ dans les équations (2.21) et (2.22), c’est-à-dire en tant que paramètre de résistance et en tant que coefficient de frottement au contact, respectivement. Cette généralisation ultérieure n’est toutefois pas prise en compte dans ce travail.

2.4 Interaction avec les parois

Le rôle des parois rigides est de permettre le confinement de l’assemblage granulaire. Dans cette étude, ces dernières sont modélisées comme des segments droits possédant les degrés de liberté de translation et de rotation d’un solide dans le plan. Les interactions entre parois ne sont pas prises en compte. Les interactions entre parois et grains sont décrites ici par essentiellement les mêmes modèles déjà introduits pour les contacts unilatéraux ou ponts solides entre grains (sections 2.3.1 et 2.3.2). Les seules différences concernent les définitions des directions \mathbf{n} et \mathbf{t} des déformations δ_n , δ_t et de la vitesse relative au contact $\Delta \mathbf{v}_c$. La figure 2.3 illustre un contact générique entre grain “x” et paroi “w”.

Le vecteur unitaire normal \mathbf{n} du contact est orienté de la paroi vers le grain et identique au vecteur normal de la paroi \mathbf{n}^w . Le vecteur unitaire tangentiel \mathbf{t} est

capillaires entre paires de grains existent.

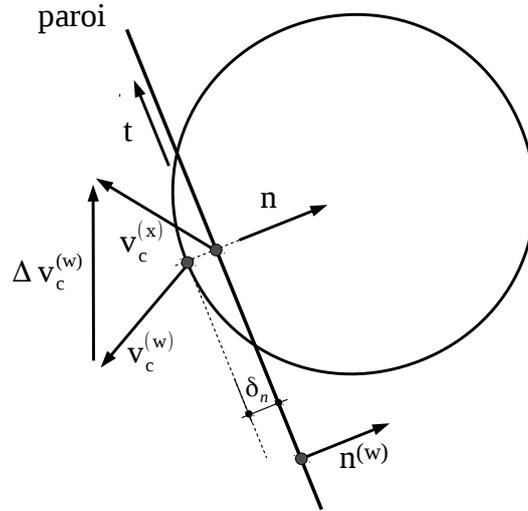


Figure 2.3 – Contact représentative entre grain “x” et paroi “w”

obtenu à partir de \mathbf{n} par une rotation anti-oratoire de 90° . La vitesse relative au contact peut s’écrire : $\Delta \mathbf{v}_c = \mathbf{v}_c^{(w)} - \mathbf{v}_c^{(x)}$, dans laquelle les vecteurs $\mathbf{v}_c^{(x)}$, $\mathbf{v}_c^{(w)}$ sont les vitesses aux points de contact sur le grain “x” et la paroi “w” respectivement.

Le confinement par les parois peut être guidé par une condition de type cinématique (sur les vitesses de translation et/ou de rotation d’une parois), ou par une condition sur le chargement (ex., loi de variation des actions résultantes sur une parois), ou bien par une combinaison de ces deux types de conditions. Pour l’implémentation d’une condition de contrôle sur le chargement d’une paroi, il sera en revanche nécessaire de considérer cette dernière comme un corps rigide doté de masse et soumis, d’un côté, aux actions des grains, et, de l’autre côté, à l’action variable constituant le chargement [23]. Uniquement des conditions de type cinématique seront employées pour les simulations présentées dans les chapitres suivants.

2.5 Choix des paramètres intervenant dans l’algorithme

2.5.1 Pas de temps de calcul

Dans l’algorithme DEM, le pas de temps de calcul est généralement choisi égale à une fraction de la période d’oscillation d’un système constitué de deux grains de taille représentative, en interaction mutuelle. En considérant dans un premier temps que les deux grains ont la même masse m et que la loi d’interaction est

élastique linéaire, représentée par un raideur k_n , la quantité δ_n est gouvernée par l'équation différentielle d'une masse oscillant autour du point de contact :

$$m\ddot{\delta}_n(t) + k_n\delta_n(t) = 0 \quad (2.23)$$

dont la solution est donnée par l'expression

$$\delta_n(t) = \delta_n^{\max} \sin\left(\sqrt{\frac{k_n}{m}}(t - t_c)\right) \quad (2.24)$$

dans laquelle t_c est l'un des temps de passage par la configuration caractérisée par $\delta_n = 0$.

La durée du contact δt_c est comptée par deux annulations de la distance normale :

$$\delta t_c = \pi \sqrt{\frac{m}{k_n}}$$

Afin de bien décrire l'évolution du contact, le pas de temps δt doit donc être bien inférieur à δt_c . On prendra

$$\delta t = \alpha_t \pi \sqrt{\frac{m}{k_n}} \quad (2.25)$$

avec α_t de l'ordre de 10^{-2} ce qui permet normalement une précision satisfaisante dans l'intégration numérique du mouvement des grains.

2.5.2 Paramètres du modèle de contact

Au niveau de la loi d'interaction, les raideurs normale k_n et tangentielle k_t peuvent être choisies en ayant pour critère de respecter un ordre de grandeur attendu pour les déformations élastiques au contact, en fonction d'une contrainte de confinement moyenne représentative sur l'assemblage [74]. Leur valeur doivent être suffisamment élevées pour éviter des interpénétrations importantes qui peuvent contaminer la qualité de la simulation. Cependant, la question du temps de calcul doit être considérée également. Il est bien entendu selon la (2.25) qu'une valeur élevée de la raideur de ressort conduit à un pas de temps petit dans l'algorithme, ce qui peut entraîner d'un point de vue pratique un temps de calcul excessivement long.

Dans le cas d'une loi d'interaction visco-élastique, des critères pour le choix des coefficients d'amortissement c_n et c_t doivent également être définis. On s'appuiera pour cela toujours un système type constitué par deux grains de taille représentative et en interaction mutuelle. L'interaction sera due dans ce cas à un

élément de type Kelvin-Voigt agissant dans la direction normale au plan de contact. Par la présence d'un amortissement, l'équation différentielle de l'évolution de la distance normale entre deux grains s'écrit :

$$m\ddot{\delta}_n(t) + c_n\dot{\delta}_n(t) + k_n\delta_n(t) = 0 \quad (2.26)$$

La solution de cette équation dépende du discriminant $\Delta = c_n^2 - 4mk_n$ de l'équation caractéristique associée. Selon cette valeur, trois solutions peuvent être identifiées correspondant à autant de régimes d'amortissement : critique ($\Delta = 0$), sur-critique ($\Delta > 0$) et sous-critique ($\Delta < 0$). Si des conditions d'évolution quasi-statique sont visées, le coefficient d'amortissement peut être choisi tel à entrainer le système dans un régime d'amortissement faiblement sous-critique, afin de permettre au système de dissiper efficacement, avec par conséquent une meilleur convergence du calcul numérique. On prendra dans ce cas :

$$c_n = \alpha_a c_{cr}, \quad c_{cr} = \sqrt{mk_n} \quad (2.27)$$

dans laquelle c_{cr} est la valeur critique du coefficient d'amortissement est $a \in [0, 1]$ est choisi proche de 1.

Pour les paramètres restant du modèle de contact, le coefficient de frottement μ est choisi comme valeur arbitraire mais sensible. On peut adapter une valeur très faible lors de la préparation (i.e., en présence d'un lubrifiant dans les contacts) pour avoir une bonne compacité de l'assemblage. La valeur pertinente des coefficients de l'adhésion ou de la cohésion dans le modèle de contact cohésif est relative au niveau de pression de confinement sur l'assemblage. En considérant le rapport entre la résistance à la traction et la force moyenne appliquée sur un grain, on peut trouver des valeurs appropriées correspondant au niveau faible ou forte de cohésion [74].

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, les éléments clés de la méthode des éléments discrets ont été présentés en focalisant sur l'algorithme propre DM. Dans un premier temps, on s'intéresse aux schémas d'intégration numériques des équations de la dynamique, qui avait été implémentés dans le code de calcul interne. Ensuite, les lois d'interaction entre les grains ont été décrites pour les contacts unilatérales ainsi que ceux bilatérales par la présence de ponts solides. Quelques remarques sur le choix des paramètres du modèle ont été ajoutées à la fin pour faciliter la pratique de la méthode.

Chapitre 3

Méthode Boltzmann sur Réseau (LBM)

Contents

3.1	Introduction	48
3.2	Équation de Boltzmann	49
3.3	Fonction de distribution d'équilibre	51
3.4	Équation LBM-BGK à un temps de relaxation	51
3.5	Équation LBM-MRT à temps de relaxation multiples	54
3.6	Algorithme de calcul	56
3.7	Conditions aux limites	56
3.7.1	Conditions périodiques	57
3.7.2	Condition de non-glissement (Bounce-back)	57
3.7.3	Condition de pression (vitesse) imposée	58
3.8	Validation du code LBM	60
3.8.1	Écoulement de Poiseuille	60
3.8.2	Écoulement de Couette plan	62
3.8.3	Écoulement en cavité entraînée	64
3.9	Conclusion	68

3.1 Introduction

Dans cette étude, l'écoulement du fluide interstitiel au sein du milieu granulaire est modélisé par la méthode Boltzmann sur Réseau (LBM–Lattice Boltzmann Method). Récemment la méthode LBM a émergé comme un outil puissant de la mécanique des fluides numérique (CFD–Computational fluid dynamics), d'une part par la simplicité de son algorithme de calcul, et d'autre part sa capacité à modéliser de différentes situations d'écoulement avec prise en compte de géométries complexes. Cette méthode s'appuie à la fois sur l'équation de Boltzmann et constitue une évolution des algorithmes dits “des automates cellulaires” pour la modélisation des gaz (LGCA – Lattice Gas Cellular Automata).

Ces modèles des gaz sur réseau (LGCA–Lattice Gas Cellular Automata), résultent d'une discrétisation de l'espace par une grille régulière de nœuds entre lesquels les particules gazeuses se déplacent avec certaines vitesses qui dépendent de la forme du réseau. L'évolution du système est décomposée en deux étapes successives : advection et collision, qui sont répétées à chaque pas de la simulation. Dans l'étape d'advection, les particules sont propagées suivant leur vitesse vers les nœuds voisins. Lorsque plusieurs particules arrivent sur le même nœud, une étape de collision est activée selon des règles permettant de satisfaire plusieurs lois de conservation (masse, quantité de mouvement, etc.). Le premier modèle de gaz sur réseau, appliqué à la simulation en mécanique des fluides, a été proposé par Hardy, Pomeau et Pazzis en 1973 (modèle HPP) [81]. Dans ce modèle, l'espace est discrétisé par un réseau carré de nœuds sur lequel les particules sont capables de se déplacer depuis un nœud vers les quatre nœuds adjacents. Le modèle HPP cependant ne permet pas de retrouver les équations de Navier-Stokes. Basé sur une meilleure symétrie, le modèle FHP, développé par Frish, Hasslacher et Pomeau en 1986 [82, 83], utilise un réseau hexagonal et permet de retrouver les équations de Navier-Stokes. Ces modèles de gaz ont montré des limites comme le non respect de l'invariance galiléenne ou la génération de bruit numérique. Cette dernière est l'origine de la fluctuation de la vitesse hydrodynamique, calculée, pour un nœud donné, en tant que moyenne des vitesses des particules gazeuses du nœud.

Afin de surmonter ce défaut, l'idée a été de remplacer le modèle “déterministe” par un modèle “statistique”, dans lequel la présence des particules en chaque nœuds serait décrite en termes de probabilité (à travers des variables réelles plutôt que booléennes). Le recherche dans ce domaine se sont donc retournées vers les instruments classiques de la physique statistiques (fonction de distribution, équation de Boltzmann, etc.) qui ont donc été adaptés aux pas des différents types de réseau. L'équation centrale dans la théorie cinétique des gaz, l'équation de Boltzmann permet de décrire l'évolution de la fonction de distribution $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$, définie comme

la densité de probabilité associée à la présence d'une particule (de masse m) dans la position \mathbf{x} , avec une vitesse \mathbf{c} :

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) + \frac{\mathbf{F}^{ext}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} \quad (3.1)$$

Le terme à gauche de l'équation 3.1 représente la propagation des particules le long des trajectoires associées au champ de force externe \mathbf{F}^{ext} , pendant que le terme à droite traduit l'effet de collision entre particules qui gouverne l'évolution du système. En utilisant l'expansion de Chapman-Enskog [84], on peut remonter aux équations de Navier-Stokes à partir de l'équation de Boltzmann continue (3.1). Le premier modèle LBM est introduit en 1988 par Macnamara et Zanetti [85], toujours basé sur les règles de collision déjà prises en compte dans les automates cellulaires. Progressivement, les travaux de Higuera et Jiménez [86] et puis Koelman [87], Qian et al. [7], en utilisant une approximation pour le terme de collision original dans l'équation de Boltzmann (i.e., l'opérateur BGK [88]), ont ouvert le chemin aux nouveaux modèles LBM utilisés aujourd'hui. He et Lou [89] ont ensuite montré que l'équation de Boltzmann sur réseau peut être dérivée directement à partir de l'équation de Boltzmann continue. Cette dérivation permet d'établir une théorie de la méthode Boltzmann sur réseau sans passer la méthode de gaz sur réseau.

Dans ce chapitre, des éléments clés de cette méthode sont rappelés, y compris l'algorithme de calcul, des techniques pour l'implémentation des conditions aux frontières (condition de non-glissement, de pression imposée ...), et enfin la validation d'un code développé en interne à travers des simulations numériques des écoulements de base (e.g., Poiseuille, Couette–Plan, Cavité entraînée).

3.2 Équation de Boltzmann

Étant une approche numérique basée sur la théorie cinétique de gaz, dans la méthode Boltzmann sur réseau, l'écoulement fluide est décrit à l'échelle mésoscopique à travers la fonction de distribution $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$. Cette dernière est définie comme la densité de probabilité de trouver une particule fluide ayant la vitesse \mathbf{c} à la position \mathbf{x} au temps t . En supposant que chaque particule fluide a une masse m , les quantités macroscopiques de base telles que la densité de masse ρ , la quantité de mouvement $\rho \mathbf{u}$, l'énergie cinétique du fluide e sont calculées en chaque point à partir des moments de la fonction de distribution :

$$\rho = m \int f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) . d\mathbf{c} \quad (3.2)$$

$$\rho \mathbf{u} = m \int f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) . \mathbf{c} . d\mathbf{c} \quad (3.3)$$

$$\rho e + \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{u}\|^2 = \frac{1}{2} m \int f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) . \|\mathbf{c}\|^2 . d\mathbf{c} \quad (3.4)$$

L'évolution spatio-temporelle de la fonction de distribution f est gouvernée par l'équation de Boltzmann :

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) + \frac{\mathbf{F}^{ext}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} \quad (3.5)$$

dans laquelle la partie à gauche de l'équation décrit la propagation des particules fluides le long des trajectoires dans l'espace des phases (l'espace des variables (\mathbf{x}, \mathbf{c})) associées au champs de force externe \mathbf{F}^{ext} , tandis que la partie à droite représente le bilan statistique des collisions entre particules.

Dans le cadre de collision binaires et en faisant l'hypothèse du *chaos moléculaire*, c'est-à-dire qu'avant et après le choc, les vitesses de deux particules sont décorréliées. Le terme de collision peut alors s'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} = \int_{\mathbf{c}_2} \int_{\alpha'} (f(\mathbf{c}'_1) f_1(\mathbf{c}'_2) - f(\mathbf{c}_1) f_1(\mathbf{c}_2)) \|\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2\| \sigma(\alpha') d\alpha' d\mathbf{c}_2 \quad (3.6)$$

dans laquelle $f(\mathbf{c}_1)$, $f_1(\mathbf{c}_2)$ représentent les valeurs de la fonction de distribution pour 2 particules ayant des vitesses \mathbf{c}_1 et \mathbf{c}_2 respectivement, au moment et à l'endroit de la collision décrite dans la (3.6) ; leurs vitesses après le choc deviennent \mathbf{c}'_1 et \mathbf{c}'_2 correspondant à des distributions $f(\mathbf{c}'_1)$, $f_1(\mathbf{c}'_2)$, respectivement ; $\sigma(\alpha')$ est la section efficace de la diffusion associée à l'angle solide $d\alpha'$.

Boltzmann a montré que ce terme de collision était valable pour les gaz dilués et Chapman et Enskog [84] ont montré qu'il était possible, en prenant en compte des collisions complexes entre particules, d'utiliser une telle approche pour les gaz denses et les liquides. Par la suite, ces auteurs ont également établi un lien direct entre l'équation de Boltzmann et celles de Navier-Stockes.

La résolution de l'équation de Boltzmann est difficile à cause de la complexité du terme de collision. Bhatnagar–Gross–Krook (BGK) [88] ont donc proposé une approximation de ce terme. L'idée ici est que la collision entre des particules fluides,

lorsque le système subit une petite perturbation, peut être décrite comme la relaxation en un temps donné de ces particules vers l'état d'équilibre thermodynamique, i.e. :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col} = \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) - f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)}{\tau} \quad (3.7)$$

où $f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ est la fonction de distribution à l'état d'équilibre thermodynamique et le paramètre τ , appelé "temps de relaxation", est une mesure de la rapidité à laquelle le fluide procède vers l'état d'équilibre après la perturbation.

3.3 Fonction de distribution d'équilibre

La fonction de distribution dans un système à l'état d'équilibre annule le terme de collision de l'équation (3.5), on a : $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col} = 0$ qui entraîne que :

$$f^{eq}(\mathbf{c}_1)f^{eq}(\mathbf{c}_2) = f^{eq}(\mathbf{c}'_1)f^{eq}(\mathbf{c}'_2) \quad (3.8)$$

En prenant le logarithme de l'équation (3.8), on obtient :

$$\ln f^{eq}(\mathbf{c}_1) + \ln f^{eq}(\mathbf{c}_2) = \ln f^{eq}(\mathbf{c}'_1) + \ln f^{eq}(\mathbf{c}'_2) \quad (3.9)$$

Cette équation signifie que $\ln f^{eq}$ possède une propriété d'invariance vis-à-vis de la collision. Il peut s'écrire en fonction d'autres invariants de collision tels que : la masse m , la quantité de mouvement $m\mathbf{c}$, l'énergie cinétique $\frac{1}{2}m\mathbf{c}^2$, comme suit :

$$\ln f^{eq} = A + B_i \cdot mc_i + C \frac{1}{2}m\|\mathbf{c}\|^2 \quad (3.10)$$

soit :

$$f^{eq} = \exp(A + B_i \cdot mc_i + C \frac{1}{2}m\|\mathbf{c}\|^2) \quad (3.11)$$

où A , B_i , C sont des constantes, déterminées par des équations (3.2), (3.3) et (3.4) pour le cas $f = f^{eq}$. Finalement, on obtient la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann :

$$f^{eq} = \rho \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{2k_B T} \|\mathbf{c} - \mathbf{u}\|^2\right) \quad (3.12)$$

où k_B est la constante de Boltzmann, T est la température du système.

3.4 Équation LBM-BGK à un temps de relaxation

Pour la résolution numérique de la fonction de distribution f , le temps est découpé en intervalles élémentaires d'amplitude fixe Δt , et le domaine fluide est

discrétisé selon un réseau régulier. Le cas d'un réseau rectangulaire 2D avec le schéma $D2Q9$ [7] utilisé dans cette étude, est illustré dans la figure 3.1, où h est la distance entre les nœuds voisins du réseau. Comme le montre la même figure, l'espace des vitesses est par conséquent également discrétisé, c'est-à-dire réduit à un nombre fini $\{\mathbf{c}_\alpha\}_{\alpha=0,1,\dots,N}$ de vecteurs vitesse qui permettent aux particules fluides dans le réseau de passer d'un nœud à un nœud voisin (ou de rester au niveau du nœud courant) dans un intervalle de temps Δt . Les vecteurs vitesse dans le schéma $D2Q9$ sont définis par :

$$\mathbf{c}_\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha = 0 \\ c \left(\cos \frac{(\alpha-1)\pi}{2} \mathbf{e}_1 + \sin \frac{(\alpha-1)\pi}{2} \mathbf{e}_2 \right), & \alpha = 1, 2, 3, 4 \\ \sqrt{2}c \left(\cos \frac{(2\alpha-9)\pi}{4} \mathbf{e}_1 + \sin \frac{(2\alpha-9)\pi}{4} \mathbf{e}_2 \right), & \alpha = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (3.13)$$

où $c = h/\Delta t$ est la vitesse caractéristique du réseau.

En cohérence avec la discrétisation ci-dessus, à chaque nœud du réseau, la fonction de distribution ne prend que $N + 1$ valeurs partielles f_α . Dans ce contexte, suite à l'approximation BGK présentée dans la section 3.2 et en négligeant les forces volumiques, l'équation Boltzmann sur réseau peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Delta t}{\tau} (f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)) \quad (3.14)$$

Une fois déterminées les valeurs de la fonction de distribution, les macroscopiques telles que la densité de masse ou la vitesse macroscopique sont déterminées comme les moments d'ordre 0 et 1, par rapport aux vitesses du réseau, de la fonction de distribution :

$$\rho = m \sum_{\alpha=0}^8 f_\alpha, \quad \mathbf{u} = \frac{m}{\rho} \sum_{\alpha=0}^8 f_\alpha \mathbf{c}_\alpha \quad (3.15)$$

Ainsi, de manière analogue, le tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = m \sum_{\alpha=0}^8 f_\alpha \mathbf{c}_\alpha \otimes \mathbf{c}_\alpha \quad (3.16)$$

Afin de simuler correctement les écoulements incompressibles, la méthode est adaptée au régime à faible nombre de Mach ($Ma \ll 1$). Pratiquement, une définition possible du nombre de Mach (lié au réseau discrétisé du fluide) est $Ma = \|\mathbf{u}\|/c$, étant $c_s = c/\sqrt{3}$ est la vitesse de propagation du son dans le schéma $D2Q9$. Dans la limite $Ma \rightarrow 0$, la fonction de distribution d'équilibre de Maxwell-Boltzmann, discrétisée à l'ordre 2, s'obtient en développant l'expression (3.12) :

$$f_\alpha^{eq} = w_\alpha \frac{\rho}{m} \left(1 + 3 \frac{\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9}{2} \frac{(\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2} \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{c^2} \right) + \mathcal{O}(M^3) \quad (3.17)$$

avec

$$w_\alpha = \begin{cases} \frac{4}{9} & \alpha = 0 \\ \frac{1}{9} & \alpha = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{1}{36} & \alpha = 5, 6, 7, 8 \end{cases}$$

La variation de la densité du fluide est supposée suffisamment faible, i.e.,

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \mathcal{O}(Ma^2) \quad (3.18)$$

où ρ_0 est une valeur de référence. En s'appuyant sur cette hypothèse, le modèle de l'équation Boltzmann sur réseau permet de retrouver les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible, à une erreur de l'ordre $\mathcal{O}(Ma^2)$ sur le bilan de la masse et $\mathcal{O}(Ma^3)$ sur le bilan de quantité de mouvement :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \mathcal{O}(Ma^2) \quad (3.19)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \mathbf{u}) \mathbf{u} \right) = -\operatorname{grad} p + \eta \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} + \mathcal{O}(Ma^3)$$

où

$$p = c_s^2 \rho, \quad \eta = \frac{\rho_0}{3} \left(\frac{\tau}{\Delta t} - \frac{1}{2} \right) \frac{h^2}{\Delta t} \quad (3.20)$$

sont respectivement la pression, la viscosité dynamique de l'écoulement fluide.¹

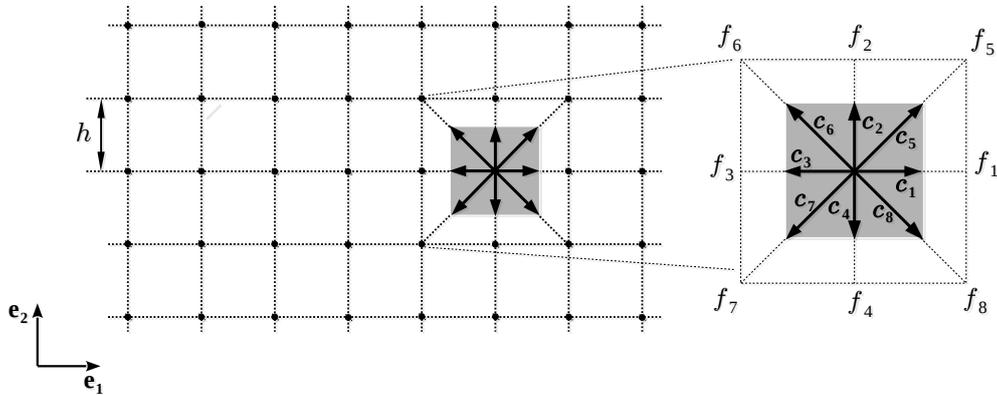


Figure 3.1 – Réseau rectangulaire et schéma D2Q9

1. Le terme à droite de (3.19) est identifié dans la Référence [90] par $(\rho_0 c_s^2)^{-1} \partial p / \partial t$. L'incompressibilité est assurée pour le cas de l'écoulement stationnaire. Cependant pour le cas de l'écoulement instationnaire, un contrôle supplémentaire sur la variation temporelle de la pression imposée est nécessaire comme discuté dans la même référence.

3.5 Équation LBM-MRT à temps de relaxation multiples

Dans l'équation (3.14), la relaxation des fonctions de distribution partielles est contrôlée par un seul paramètre (i.e., le temps de relaxation τ). Par conséquent, les quantités telles que la densité de masse, de quantité de mouvement sont relaxées vers l'état d'équilibre avec le même temps caractéristique τ . Le modèle LBM-BGK apparaît donc un peu restrictif car des phénomènes physiques différents peuvent retrouver leur états d'équilibre en des temps différents. De plus, ce modèle impose le nombre de Prandtl² est égal à 1, impliquant un même ordre de grandeur pour les effets visqueux et les effets thermiques. Ces défauts évidents du modèle LBM-BGK peuvent être dépassées en considérant un nouveau modèle avec des temps de relaxation multiples [91, 92, 93, 14]. Cette dernière approche est basée sur l'hypothèse que des différentes moments de la fonction de distribution (c'est-à-dire autant de moyennes ayant pour coefficients des puissances de différents ordre des vitesses du réseau) relaxent linéairement avec des temps caractéristiques différents.

