

# Principes des télécommunications analogiques et numériques : manuel des répétitions

Prof. Marc VAN DROOGENBROECK

Jean-Marc WAGNER

Vincent PIERLOT

Philippe LATOUR

Année 2020 (version 2020.5)

# La transformée de Fourier

## Menu du jour :

1. Définitions et notations
2. Fonctions à valeurs réelles
3. Propriétés
4. La fonction Delta de DIRAC
5. Application de la fonction Delta
6. Quelques signaux fondamentaux
7. Exercices

# 1. Définitions et notations

Transformée de FOURIER directe :

$$\mathcal{G}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-2\pi jft} dt$$

Transformée de FOURIER inverse :

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(f)e^{2\pi jft} df$$

Condition suffisante d'existence de la transformée de FOURIER (DIRICHLET) :

1. La fonction  $g(t)$  est à valeur unique avec un nombre fini de maxima et de minima pour tout intervalle fini.
2. La fonction  $g(t)$  a un nombre fini de discontinuités pour tout intervalle fini.
3. La fonction est "absolument" intégrable, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < \infty$$

Paire de transformée de FOURIER :

$$g(t) \rightleftharpoons \mathcal{G}(f)$$

Module et phase de la transformée de FOURIER :

$$\mathcal{G}(f) = \|\mathcal{G}(f)\| e^{j\theta(f)}$$

$$\|\mathcal{G}(f)\| = \text{module de } \mathcal{G}(f)$$

$$\theta(f) = \text{phase de } \mathcal{G}(f)$$

## 2. Fonctions à valeurs réelles

Par définition de la transformée de FOURIER,

$$\mathcal{G}(-f) = \mathcal{G}^*(f)$$

Il vient

$$\|\mathcal{G}(-f)\| = \|\mathcal{G}(f)\|$$

$$\theta(-f) = -\theta(f)$$

### Propriétés importantes d'un signal à valeurs réelles :

1. Le spectre d'amplitude du signal est une fonction paire de la fréquence, c'est-à-dire que le spectre d'amplitude est symétrique par rapport à l'axe vertical.
2. Le spectre de phase du signal est une fonction impaire de la fréquence, c'est-à-dire que le spectre de phase est antisymétrique par rapport à l'axe vertical.

### 3. Propriétés

#### 1. Linéarité

Soient  $g_1(t) \rightleftharpoons \mathcal{G}_1(f)$  et  $g_2(t) \rightleftharpoons \mathcal{G}_2(f)$ . Alors, pour toutes constantes  $c_1$  et  $c_2$ ,

$$c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) \rightleftharpoons c_1 \mathcal{G}_1(f) + c_2 \mathcal{G}_2(f)$$

#### 2. Dilatation temporelle

Si  $g(t) \rightleftharpoons \mathcal{G}(f)$ , alors

$$g(at) \rightleftharpoons \frac{1}{|a|} \mathcal{G}\left(\frac{f}{a}\right)$$

#### 3. Dualité

Si  $g(t) \rightleftharpoons \mathcal{G}(f)$ , alors

$$\mathcal{G}(t) \rightleftharpoons g(-f)$$

#### 4. Translation temporelle

Si  $g(t) \rightleftharpoons \mathcal{G}(f)$ , alors

$$g(t - t_0) \rightleftharpoons \mathcal{G}(f) e^{-2\pi j f t_0}$$

#### 5. Translation fréquentielle

Si  $g(t) \rightleftharpoons \mathcal{G}(f)$ , alors

$$g(t) e^{2\pi j f_c t} \rightleftharpoons \mathcal{G}(f - f_c)$$

6. **Aire**

Si  $g(t) \rightleftharpoons \mathcal{G}(f)$ , alors

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(f) df$$

7. **Dérivée temporelle**

Si  $g(t) \rightleftharpoons \mathcal{G}(f)$ , alors

$$\frac{d}{dt}g(t) \rightleftharpoons 2\pi jf\mathcal{G}(f)$$

8. **Intégration dans le domaine temporel**

Si  $g(t) \rightleftharpoons \mathcal{G}(f)$  et  $\mathcal{G}(0) = 0$ , alors

$$\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \rightleftharpoons \frac{1}{2\pi jf} \mathcal{G}(f)$$