Des définitions appropriées permettent d'identifier un ensemble $\{m_\gamma\}_{\gamma=0,1,\dots,N}$ de moments de la fonction de distribution, en bijection avec l'ensemble de ses valeurs directionnelles f_0, f_1, \dots, f_8 . Pour le cas d'un réseau rectangulaire de type $D2Q9$ les neuf moments recherchés peuvent être identifiés dans la forme suivante [93] :

$$m_0 = \rho' \quad (3.21)$$

$$m_1 = -4\rho' + 6e' \quad (3.22)$$

$$m_2 = 4\rho' - 21e' + 18(e')^2 \quad (3.23)$$

$$m_3 = \rho'u'_1 \quad (3.24)$$

$$m_4 = -5\rho'u'_1 + 6q'_1 \quad (3.25)$$

$$m_5 = \rho'u'_2 \quad (3.26)$$

$$m_6 = -5\rho'u'_2 + 6q'_2 \quad (3.27)$$

$$m_7 = 2(\text{dev } \boldsymbol{\sigma}')_{11} \quad (3.28)$$

$$m_8 = (\text{dev } \boldsymbol{\sigma}')_{12} \quad (3.29)$$

dans lesquelles, e est la densité d'énergie thermique du fluide, q_1 et q_2 sont des composantes cartésiennes du vecteur de flux thermique et $\text{dev } \boldsymbol{\sigma}$ est le déviateur

2. Le nombre de Prandtl (Pr) est défini par : $Pr = \frac{\mu}{\rho\alpha_T}$ où α_T est la diffusivité thermique en $[\text{m}^2\text{s}^{-1}]$. Ce nombre compare la rapidité des phénomènes thermiques et des phénomènes hydrodynamiques dans un fluide. Le nombre de Prandtl de l'eau dans les conditions normales est proche à 7.

(partie visqueuse) du tenseur de contrainte du fluide³. On note que le symbole virgule représente les quantités adimensionnelles, obtenues à partir des mêmes quantités métriques pertinentes d'après une normalisation par des unités du réseau (i.e., m , h et Δt). Plus de détails sur la détermination de ces moments peuvent être trouvés dans [93, 94]. Par l'introduction de la matrice de passage \mathbf{M} qui permet de passer de l'espace des vitesses discrétisés à l'espace des moments de la fonction de distributions, on obtient

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{m}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} f'_0 \\ f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ f'_4 \\ f'_5 \\ f'_6 \\ f'_7 \\ f'_8 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Conformément la (3.30), l'équation de Boltzmann sur réseau à un temps de relaxation (3.14) est remplacée par :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = - \sum_{\beta, \gamma=0}^8 M_{\alpha\beta}^{-1} S_{\beta\gamma} (m_\gamma(\mathbf{x}, t) - m_\gamma^{eq}(\mathbf{x}, t)) \quad (3.31)$$

où $M_{\alpha\beta}^{-1}$ et m_γ désignent respectivement les coefficients de \mathbf{M}^{-1} et les composantes de \mathbf{m} . Les scalaires m_γ^{eq} sont calculés comme les m_γ mais sur la base de la distribution d'équilibre de Maxwell-Boltzmann. Dans la même équation, $S_{\beta\gamma}$ représente chacun des coefficients d'une matrice diagonale contenant les différents temps de relaxation :

$$\mathbf{S} = \text{diag}(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8)$$

On remarque, que dans ce cadre, le modèle LBM-BGK est un cas particulier où tous les coefficients sur la diagonale de \mathbf{S} sont identiques $s_0 = s_1 = \dots = s_8 = \Delta t/\tau$. Il convient également de mentionner que s_0 , s_3 et s_5 n'ont aucun effet dans le calcul car ces valeurs propres sont directement liées aux invariants de collision ρ et $\rho \mathbf{u}$. Les autres coefficients de la matrice \mathbf{S} sont choisis dans l'intervalle $[0, 2]$ afin de maintenir la stabilité numérique.

3. La densité d'énergie e et le vecteur de flux d'énergie \mathbf{q} peuvent être déterminés (jusqu'à l'ordre $O(Ma^3)$ avec $Ma \rightarrow 0$) à partir des moments de la fonction de distribution $e = \frac{m}{2} \sum_{\alpha=0}^8 f_\alpha \|\mathbf{c}_\alpha\|^2$ et $\mathbf{q} = \frac{m}{2} \sum_{\alpha=0}^8 f_\alpha \|\mathbf{c}_\alpha\|^2 \mathbf{c}_\alpha$.

Enfin, l'application de l'expansion de Chapman-Enskog pour la dérivation du modèle LBM-MRT nous permet de retrouver encore une fois les équations de Navier-Stokes [84]. En prenant $s_7 = s_8$ pour imposer l'isotropie du modèle, on obtient la même expression de la viscosité dynamique telle que donnée par l'équation (3.20) [93] :

$$\eta = \frac{\rho_0}{3} \left(\frac{1}{s_7} - \frac{1}{2} \right) \frac{h^2}{\Delta t} = \frac{\rho_0}{3} \left(\frac{1}{s_8} - \frac{1}{2} \right) \frac{h^2}{\Delta t} \quad (3.32)$$

3.6 Algorithme de calcul

Pour l'implémentation numérique de l'équation de Boltzmann sur réseau, l'équation (3.14) est d'abord réécrite sous la forme :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = f_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau} (f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)) \quad (3.33)$$

et puis décomposée en 2 étapes :

$$f_\alpha^c(\mathbf{x}, t) = f_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau} (f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)) \quad (3.34)$$

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = f_\alpha^c(\mathbf{x}, t) \quad (3.35)$$

La fonction de distribution post-collision $f_\alpha^c(\mathbf{x}, t)$, définie dans l'étape de collision (3.34), exprime les valeurs de la fonction de distribution suite à l'effet des collisions entre particules fluides à l'instant t . La propagation, par la suite, durant un pas de temps Δt , est accomplie par l'équation (3.35). On notera que tous les calculs sont réalisés localement en chaque nœud du réseau dans l'étape de collision. L'échange d'information entre deux différents nœuds est seulement nécessaire dans l'étape de propagation. Ces aspects rendent particulièrement simple l'implémentation numérique de la méthode LBM.

3.7 Conditions aux limites

La résolution de tout problème mécanique nécessite l'écriture de conditions aux limites. Des conditions aux limites de différent type peuvent être décrites, selon la méthode de Boltzmann sur réseau, à travers le choix des valeurs de la fonction de distribution pour les nœuds correspondant à la frontière du système. Cette section est consacrée à l'implémentation de conditions aux limites rencontrées fréquemment en mécanique des fluides, telles que : les conditions périodiques, de non-glissement aux frontières solides, de pression imposée.

3.7.1 Conditions périodiques

On considère l'exemple d'un écoulement en circuit fermé, pour le quel l'entrée et la sortie sont traitées comme lignes de nœuds fluides voisins. La figure 3.2 montre la mise en œuvre de cette condition en considérant l'exemple d'un nœud au niveau de la sortie de l'écoulement. On constate que les particules fluides portées par les distributions f_1 , f_5 , f_8 seront advectées, après un pas de temps Δt , aux 3 nœuds "voisins" de la frontière opposée (l'entrée) selon les directions des vitesses, respectivement, \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_5 et \mathbf{c}_8 .

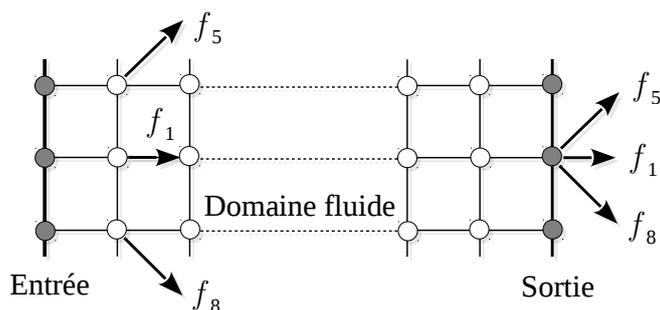


Figure 3.2 – Illustration de condition de périodicité dans le cas 2D

3.7.2 Condition de non-glissement (Bounce-back)

De fréquente application en mécanique des fluides est l'hypothèse de non glissement le long d'une paroi : c'est-à-dire de nullité de la vitesse de l'écoulement dans la direction tangente à la paroi. Cette hypothèse accompagne normalement celle d'imperméabilité de la paroi (nullité de la composante de la vitesse dans la direction normale à la paroi). Dans l'algorithme LBM, l'implémentation conjointe de ces deux conditions est traité normalement sous forme de "rebondissement" (bounce-back) des particules fluides le long de la paroi. L'implémentation proposé dans [95] est montrée de manière schématique dans la figure 3.3.

On considère maintenant une frontière (ligne grise) située à une demie longueur ($h/2$) de distance de la dernière ligne de nœuds fluides. Les particules fluides correspondant aux valeurs (post-collision) f_4 , f_7 et f_8 au temps t_0 de la fonction de distribution s'éloignent du nœud fluide et rebondissent contre la paroi solide au temps $t + \Delta t/2$. Elles inversent leurs vitesse (en gardant la même direction) et reviennent à la même particule fluide au temps $t + \Delta t$, sous forme des valeurs f_2 , f_5 et f_6 (respectivement) de la fonction de distribution. Une forme équivalente de la condition de non glissement peut-être exprimée à travers une condition de

rebondissement étalée sur deux pas de temps, pour une parois solide à une distance h de la dernière ligne de nœuds fluides [27, 28].

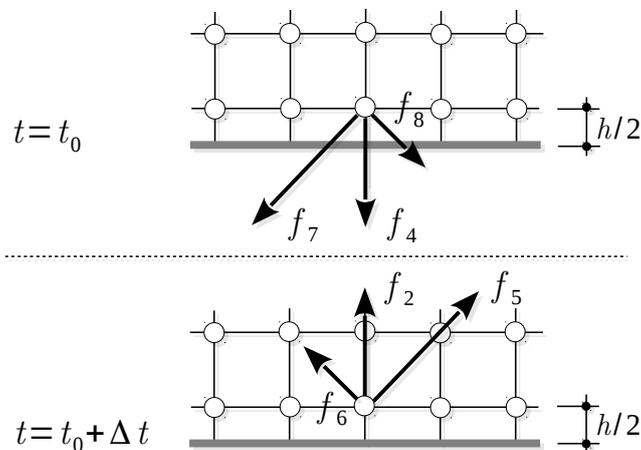


Figure 3.3 – Implémentation de la condition de non-glisement

3.7.3 Condition de pression (vitesse) imposée

Dans l'étape de propagation de l'algorithme LBM, les fonctions de distribution d'un nœud sont advectées à partir des nœuds voisins suivant les directions des vitesses discrétisées. Donc, au niveau des nœuds à la frontière, après cette étape, les valeurs de la fonction de distribution suivant certains vitesses (ou directions) sont connues, d'autres restent inconnues à cause d'un manque d'information de l'extérieur du domaine fluide. Les valeurs inconnues de la fonction de distribution doivent être déterminées selon des critères appropriés. Il est en particulier possible de calculer les valeurs inconnues de la fonction de distribution afin d'obtenir la pression ou la vitesse souhaitées sur la frontière. Pour cela, on considère d'abord un nœud à l'entrée d'un écoulement comme illustré sur la figure 3.4.

À ce nœud-ci, après une étape de propagation, les distributions $f_0, f_2, f_3, f_4, f_6, f_7$ sont connues car elles sont advectées à partir des nœuds voisins à l'intérieur du domaine fluide, tandis que les distributions f_1, f_5, f_8 restent inconnues et peuvent être ajustées afin de créer une pression p_{in} ou une vitesse \mathbf{u}_{in} (ou bien encore des conditions mixtes pression/vitesse).

Dans un premier temps le cas d'une pression imposée (i.e., condition de Dirichlet) est étudié. Une telle pression va entraîner une vitesse au niveau de l'entrée de l'écoulement qui est tout d'abord inconnue. Afin d'achever l'implémentation, les

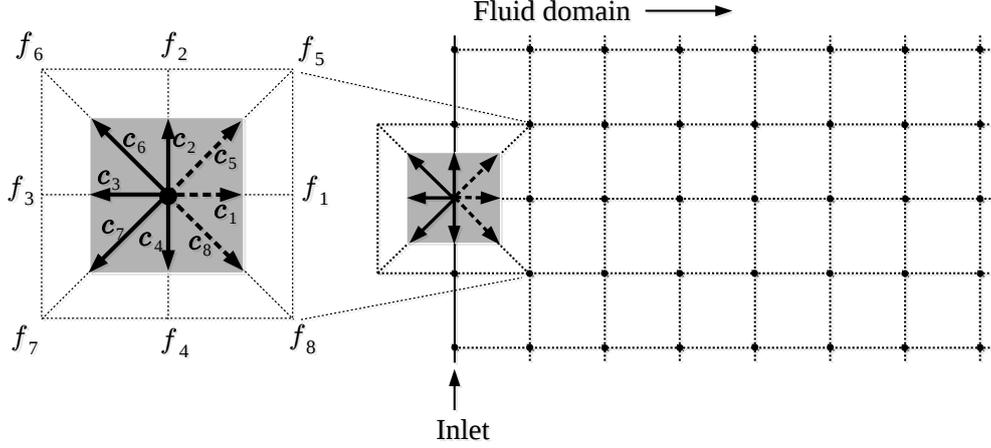


Figure 3.4 – Noeud générique à l'entrée de l'écoulement

deux composantes $\{u_1; u_2\}$ de cette vitesse doivent être également calculées. Basée sur les équations (3.15), (3.20) et en supposant que la composante de la vitesse parallèle à la frontière d'entrée est nulle (i.e., $u_2 = 0$), on obtient les relations :

$$m \sum_{\alpha=0}^8 f_{\alpha} = \rho_{in} = \frac{p_{in}}{c_s^2} \quad (3.36)$$

$$m \sum_{\alpha=0}^8 f_{\alpha} \mathbf{c}_{\alpha} \cdot \mathbf{e}_1 = \rho u_1 \quad (3.37)$$

$$m \sum_{\alpha=0}^8 f_{\alpha} \mathbf{c}_{\alpha} \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \quad (3.38)$$

Pour la résolution d'un tel système d'équations à 4 inconnues f_1, f_5, f_8, u_1 , une quatrième équation est indispensable. Comme proposé dans [96], la condition de rebondissement est appliquée sur la partie non-équilibrée de la fonction de distribution suivant la direction normale à la frontière, i.e., :

$$f_1 - f_1^{eq} = f_3 - f_3^{eq} \quad (3.39)$$

Finalement, on obtient :

$$u_1 = 1 - (f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_3 + f_6 + f_7)) \frac{c_s^2}{p_{in}}$$

$$f_1 = f_3 + \frac{2}{3} \frac{p_{in}}{c_s^2}$$

$$f_5 = f_7 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \frac{p_{in}}{c_s^2} u_1$$

$$f_8 = f_6 + \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \frac{p_{in}}{c_s^2} u_1$$

Par un simple changement de la variable de contrôle et supposant toujours nulle la composante de vitesse parallèle à la frontière, il est possible d'imposer la valeur de la composante normale. Par une différente combinaison des (3.36)- (3.37) ont obtient dans ce cas les équations suivantes, permettant la détermination des quantités inconnues : ρ_{in} , f_1 , f_5 , f_8 .

$$\rho_{in} = \frac{1}{1 - u_1} (f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_3 + f_6 + f_7))$$

$$f_1 = f_3 + \frac{2}{3} \rho_{in} u_1$$

$$f_5 = f_7 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \rho_{in} u_1$$

$$f_8 = f_6 + \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \rho_{in} u_1$$

3.8 Validation du code LBM

Basée sur l'algorithme de la méthode Boltzmann sur réseau détaillée dans les sections précédentes de ce chapitre, un code 2D a été développé pour la simulation des écoulements fluides en prévision de son couplage avec un code DEM, également développé en interne. Cette section est consacrée à la validation du code LBM, avec la prise en compte des modèles LBM-BGK et LBM-MRT, sur la base de l'étude de configurations classiques d'écoulement pour les fluides incompressibles. Les deux écoulements Poiseuille et Couette plan sont simulés en utilisant à la fois les modèles LBM-BGK et LBM-MRT tandis que pour la simulation de l'écoulement en Cavité entraînée, seul modèle LBM-MRT est utilisé.

3.8.1 Écoulement de Poiseuille

On considère un écoulement fluide dans un conduit 2D formé par deux plaques planes parallèles, écartées d'une distance $H = 2H_0$ et de longueur $L = 10H_0$ (figure 3.5).

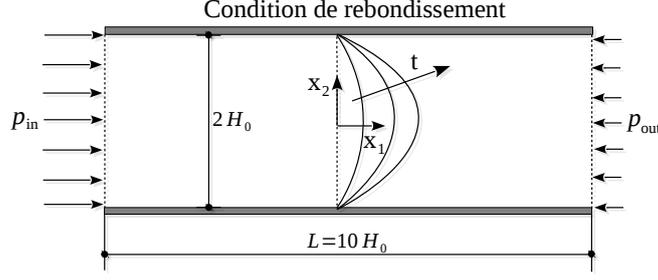


Figure 3.5 – Configuration géométrique de l’écoulement Poiseuille simulé

L’écoulement est entraîné par une différence de pression $\Delta p = p_{in} - p_{out}$ entre l’entrée et la sortie. Les caractéristiques mécaniques du fluide considéré sont semblables à celle de l’eau à température et pression normales. Au niveau des parois du conduit, la condition de non-glissement. On donne au tableau 3.1, les paramètres géométriques, physiques et numériques utilisés dans la simulation. Pour le modèle LBM-MRT, au niveau de la matrice de relaxation S , les deux composantes $s_7 = s_8 = 1/\tau$ sont déterminées pour avoir la viscosité de l’eau selon l’équation (3.32), et les composantes restantes ont été fixées identiques à celles suggérées par Du et al. [14] ($s_0 = s_3 = s_5 = 0$ est optimisé pour les trois moments constants durant la collision, $s_1 = 1.1, s_2 = 1$ et $s_4 = s_6 = 1.2$ est imposé par l’utilisation de la condition de rebondissement).

Largeur du conduit, H	$4 \cdot 10^{-4}$	[m]
Longueur du conduit, L	$2 \cdot 10^{-3}$	[m]
Masse volumique du fluide, ρ_f	10^3	[kg m $^{-3}$]
Viscosité dynamique, η	10^{-3}	[N s m $^{-1}$]
Différence de pression imposée, Δp	1	[N m $^{-2}$]
Résolution spatiale, h	10^{-5}	[m]
Vitesse du réseau, c	1	[m s $^{-1}$]
Temps de relaxation, τ	0.8	[–]

Tableau 3.1 – Paramètres de l’écoulement Poiseuille simulé

La solution analytique de l’écoulement de Poiseuille, en tenant compte de l’évolution dans le temps du profil de vitesse d’une section transversale du conduit s’écrit [97] :

$$u_1(x_2, t) = \frac{GH_0^2}{2} \left[\left(1 - \frac{x_2^2}{H_0^2} \right) - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\delta_n)}{\delta_n^3} \cdot \cos\left(\frac{\delta_n x_2}{H_0}\right) \cdot \exp\left(\frac{-\delta_n^2 \eta t}{\rho_f H_0^2}\right) \right] \quad (3.40)$$

où $\delta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}$ et $G = -\frac{1}{\eta} \cdot \frac{\Delta p}{L}$

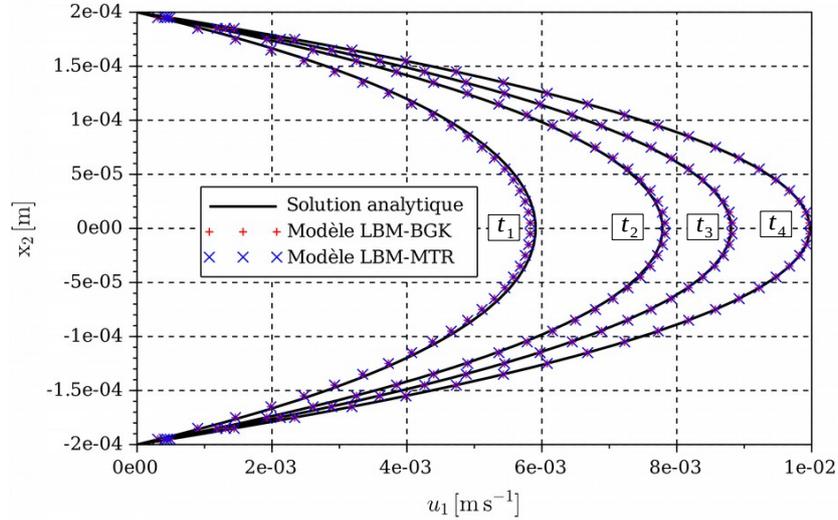


Figure 3.6 – Simulation de l’écoulement de Poiseuille : Évolution du profil de la vitesse horizontale à $t_1 = 0.015$ s, $t_2 = 0.025$ s, $t_3 = 0.035$ s, $t_4 = 0.1$ s

La figure 3.6 montre une très bonne adéquation entre les résultats numériques fournis par deux modèles LBM-BGK, LBM-MRT et la solution analytique aux instants considérés, pendant le régime transitoire à $t_1 = 0.015$ s, $t_2 = 0.025$ s, $t_3 = 0.035$ s et permanent à $t_4 = 0.1$ s. Le profil de vitesse est tracé dans la section située au milieu du conduit.

3.8.2 Écoulement de Couette plan

L’écoulement dit de Couette plan est de type cisaillement périodique. Dans cette configuration, illustré dans la figure 3.7, le fluide se trouve entre deux plaques planes infinies dont la plaque inférieure est en mouvement à une vitesse constante tandis que la supérieure reste immobile. Les caractéristiques mécaniques du fluide considéré sont semblables à celle de l’eau à température et pression normales.

On donne dans le tableau 3.2, les paramètres géométrique, physiques et numériques de la simulation. Pour le modèle LBM-MRT, au niveau de la matrice de relaxation \mathbf{S} , les deux composantes $s_7 = s_8 = 1/\tau$ sont déterminées pour avoir la viscosité de l’eau selon l’équation (3.32), et les composantes restantes ont été fixées identiques à celles suggérées par Du et al. [14]. Au niveau de la plaque supérieure, la condition de non-glissement est utilisée tandis que la condition de périodicité est

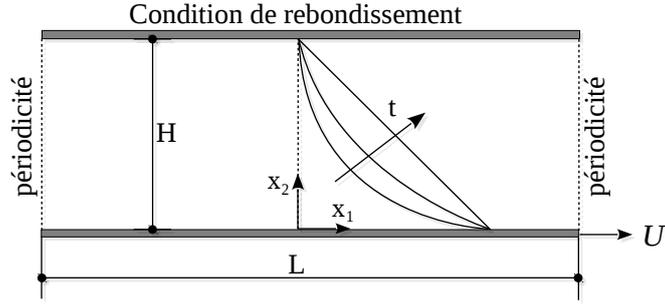


Figure 3.7 – Configuration géométrique de l’écoulement Couette plan

appliquée aux deux frontières en entrée et sortie du conduit. La solution analytique de l’écoulement de Couette plan s’écrit [97] :

$$u_1(x_2, t) = U \left[\left(1 - \frac{x_2}{H}\right) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x_2/H)}{n\pi} \cdot \exp\left(\frac{-n^2 \pi^2 \eta t}{\rho_f H^2}\right) \right] \quad (3.41)$$

Largeur du conduit, H	$4 \cdot 10^{-4}$	[m]
Longueur du conduit, L	$2 \cdot 10^{-3}$	[m]
Masse volumique du fluide, ρ_f	10^3	[kg m ⁻²]
Viscosité dynamique, η	10^{-3}	[N s m ⁻¹]
Vitesse de cisaillement, U	$3 \cdot 10^{-2}$	[m s ⁻¹]
Résolution spatiale, h	10^{-5}	[m]
Vitesse du réseau, c	1	[m s ⁻¹]
Temps de relaxation, τ	0.8	[–]

Tableau 3.2 – Paramètres de la simulation pour un écoulement de Couette plan

La figure 3.8 présente le profil de vitesse horizontale, issu de la simulation numérique en utilisant deux modèles LBM-BGK et LBM-MRT. Ce dernier se trouve en très bon accord avec la solution analytique pour les temps étudiés, pendant le régime transitoire à $t_1 = 0.005$ s, $t_2 = 0.01$ s, $t_3 = 0.02$ s et permanent à $t_4 = 0.1$ s

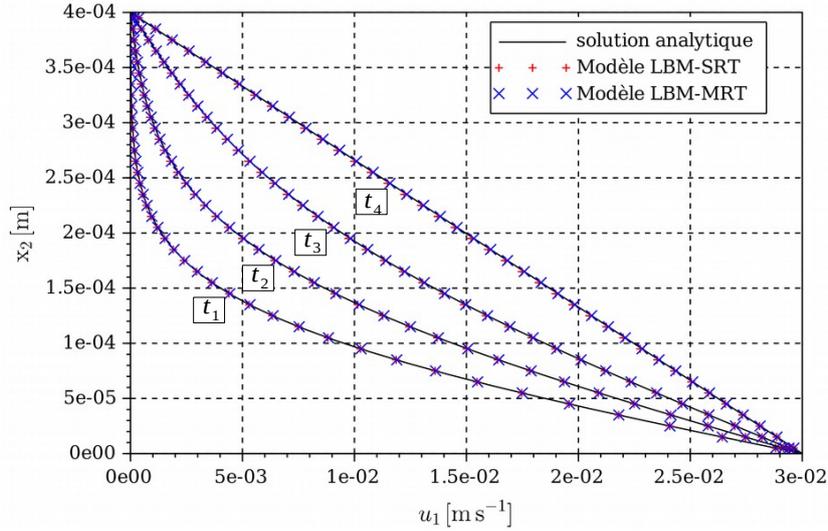


Figure 3.8 – Évolution du profil de la vitesse horizontale à $t_1 = 0.005$ s, $t_2 = 0.01$ s, $t_3 = 0.02$ s, $t_4 = 0.1$ s

3.8.3 Écoulement en cavité entraînée

Pour le cas des nombres de Reynolds élevés, l'écoulement en cavité entraînée est souvent utilisé pour la validation de codes de calcul, d'une part par la simplicité de sa configuration géométrique ainsi que des conditions aux frontières impliquées, et d'autre part par la richesse des résultats à comparer. Il s'agit d'un écoulement où le fluide est enfermé dans une cavité carrée de côté L , entraîné par une vitesse de cisaillement constante U appliquée sur la paroi supérieure (figure 3.9). Dans cette section, une série de simulations numériques est réalisée pour des nombres de Reynolds variés : $Re = 100, 400, 1000, 3200, 5000, 7500$ en utilisant le modèle LBM-MRT. On note que le nombre de Reynolds dans la simulation de l'écoulement en cavité entraînée est $Re = U'L'\rho'/\eta'$, où U' est la vitesse de la paroi supérieure, L' est le nombre de nœuds d'une côté de la cavité, ρ' et η' sont respectivement la densité et la viscosité cinétique du fluide.

La configuration géométrique de l'écoulement et ses conditions aux frontières sont détaillées à la figure 3.9. Les paramètres numériques utilisés dans la simulation se composent ; d'un réseau discrétisé 257×257 nœuds qui remplit le domaine fluide ; d'une vitesse de cisaillement de la paroi supérieure $U' = 0.01$ dans le cas où $Re = 100$ et $U' = 0.1$ dans les cas restant ; d'une densité ρ' à la valeur d'unité pour le fluide simulé. Quant à la matrice de temps de relaxation S ,

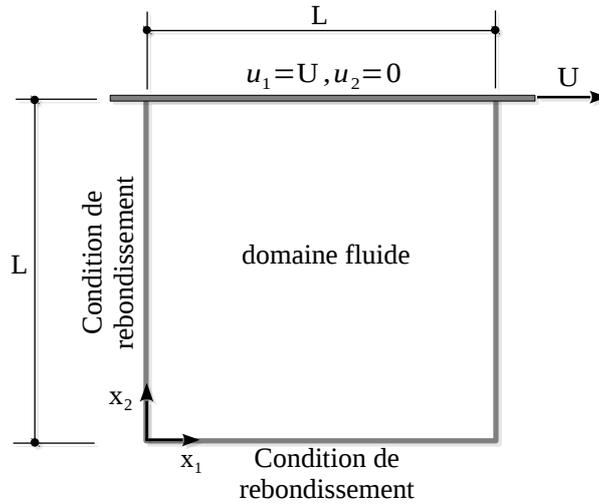


Figure 3.9 – Configuration géométrique de l'écoulement de Cavité entraînée

ses composantes sont choisies dans l'intervalle $[0, 2]$ afin de garantir la stabilité numérique de la simulation. Ces valeurs sont plus particulièrement celle suggérées dans [14] : $s_1 = 1.1$, $s_2 = 1$, $s_4 = s_6 = 1.2$ tandis que s_7, s_8 sont déterminés par l'équation (3.32) afin d'accommoder les valeurs de viscosité désirées ou bien, de manière équivalente, de varier le nombre de Reynolds.

La série des figures 3.10 montre pour les différents nombres de Reynolds est les lignes de courant de l'écoulement selon les simulation effectuées. Cette figure nous donne une image de la tendance générale de l'écoulement et ainsi de l'effet du nombre de Reynolds dans le développement des zones de vorticité. Le profil de vitesse horizontale (verticale) le long du plan vertical (horizontal, resp.) par le centre géométrique de la cavité est présenté dans la figure 3.11 (3.12, resp.). La vitesse y est représentée normalisée par la vitesse d'entraînement. Un bon accord est montré dans la comparaison entre les résultats obtenus par nos simulations et ceux dans un Benchmark reportés par Ghia et al. [98].

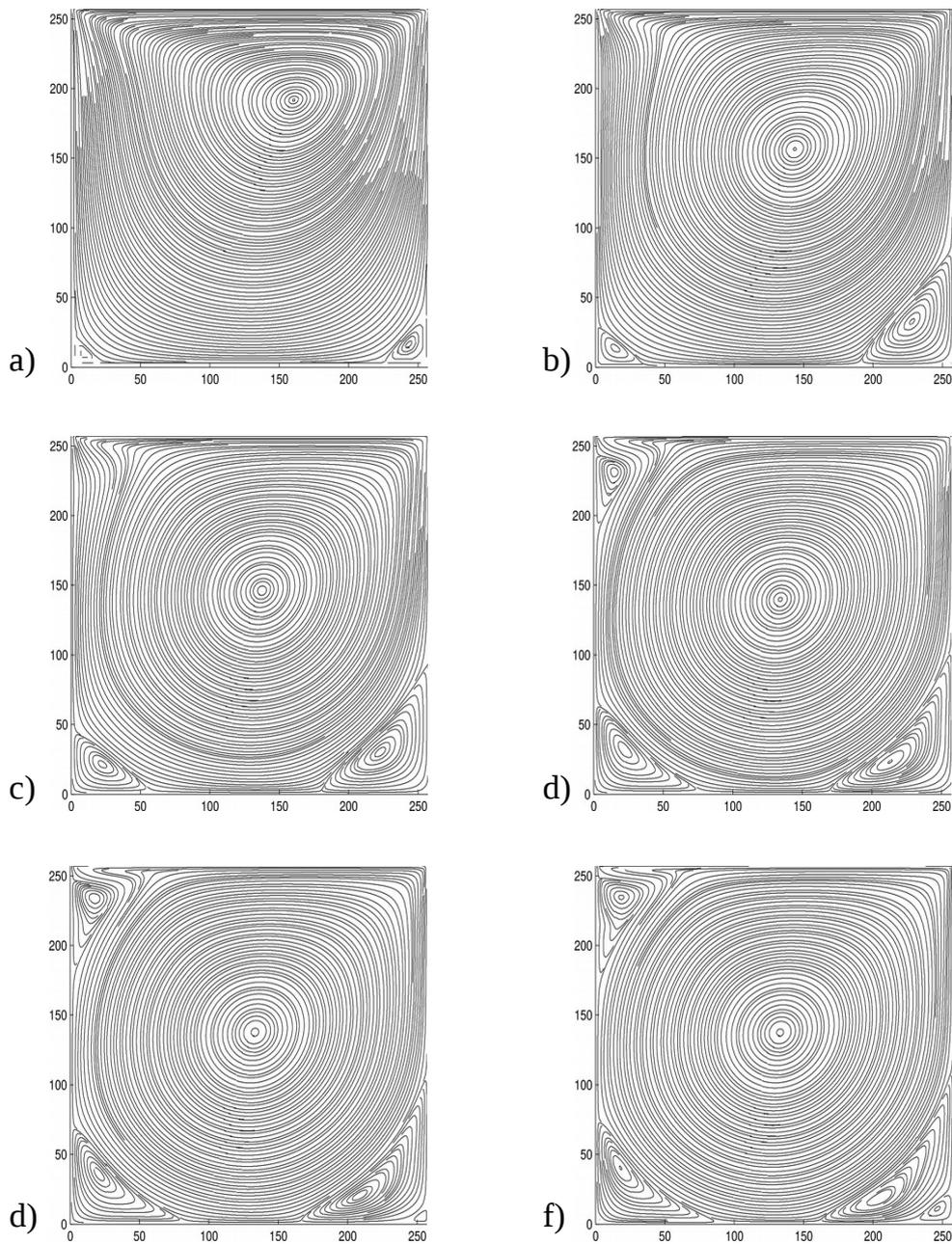


Figure 3.10 – Écoulement en cavité entraînée : lignes de courant correspondant à : (a) $Re = 100$; (b) $Re = 400$; (c) $Re = 1000$; (d) $Re = 2000$; (e) $Re = 5000$; (f) $Re = 7500$

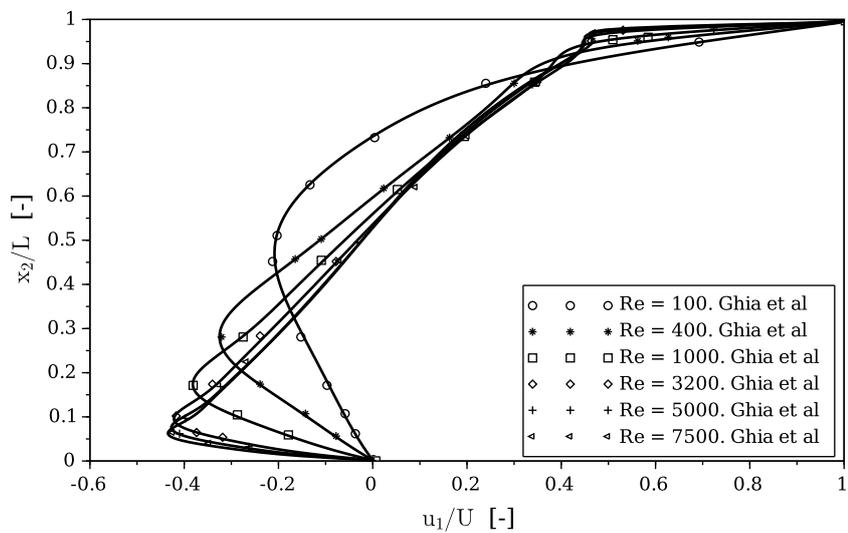


Figure 3.11 – Écoulement en cavité entraînée : profil de vitesse horizontale à travers le centre géométrique de la cavité.

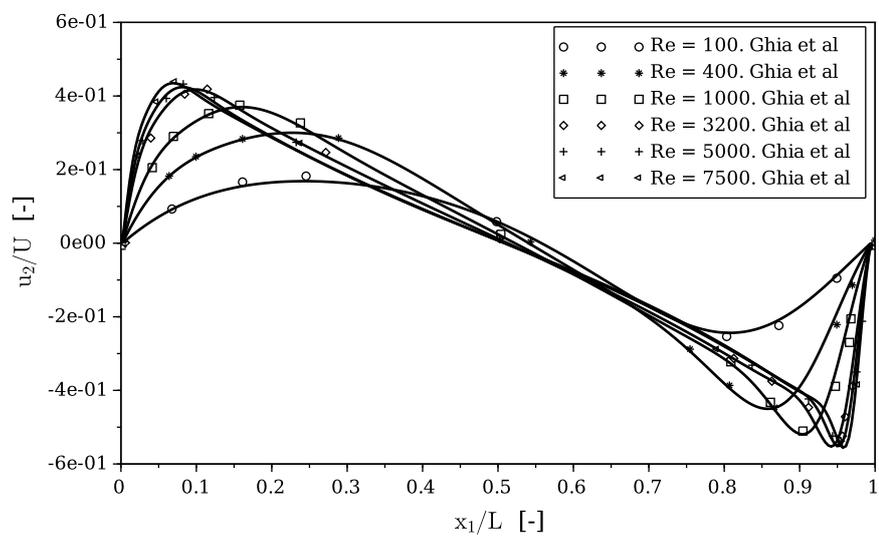


Figure 3.12 – Écoulement en Cavité entraînée : profil de vitesse verticale à travers le centre géométrique de la cavité.

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit des éléments clés de la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) pour la modélisation des écoulements fluides. Nous avons introduit dans un premier temps le concept de fonction de distribution, la distribution d'équilibre de Maxwell-Boltzmann, et l'équation de Boltzmann, parmi les principaux outils de la méthode. Ensuite, la discrétisation de l'équation de Boltzmann a été illustrée à travers le schéma $D2Q9$ pour le cas 2D. Nous avons introduits deux possibles approximations pour le terme de collision dans l'équation de Boltzmann : le modèle BGK à un seul temps de relaxation et le modèle MRT avec des temps de relaxation multiples. L'algorithme de calcul ainsi que les conditions aux limites d'utilisation la plus fréquente ont été aussi présentés pour mener à bien l'implémentation numérique. Enfin, le code développé en interne a été validé par une série de simulations d'écoulements classiques. Les deux modèles BGK et MRT ont été utilisés d'abord pour le cas de l'écoulement de Poiseuille et celui de Couette-Plan. Une comparaison avec les résultats analytiques a permis de constater l'adéquation et la précision de la méthode, qui a été très satisfaisante. Le modèle MRT a été appliqué par la suite pour la simulation de l'écoulement en cavité entraînée afin de confirmer son efficacité (grâce à sa stabilité numérique) dans le cas des nombres de Reynolds élevés. Les résultats de cette simulation ont également été en bonne adéquation avec une solution numérique proposée dans la littérature.

Chapitre 4

Modèle et validation du couplage DEM/LBM

Contents

4.1	Introduction	70
4.2	Traitement des grains en mouvement	70
4.2.1	Représentation des grains dans le réseau fluide	70
4.2.2	Condition de rebondissement interpolée	70
4.3	Force hydrodynamique sur un grain	73
4.4	Problèmes du couplage DEM/LBM	74
4.4.1	Rayon hydraulique	74
4.4.2	Discrétisation spatiale	74
4.4.3	Par de temps de calcul	75
4.4.4	Adimensionalisation des grandeurs physiques	76
4.5	Validation du modèle	77
4.5.1	Écoulement dans un conduit et autour d'un cylindre fixe	77
4.5.2	Écoulement autour d'un cylindre en mouvement	80
4.5.3	Sédimentation d'un grain	82
4.5.4	Sédimentation de deux grains	85
4.6	Conclusion	88

4.1 Introduction

Ce chapitre porte sur la construction du modèle de couplage entre les méthodes : Éléments discrets (DEM) et Boltzmann sur réseau (LBM), présentées dans les chapitres précédents. Ce couplage s’appuie sur la mesure des échanges de quantité de mouvement au niveau des frontières fluide-grains. On s’intéresse dans un premier temps au traitement du mouvement des grains, puis au calcul de la force hydrodynamique sur les grains, ainsi qu’aux aspects relatifs à l’implémentation du modèle tels que la discrétisation spatiale, le pas de temps de calcul, l’adimensionalisation des quantités physiques. Enfin, la validation de ce couplage est concrétisée par une série de simulations numériques impliquant un écoulement autour d’un cylindre fixe ou en mouvement, puis la sédimentation d’un grain, et finalement par la sédimentation de deux grains en interaction dans une boîte fluide au repos.

4.2 Traitement des grains en mouvement

4.2.1 Représentation des grains dans le réseau fluide

La première tâche pour le traitement des grains en mouvement consiste en leur représentation dans le domaine fluide. Comme discuté dans le chapitre précédent, dans la méthode LBM, le domaine fluide est discrétisé selon un réseau régulier dont les nœuds portent des particules fluides. Ces nœuds seront qualifiés de “nœuds fluides”. Par conséquent, la représentation d’un obstacle solide peut être facilement réalisée par un changement du statut des nœuds recouverts par le domaine solide (i.e., de nœuds fluides à nœuds solides). On remarquera que ce changement ne modifie pas la discrétisation du domaine. La figure 4.1 illustre un grain circulaire au sein du réseau, où les nœuds intérieurs et extérieurs sont respectivement des nœuds solides et fluides.

Dans l’implémentation, un algorithme pour la recherche et la mise à jour du statut des nœuds du réseau est indispensable lors du mouvement des grains après chaque pas de temps.

4.2.2 Condition de rebondissement interpolée

L’interaction fluide-grains peut être prise en compte à travers la condition standard de “rebondissement” discutée dans la section 3.7.2. Cette condition considère que la frontière solide se trouve au milieu de deux rangées de nœuds. Une frontière circulaire (cas envisagé ici) est alors approximée par une succession d’escaliers. L’information entre le fluide et le solide est échangée à travers la quantité de mou-

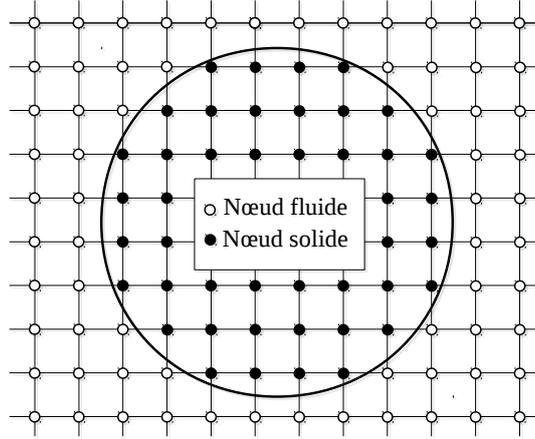


Figure 4.1 – Représentation d’un grain dans le réseau fluide

vement sur cette frontière. Même si la condition standard de “rebondissement” assure une vitesse tangentielle nulle le long de la frontière solide, l’approximation de formes circulaires en forme présentant des escaliers, peut entraîner un changement de la forme géométrique du solide entre deux pas de temps successifs (réaffectation différente de nœuds solides/fluides). Des fluctuations importantes peuvent alors apparaître dans le calcul de la force hydrodynamique. Une approche a été proposée par [57], basée sur une procédure d’interpolation, permettant de préciser la frontière solide par des points arbitraires dans un sous-réseau¹. Cette approche a été utilisée par Lallemand et al. [9] pour simuler un écoulement autour d’un cylindre en mouvement. Les résultats obtenus se sont montrés très satisfaisants.

Pour bien illustrer la condition de rebondissement interpolée, le cas d’une frontière courbe identifiée comme le profil d’un grain est montré dans la figure 4.2. Sur la même figure, les nœuds blancs et noirs sont associés respectivement au domaine fluide et au domaine solide. Les nœuds gris représentent des points d’intersection (e.g., \mathbf{x}_b) de la frontière solide du grain avec les segments reliant les nœuds fluides aux nœuds solides voisins (\mathbf{x}_f et \mathbf{x}_s , respectivement). Les particules fluides en \mathbf{x}_f à l’instant $t + \Delta t$ doivent résulter de l’advection depuis les nœuds voisins après l’étape de collision de l’instant t . Cependant, certaines contributions des particules fluides sont manquantes à cause de la présence du domaine solide situé dans la région des nœuds voisins de \mathbf{x}_f . Ces contributions manquantes doivent être

1. L’efficacité et l’amélioration de la stabilité numérique de cette méthode sont présentées dans la référence [99], sur la base de la comparaison entre différents modèles utilisés pour le traitement des frontières solides.

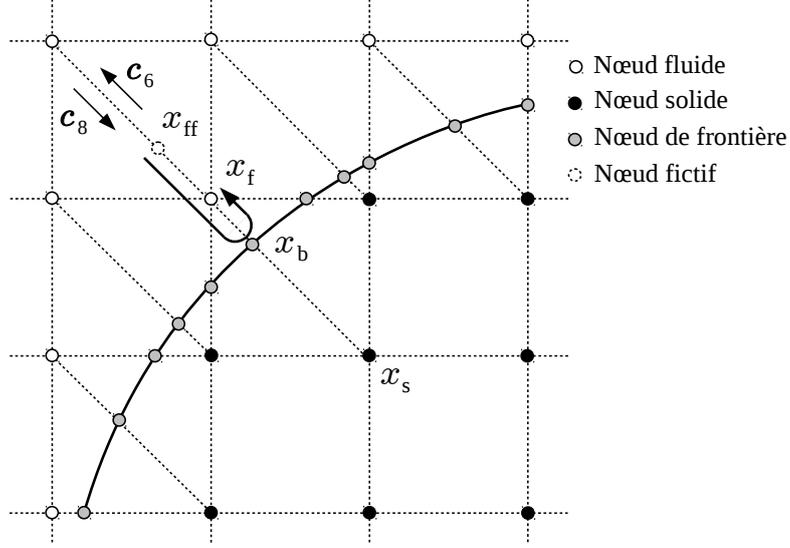


Figure 4.2 – Représentation d’une frontière courbe dans le réseau fluide

déterminées pour compléter l’étape de propagation en \mathbf{x}_f , à l’instant t . Pour cela, on s’appuie sur la condition de rebondissement et sur un argument heuristique, illustré par \mathbf{x}_f et \mathbf{x}_s sur la figure : une particule fluide qui arrive en \mathbf{x}_f après avoir rebondi sur la frontière à \mathbf{x}_b devait être localisée, au pas de temps précédent (t), à la position d’un nœud fluide fictif \mathbf{x}_{ff} , c’est-à-dire à une distance et une vitesse compatibles avec le trajet de la particule. En notant

$$q = \frac{\|\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_b\|}{\|\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_s\|} < \frac{1}{2}$$

comme sur la figure, le nœud fluide fictif se situe en :

$$\mathbf{x}_{ff} = 2q \mathbf{x}_f + (1 - 2q) (\mathbf{x}_f - \Delta t \mathbf{c}_8)$$

où $\mathbf{x}_f - \Delta t \mathbf{c}_8$ est la position du nœud fluide en amont de la position \mathbf{x}_f . La contribution manquante de la fonction de distribution en \mathbf{x}_f est calculée (au temps $t + \Delta t$) comme suit :

$$f_6(\mathbf{x}_f, t + \Delta t) = \underbrace{2q f_8^c(\mathbf{x}_f, t) + (1 - 2q) f_8^c(\mathbf{x}_f - \Delta t \mathbf{c}_8, t)}_{f_8^c(\mathbf{x}_{ff}, t)} + \frac{6\omega_8\rho}{m c^2} \mathbf{c}_8 \cdot \mathbf{v}_b \quad (4.1)$$

où la fonction de distribution post-collision $f_8^c(\mathbf{x}_{ff}, t)$ du nœud fluide fictif est calculée à travers une interpolation linéaire sur les nœuds voisins, et le terme supplémentaire (le dernier terme à droite) représente le transfert de la quantité

de mouvement dû à la vitesse \mathbf{v}_b de la frontière en \mathbf{x}_b . Une généralisation des positions relatives des nœuds fluides, solides et nœuds de frontière nous donne :

$$f_\alpha(\mathbf{x}_f, t + \Delta t) = \begin{cases} 2q f_\alpha^c(\mathbf{x}_f, t) + (1 - 2q) f_\alpha^c(\mathbf{x}_f - \Delta t \mathbf{c}_{\hat{\alpha}}, t) + \frac{6\omega_{\hat{\alpha}}\rho}{m c^2} \mathbf{c}_{\hat{\alpha}} \cdot \mathbf{v}_b, & q < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2q} f_\alpha^c(\mathbf{x}_f, t) + \frac{2q-1}{2q} f_\alpha^c(\mathbf{x}_f, t) + \frac{3\omega_{\hat{\alpha}}\rho}{q m c^2} \mathbf{c}_{\hat{\alpha}} \cdot \mathbf{v}_b, & q \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.2)$$

dans laquelle l'expression pour le cas $q \geq 1/2$ est construite de la même manière que pour $q < 1/2$ et l'indice $\hat{\alpha}$ est tel que $\mathbf{c}_{\hat{\alpha}} = -\mathbf{c}_\alpha$.

Un problème lié à l'implémentation de la frontière solide en mouvement est que certains nœuds de statut solide réintègrent le domaine fluide lors du déplacement de la frontière entre deux pas de temps. En ce cas-là, la valeur des fonctions de distribution des nouveaux nœuds fluides doit être calculée. Comme proposé dans [100, 9], en considérant un tel nœud fluide, la fonction de distribution d'équilibre de Maxwell–Boltzmann est adoptée. La densité du fluide sur ce nœud est déterminée par une interpolation impliquant les nœuds fluides voisins, tandis que la vitesse macroscopique du fluide est obtenue par une extrapolation de la vitesse de la frontière solide au niveau du nœud fluide considéré².

4.3 Force hydrodynamique sur un grain

Dans le modèle de couplage DEM/LBM, les forces fluides sur un grain sont déterminées à travers l'algorithme LBM, et ensuite rajoutées au bilan des forces et des moments agissant sur ce grain dans l'algorithme DEM. Plusieurs méthodes ont été proposées pour le calcul de ces forces hydrodynamiques, telles que la méthode de frontière immergée [58], la méthode d'intégration de contraintes sur la frontière [101] et la méthode des échanges de quantités de mouvement [27, 57]. Pour des raisons de simplicité dans l'implémentation, la dernière méthode est utilisée dans ce travail. Dans la figure 4.2, l'action sur le grain en \mathbf{x}_b est calculée par le transfert de quantité de mouvement à partir du nœud fluide \mathbf{x}_f pendant un pas de temps :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_b) = \frac{mh^2}{\Delta t} (f_8^c(\mathbf{x}_f, t) \mathbf{c}_8 - f_6(\mathbf{x}_f, t + \Delta t) \mathbf{c}_6)$$

et peut être généralisé pour les nœuds de frontière (cf. section 4.2.2) :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_b) = \frac{mh^2}{\Delta t} (f_{\hat{\alpha}}^c(\mathbf{x}_f, t) \mathbf{c}_{\hat{\alpha}} - f_\alpha(\mathbf{x}_f, t + \Delta t) \mathbf{c}_\alpha) \quad (4.3)$$

Ensuite, la force hydrodynamique globale sur le grain est calculée par sommation sur l'ensemble des nœuds \mathbf{x}_b le long de la frontière du grain. De la même manière,

2. Une autre approche est basée sur l'extrapolation de la valeur des fonctions de distribution des nœuds fluides voisins de celui à calculer [9].

le produit vectoriel $(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_g) \times \mathbf{f}(\mathbf{x}_b)$ permet de déterminer le moment résultant au centre de masse \mathbf{x}_g du grain :

$$\mathbf{F}_h = \sum_{\mathbf{x}_b} \mathbf{f}(\mathbf{x}_b) \quad (4.4)$$

$$\mathbf{M}_h = \sum_{\mathbf{x}_b} (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_g) \times \mathbf{f}(\mathbf{x}_b) \quad (4.5)$$

dans lesquelles \mathcal{C}_g est l'ensemble des nœuds fluides entourant le grain "g" avec centre de masse \mathbf{x}_g .

4.4 Problèmes du couplage DEM/LBM

4.4.1 Rayon hydraulique

Un milieu granulaire compact 2D se caractérise par une porosité fermée qui ne permet pas la migration de fluide d'un pore à l'autre. Une approche 2D ne permet donc pas strict sensu de rendre compte du comportement de milieux solide-fluide 3D. Afin de surmonter cette limite, le rayon hydraulique r_h d'un grain dans l'algorithme LBM est introduit (figure 4.3). Ce rayon, plus petit que le rayon r du grain solide, crée alors une certaine perméabilité dans le milieu. Il est calibré de telle manière à retrouver une valeur de la force de traînée sur un grain plus réaliste ou une valeur de porosité appropriée pour l'assemblage granulaire (telle que retrouvée dans les assemblages 3D avec la même taille de grains). Un rapport r_h/r d'environ 0.8 est utilisé par [30, 31, 32].

Pour un calcul correct de la condition de rebondissement, et pour une stabilité numérique lors des simulations, la couche fluide entre deux grains nécessite au moins deux rangées de nœuds parallèles, soit :

$$r - r_h > \sqrt{2}h + \frac{(\Delta x_n)_{max}}{2}$$

dans laquelle $(\delta_n)_{max}$ est l'interpénétration maximale prévue entre les grains dans l'algorithme DEM et le facteur $\sqrt{2}$ représente le scénario le plus défavorable (i.e., lorsque les centres de deux grains sont alignés le long d'une direction diagonale du réseau).