9. **Multiplication dans le domaine temporel**

Soient  $g_1(t) \rightleftharpoons \mathcal{G}_1(f)$  et  $g_2(t) \rightleftharpoons \mathcal{G}_2(f)$ . Alors

$$g_1(t)g_2(t) \rightleftharpoons \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_1(\lambda)\mathcal{G}_2(f-\lambda)d\lambda$$

## 10. Multiplication dans le domaine fréquentiel

Soient  $g_1(t) \Leftrightarrow \mathcal{G}_1(f)$  et  $g_2(t) \Leftrightarrow \mathcal{G}_2(f)$ . Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\tau)g_2(t - \tau)d\tau \Leftrightarrow \mathcal{G}_1(f)\mathcal{G}_2(f)$$

$$g_1(t) \otimes g_2(t) \Leftrightarrow \mathcal{G}_1(f)\mathcal{G}_2(f)$$

## 11. Égalité de Parseval

Si  $g(t) \Leftrightarrow \mathcal{G}(f)$ , alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|g(t)\|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathcal{G}(f)\|^2 df$$

$\|\mathcal{G}(f)\|^2$  est appelée *densité spectrale d'énergie* du signal  $g(t)$ .



## 4. La fonction Delta de Dirac

### Définition

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

### Autre définition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \delta(t - t_0) dt = g(t_0)$$

où  $g(t)$  est une fonction continue du temps.

### Propriété

Étant donné que  $\delta(t)$  est une fonction paire,

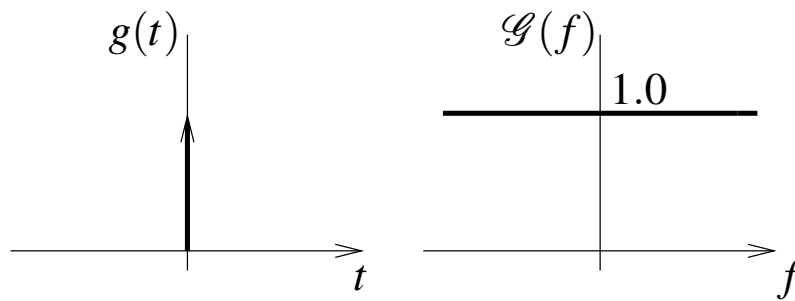
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = g(t)$$

$$g(t) \otimes \delta(t) = g(t)$$

## Transformée de Fourier

$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-2\pi jft} dt$$

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1$$



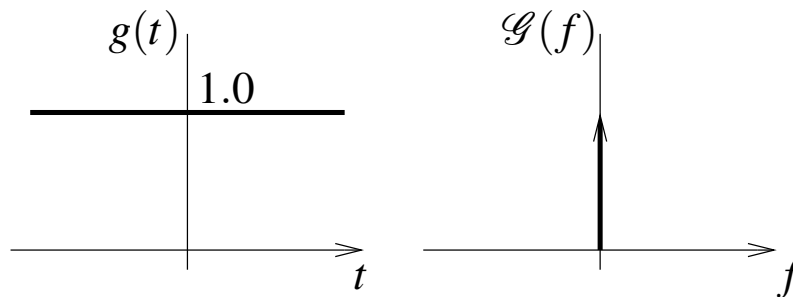
Le spectre s'étend sur  $]-\infty, +\infty[$ .

## 5. Application de la fonction Delta

### 1. Signal DC

En utilisant la propriété de dualité de la transformée de FOURIER et étant donné que la fonction Delta est une fonction paire,

$$1 \rightleftharpoons \delta(f)$$



### 2. Signal complexe exponentiel

En appliquant la propriété de translation fréquentielle au signal DC précédent,

$$e^{2\pi j f_c t} \rightleftharpoons \delta(f - f_c)$$

Le spectre d'un signal complexe exponentiel de fréquence  $f_c$  se limite donc à une raie située en  $f = f_c$ .

### 3. Signal sinusoïdal

$$\begin{aligned}\cos(2\pi f_c t) &= \frac{e^{2\pi j f_c t} + e^{-2\pi j f_c t}}{2} \\ \cos(2\pi f_c t) &\Leftrightarrow \frac{\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)}{2}\end{aligned}$$

Le spectre d'un signal cosinusoidal comporte donc 2 raies pondérées par le facteur  $1/2$  situées en  $f = \pm f_c$ .