4.4.2 Discrétisation spatiale

La taille h du réseau fluide détermine principalement l'erreur de la discrétisation spatiale et sa valeur a un effet direct sur la taille du problème à résoudre et donc sur

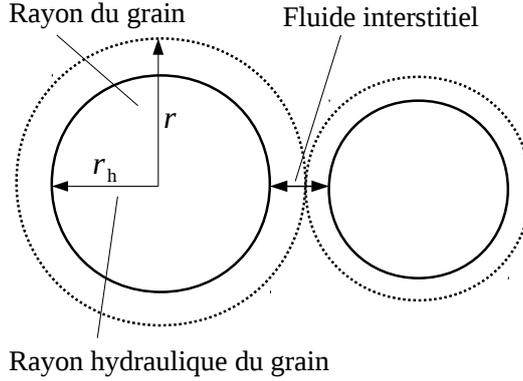


Figure 4.3 – Illustration du rayon hydraulique

le temps de calcul. Dans le couplage DEM/LBM, le choix de h dépend également de la taille des grains du milieu granulaire. En effet, h doit être suffisamment petit par rapport au rayon du plus petit grain pour assurer une précision satisfaisante dans l'évaluation de la force hydrodynamique. Comme discuté par Yu et al. [99],

$$\frac{r_h}{h} \geq 5$$

est requise pour une estimation satisfaisante de la force de traînée dans le problème de l'écoulement dans un conduit et autour d'un cylindre pour des nombres de Reynolds³ modérés, notamment pour $10 < Re < 100$

4.4.3 Par de temps de calcul

Le pas de temps Δt utilisé dans la méthode LBM est le résultat d'un compromis entre plusieurs exigences. Il est lié à la viscosité dynamique du fluide à travers l'équation (3.20), ou l'équation (3.32) pour le modèle à temps de relaxation multiples. Il entre également dans l'expression du nombre de Mach du milieu fluide, qui est défini comme $Ma = \|\mathbf{u}\|/c$, et doit prendre une valeur plus petite que l'unité pour le critère d'incompressibilité du fluide comme présenté dans la section 3.4. Une valeur limite de 0.1 pour Ma est souvent utilisée dans la littérature.

Le pas de temps δt dans l'algorithme DEM est généralement pris comme une fraction de la période d'oscillation d'un système de deux grains représentatifs, en

3. Le nombre de Reynolds est ici défini comme $Re = \rho_f u(2r_h)/\eta$, dans laquelle u est une valeur représentative du champ de vitesse à l'entrée du conduit et r_h est le rayon du cylindre.

interaction mutuelle au contact (voir section 2.5.1) :

$$\delta t = \alpha \pi \sqrt{\frac{m}{k_n}} \quad (4.6)$$

où m est la masse du grain représentatif (choisi comme le plus petit de l'assemblage), k_n est la raideur normale au contact entre les grains. Le coefficient α est généralement de l'ordre de 10^{-2} .

Du fait qu'en général, $\delta t < \Delta t$, le cycle de calcul de l'algorithme DEM est considéré comme un sous-cycle de l'algorithme LBM, et Δt est choisi comme un multiple de δt , i.e., $\Delta t = n_c \times \delta t$, avec n_c est le nombre de sous-cycle LBM (figure 4.4).

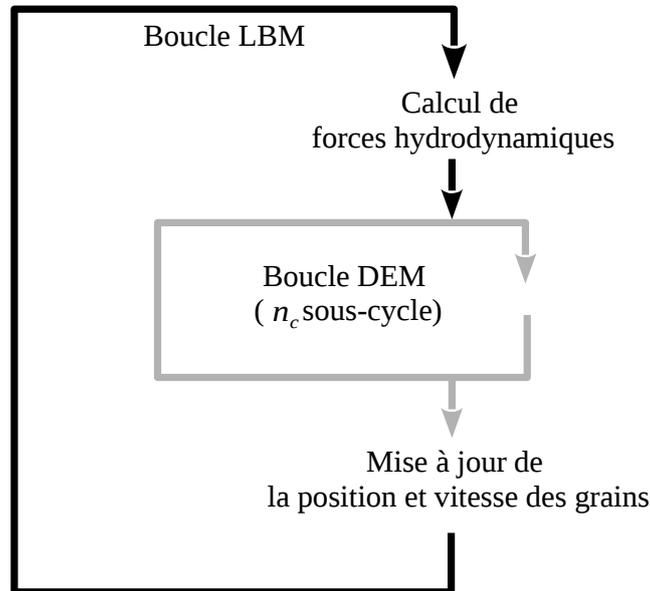


Figure 4.4 – Cycle de calcul dans l'algorithme DEM/LBM

4.4.4 Adimensionalisation des grandeurs physiques

Contrairement à l'algorithme DEM, l'utilisation de variables adimensionnelles permet une simplification importante dans l'implémentation de l'algorithme LBM. L'adimensionalisation de ces quantités consiste en leur écriture dans les unités "natives" du réseau LBM, c'est-à-dire la distance h entre les nœuds voisins le long des axes du réseau, le pas de temps Δt et la masse m de la particule fluide. Cette dernière quantité peut être remplacée, utilement, par la densité de référence ρ_0

du fluide. Le passage des grandeurs physiques aux grandeurs adimensionnelles est détaillé dans le tableau 4.1 :

Grandeur	Physique	Adimensionnelle	Relation
Pas d'espace	h	$h' = 1$	---
Pas de temps	Δt	$\Delta t' = 1$	---
Temps de relaxation	τ	τ	---
Vitesse du réseau	$C = \frac{h}{\Delta t}$	$C' = 1$	---
Viscosité dynamique	$\eta = \frac{\rho_0}{3}(\tau - \frac{1}{2})\frac{h^2}{\Delta t}$	$\eta' = \frac{1}{3}(\tau - \frac{1}{2})$	$\eta = Ch\rho_0\eta'$
Cordonnées	\mathbf{x}	\mathbf{x}'	$\mathbf{x} = h\mathbf{x}'$
Vitesse	\mathbf{u}	\mathbf{u}'	$\mathbf{u} = C\mathbf{u}'$
Densité du fluide	ρ_f	ρ'_f	$\rho_f = \rho_0\rho'_f$
Force hydraulique	\mathbf{F}_h	\mathbf{F}'_h	$F_h = \rho_0 C^2 h \mathbf{F}'_h$
Moment hydraulique	\mathbf{M}_h	\mathbf{M}'_h	$M_h = \rho_0 C^2 h^2 \mathbf{M}'_h$

Tableau 4.1 – Tableau de conversion des grandeurs physiques en grandeurs adimensionnelles

4.5 Validation du modèle

4.5.1 Écoulement dans un conduit et autour d'un cylindre fixe

On s'intéresse dans un premier temps à la validation du code développé à travers la simulation d'un écoulement fluide autour d'un cylindre fixe. La figure 4.5(a) montre la configuration géométrique ainsi que les conditions aux limites de la simulation, qui sont similaires à celles utilisées dans un benchmark proposé par Schäfer et Turek [8]. Il s'agit d'un conduit de longueur $L = 22D$ et de largeur $H = 4.1D$ dans lequel un cylindre de diamètre $D = 1.2 \text{ mm}$, est placé à la position identifiée par les coordonnées $x_{1c} = 2D$ et $x_{2c} = 2D$. Le fluide est modélisé comme incompressible et est caractérisé par une masse volumique $\rho_f = 10^3 \text{ kg m}^{-2}$ et une viscosité dynamique $\eta = 10^{-3} \text{ N s m}^{-1}$. Un profil parabolique de vitesse macroscopique est imposé à l'entrée.

$$u_1(0, x_2) = \frac{4u_m x_2(H - x_2)}{H^2}, u_2 = 0$$

où u_m est la valeur maximale de la vitesse au milieu de l'entrée. Côté sortie, une pression constante est maintenue. Au niveau de deux parois horizontales, la condition de rebondissement (frontière solide) est appliquée pour y assurer une vitesse nulle $u_1 = u_2 = 0$. Correspondant aux régimes stationnaire et instationnaire

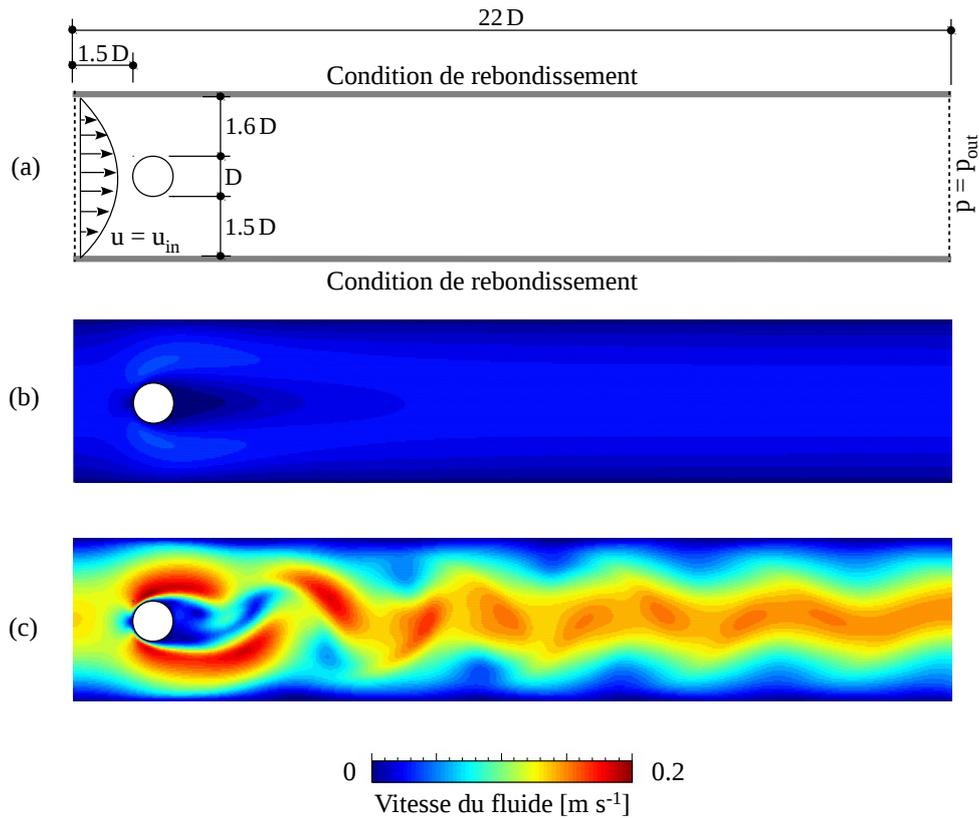


Figure 4.5 – Écoulement dans un conduit et autour d'un cylindre [8] : a) Configuration géométrique et conditions aux frontières; b) Champ de vitesse à $Re = 20$, dans le régime stationnaire; c) Champs de vitesse à $Re = 100$, dans le régime instationnaire périodique

périodique de l'écoulement, deux calculs sont réalisés avec les nombres de Reynolds $Re = 20$ et $Re = 100$, respectivement. Dans les deux cas, on calcule les coefficients de traînée et de portance :

$$C_D = \frac{2F_{h1}}{\rho_f \bar{U}^2 D}, \quad C_L = \frac{2F_{h2}}{\rho_f \bar{U}^2 D}$$

où $\bar{U} = \frac{2u_m}{3}$ est la vitesse moyenne de l'écoulement, F_{h1} et F_{h2} sont respectivement la force de traînée et de portance appliquées sur le cylindre. Les valeurs pour le cas $Re = 20$ sont calculées après que l'écoulement entre dans le régime stationnaire. Les valeurs pour le cas $Re = 100$ sont calculées dans le régime instationnaire périodique et correspondent à des valeurs maximales temporelles.

Les paramètres dans le tableau 4.2 se réfèrent à la simulation numérique du

D/h	Δt [s]	c [m s ⁻¹]	s_1	s_2	s_4, s_6	s_7, s_8
12	$4 \cdot 10^{-5}$	2.5	1.1	1	1.2	1/0.512
24	10^{-5}	5	1.1	1	1.2	1/0.512

Tableau 4.2 – Paramètres utilisés dans la simulation de l’écoulement autour d’un cylindre fixe

problème avec l’algorithme LBM utilisant l’approche MRT. Deux cas de résolution spatiale sont testés, correspondant à un rapport $D/h = 12$ et 24. Dans le même tableau, les paramètres $h, \Delta t, s_7$ et s_8 sont limités par l’équation (3.32), et les composantes restantes de la matrice de relaxation ont été fixées selon [14]. Les figures 4.5(a) et 4.5(b) illustrent le champ de vitesse obtenu avec la résolution spatiale la plus élevée pour des écoulements correspondant respectivement à $Re = 20$ et $Re = 100$. On donne dans le tableau 4.3 les coefficients de traînée C_D et de portance C_L obtenus lors de la simulation. Schäfer et al. [8] reportent des résultats obtenus pour ce même problème traité en utilisant différents schémas de discrétisation des équations de Navier Stokes (méthode des éléments finis, volumes finis et différences finies) et un algorithme de type LBM-BGK (cf. l’approche MRT utilisée ici). On constate que les résultats obtenus pour la résolution spatiale élevée, avec le code développé pour cette étude, sont compatibles avec ceux reportés par des approches continues. Une précision moins satisfaisante est obtenue, comme prévu, pour le cas de la résolution spatiale la plus grossière, en particulier quant à la valeur du coefficient de traînée dans le régime instationnaire, de l’ordre de 8% supérieur à la valeur maximale reportée par Schäfer et al. [8].

Méthode numérique	Référence	Re=20		Re=100	
		C_D	C_L	C_D	C_L
LBM-MRT ($D/h = 12$)	présent	5.7282	0.0112	3.5223	1.0012
LBM-MRT ($D/h = 24$)	présent	5.6175	0.0106	3.2195	0.9109
Continuum-based (min.)	[8]	5.5069	0.0105	3.0804	0.7256
Continuum-based (avg.)	[8]	5.5770	0.0136	3.2077	0.9686
Continuum-based (max.)	[8]	5.6323	0.0329	3.2460	1.0692
Standard LBM	[8]	5.8190	0.0110	4.1210	1.6120

Tableau 4.3 – Coefficients de traînée et de portance : comparaison entre différentes méthodes

4.5.2 Écoulement autour d'un cylindre en mouvement

Cette section donne une application du modèle pour le cas d'un écoulement autour d'un cylindre en mouvement (figure 4.6). La configuration consiste en un fluide initialement au repos dans lequel le cylindre commence instantanément à se déplacer avec une vitesse constante U_c suivant la direction horizontale. En tenant en compte de la relativité galiléenne, ce problème est équivalent à son dual dans lequel le cylindre est fixe et le fluide et les deux parois sont conduit par une vitesse uniforme $U_f = U_w = -U_c$. Effectivement les deux cas doivent aboutir à la même réponse en terme de forces de traînée et de portance.

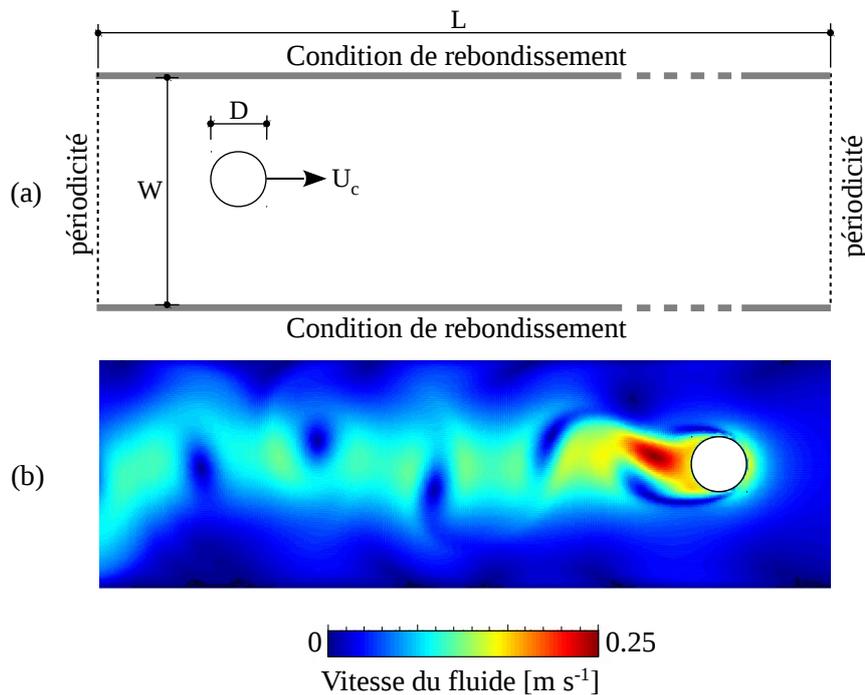


Figure 4.6 – Cylindre en mouvement de translation à vitesse constante U_c dans un conduit 2D [9] : a) Configuration géométrique et conditions aux frontières b) Champ de vitesse au pas de temps 15000

Dans un souci de validation du modèle, la configuration géométrique utilisé pour la simulation est équivalente à celle utilisé par Lallemand et al. [9]. Il s'agit d'un conduit de longueur $L = 50$ mm et de largeur $H = 5$ mm dans lequel un cylindre de diamètre $D = 1.2$ mm, est placé à la position correspondant aux coordonnées $x_{1c} = 3.015$ mm et $x_{2c} = 2.7$ mm. Le caractéristique mécanique du fluide considéré sont semblables à celle de l'eau à température et pression normales. Une discrétisation spatiale correspondant à un rapport $D/h = 24$ est utilisée, ce qui

conduit à un réseau 1001×101 pour remplir le domaine fluide. Dans le tableau 4.4, on donne des paramètres de la simulation. Quant à la matrice de relaxation \mathbf{S} , les deux composantes $s_7 = s_8 = 1.944$ sont choisies pour avoir la viscosité désirée selon l'équation (3.32), et les composantes restantes ont été fixées identiques à celles choisies par Du et al. [14].

Largeur du conduit, H	5	[mm]
Longueur du conduit, L	50	[mm]
Diamètre du cylindre, D	1.2	[mm]
Masse volumique du fluide, ρ_f	10^3	[kg m ⁻²]
Viscosité dynamique, η	10^{-3}	[N s m ⁻¹]
Vitesse du cylindre, U_c	0.167	[m s ⁻¹]
Résolution spatiale, h	$5 \cdot 10^{-5}$	[m]
Vitesse du réseau, c	4.167	[m s ⁻¹]
Matrice de temps de relaxation, \mathbf{S}	[–]	[–]
Nombre de pas de temps de calcul	19000	[–]

Tableau 4.4 – Paramètres de la simulation de l'écoulement autour d'un cylindre en mouvement

La figure 4.7 montre les forces adimensionnelles de traînée et de portance exercées sur le cylindre en fonction du pas de temps. Les courbes en noir correspondent au cas où l'écoulement se produit autour du cylindre fixe. Les courbes en bleu correspondent au cas dual où le cylindre est en mouvement. Au niveau quantitatif, les composantes de la force hydrodynamique trouvées sont similaires aux résultats obtenus par Lallemand et al. [9]. Les fluctuations observées peuvent être dues à la variation des nœuds solides couverts par le cylindre lors de son mouvement et aussi à l'approximation utilisée pour le calcul de la fonction de distribution des nouveaux nœuds fluides créés après ce mouvement (voir section 4.2.2). Ainsi la coïncidence entre les courbes noires et bleues valide également le principe de la relativité galiléenne dans la méthode LBM.

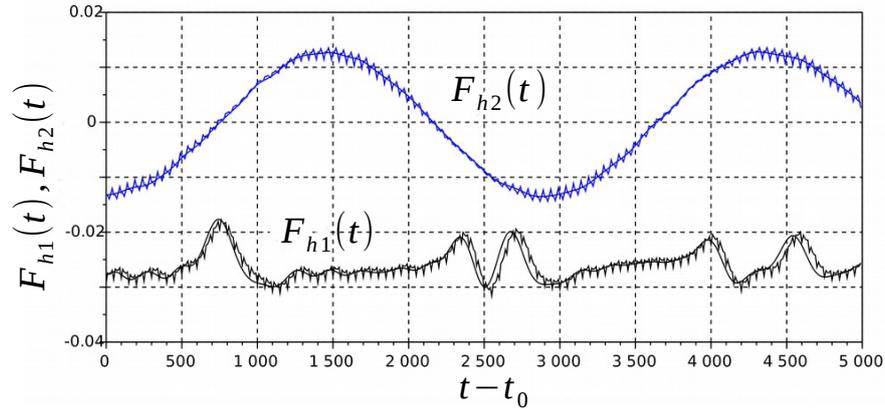


Figure 4.7 – Force hydrodynamique (F_{h1}, F_{h2}) sur le cylindre à partir du temps de calcul 14000. Résultat obtenu par notre simulation.

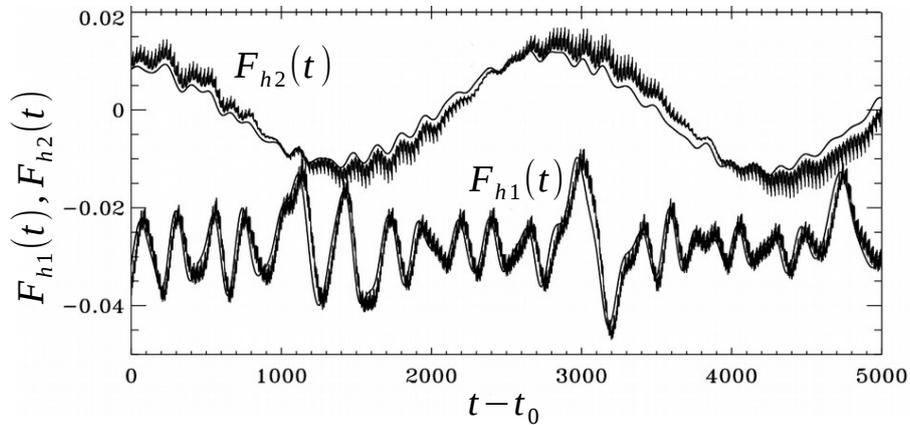


Figure 4.8 – Force hydrodynamique (F_{h1}, F_{h2}) sur le cylindre en fonction du temps. Résultats obtenus par Lallemand et al. [9]

4.5.3 Sédimentation d'un grain

Si les simulations numériques présentées dans les sections précédentes ne concernent qu'un objet fixé ou en mouvement contraint dans un milieu fluide, dans cette section on s'intéresse au mouvement libre d'un grain via le phénomène de sédimentation. La sédimentation d'un grain dans un milieu fluide a été simulée par Feng et al. [10] en utilisant la méthode des éléments finis. Le résultat montre une variation dans le mode de sédimentation du grain suivant la valeur du nombre de Reynolds. Dans le but de valider la pertinence du modèle implémenté, la même simulation est reproduite et présentée dans cette section. Le résultat obtenu est par la suite comparé avec celui obtenu par Feng et al. [10].

La figure 4.9 montre la configuration géométrique de la simulation. Il s'agit d'un domaine fluide rectangulaire de hauteur $H = 390$ mm et de largeur $L = 18$ mm. Le grain dont le diamètre $D = 12$ mm, est placé initialement à la position identifiée par les coordonnées $x_{10} = 7.2$ mm et $x_{20} = 270$ mm. Les conditions aux limites au niveau des parois du domaine fluide sont de types non-glissement. Les paramètres physiques et numériques de la simulation sont détaillés dans le tableau 4.5. Pour obtenir de différents modes de sédimentation, trois simulations sont réalisées, correspondant à des nombres de Reynolds⁴ : $Re = 0.9$, $Re = 3$, $Re = 7$. Le tableau 4.6 donne les valeurs des composantes s_7 et s_8 de la matrice de relaxation avec les valeurs de la viscosité dynamique correspondantes en accord avec la (3.32). Les composantes restantes de la matrice de relaxation ont été fixées selon Du et al. [14].

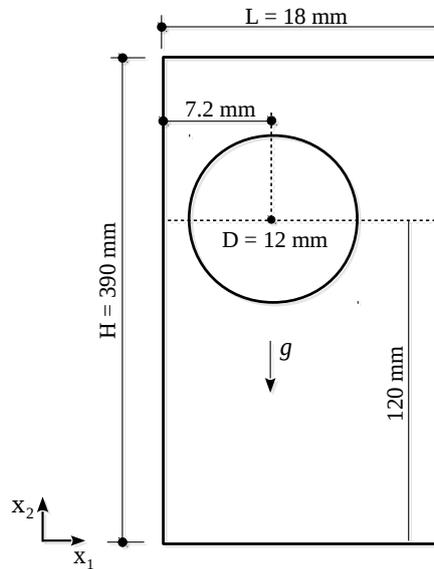


Figure 4.9 – Sédimentation d'un grain : configuration géométrique.

4. Le nombre de Reynolds est déterminé par la vitesse de chute finale du grain et par son diamètre.

LBM	Masse volumique du fluide, ρ_f	10^3	$[\text{kg m}^{-2}]$
	Pas d'espace, h	$6. \times 10^{-4}$	$[\text{m}]$
	Pas de temps, Δt	3.5×10^{-5}	$[\text{s}]$
	Vitesse du réseau, c	17.14285	$[\text{m s}]$
	Matrice de relaxation, S	Voir [14] et tableau 4.6	$[-]$
	Nombre de noeuds	32×652	$[-]$
DEM	Masse volumique du grain, ρ_s	$2. \times 10^3$	$[\text{kg m}^{-2}]$
	Pas de temps, Δt	$5. \times 10^{-6}$	$[\text{s}]$
	Diamètre du grain, D	1.2×10^{-2}	$[\text{m}]$
	Accélération, g	9.8	$[\text{m s}^{-2}]$
	Durée de la simulation, t	1.8×10^1	$[\text{s}]$

Tableau 4.5 – Sédimentation d'un grain : paramètres physiques et numériques.

	$s_7 = s_8$	Viscosité dynamique, η $[\text{N s m}^{-1}]$
Simulation 1	0.56	2.06×10^{-4}
Simulation 2	0.528	9.6×10^{-5}
Simulation 3	0.52	6.86×10^{-5}

Tableau 4.6 – Sédimentation d'un grain : valeurs s_7 et s_8 (voir Du et al. [14] pour les valeurs restantes).

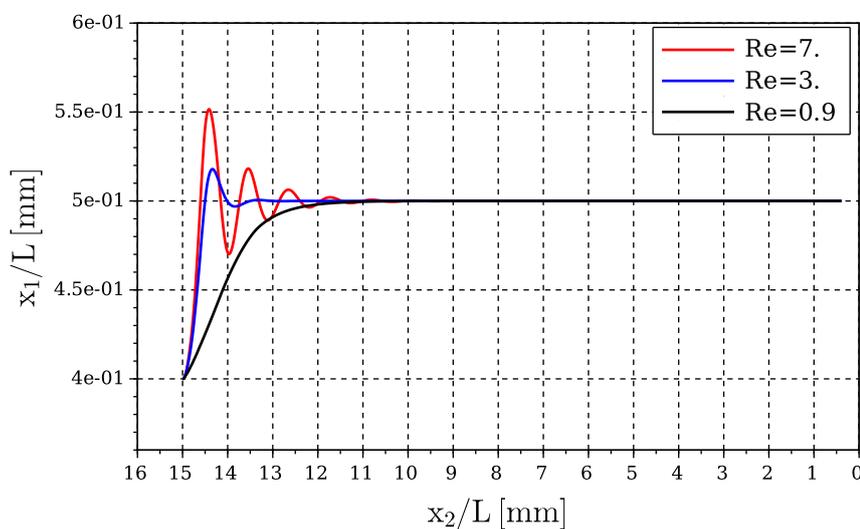


Figure 4.10 – Sédimentation d'un grain : trajectoire du grain calculé par le modèle objet de la validation.

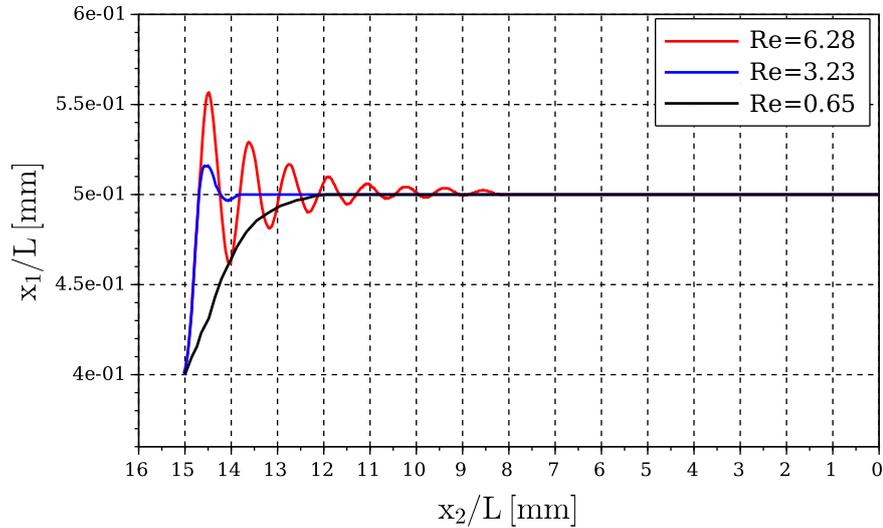


Figure 4.11 – Sédimentation d’un grain [10] : trajectoire du grain calculé par la méthode des éléments finis.

La figure 4.10 montre les modes de sédimentation du grain observés d’après notre simulation. Du point de vue qualitatif, ce résultat est similaire à celui obtenu par Feng et al. [10] avec la méthode des éléments finis (figure 4.11). Pour un nombre de Reynolds faible, le grain tend vers le centre du domaine fluide de manière monotone. Par contre, dans le cas des nombres de Reynolds supérieurs, la sédimentation du grain s’accompagne d’une trajectoire oscillante selon la direction \mathbf{x}_1 . Il s’agit d’un effet de paroi, observable dans la simulation, qui produit aussi une convergence du grain vers le centre du domaine fluide.

4.5.4 Sédimentation de deux grains

Afin de faire intervenir des collisions intergranulaires, une simulation de la sédimentation de deux grains dans une boîte remplie d’un fluide a été effectuée. La configuration de l’essai numérique est donnée à la figure 4.12 dans laquelle les deux grains sont positionnés initialement au centre du domaine fluide, aux différentes distances par rapport à sa limite inférieure. Le phénomène observé d’après la chute libre des grains, nommé “Drafting, kissing and tumbling (DKT)”, a été montré expérimentalement par Fortes et al. [102], et reproduit ensuite dans des simulations numériques à travers différentes méthodes numériques (e.g., méthode des éléments finis [11], méthode Boltzmann sur réseau en combinaison avec la condition de frontières immergées [12]). Trois étapes peuvent être observées, dans l’ordre

dans un essai DKT. Au début de l'essai le grain supérieur rencontre une moindre résistance que le grain frontal à la pénétration dans le fluide ; par conséquent, il acquiert une plus grande vitesse que le grain frontal et rentre dans son sillage (Drafting). Au moment où le grain frontal est rattrapé, une collision se produit entre les deux grains (Kissing). Par la suite, le grain supérieur pivote et s'écarte du grain frontal ; tous les deux poursuivent en suite séparément le mouvement de chute dans le domaine fluide (Tumbling).

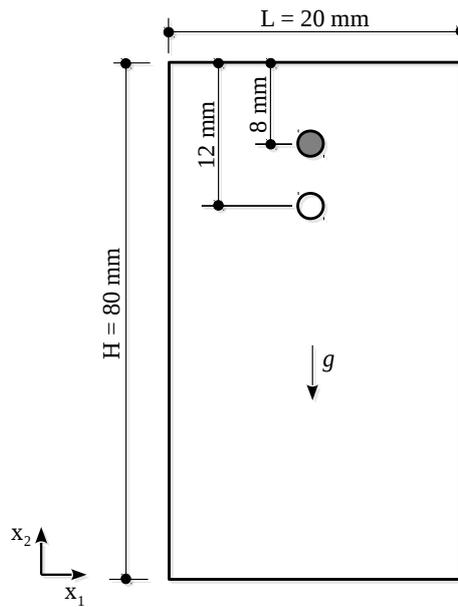


Figure 4.12 – Sédimentation de deux grains [11, 12] : configuration géométrique.

Dans le but de valider le résultat obtenu par notre modèle, les conditions de la simulation sont similaires à celles présentées dans les références [11, 12]. Les propriétés géométriques sont données dans la figure 4.12 : le domaine fluide est de largeur $L = 20$ mm, et de hauteur $H = 80$ mm. Le fluide à simuler a le caractère de l'eau en conditions normales de température et pression. Les deux grains, de même rayon $R_g = 1$ mm et de masse volumique $\rho_s = 1010$ kg m⁻², sont placés à l'instant initial au centre du domaine fluide, à des distances respectivement de 8 mm et 12 mm. La loi de contact appliquée lors de la collision entre grains ou entre grains et parois est visco-élastique avec frottement à la Coulomb. Dans le tableau 4.7, on donne les paramètres physiques ainsi que numériques de la simulation. Pour la matrice de relaxation, les composantes $s_7 = s_8 = 1.8868$ sont déterminées par l'équation 3.32, les composantes restantes de la matrice de relaxation ont été choisies selon Du et al. [14].

LBM	Masse volumique du fluide, ρ_f	10^3	$[\text{kg m}^{-2}]$
	Viscosité dynamique, η	10^{-3}	$[\text{N s m}^{-1}]$
	Pas d'espace, h	10^{-4}	$[\text{m}]$
	Pas de temps, Δt	10^{-4}	$[\text{s}]$
	Vitesse du réseau, c	1	$[\text{m s}]$
	Matrice de relaxation, S	--	$[-]$
	Nombre de nœuds	201×801	$[-]$
DEM	Masse volumique du grain, ρ_s	1.01×10^3	$[\text{kg m}^{-2}]$
	Pas de temps, Δt	5×10^{-5}	$[\text{s}]$
	Diamètre du grain, D	2×10^{-3}	$[\text{m}]$
	Coef. de frottement, μ	0	$[-]$
	Raideur du contact, k_n et k_t	2.5×10^5	$[\text{Nm}^{-1}]$
	Coef. d'amortissement, c_n et c_t	1	$[\text{Nm}^{-1}]$
	Accélération, g	9.8	$[\text{m s}^{-2}]$
	Durée de la simulation, t	5	$[\text{s}]$

Tableau 4.7 – Sédimentation de deux grains : paramètres physiques et numériques.

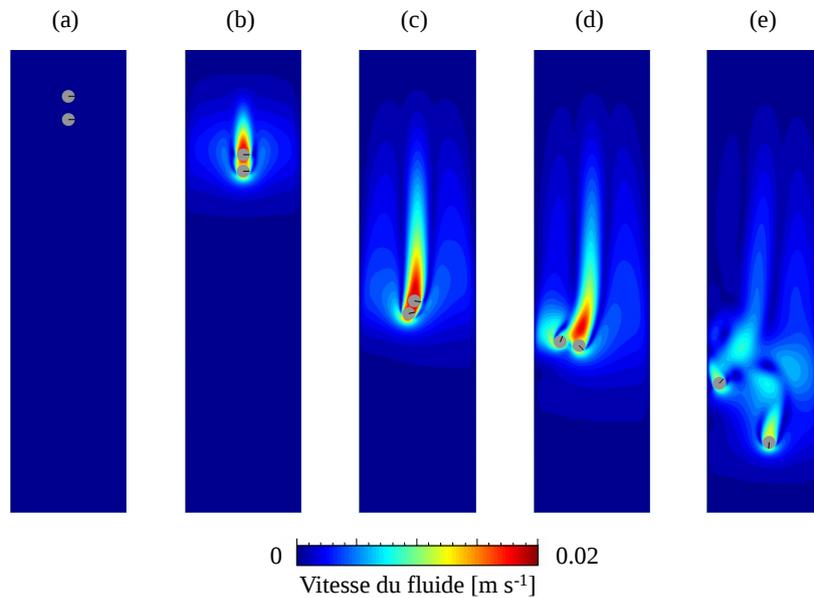


Figure 4.13 – Sédimentation de deux grains : positions des grains lors du processus de sédimentation et champ de vitesse à $t = 0$. s (a), $t = 0.5$ s (b), $t = 2.5$ s (c), $t = 3.0$ s (d) et $t = 4.5$ s (e).

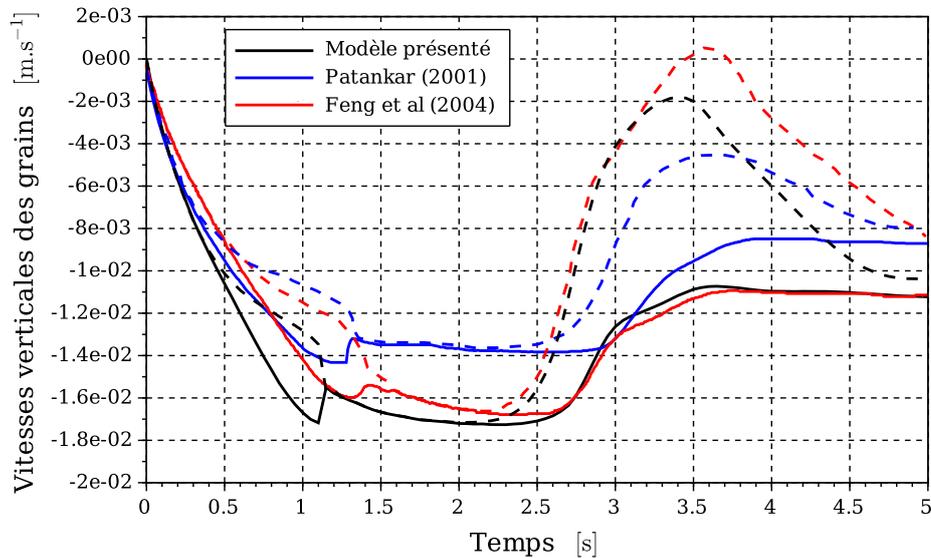


Figure 4.14 – Sédimentation de deux grains : comparaison de l’évolution dans le temps de la vitesse verticale des grains. Les traits continu et discontinu se réfèrent respectivement aux grains initialement frontal et supérieur.

Le résultat obtenu est donné à la figure 4.13 à travers des configurations hydrauliques des grains lors du processus de sédimentation. Trois étapes ont été observées au cours du temps ; l’étape de “Drafting” est montré par les configurations de (a) à (b) ; les configurations (c) et (d) relèvent les instants avant et après le “Kissing” ; la dernière configuration (e) correspond à l’étape de “Tumbling”. La figure 4.14 représente l’évolution dans le temps de la vitesse verticale des deux grains d’après notre modèle en comparaison avec celles reportés dans les références [11, 12]. Du point de vue qualitatif, on constate que les trois résultats sont similaires. La différence quantitative est principalement une estimation plus faibles (par le modèle objet de la validation) des vitesses des grains. Cette différence peut venir de l’utilisation, dans cette simulation, des rayons hydrauliques au lieu des rayons géométriques des grains. Cela conduit à une réduction de la surface des grains et par conséquent à la diminution de la valeur des forces hydrodynamiques.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté différents aspects du modèle de couplage DEM/LBM comme le traitement du mouvement des grains, l’estimation des ac-

tions hydrodynamiques, la résolution spatiale, le pas de temps. En particulier, l'introduction du rayon hydraulique permet de réaliser des simulations impliquant des assemblages granulaires 2D en interaction avec un milieu fluide. Une série des simulations numériques a été réalisée et illustrée pour valider le modèle implémenté. Les résultats obtenus sont satisfaisants. Les valeurs des paramètres numériques résultants de cette validation seront considérées dans la suite de ce travail.

Chapitre 5

Modélisation du comportement du front, cas de l'érosion régressive

Contents

5.1	Introduction	92
5.2	Préparation de l'échantillon granulaire	92
5.3	Front d'érosion : simulation	96
5.3.1	Configuration de l'essai	96
5.3.2	Simulations	99
5.4	Conclusion	112

5.1 Introduction

L'objectif de la phase finale de ce travail, décrite dans ce chapitre, est de construire un modèle numérique préliminaire pour l'étude de l'érosion interne par renard hydraulique à l'échelle granulaire. Dans un premier temps, un échantillon granulaire "sec" est préparé en utilisant l'algorithme DEM décrit dans le chapitre 2. Cet échantillon, dont la taille correspond à un volume élémentaire représentatif (VER) de sol granulaire en proximité du front d'érosion, est ensuite posé dans un canal saturé d'eau. Enfin, une différence de pression d'eau est appliquée entre l'entrée et la sortie du canal. L'interaction entre l'écoulement fluide et les grains est décrite par le schéma de couplage DEM/LBM présenté dans le chapitre 4. L'érosion est observée avec une quantité de grains qui sont arrachés et transportés. Une première analyse des résultats obtenus a permis de dégager plusieurs hypothèses sur les mécanismes microscopiques régissant le phénomène d'érosion régressive du front du renard hydraulique.

5.2 Préparation de l'échantillon granulaire

L'échantillon granulaire est obtenu à partir d'une implémentation numérique de l'algorithme DEM décrit dans le Chapitre 2. Il s'agit d'un système de forme rectangulaire, constitué de 800 grains circulaires dont la densité de masse $\rho_s = 2.65 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-2}$ et les rayons sont compris entre 0.75 mm et 0.95 mm. La procédure de préparation de l'échantillon est présentée ci-dessous et n'implique pas, à cette étape, de couplage fluide-solide.

À partir d'une configuration initiale dans laquelle les grains sont dispersés de manière aléatoire dans un volume rectangulaire limité par des parois rigides, un compactage avec contacts lubrifiés (visco-élastiques sans frottement) est réalisé par convergence des quatre parois¹. Les contacts sont exclusivement unilatéraux. À la fin de cette étape, après que la pression de confinement ait atteint environ 30 kN m^{-1} , l'échantillon est laissé évoluer sans déplacements ultérieurs des parois, afin d'approcher une condition d'équilibre statique, aussi bien au niveau macroscopique que microscopique (figure 5.1(a)). Après cette étape d'équilibrage statique, tous les contacts existants sont convertis en ponts visco-élastiques, à l'exception de ceux entre les grains et la paroi aval qui restent unilatéraux. On notera que tout nouveau contact créé après l'initialisation des ponts solides durant le calcul sera par la suite considéré par défaut comme un contact unilatéral visco-élastique

1. Dans la suite, on appellera parois supérieure et inférieure les parois horizontales supérieure et inférieure, et parois amont aval, les parois verticales de gauche et de droite.

frottant.

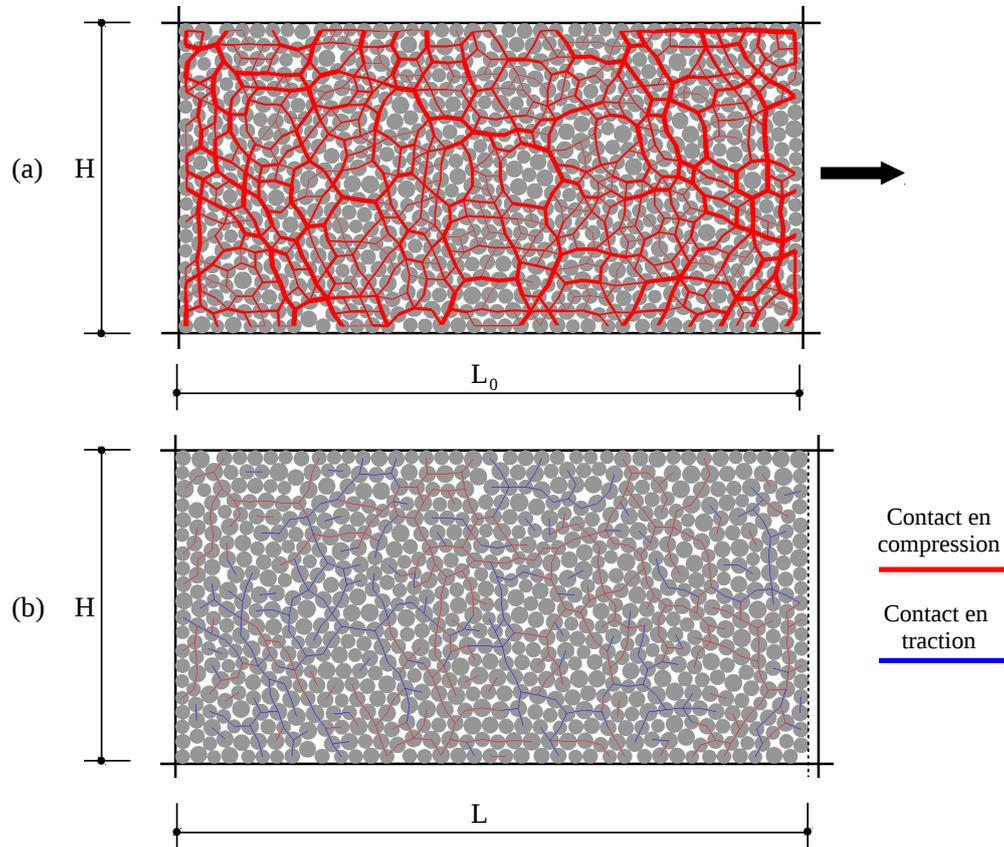


Figure 5.1 – Préparation de l'échantillon granulaire : configuration géométrique et chaînes de forces après la compression isotrope (a) et après retrait de la paroi aval (b).

La paroi rigide aval est ensuite enlevée (translation lente vers la droite jusqu'au moment où tous ses contacts avec les grains sont perdus) pendant que les parois supérieure, inférieure et amont sont maintenues fixes. Le mouvement est suffisamment lent pour que l'évolution du processus reste quasi-statique. La figure 5.1 montre la configuration géométrique de l'échantillon avant et après l'ouverture de la paroi solide ((a) et (b), resp.), ainsi que l'évolution des chaînes de forces normales entre les grains. L'échantillon final est de largeur $L = 66.8$ mm et de hauteur $H = 33$ mm.

Dans le tableau 5.1, on donne les valeurs des paramètres de contact lors de cette procédure. La raideur du contact normal k_n est choisie pour limiter l'ordre

de grandeur de la déflexion aux contacts (telle qu’engendrée par la pression de confinement indiquée plus haut, de 30 kN m^{-1}), à 10^{-4} fois le diamètre moyen des grains². En l’absence d’informations spécifiques, la raideur des contacts tangentiels k_t est prise égale à k_n . Afin de laisser le système dissiper efficacement l’énergie introduite ou échangée pendant la procédure, les coefficients d’amortissement normal c_n et tangentiel c_t sont pris égaux à 80% de leur valeur critique (voir Chapitre 2). Le coefficient de frottement est pris à une valeur classique sauf dans la phase de compactage, pendant laquelle ce coefficient est pris nul (contacts lubrifiés) afin d’obtenir une configuration dense et texturée de l’assemblage granulaire. Les ponts solides “initialisés” après la phase de compactage et équilibrage sont “initialisés” comme reporté dans le même tableau : les valeurs de adhésion A et cohésion C pour la loi de contact traduisent, au niveau microscopique, les caractéristiques d’un sol granulaires manifestant une très faible résistance à la traction (de 10^2 N m^{-1} en ordres de grandeur).

	Durant la compacité	Initialisation de ponts solides			Après l’initialisation
		Grain-à-grain	Grain-à-paroi		
			Paroi aval	Autres parois	
k_n [N m^{-1}]	$5.4 \cdot 10^7$	$5.4 \cdot 10^7$	$5.4 \cdot 10^7$	$5.4 \cdot 10^7$	$5.4 \cdot 10^7$
k_t [N m^{-1}]	$5.4 \cdot 10^7$	$5.4 \cdot 10^7$	$5.4 \cdot 10^7$	$5.4 \cdot 10^7$	$5.4 \cdot 10^7$
c_n [N s m^{-1}]	500	500	500	500	500
c_t [N s m^{-1}]	500	500	500	500	500
A [N]	0	1	0	10^6	0
C [N]	0	4	0	10^6	0
μ	0	0.5	0.5	0.5	0.5

Tableau 5.1 – Paramètres de la loi de contact utilisé durant la préparation de l’échantillon granulaire

Des valeurs très élevés (pratiquement infranchissables) de cohésion et adhésion sont attribuées aux ponts solides établis entre les grains et les parois supérieure, inférieure et amont, afin de créer une monocouche de grains qui partage un lien permanent avec ces parois. Afin de limiter les perturbations du système pouvant se produire pendant la phase d’ouverture de la paroi aval, aucun pont solide n’est établi entre les grains et cette paroi (et les contacts unilatéraux avec cette paroi

2. La déflexion aux contacts sous une pression de confinement donnée peut être évaluée à partir des propriétés élastiques et de la taille des grains [74]. Pour un assemblage de disques quasi-monodisperses confiné par une pression à 30 kPa, la déflexion prévue est en ordre de 10^{-5} du diamètre selon le modèle de contact de Hertz. Cependant, une estimation plus réaliste doit tenir compte des imperfections susceptibles qui influencent le comportement au niveau des contacts pour un matériau réel.

restent lubrifiés jusqu'à leur extinction).

Le pas de temps δt de l'algorithme DEM est choisi égal à $2.5 \cdot 10^{-7}$ s par une estimation conformément au critère établi dans la section 2.5.1.

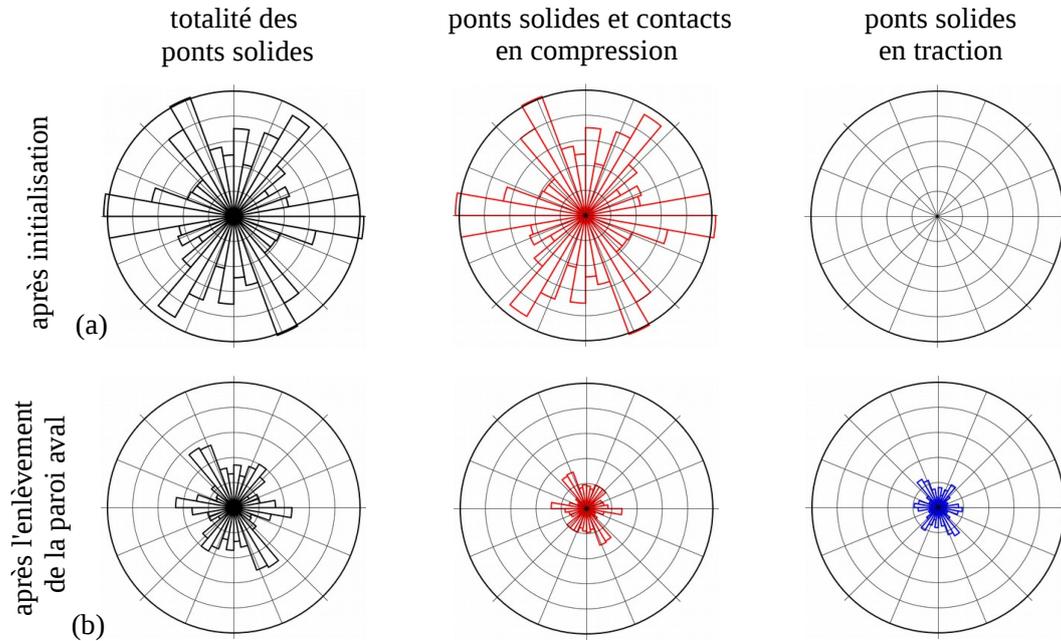


Figure 5.2 – Préparation de l'échantillon : distributions angulaires des contacts entre grains après l'initialisation (a) et après l'ouverture de la paroi aval (b). Les cercles extérieurs correspondent à une densité de 0.25 contacts par grain et par radiant.

Lors de l'ouverture de la paroi aval, la contrainte de confinement sur les trois parois restantes se réduit à de très petites valeurs. Pendant cette étape, le nombre de coordination associé à des ponts solides (i.e., le nombre moyen des ponts solides par grain) est réduit de 2.805 à 1.383. Par ailleurs, après l'ouverture de la paroi aval, la quasi totalité des contact est de type bilatéral (le nombre de contacts unilatéraux créés pendant cette phase est inférieur à 1%). Les diagrammes polaires dans la figure 5.2 montrent les distributions angulaires des contacts entre les grains au moment où les ponts solides sont établis et après l'ouverture de la parois. Les distributions représentent l'ensemble de la population des ponts solides (à gauche), la population des contacts en compression (ponts solides et contacts unilatéraux, au centre), et les ponts solides en traction (à droite). Ces populations sont réparties, dans chaque diagramme, en 18 secteurs angulaires identiques. La

représentation est normalisée en terme de nombre de coordination N_c : telle que $\sum_{i=1}^{18} p(\theta_i)\Delta\theta_i = N_c$, $p(\theta_i)$ étant la densité angulaire exprimée dans le diagramme en correspondance avec le secteur d'ordre i .

L'orientation du contact est donnée par le vecteur unitaire \mathbf{n} indiqué dans la figure 2.1. L'anisotropie inhérente de ces distributions est héritée de la procédure de compactage, en raison d'un certain nombre de facteurs tels que la faible dispersion des diamètres des grains, la forme et la taille de l'échantillon ainsi que l'effet des parois rigides.

5.3 Front d'érosion : simulation

5.3.1 Configuration de l'essai

Les figures 5.3(a-b) illustrent la configuration de la simulation de l'érosion dans laquelle l'échantillon granulaire, obtenu après la procédure de préparation, représente un VER du sol situé dans la région du front du conduit d'érosion. La configuration utile pour le calcul solide est donnée à la figure 5.3(a), tandis que le système associé au calcul fluide est donné à la figure 5.3(b). Le couplage DEM/LBM présenté dans le Chapitre 4 est utilisé pour la modélisation de l'érosion régressive induite par un écoulement fluide interstitiel à travers le milieu granulaire.