De même,

$$\sin(2\pi f_c t) \Leftrightarrow \frac{\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)}{2j}$$

## 6. Quelques signaux fondamentaux

### Définitions

1. Fonction rectangle

$$\mathit{rect}(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

2. Fonction échelon

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

3. Fonction signe

$$\mathit{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

4. Fonction sinc

$$\mathit{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

5. Fonction Si

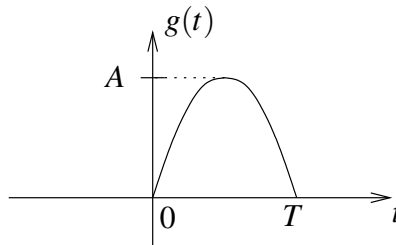
$$\mathit{Si}(u) = \int_0^u \frac{\sin(x)}{x} dx$$

## Transformées de Fourier

$rect\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \operatorname{sinc}(fT)$
$\operatorname{sinc}(2Wt)$	$\frac{1}{2W} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)$
$e^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{a+2\pi jf}$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$
$\delta(t)$	$1$
$1$	$\delta(f)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-2\pi jft_0}$
$e^{2\pi jfct}$	$\delta(f - f_c)$
$\cos(2\pi fct)$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$
$\sin(2\pi fct)$	$\frac{1}{2j}[\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)]$
$\operatorname{sgn}(t)$	$\frac{1}{\pi jf}$
$\frac{1}{\pi t}$	$-j\operatorname{sgn}(f)$
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2\pi jf}$
$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t - iT_0)$	$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$

## 7. Exercices

1. Calculer la transformée de FOURIER de l'impulsion sinus donnée à la figure suivante :

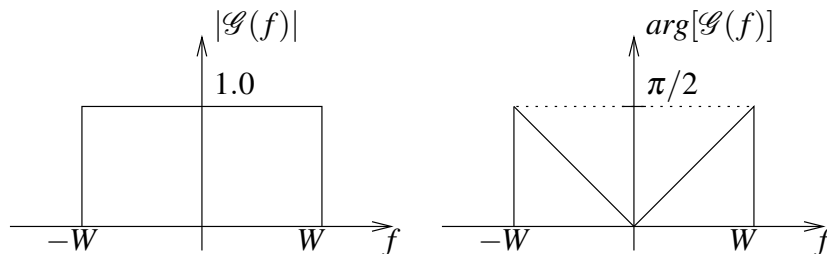


2. Évaluer la transformée de FOURIER de l'onde sinusoïdale amortie définie par

$$g(t) = e^{-2t} \sin(2\pi f_c t) u(t)$$

où  $u(t)$  est la fonction échelon.

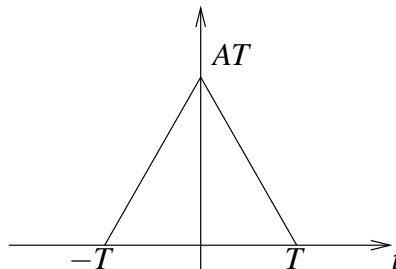
3. Déterminer la transformée de FOURIER inverse  $g(t)$  de la fonction  $\mathcal{G}(f)$  dont l'amplitude et la phase sont données à la figure suivante :



4. La transformée de FOURIER du signal  $g(t)$  est notée  $\mathcal{G}(f)$ . Démontrer que :
- Si  $g(t)$  est une fonction réelle et paire du temps, alors sa transformée de FOURIER est purement réelle.
  - Si  $g(t)$  est une fonction réelle et impaire du temps, alors sa transformée de FOURIER est purement imaginaire.
  - $\mathcal{G}^{(n)}(f)$  étant la dérivée  $n$ ème de  $\mathcal{G}(f)$  par rapport à  $f$ , alors

$$t^n g(t) \Leftrightarrow \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \mathcal{G}^{(n)}(f)$$

5. Évaluer la transformée de FOURIER de la fonction Delta de DIRAC en la considérant comme la limite d'un pulse rectangulaire d'aire unitaire.
6. En utilisant la propriété d'intégration dans le domaine temporel, déterminer la transformée de FOURIER du signal suivant :



7. Déterminer la transformée de FOURIER des signaux suivants :

(a)  $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$

(b)  $g(t) = \text{rect}(t-3) + \text{rect}(t+3)$

(c)  $g(t) = \frac{1}{2}\delta(t+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\delta(t-\frac{1}{2})$

8. Montrer que  $\text{sinc}(t) \otimes \text{sinc}(t) = \text{sinc}(t)$ .
9. Notons  $\mathcal{G}(f)$  la transformée de FOURIER du signal  $g(t)$ . Dans le cas où  $\mathcal{G}(0) \neq 0$ , montrer que

$$\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \Rightarrow \frac{1}{2\pi j f} \mathcal{G}(f) + \frac{1}{2} \mathcal{G}(0) \delta(f)$$

*Suggestion* : Exprimer  $\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$  sous la forme d'une convolution de  $g(t)$  avec la fonction échelon  $u(t)$ .