5.3.1.1 Milieu solide

La simulation est conçue en référence à la situation physique rencontrée par un VER du sol à l'interface du front du conduit d'érosion, illustrée dans la figure 5.4. Le VER est érodé sous l'effet de l'écoulement fluide traversant (de la gauche vers la droite dans les figures 5.3 et 5.4) et sortant à travers sa surface libre (surface solide à droite dans les figures 5.3(a) et 5.3(b)). Au cours de l'essai d'érosion, l'échantillon granulaire est confiné par la paroi de gauche maintenue fixe, tandis que les degrés de liberté des grains en noir dans la figure 5.3(a) sont bloqués de manière à former deux frontières rugueuses obliques le confinant respectivement en haut et en bas. Comme illustré dans la figure 5.4, le VER résultant, constitué des grains mobiles (en couleur gris), représente un secteur angulaire de l'interface, supposée en forme d'arc, du front d'un conduit d'érosion.

La présence du fluide ambiant influence le comportement des contacts entre les grains. Des modèles de contact dissipatifs incluant des propriétés du fluide peuvent être trouvés dans la littérature [103, 104, 105]. Cependant, en l'absence de données bien documentées et dans le but d'une analyse préliminaire, l'effet de la présence du fluide sur la loi d'interaction entre les grains n'est pas considéré dans

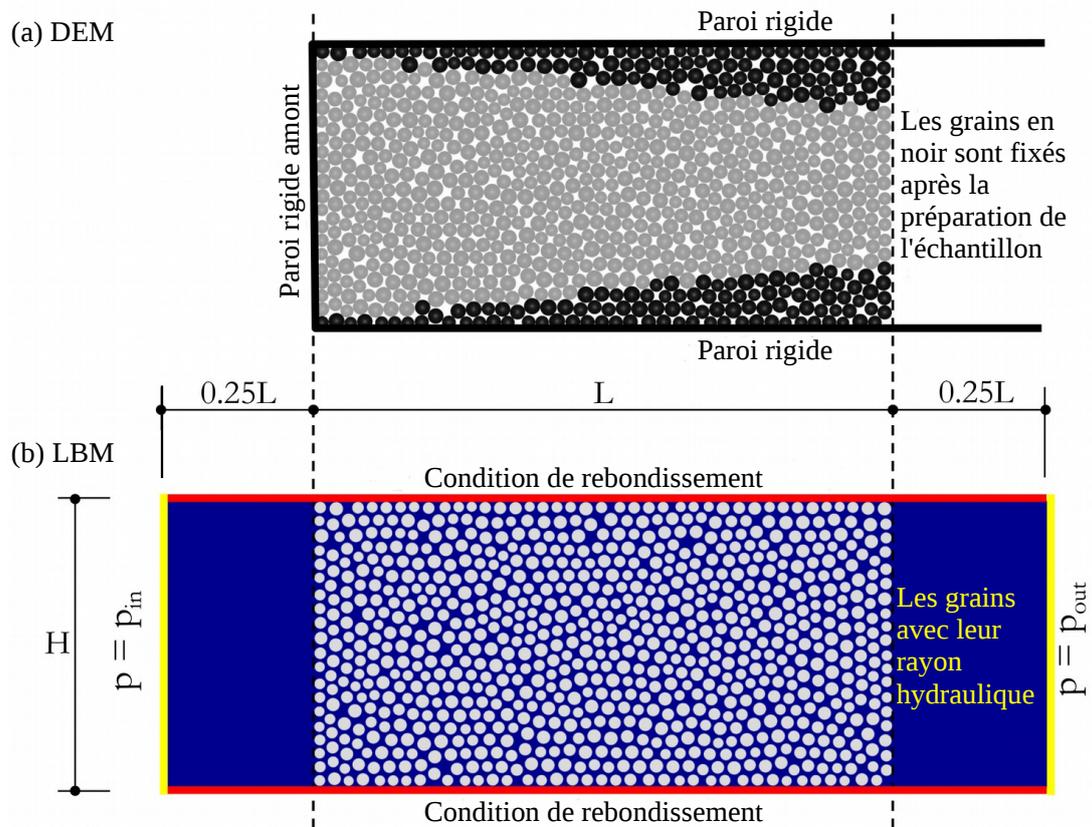


Figure 5.3 – Simulation de l'érosion régressive : configurations géométriques ($L = 66.8$ mm, $H = 33$ mm), conditions aux limites et emplacement des grains pour le modèle de couplage DEM (a) et LBM (b).

ce travail. Les paramètres pour les contacts sont donc ceux utilisés précédemment pour l'assemblage de l'échantillon sec.

5.3.1.2 Milieu fluide

La figure 5.3(b) présente les conditions hydrauliques aux limites mises en œuvre dans la simulation, ainsi que la “configuration hydraulique” de l'échantillon au début de la simulation. Cette configuration est la même que celle de la figure 5.3(a), mais après une réduction du rayon des grains par un facteur de 0.8, selon l'hypothèse de rayon hydraulique décrite dans la section 4.4.1 du Chapitre 4.

Un écoulement fluide est entraîné à travers le VER par une différence de pres-

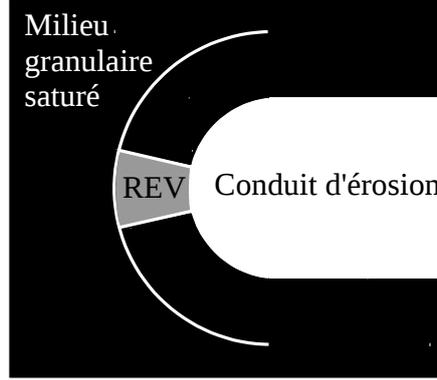


Figure 5.4 – Illustration d’un VER du sol granulaire au sein du front d’un conduit d’érosion. Le VER est confiné sur la côté en amont (à gauche) par le sol dans la région intacte et latéralement par les interfaces des éléments contigus.

sion :

$$\Delta p = p_{\text{out}} - p_{\text{in}} < 0 \quad (5.1)$$

entre l’entrée et la sortie du domaine fluide. Cet écoulement est confiné par deux parois horizontales imperméables positionnées en haut et en bas de l’échantillon granulaire. Le fluide est caractérisé par une densité de masse $\rho_f = 10^3 \text{ kg m}^{-2}$ et une viscosité dynamique $\eta = 10^{-3} \text{ N s m}^{-1}$, qui sont des valeurs représentatives des propriétés de l’eau à 20°C . La différence de pression est imposée selon la méthode proposée par Zou et He [96], décrite dans la section 3.7.3, est peut être représentée en forme normalisée selon l’expression $-\Delta p/(\rho_f g L)$, où g est l’accélération de la pesanteur. Dans les essais présentés dans la suite on considérera une évolution linéaire monotone de la différence de pression. Les valeurs de pression p_{in} et p_{out} sont imposées à travers la densité de masse fluide à l’entrée et la sortie de l’écoulement, c’est-à-dire, $p_{\text{in}} = c_s^2 (\rho_f + \Delta\rho)$ et $p_{\text{out}} = c_s^2 \rho_f$ (voir équation (3.20)). Le fluide est considéré incompressible (voir section 3.4), la densité initiale du fluide ρ_f , maintenue à la sortie de l’écoulement, est la valeur de référence permettant un contrôle au sens de l’équation (3.18), avec ρ_f au lieu de ρ_0 , sur l’approximation du calcul en fonction du nombre de Mach du réseau (équation (3.18)). Au début de la simulation, les valeurs de la fonction de distribution à chacun des nœuds fluides sont initialisées par la distribution de Boltzmann-Maxwell f_α^{eq} , calculées pour une densité de masse ρ_f et une vitesse macroscopique du fluide $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (équation (3.17)).

L’ensemble des paramètres du réseau contrôlant de manière directe ou indirecte l’implémentation numérique du modèle LBM, est choisi en respectant un certain nombre de contraintes posées lors de la présentation, dans les chapitres précédents, des algorithmes DEM et LBM et de leur schéma du couplage. En

particulier, dans l'algorithme LBM, la distance entre nœuds voisins le long des directions principales du réseau et le pas de temps sont respectivement égaux à $h = 5 \cdot 10^{-5}$ m et $\Delta t = 10^{-5}$ s. Une première contrainte sur le choix de ces paramètres est liée aux valeurs de la viscosité dynamique et de la densité de masse du fluide (équation (3.32)). De plus, le choix de h et Δt déterminent la vitesse du son dans le modèle LBM $c_s = c/\sqrt{3} = h/(\sqrt{3}\Delta t)$, qui influence à son tour la condition de pression imposée entre l'entrée et la sortie de l'écoulement. D'autres contraintes sont relatives au pas h entre nœuds voisins du réseau, c'est-à-dire, à la résolution spatiale associée à la précision du calcul des actions hydrodynamiques. En notant que l'hypothèse des rayons hydrauliques est toujours prise en compte, le pas h est ainsi choisi égal à 1/12 du rayon hydraulique du grain le plus petit. Ce choix correspond au rapport $D/h = 24$ pour la résolution spatiale où D est le diamètre du grain (section 4.5). Pour la matrice de relaxation \mathbf{S} , les composantes $s_7 = s_8 = 1/0.512$ sont déterminées sur la base de l'équation (3.32), et les composantes restantes de la matrice de relaxation ont été fixées selon [14].

5.3.2 Simulations

Trois cas de charge hydraulique ont été testés, correspondant à trois vitesses de chargement différentes lors de la simulation (figure 5.5). La valeur finale de la charge hydraulique est identique dans les trois cas et vaut $-\Delta p/(\rho_f g L) \approx 0.55$. Le fait d'augmenter la pression d'eau de manière linéaire, plutôt que par échelons, permet de limiter les effets dynamiques du fluide sur l'assemblage granulaire au début de la simulation.

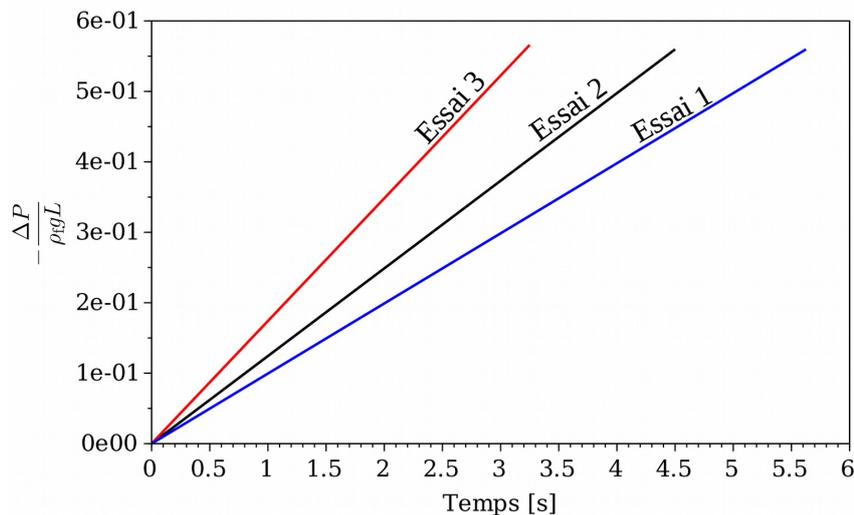


Figure 5.5 – Chargement hydraulique durant la simulation

5.3.2.1 Essai 1

Le premier essai correspond au cas où la pression hydraulique est imposée le plus lentement (ligne bleue, figure 5.5). Une particule est considérée comme érodée lorsqu'elle traverse la frontière solide initiale aval (droite) de l'échantillon ; nous verrons plus loin que cette définition, facilitant le dépouillement numérique, induit un biais dans l'analyse des résultats.

Durant la simulation, seule une partie du matériau a été érodée. Les particules proviennent de la zone aval du matériau qui, par ailleurs, a sans doute été perturbée (endommagée) lors de la préparation de l'échantillon. Les figures 5.6(a-b) montrent la configuration de l'échantillon avec les chaînes de forces normales au contact entre les grains au temps $t = 1.5$ s et à la fin de l'essai ($t = 5.625$ s). On remarque qu'à $t = 1.5$ s un amas s'est détaché alors qu'une partie du front, encore en place, se montre fortement dégradée. De nombreux ponts solides sont rompus. La comparaison entre les figures 5.6(a) et 5.6(b) permet de constater l'évolution des interactions normales entre les grains (en compression et traction) en réponse à l'augmentation des actions hydrodynamiques, selon l'évolution du gradient hydraulique. On observe la formation d'arcs de compression transversaux qui équilibrent les forces hydrodynamiques séparant l'échantillon en deux parties, l'une à l'aval, maintenue principalement par des efforts de traction, et une zone amont essentiellement traversée par des arcs de compression et donc plus stable.

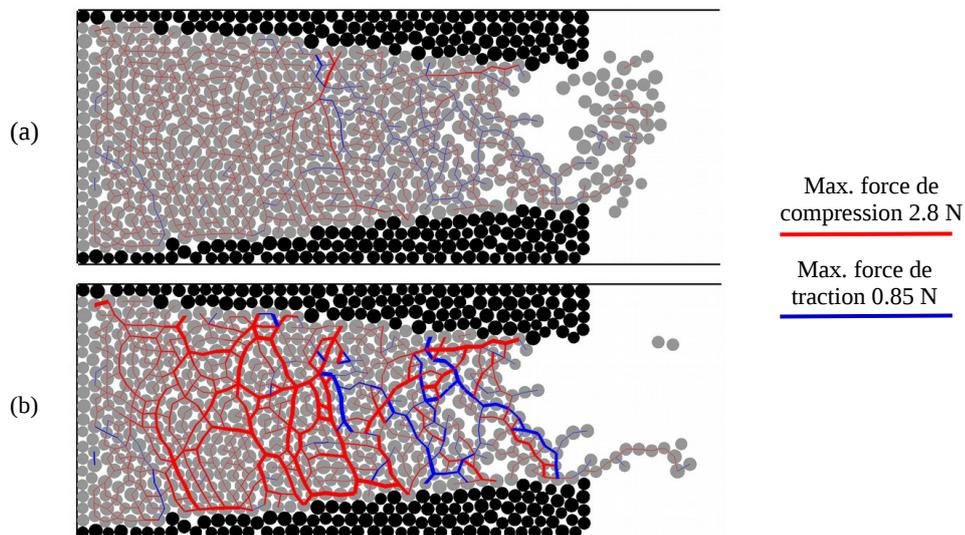


Figure 5.6 – Évolution de l'essai 1 : chaînes de forces de compression et de traction (lignes rouges et bleues, resp.) et état de l'échantillon à $t = 1.5$ s (a) et 5.625 s (b).

5.3.2.2 Essai 2

On regardera les résultats à des temps précis lors de la simulation de l'essai 2 : ces temps sont indiqués dans le tableau 5.2 et notés t_A à t_E dans la figure 5.7. Le tableau 5.2 donne en particulier les valeurs correspondantes estimées de nombre de Reynolds pour l'écoulement dans les pores³. On remarquera que ces valeurs restent dans la plage des valeurs-cadre du modèle LBM construit (cf. section 4.5).

t [s]	0.35	0.75	0.95	1.5	4.0
Re	7.15	17.81	21.23	33.62	74.65

Tableau 5.2 – Nombre de Reynolds de l'écoulement d'infiltration pour les instants identifiés dans la figure 5.7.

L'évolution de la condition de chargement hydraulique et de la masse érodée pendant l'essai 2 sont données respectivement dans les figures 5.7(a) et 5.7(b). A la figure 5.7(b), on donnera l'évolution de la masse érodée. On rappelle qu'une particule est considérée comme érodée lorsqu'elle traverse la frontière aval solide de l'échantillon. Les figures 5.9(a-e) montrent les chaînes de forces entre les grains aux différents instants (t_A à t_E). Les configurations hydrauliques correspondantes sont données aux figures 5.10(a-e). Enfin, dans la figure 5.8, l'échantillon est découpé en quatre zones d'étude et l'évolution du nombre de ponts solides au cours du temps est donnée pour chaque zone. Dans cette analyse, l'appartenance d'un pont solide à secteur donné est établie sur la base de la configuration initiale des grains.

Au début de l'essai $t_A=0.35$ s, l'échantillon subit des efforts hydrodynamiques encore faibles, qui entraînent aux niveaux des ponts solides des déformations essentiellement élastiques : quasiment aucun pont solide n'est détruit (figure 5.8(b)). Déjà dans cette phase initiale de chargement, une transmission de contrainte à travers des chaînes de forces transversales au sein de l'échantillon se met en place, avec une séparation marquée entre efforts respectivement de compression et de traction dans les zones amont et aval.

Au temps $t_B=0.75$ s, une détérioration par ruptures de ponts solides côté aval de l'échantillon est observée (zones 3-4, figure 5.8(b)). On peut aussi noter à la figure 5.9(b) l'installation d'un arc de compression transversal au milieu de la zone 3. Cet arc tend à séparer l'assemblage granulaire en deux parties : l'une intacte

3. Le nombre de Reynolds représentatif pour l'écoulement d'infiltration est défini par $Re = \rho_f \bar{u}_p (2\bar{r}_h) / \eta$, où \bar{u}_p est la vitesse moyenne du fluide dans les pores et \bar{r}_h est le rayon hydraulique moyen.

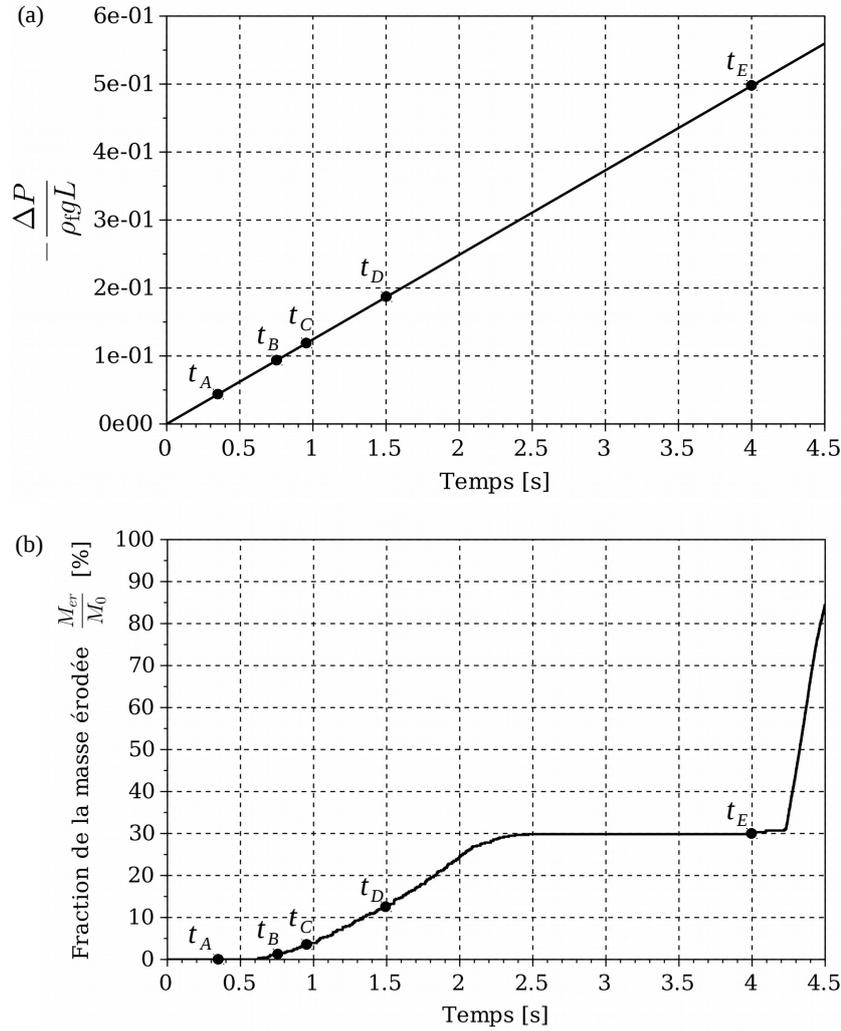


Figure 5.7 – Évolution de la simulation : la différence de pression normalisée (a) et la fraction de la masse érodée (b) aux différents instants $t_A = 0.35$ s, $t_B = 0.75$ s, $t_C = 0.95$ s, $t_D = 1.5$ s et $t_E = 4.0$ s.

(zone 1, 2 et la moitié de la zone 3, figure 5.8(b)) où les contacts compressifs dominant ; l'autre détériorée, en aval, où se concentrent des contacts en traction. On notera dans la figure 5.7(b) que la masse érodée a commencé à augmenter, mais cette érosion est artificielle et provient de la définition choisie pour qualifier une particule érodée. L'ensemble des particules est maintenu et, en l'absence de modification du gradient hydraulique, aucune variation du comportement d'ensemble n'est en fait attendue.

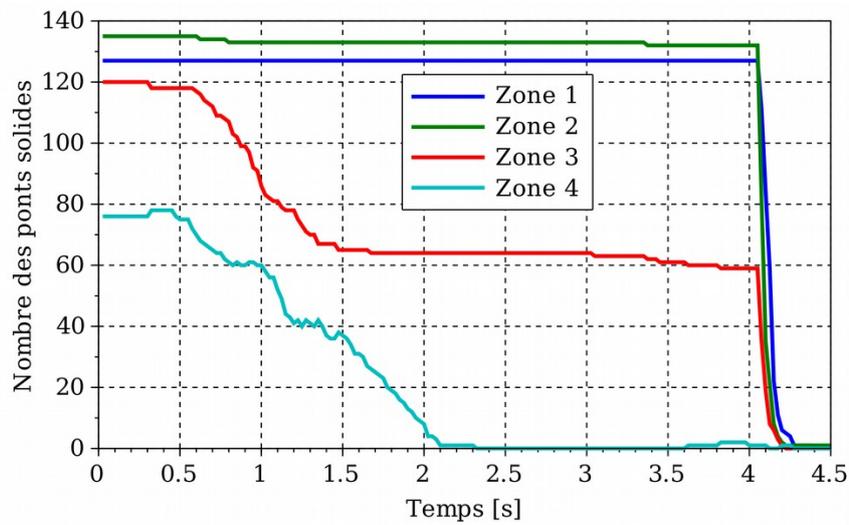
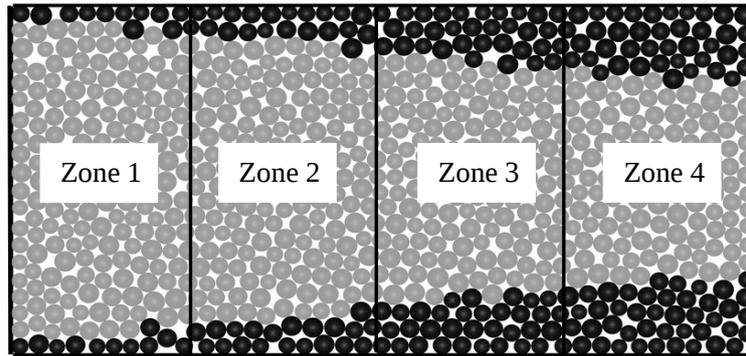


Figure 5.8 – Évolution du nombre des ponts solides lors de l'essai 2

Le mécanisme qui était déjà observable au temps $t_B=0.75$ s est plus nettement visible au temps $t_C=0.95$ s, où la perte de ponts solides dans les zones 3 et 4 se poursuit sans qu'il y ait une évolution du comportement des zones 1 et 2 (figure 5.8(b)).

C'est au temps $t_D=1.5$ s, que le détachement d'un amas de grains des zones 3 et 4 est enclenché. Ceci est visible à la figure 5.9(d) mais aussi à la figure 5.8(b). Le nombre de ponts solides rompus de la zone 3 stagne à partir du temps $t=1.7$ s, ce qui indique que toutes les grains détachés ont quitté la zone 3. Les derniers grains de l'amas traverseront la frontière aval solide de l'échantillon au temps $t=2.5$ s (figure 5.7(b)) et la masse érodée stagne quelques temps.

Il est intéressant de noter qu'entre les temps $t_D=1.5$ s et $t_E=4.075$ s, la partie intacte de l'échantillon a peu évolué. On peut constater à la figure 5.9(e), que l'arc de compression transversal continue à maintenir l'intégrité de l'échantillon comme précédemment. On donne à la figure 5.11(a) et à la figure 5.12(a) l'état du système pour le temps $t=4.075$ s, où il apparaît que l'arc de compression cité précédemment a rompu. De nouveaux arcs de compression tentent de s'établir en amont, sans succès. Ne pouvant pas résister aux forces hydrauliques, les ponts solides qui maintenaient ces arcs cèdent ce qui libère le matériau amont (zones 1,2 et moitié de la zone 3) en un seul amas plus ou moins détérioré (figure 5.8(b)). Cette rupture est soudaine et l'amas traverse très vite la frontière solide aval de l'échantillon ; il devient alors matériau érodé (figure 5.7(b)) au sens de la définition choisie.

Les figures 5.13(a-e) viennent compléter l'étude en donnant l'évolution de la norme des forces hydrodynamiques sur chaque grain durant l'essai 2 d'érosion pour les temps t_A à t_E . On peut noter localement des forces hydrodynamiques plus élevées vers l'aval de l'échantillon dans la figure 5.13(a), ce qui contribue probablement à la détérioration de ce secteur, telle qu'observable à la figure 5.9(b) et à la figure 5.13(b). Ce front d'effort plus important se déplace vers l'amont. On remarquera plus en général une hétérogénéité non négligeables des actions hydrauliques à l'échelle des grains pendant le processus d'érosion. On notera aussi que lorsque le gradient hydraulique est plus élevé cette hétérogénéité est plus marquée (probablement à cause de l'effet de l'hétérogénéité locale de la porosité).

On donne à la figure 5.14 les distributions polaires de la population des contacts en compression et en traction. Dès $t=0.35$ s on peut constater que le nombre de contacts en compression avait augmenté par rapport à l'état initial (figure 5.1(b)) ; il s'agit de contacts unilatéraux car seul ce type de contact peut être créé en cours de simulation. Le diagramme polaire de compression reflète la structure initiale de l'échantillon avant l'enlèvement des parois (figure 5.1(a)). Cette structure est donc persistante au cours de la simulation.

En conclusion, on constate que l'érosion n'est pas ici progressive par arrachement individuel de grains, mais se produit brutalement par amas successifs, amas qui se détachent en étant au préalable plus ou moins détériorés. La brutalité est dû au fait qu'un arc de compression transversal qui maintenait l'intégrité du matériau en place se rompt dû aux forces hydrodynamiques excessives. Les résultats de cet essai ont été publiés dans Tran et al., 2016 [33].

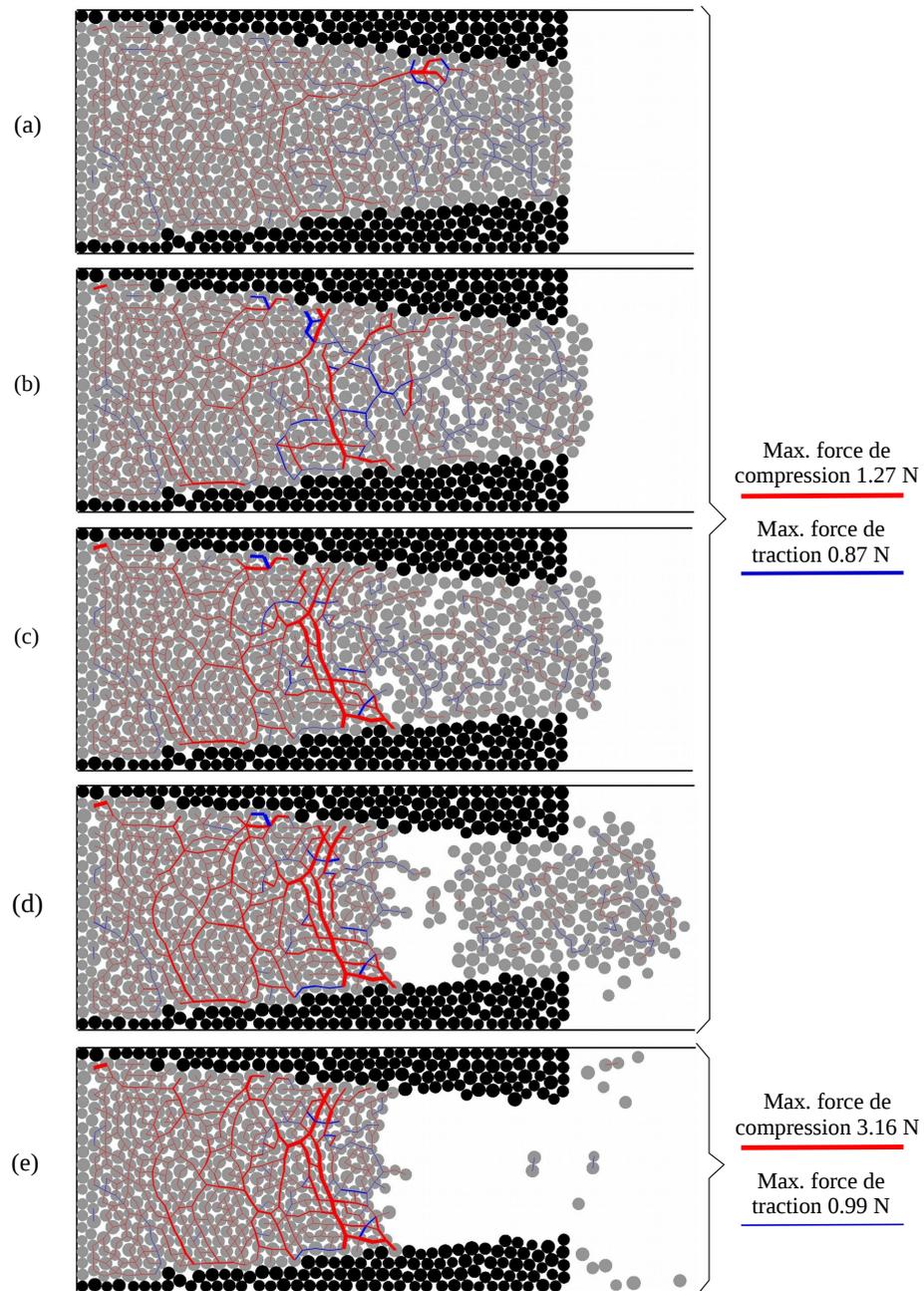


Figure 5.9 – Évolution de l'essai 2 : chaîne des forces en compression et en traction (linges rouges et bleues, resp.) et configurations de l'échantillon à $t = 0.35$ s (a), 0.75 s (b), 0.95 s (c), 1.5 s (d) et 4.0 s (e).

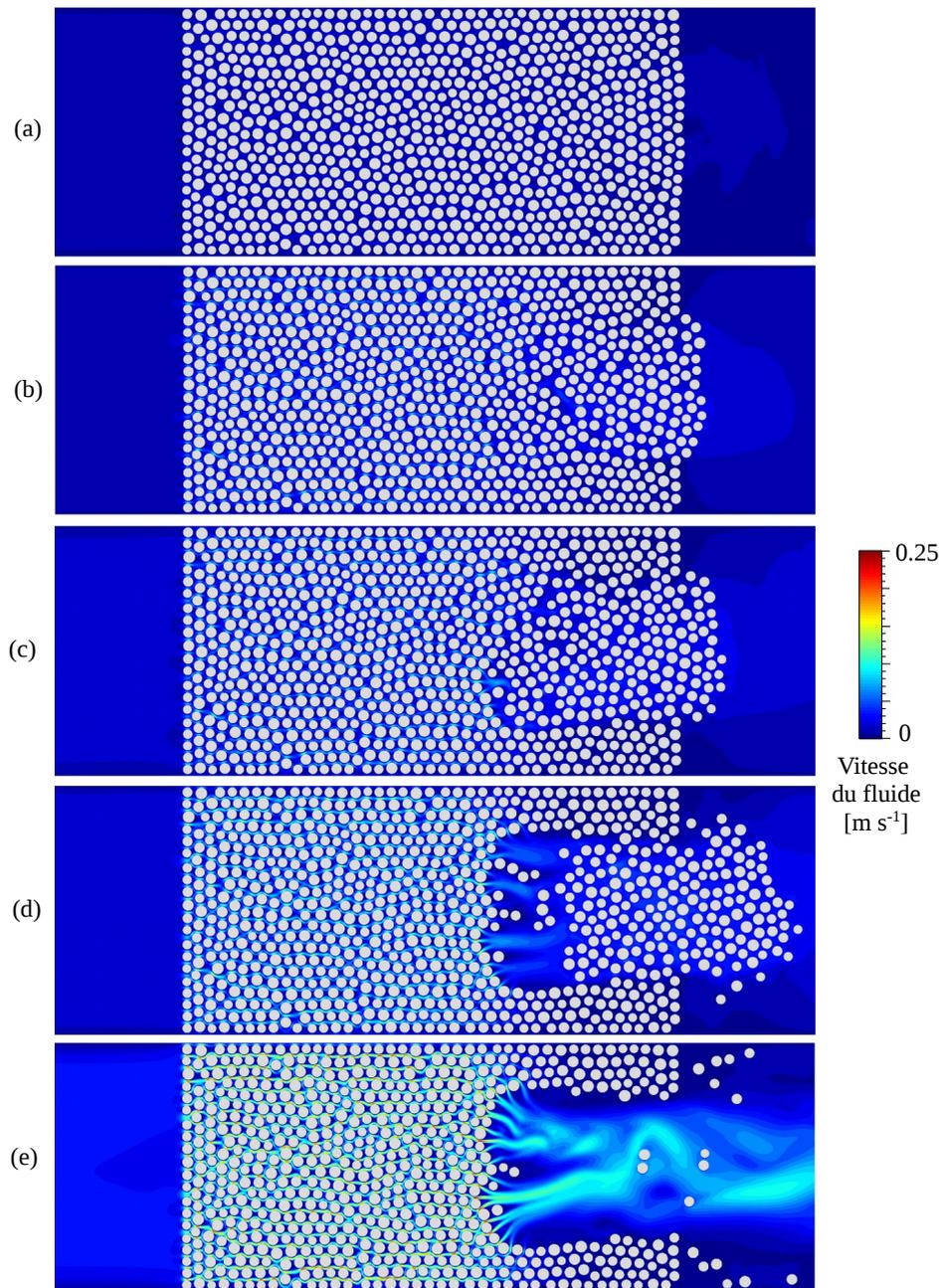


Figure 5.10 – Évolution de l'essai 2 : champs de vitesse et configuration hydraulique de l'échantillon à $t = 0.35$ s (a), 0.75 s (b), 0.95 s (c), 1.5 s (d) et 4.0 s (e).

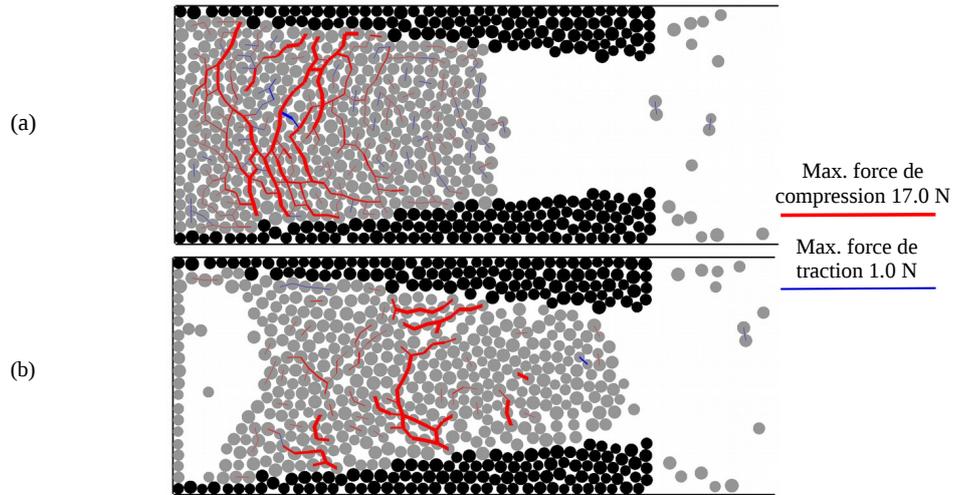


Figure 5.11 – Évolution de l’essai 2 : chaîne des forces en compression et en traction (linges rouges et bleues, resp.) et configurations de l’échantillon à $t = 4.075$ s (a) et 4.2 s (b).

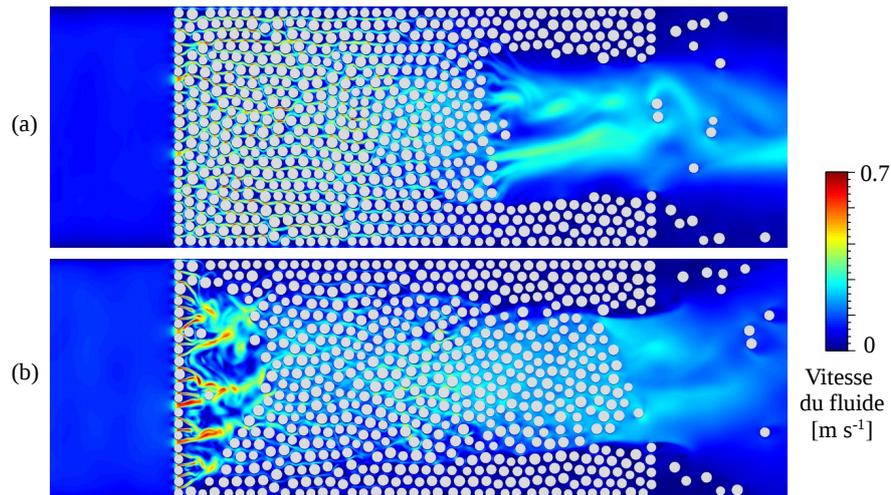


Figure 5.12 – Évolution de l’essai 2 : champ de vitesse et configuration hydraulique de l’échantillon à $t = 4.075$ s (a) et 4.2 s (b).

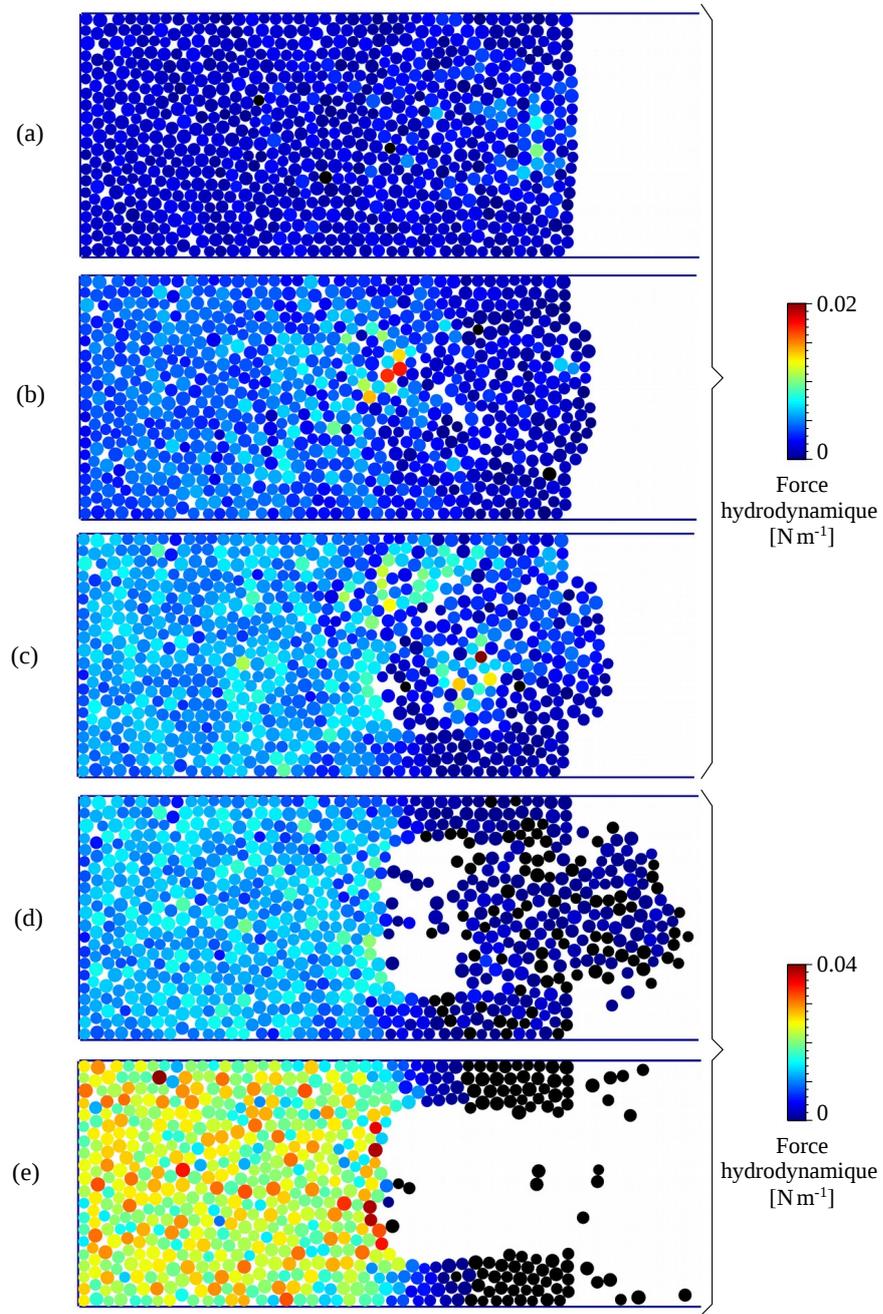


Figure 5.13 – Évolution de l'essai 2 : norme de la force hydrodynamique sur chacun des grains dans l'échantillon pour les configurations à $t = 0.35$ s (a), 0.75 s (b), 0.95 s (c), 1.5 s (d) et 4.0 s (e).

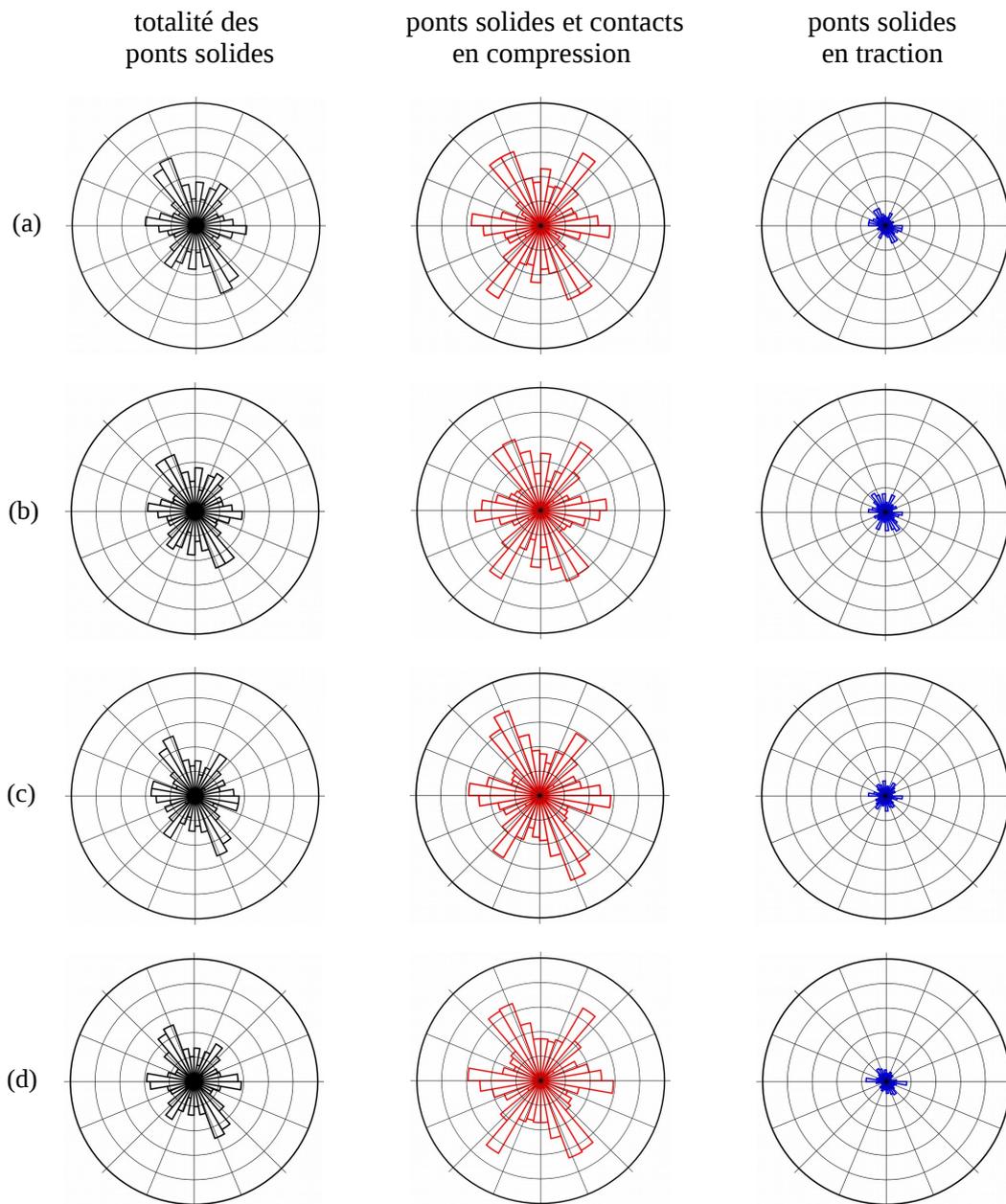


Figure 5.14 – Évolution de l'essai 2 : distribution angulaire des contacts entre les grains à $t = 0.35$ s (a), 0.75 s (b), 0.95 s (c), 1.5 s (d). Le type et l'échelle de la représentation, en termes de densité angulaire du nombre de coordination, sont les mêmes adoptés dans la figure 5.2.

5.3.2.3 Essai 3

Les figures 5.15 (a-b) donnent une visualisation de l'échantillon avec les chaînes des forces entre les grains obtenues par l'essai 3, celui dans lequel la charge hydraulique est appliquée rapidement (ligne rouge, figure 5.5). Même si la pression du fluide est encore faible, la plupart des contacts bilatéraux sont rompus dès le temps $t = 0.95$ s (figure 5.15(b)). Une érosion s'initie à l'aval de l'échantillon et se propage quasi instantanément à tout l'échantillon. Ici, aucun arc de compression transversal n'a pu se former stablement pour reprendre les forces hydrodynamiques.

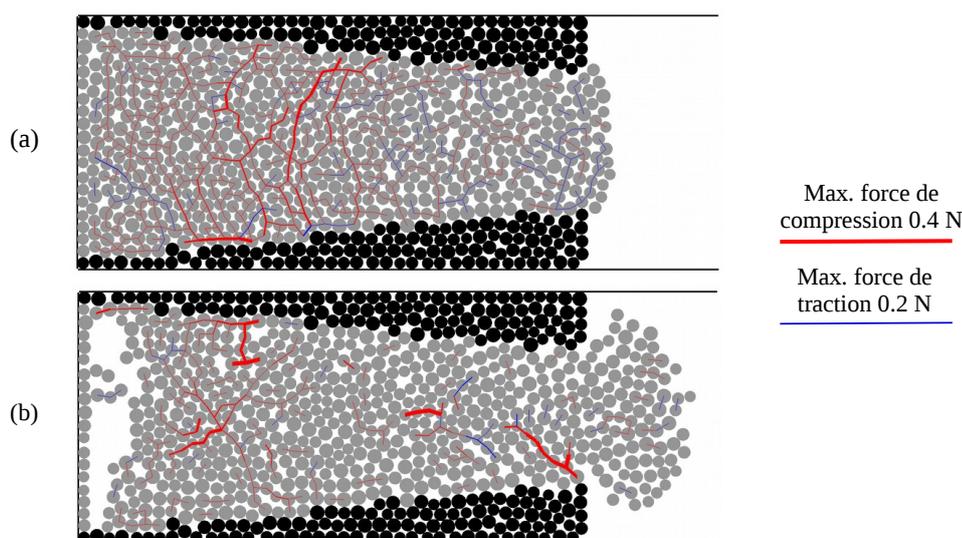


Figure 5.15 – Évolution de l'essai 3 : chaînes de forces de compression et de traction (lignes rouges et bleues, resp.) et état de l'échantillon à (a) $t = 0.6$ s, (b) 0.95 s .

5.3.2.4 Validité du calcul

Une analyse plus fine de la conservation de la masse fluide a été menée dans le cadre de l'essai 2 permettant de quantifier la validité des simulations menées précédemment. La courbe dans la figure 5.16 présente la variation de la masse totale du fluide dans l'échantillon calculée jusqu'au moment où le premier grain sort du domaine fluide. On constate une évolution de la masse au cours de la simulation qui est rendue possible par la méthode même LBM qui conduit à permettre une certaine compressibilité du fluide. Il y a une légère inflexion de cette courbe après l'instant $t_A = 0.35$ s où les premiers grains entrent en mouvement. Or, comme souligné dans la section 4.2.2, la conservation de la masse du fluide n'est pas une propriété strictement satisfaite à proximité des solides en mouvement.

Cette inflexion est très faible, indiquant que le traitement des frontières solides en mouvement n'a pas en général affecté la conservation de la masse fluide.

Globalement, l'augmentation de la masse sur ce laps de temps de 1.5 s est très faible, de l'ordre de 0.63% (figure 5.16), ce qui montre aussi que la compressibilité du fluide est très limitée durant la simulation.

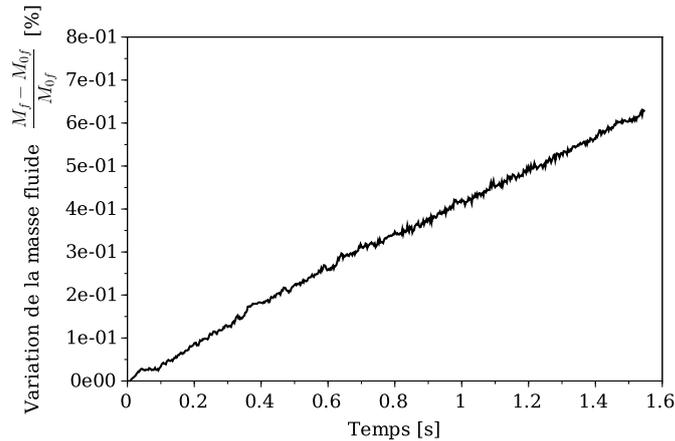


Figure 5.16 – Évolution de la masse totale du fluide dans le canal jusqu'au temps $t_D=1.5s$ de la simulation de l'essai 2.

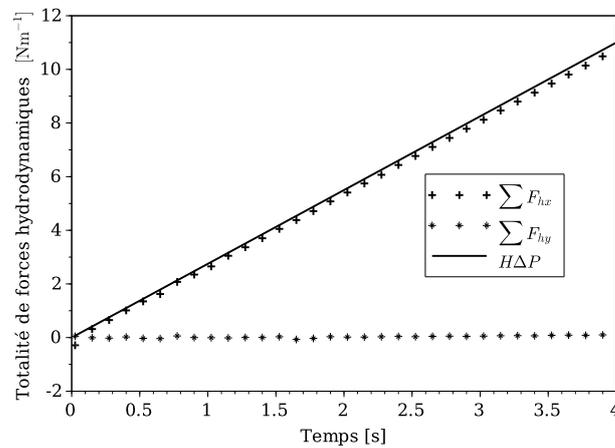


Figure 5.17 – Évolution de la totalité de forces hydrodynamiques durant la simulation de l'essai 2

Enfin, on donne à la figure 5.17 la somme des forces hydrodynamiques dans

le système au cours de toute la durée de la même simulation. Cette somme suit strictement les conditions aux limites imposées ($H\Delta p$).

Ces précisions indiquent que les calculs menés sont conformes aux consignes imposées aux limites et qu'ils ont été menés dans le strict cadre posé par la méthode de Boltzmann sur réseau.

5.4 Conclusion

Les simulations numériques présentées dans ce chapitre ont été réalisées afin de valider la mise en œuvre d'un couplage entre la méthode des éléments discrets (DEM) et la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) dans un code. Des calculs ont été menés pour mettre en relief les mécanismes possibles dans le front d'érosion, en association avec une érosion régressive (de type conduit). Ce processus d'érosion est induit par l'écoulement interstitiel normal à l'interface sol/fluide. Par conséquent, cette étude est complémentaire aux travaux précédents dans lesquels d'autres auteurs, en utilisant la même approche numérique, ont étudié le mécanisme d'érosion tangentielle au niveau des parois du conduit [5, 106].

Les simulations présentées ici permettent d'observer plusieurs caractéristiques intéressantes en relation avec le phénomène étudié. L'effet le plus distinct est la formation des arcs transversaux de compression comme une réponse auto-organisée du réseau des contact ou ponts solides aux actions hydrodynamiques sur les grains. Ces arcs de compression permettent de maintenir l'intégrité du matériau amont alors que le matériau aval se dégrade fortement (ruptures des ponts solides) [33].

L'érosion (dans le cadre défini par le choix des paramètres mécaniques aux contacts) se produit par amas de particules, il ne s'agit donc pas d'un processus stricto sensu progressif, avec érosion individuelle de grains. Un amas se détache lorsque les effets d'arche sont rompus et que le matériau à l'aval d'un arc transversal stable est suffisamment détérioré [33].

La vitesse de montée du gradient hydraulique joue un rôle majeur dans les simulations où, en fonction des valeurs de ce dernier, l'érosion est réduite, progressive mais par paquets (amas) ou subite, du type débouillage.

Conclusion

Le travail présenté dans cette thèse est centré sur la modélisation discrète de l'érosion régressive dans les digues et barrages en remblai, un phénomène physique complexe impliquant l'interaction solide-fluide.

L'approche numérique utilisée est basée sur le couplage entre la méthode des éléments discrets (DEM) pour la phase solide et la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) pour la phase fluide. L'objectif final est de modéliser l'évolution régressive du front d'érosion du conduit sous l'effet d'un écoulement de filtration normal à l'interface solide-fluide. A travers des simulations numériques, des phénomènes en jeu localement dans le matériau granulaire à proximité du front ont pu être mis en avant.

La méthode LBM a été implémentée dans un code DEM en calcul pré-existant, développé aussi en interne, permettant la résolution de problèmes aux limites avec des conditions classiques telles que la condition de périodicité, la condition de rebondissement en présence des frontières solides, différence de pression ou vitesse imposées.

Les approximations BGK à un temps de relaxation et MRT à temps de relaxation multiples pour le terme de collision dans l'équation de Boltzmann ont été implémentées. Le modèle BGK est ensuite validé par la simulation d'écoulements de Poiseuille et de Couette-Plan, ce qui montre une très bonne adéquation au niveau des résultats obtenus en comparaison avec les solutions analytiques même dans les états transitoires de l'écoulement. On a noté que le modèle MRT non seulement permet de modéliser des écoulements dans le cas des nombres de Reynolds élevés mais permet d'éviter l'apparition d'instabilités locales dans le cas d'objets solides en interaction avec un fluide.

Le couplage fluide-grains complet a été validé quantitativement en simulant un écoulement autour d'un cylindre fixe tout comme le problème dual qui est le cas du mouvement de translation d'un cylindre dans un fluide initialement au repos. Une validation qualitative a été ensuite proposée autour du problème de la sédimentation de deux grains dans un fluide au repos.

L'érosion régressive au niveau du front d'érosion d'un conduit hydraulique a été modélisée sur la base d'un échantillon granulaire de taille minimale. On a pu mettre en évidence le rôle majeur joué par la vitesse de montée du gradient hydraulique dans le processus d'érosion. En fonction de cette valeur, l'érosion est limitée, progressive mais par paquets (amas) ou subite, du type débouillage.

Les résultats obtenus à travers les simulations permettent d'observer plusieurs caractéristiques intéressantes en relation avec le phénomène étudié. L'effet le plus distinct est la formation d'arcs transversaux de compression comme une réponse auto-organisée du réseau des contacts à des actions fluides. La formation d'arches par lesquelles transitent préférentiellement des efforts entre des points durs est typique des matériaux granulaires. Dans le front d'érosion, ces arcs de compression permettent de maintenir l'intégrité du matériau amont (loin du front d'érosion) alors que le matériau aval (à l'interface avec le conduit où le fluide s'écoule "librement") se dégrade fortement. La dégradation se matérialise ici par de nombreuses ruptures des ponts solides entre les grains.

L'érosion se produit par amas de particules, il ne s'agit donc pas d'un processus finement progressif avec érosion individuelle de grains. Bien que physique, ce phénomène est certainement lié au jeu de paramètres utilisé dans la modélisation pour le contact entre grains. Un amas se détache lorsque :

- l'arc de compression transversal reprenant la majorité des forces hydrodynamiques dans certaines zones du matériau se rompt dû à un gradient hydraulique excessif ;
- le matériau à l'aval d'un arc de compression transversal stable est suffisamment détérioré.

Perspectives

Les perspectives de ce travail sont nombreuses et liées à la fois de l'implémentation numérique du code, l'analyse physique du phénomène d'érosion interne et les applications envisageables pour le couplage fluide-solide développé.

En ce qui concerne le modèle DEM/LBM, le code développé actuellement est en 2D cependant tous les aspects de l'algorithme peuvent être directement généralisés pour le cas 3D. Dans ce sens, une difficulté liée à la méthode de Boltzmann sur réseau est que tout l'espace potentiellement occupé par le fluide doit être discrétisé, ce qui entraîne une forte consommation de la mémoire disponible pour le calcul. Dans le cas des milieux granulaires denses, la plupart des nœuds discrétisés appartiennent ainsi au domaine solide alors qu'ils ne sont pas, avant érosion, utilisés lors du calcul. Dans le futur, pour les calculs d'un système constitué d'un nombre important de grains, une solution devrait être envisagée pour optimiser l'utilisation de la mémoire.

Au niveau des simulations numériques de l'érosion régressive, à court terme, un échantillon de taille plus représentative a été préparé afin d'affiner l'étude menée. Ce nouvel échantillon, constituée de 5400 grains de rayon entre 0.75 mm et 1.5 mm pourrait permettre des observations plus réalistes du phénomène d'évolution régressive du front du conduit d'érosion.

Pour l'analyse physique du phénomène étudié, il serait intéressant de discuter de l'évolution de l'énergie du système lors du processus d'érosion. Un bilan de l'énergie cinétique, élastique, de l'énergie dissipée, et du travail des actions hydrodynamiques devrait être établi dans lequel la somme de ces composantes est censée être constante au cours du temps de calcul.

Le couplage DEM/LBM présenté dans ce travail est robuste et peut être utilisé pour un large champ d'application, en particulier pour des problèmes impliquant des interactions fluide-grains. Quant au phénomène d'érosion interne, des mécanismes d'initiation tels que la suffusion, l'érosion de contact ou la fuite concentrée peuvent être modélisés en utilisant cet outil.

Bibliographie

- [1] N. Reboul, *Transport de particules dans les milieux granulaires. Application à l'érosion interne*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2008.
- [2] V. M. van Beek, H. Knoeff, and H. Sellmeijer, “Observations on the process of backward erosion piping in small-, medium- and full-scale experiments,” *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, vol. 15, no. 8, pp. 1115–1137, 2011.
- [3] N. Benahmed and S. Bonelli, “Investigating concentrated leak erosion behaviour of cohesive soils by performing hole erosion tests,” *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, vol. 16, no. 1, pp. 43–58, 2012.
- [4] S. Bonelli and O. Brivois, “The scaling law in the hole erosion test with a constant pressure drop,” *International Journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, vol. 32, no. 13, pp. 1573–1595, 2008.
- [5] F. Lominé, L. Scholtès, L. Sibille, and P. Poullain, “Modeling of fluid–solid interaction in granular media with coupled lattice boltzmann/discrete element methods : application to piping erosion,” *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 37, no. 6, pp. 577–596, 2013.
- [6] E. Catalano, *A pore–scale coupled hydromechanical model for biphasic granular media. Application to granular sediment hydrodynamics*. PhD thesis, PhD thesis, Université de Grenoble, 2012.
- [7] Y. H. Qian, D. D’Humières, and P. Lallemand, “Lattice BGK models for Navier-Stokes equation,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 17, no. 6, p. 479, 1992.
- [8] M. Schäfer, S. Turek, F. Durst, E. Krause, and R. Rannacher, “Benchmark computations of laminar flow around a cylinder,” in *Notes on numerical fluid mechanics : Flow simulation with high-performance computers* (E. Hirschel, ed.), pp. 547–566, Vieweg, 1996.
- [9] P. Lallemand and L.-S. Luo, “Lattice Boltzmann for moving boundaries,” *Journal of Computational Physics*, vol. 184, no. 2, pp. 406–421, 2003.
- [10] J. Feng, H. H. Hu, and D. D. Joseph, “Direct simulation of initial value problems for the motion of solid bodies in a newtonian fluid part 1. sedimentation,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 261, pp. 95–134, 2 1994.

- [11] N. A. Patankar, “A formulation for fast computations of rigid particulate flows, annual research briefs,” tech. rep., Center for Turbulence Research, Stanford University, 2001.
- [12] Z.-G. Feng and E. E. Michaelides, “The immersed boundary-lattice boltzmann method for solving fluid-particles interaction problems,” *Journal of Computational Physics*, vol. 195, no. 2, pp. 602–628, 2004.
- [13] S. Bonelli, “Erosion of geomaterials,” 2012.
- [14] R. Du, B. Shi, and X. Chen, “Multi-relaxation-time lattice Boltzmann model for incompressible flow,” *Physics Letters A*, vol. 359, no. 6, pp. 564–572, 2006.
- [15] R. Fell and J.-J. Fry, “The state of the art of assessing the likelihood of internal erosion of embankment dams, water retaining structures and their foundations,” in *Internal Erosion of Dams and Their Foundations* (R. Fell and J.-J. Fry, eds.), (Leiden, The Netherlands), pp. 1–23, EDF, IREX, Taylor and Francis/Balkema, 2007.
- [16] R. Fell, M. A. Foster, and C. F. Wan, “A framework for assessing the likelihood of internal erosion and piping of embankment dams and their foundations,” in *Internal Erosion of Dams and Their Foundations* (R. Fell and J.-J. Fry, eds.), (Leiden, The Netherlands), pp. 65–70, EDF, IREX, Taylor and Francis/Balkema, 2007.
- [17] C. F. Wan and R. Fell, *Investigation of Internal Erosion and Piping of Soils in Embankment Dams by the Soil Slot Erosion Test and the Hole Erosion Test*. University of New South Wales, School of Civil and Environmental Engineering, 2002.
- [18] C. F. Wan and R. Fell, “Laboratory tests on the rate of piping erosion of soils in embankment dams,” *Geotechnical Testing Journal*, vol. 27, no. 3, pp. 295–303, 2004.
- [19] R. Cottreau, P. Díez, and A. Huerta, “Modeling, with a unified level-set representation, of the expansion of a hollow in the ground under different physical phenomena,” *Computational Mechanics*, vol. 46, no. 2, pp. 315–327, 2010.
- [20] I. Vardoulakis, M. Stavropoulou, and P. Papanastasiou, “Hydro-mechanical aspects of the sand production problem,” *Transport in Porous media*, vol. 22, no. 2, pp. 225–244, 1996.
- [21] I. Vardoulakis, P. Papanastasiou, and M. Stavropoulou, “Sand erosion in axial flow conditions,” *Transport in Porous Media*, vol. 45, no. 2, pp. 267–280, 2001.
- [22] E. Papamichos and I. Vardoulakis, “Sand erosion with a porosity diffusion law,” *Computers and Geotechnics*, vol. 32, no. 1, pp. 47–58, 2005.
- [23] F. Radjaï and F. Dubois, *Discrete-element modeling of granular materials*. Wiley-Iste, 2011.

- [24] S. McNamara, E. G. Flekkøy, and K. J. Måløy, “Grains and gas flow : Molecular dynamics with hydrodynamic interactions,” *Physical Review E*, vol. 61, no. 4, pp. 4504–4509, 2002.
- [25] B. Chareyre, A. Cortis, E. Catalano, and E. Barthélemy, “Pore-scale modeling of viscous flow and induced forces in dense sphere packings,” *Transport in porous media*, vol. 94, no. 2, pp. 595–615, 2012.
- [26] E. Catalano, B. Chareyre, and E. Barthélemy, “Pore-scale modeling of fluid-particles interaction and emerging poromechanical effects,” *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 38, no. 1, pp. 51–71, 2014.
- [27] A. J. C. Ladd, “Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. Part 1. Theoretical foundation,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 271, pp. 285–309, 1994.
- [28] A. J. C. Ladd, “Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. part 2. numerical results,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 271, pp. 311–339, 1994.
- [29] A. Wachs, “A DEM-DLM/FD method for direct numerical simulation of particulate flows : Sedimentation of polygonal isometric particles in a Newtonian fluid with collisions,” *Computures & Fluids*, vol. 38, no. 14, pp. 1608–1628, 2009.
- [30] D. F. Boutt, B. K. Cook, B. J. O. L. McPherson, and J. R. Williams, “Direct simulation of fluid-solid mechanics in porous media using the discrete element and lattice-Boltzmann methods,” *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, vol. 112, no. B10, 2007.
- [31] D. F. Boutt, B. K. Cook, and J. R. Williams, “A coupled fluid–solid model for problems in geomechanics : Application to sand production,” *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 35, no. 9, pp. 997–1018, 2011.
- [32] X. Cui, J. Li, A. Chan, and D. Chapman, “A 2D DEM–LBM study on soil behaviour due to locally injected fluid,” *Particuology*, vol. 10, no. 2, pp. 242 – 252, 2012. Advances in Characterization and Modeling of Particulate Processes.
- [33] D. Tran, N. Prime, F. Froiio, C. Callari, and E. Vincens, “Numerical modeling of backward front propagation in piping erosion by dem-lbm coupling,” *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, pp. 1–28, 2016. doi : 10.1080/19648189.2016.1248794.
- [34] ICOLD, *Lessons from dam incidents*. Paris : ICOLD, complete ed ed., 1974.
- [35] ICOLD, *Deterioration of dams and reservoirs*. Paris : ICOLD, 1983.
- [36] ICOLD, “Dam failures : statistical analysis,” Tech. Rep. Bulletin 99, International Commission on Large Dams (ICOLD), 1995.

- [37] M. Foster, R. Fell, M. Spannagle, and U. of New South Wales., *Analysis of embankment dam incidents / M.A. Foster, R. Fell and M. Spannagle*. University of New South Wales Sydney, 1998.
- [38] M. Foster, R. Fell, and M. Spannagle, “The statistics of embankment dam failures and accidents,” *Canadian Geotechnical Journal*, vol. 37, pp. 1000–1024, 2000.
- [39] K. R. Richards, Kevin S.and Reddy, “Critical appraisal of piping phenomena in earth dams,” *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, vol. 66, no. 4, pp. 381–402, 2007.
- [40] T. L. Pham, *Erosion and dispersion of clayed soils by a fluid*. PhD thesis, Ecole des Ponts ParisTech, Sept. 2008.
- [41] R. A. Gingold and J. J. Monaghan, “Smoothed particle hydrodynamics - theory and application to non-spherical stars,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 181, pp. 375–389, nov 1977.
- [42] L. B. Lucy, “A numerical approach to the testing of the fission hypothesis,” *Astronomical Journal*, vol. 82, pp. 1013–1024, dec 1977.
- [43] J. Monaghan, “Simulating free surface flows with sph,” *J. Comput. Phys.*, vol. 110, pp. 399–406, feb 1994.
- [44] J.-C. Marongiu, F. Leboeuf, J. Caro, and E. Parkinson, “Free surface flows simulations in Pelton turbines using an hybrid SPH-ALE method,” *Journal of Hydraulic Research*, vol. 48, pp. 40–49, 2010.
- [45] S. K. Godunov, “Reminiscences about difference schemes,” *Journal of Computational Physics*, vol. 153, no. 1, pp. 6–25, 1999.
- [46] J.-C. Marongiu, *Méthode numérique lagrangienne pour la simulation d’écoulements à surface libre : application aux turbines Pelton*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2007.
- [47] M. Robinson, M. Ramaioli, and S. Luding, “Fluid–particle flow simulations using two-way-coupled mesoscale sph–dem and validation,” *International journal of multiphase flow*, vol. 59, pp. 121–134, 2014.
- [48] P. W. Cleary, M. Sinnott, and R. Morrison, “Prediction of slurry transport in SAG mills using SPH fluid flow in a dynamic DEM based porous media,” *Minerals Engineering*, vol. 19, no. 15, pp. 1517 – 1527, 2006.
- [49] X. Sun, M. Sakai, and Y. Yamada, “Three-dimensional simulation of a solid-liquid flow by the dem-sph method,” *Journal of Computational Physics*, vol. 248, pp. 147–176, sep 2013.
- [50] J. Sjah, E. Vincens, and J. Marongiu, “2d numerical modelling of the het : Hydrodynamic forces on the pipe wall particles,” *Scour and Erosion*, pp. 351–359, 2014.

- [51] H. Edelsbrunner and N. R. Shah, “Incremental topological flipping works for regular triangulations,” *Algorithmica*, vol. 15, no. 3, pp. 223–241, 1996.
- [52] M. Hilpert, R. Glantz, and C. T. Miller, “Calibration of a pore-network model by a pore-morphological analysis,” *Transport in Porous Media*, vol. 51, no. 3, pp. 267–285, 2003.
- [53] D. Marzougui, B. Chareyre, and J. Chauchat, “Microscopic origins of shear stress in dense fluid–grain mixtures,” *Granular Matter*, vol. 17, no. 3, pp. 297–309, 2015.
- [54] R. Benzi, S. Succi, and M. Vergassola, “The lattice boltzmann equation : theory and applications,” *Physics Reports*, vol. 222, no. 3, pp. 145–197, 1992.
- [55] S. Chen and G. D. Doolen, “Lattice boltzmann method for fluid flows,” *Annual review of fluid mechanics*, vol. 30, no. 1, pp. 329–364, 1998.
- [56] S. Succi, “The lattice boltzmann equation : for fluid dynamics and beyond,” 2001.
- [57] M. Bouzidi, M. Firdaouss, and P. Lallemand, “Momentum transfer of a Boltzmann-lattice fluid with boundaries,” *Physics of Fluids*, vol. 13, no. 11, pp. 3452–3459, 2001.
- [58] D. R. Noble and J. R. Torczynski, “A lattice-boltzmann method for partially saturated computational cells,” *International Journal of Modern Physics C*, vol. 09, no. 08, pp. 1189–1201, 1998.
- [59] P. Mutabaruka, J.-Y. Delenne, K. Soga, and F. Radjai, “Initiation of immersed granular avalanches,” *Phys. Rev. E*, vol. 89, p. 052203, May 2014.
- [60] P. Cuellar, P. Philippe, S. Bonelli, N. Benahmed, F. Brunier-Coulin, J. Ngoma, J.-Y. Delenne, and F. Radjai, “Micromechanical analysis of the surface erosion of a cohesive soil by means of a coupled lbm-dem model,” in *4. International Conference on Particle-based Methods – Fundamentals and Applications*, (Barcelone, Spain), Sep 2015.
- [61] B. Cambou, M. Chaze, and F. Dedecker, “Change of scale in granular materials,” *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 19, no. 6, pp. 999–1014, 2000.
- [62] C. Noguier-Lehon, E. Vincens, and B. Cambou, “Structural changes in granular materials : The case of irregular polygonal particles,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, no. 24–25, pp. 6356 – 6375, 2005.
- [63] F. Froiio and J.-N. Roux, “Incremental response of granular materials : DEM results,” in *Powders and Grains 2009*, AIP Conference Proceedings (vol 1145), (Golden, United States), p. 385, American Institute of Physics, Jul 2009.
- [64] B. W. Kernighan and D. M. Ritchie, *Le langage C : norme ANSI*. Informatiques, Paris : Dunod, 2000. Trad. de : The C programming language.

- [65] P. A. Cundall and O. D. L. Strack, “A discrete numerical model for granular assemblies,” *Géotechnique*, vol. 29, no. 1, pp. 47–65, 1979.
- [66] J. J. Moreau, “Some Numerical Methods in Multibody Dynamics : Application to Granular Materials,” *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 13, no. 4, pp. 93 – 114, 1994.
- [67] M. Jean, “The non-smooth contact dynamics method,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 177, no. 3, pp. 235 – 257, 1999.
- [68] A. A. Peña, A. Lizcano, F. Alonso-Marroquin, and H. J. Herrmann, “Biaxial test simulations using a packing of polygonal particles,” *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 32, no. 2, pp. 143–160, 2008.
- [69] L. Verlet, “Computer ”experiments” on classical fluids. i. thermodynamical properties of lennard-jones molecules,” *Phys. Rev.*, vol. 159, pp. 98–103, Jul 1967.
- [70] W. C. Swope, H. C. Andersen, P. H. Berens, and K. R. Wilson, “A computer simulation method for the calculation of equilibrium constants for the formation of physical clusters of molecules : Application to small water clusters,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. 76, no. 1, pp. 637–649, 1982.
- [71] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner, *Geometric numerical integration : structure-preserving algorithms for ordinary differential equations*. Springer series in computational mathematics, Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2006.
- [72] M. P. Allen and D. J. Tildesley, *Computer Simulation of Liquids*. New York, NY, USA : Clarendon Press, 1989.
- [73] K. L. Johnson and K. L. Johnson, *Contact mechanics*. Cambridge university press, 1987.
- [74] J.-N. Roux and F. Chevoir, “Discrete numerical simulation and the mechanical behavior of granular materials,” *Bulletin des laboratoires des ponts et chaussées*, vol. 254, pp. 109–138, jan 2005.
- [75] M. E. Urso, C. J. Lawrence, and M. J. Adams, “A two-dimensional study of the rupture of funicular liquid bridges,” *Chemical Engineering Science*, vol. 57, pp. 677–692, feb 2002.
- [76] T. Mikami, H. Kamiya, and M. Horio, “Numerical simulation of cohesive powder behavior in a fluidized bed,” *Chemical Engineering Science*, vol. 53, no. 10, pp. 1927–1940, 1998.
- [77] F. Soulié, F. Cherblanc, M. S. El Youssoufi, and C. Saix, “Influence of liquid bridges on the mechanical behaviour of polydisperse granular materials,” *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 30, pp. 213–228, mar 2006.

- [78] J.-Y. Delenne, M. S. El Youssoufi, F. Cherblanc, and J.-C. Bénéat, “Mechanical behaviour and failure of cohesive granular materials,” *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 28, no. 15, pp. 1577–1594, 2004.
- [79] K. Johnson, K. Kendall, and A. Roberts, “Surface energy and the contact of elastic solids,” in *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 324, pp. 301–313, The Royal Society, 1971.
- [80] B. V. Derjaguin, V. M. Muller, and Y. P. Toporov, “Effect of contact deformations on the adhesion of particles,” *Progress In Surface Science*, vol. 45, pp. 131–143, apr 1994.
- [81] J. Hardy, Y. Pomeau, and O. de Pazzis, “Time evolution of a two-dimensional model system. i. invariant states and time correlation functions,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 14, no. 12, pp. 1746–1759, 1973.
- [82] U. Frisch, B. Hasslacher, and Y. Pomeau, “Lattice-Gas Automata for the Navier-Stokes Equation,” *Physical Review Letters*, vol. 56, no. 14, pp. 1505–1508, 1986.
- [83] U. Frisch, D. d’Humières, B. Hasslacher, P. Lallemand, Y. Pomeau, and J. P. Rivet, “Lattice Gas Hydrodynamics in Two and Three Dimensions,” *Complex Systems*, vol. 1, no. 4, pp. 649–707, 1987.
- [84] S. Chapman and T. G. Cowling, *The mathematical theory of nonuniform gases*. Cambridge University Press, 1970.
- [85] G. R. McNamara and G. Zanetti, “Use of the boltzmann equation to simulate lattice-gas automata,” *Physical Review Letters*, vol. 61, no. 20, pp. 2332–2335, 1988.
- [86] F. J. Higuera and J. Jiménez, “Boltzmann approach to lattice gas simulations,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 9, no. 7, p. 663, 1989.
- [87] J. M. V. A. Koelman, “A simple lattice boltzmann scheme for navier-stokes fluid flow,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 15, no. 6, p. 603, 1991.
- [88] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook, “A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems,” *Physical Review*, vol. 94, no. 3, pp. 511–525, 1954.
- [89] X. He and L.-S. Luo, “A priori derivation of the lattice Boltzmann equation,” *Physical Review E*, vol. 55, no. 6, pp. 6333–6336, 1997.
- [90] X. He and L. L.-S, “Lattice Boltzmann Model for the Incompressible Navier-Stokes Equation,” *Journal of Statistiscal Physics*, vol. 88, no. 3–4, pp. 927–944, 1997.
- [91] D. d’Humières, “Generalized Lattice Boltzmann equations,” in *Rarefied Gas Dynamics : Theory and Simulations* (e. Shizgal D, Weaver DP, ed.), American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1992.

- [92] D. d’Humières, “Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 360, no. 1792, pp. 437–451, 2002.
- [93] P. Lallemand and L.-S. Luo, “Theory of the lattice Boltzmann method : Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability,” *Physical Review E*, vol. 61, no. 6, pp. 6546–6562, 2000.
- [94] M. Bouzidi, D. d’Humières, P. Lallemand, and L.-S. Luo, “Lattice boltzmann equation on a two-dimensional rectangular grid,” *Journal of Computational Physics*, vol. 172, no. 2, pp. 704 – 717, 2001.
- [95] K. Han, Y. T. Feng, and D. R. J. Owen, “Coupled lattice boltzmann and discrete element modelling of fluid-particle interaction problems,” *Comput. Struct.*, vol. 85, pp. 1080–1088, jun 2007.
- [96] Q. Zou and X. He, “On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model,” *Physics of Fluids*, vol. 9, no. 6, pp. 1591–1598, 1997.
- [97] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- [98] U. Ghia, K. Ghia, and C. Shin, “High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method,” *Journal of Computational Physics*, vol. 48, no. 3, pp. 387 – 411, 1982.
- [99] D. Yu, R. Mei, L.-S. Luo, and W. Shyy, “Viscous flow computations with the method of lattice Boltzmann equation,” *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 39, no. 5, pp. 329 – 367, 2003.
- [100] C. Aidun, Y. Lu, and E.-J. Ding, “Direct analysis of particulate suspensions with inertia using the discrete Boltzmann equation,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 373, no. 1, pp. 287–311, 1998.
- [101] O. Filippova and D. Hänel, “Grid refinement for lattice-bgk models,” *Journal of Computational Physics*, vol. 147, no. 1, pp. 219 – 228, 1998.
- [102] A. F. Fortes, D. D. Joseph, and T. S. Lundgren, “Nonlinear mechanics of fluidization of beds of spherical particles,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 177, pp. 467–483, apr 1987.
- [103] N.-Q. Nguyen and A. J. C. Ladd, “Lubrication corrections for lattice-boltzmann simulations of particle suspensions,” *Physical Review E*, vol. 66, no. 4, p. 046708, 2003.
- [104] F.-L. Yang and M. Hunt, “A mixed contact model for an immersed collision between two solid surfaces,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 366, no. 1873, pp. 2205–2218, 2008.

- [105] I. Tomac and M. Guierrez, “Discrete element modeling of non-linear submerged particle collisions,” *Granular matter*, vol. 15, no. 6, pp. 759–769, 2013.
- [106] L. Sibille, F. Lominé, P. Poullain, Y. Sail, and D. Marot, “Internal erosion in granular media : direct numerical simulations and energy interpretation,” *Hydrological Processes*, vol. 29, no. 9, pp. 2149–2163, 2015.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur E. VINCENS

et les rapports de

M. L. SIBILLE

Maître de Conférences HDR - Université de Grenoble Alpes - Laboratoire 3SR
Domaine Universitaire - BP 53 - 38041 Grenoble cedex 9

et de

M. J-Y. DELENNE

Directeur de Recherche - Montpellier Supagro - UMR 1208 IATE - Campus de la Gaillarde
2 place Pierre Viala - 34060 Montpellier cedex 01

Monsieur TRAN Duc Kien

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE

Fait à Ecully, le 1er décembre 2016

P/Le directeur de l'E.C.L.
La directrice des Etudes