10. Supposons que deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  soient liés par

$$y(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} x(\tau) d\tau$$

Déterminer la relation existant entre leur transformées de FOURIER respectives  $\mathcal{X}(f)$  et  $\mathcal{Y}(f)$ . Que pouvez-vous déduire sur le filtrage réalisé sur  $x(t)$  ?

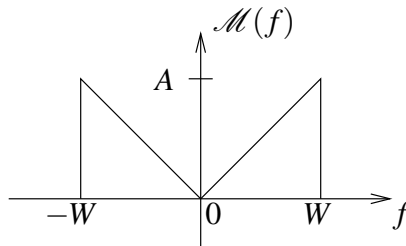
11. L'énergie d'un signal  $g(t)$  est calculée par

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt$$

Déterminer l'énergie du signal  $g(t) = A \text{sinc}(2Wt)$ .



12. Soit  $m(t)$  un signal dont le spectre  $\mathcal{M}(f)$  est donné par



Considérons la fonction  $s(t)$  définie par

(a)  $s(t) = m(t) \cos(2\pi f_c t)$

(b)  $s(t) = [1 + m(t)] \cos(2\pi f_c t)$

Déterminer et dessiner le spectre  $\mathcal{S}(f)$  de  $s(t)$  en supposant que  $f_c \gg W$ . Comparer les énergies respectives de  $s(t)$  et  $m(t)$ .

## Réponses

1.  $\mathcal{G}(f) = \frac{ATe^{-j\pi fT}}{2} \left\{ \text{sinc}\left(fT - \frac{1}{2}\right) + \text{sinc}\left(fT + \frac{1}{2}\right) \right\}$
2.  $\mathcal{G}(f) = \frac{1}{4j} \left\{ \frac{1}{1+j\pi(f-f_c)} - \frac{1}{1+j\pi(f+f_c)} \right\}$
3.  $g(t) = \frac{\pi}{j[(2\pi t)^2 - (\frac{\pi}{2W})^2]} \left\{ \frac{1}{W} - 4t \sin(2\pi Wt) - j\frac{1}{W} \cos(2\pi Wt) \right\}$
4. -
5. -
6.  $AT^2 \text{sinc}^2(fT)$ .
7. (a)  $\pi e^{-2\pi|f|}$ .  
(b)  $2 \text{sinc}(f) \cos(6\pi f)$ .  
(c)  $\cos(\pi f)$ .
8. -
9. -
10.  $\mathcal{Y}(f) = \mathcal{X}(f) \text{sinc}(2fT)$  (filtrage du type passe-bas).
11.  $E = A^2/(2W)$ .
12. (a)  $[\mathcal{M}(f-f_c) + \mathcal{M}(f+f_c)]/2$ .  
(b)  $[\mathcal{M}(f-f_c) + \mathcal{M}(f+f_c)]/2 + [\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)]/2$ .

# Les modulations analogiques (1ère partie)

## Menu du jour :

1. Modulation AM
2. Modulation DSB-SC
3. Exercices

# 1. Modulation AM

Signal modulant = message à transmettre

$$m(t) \Leftrightarrow \mathcal{M}(f) = 0 \text{ pour } |f| > W$$

Onde porteuse

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$$

Onde modulée = Signal modulé

$$s(t) = A_c [1 + k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

Spectre du signal modulé

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(f) &= \frac{A_c}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] \\ &\quad + \frac{k_a A_c}{2} [\mathcal{M}(f - f_c) + \mathcal{M}(f + f_c)] \end{aligned}$$

Démodulation :

- Cohérente : on multiplie le signal  $s(t)$  par  $\cos(2\pi f_c t)$  et on effectue un filtrage passe-bas.
- Détecteur d'enveloppe

## 2. Modulation DSB-SC

Signal modulant = message à transmettre

$$m(t) \Leftrightarrow \mathcal{M}(f) = 0 \text{ pour } |f| > W$$

Onde porteuse

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$$

Onde modulée = Signal modulé

$$\begin{aligned} s(t) &= c(t) m(t) \\ &= A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

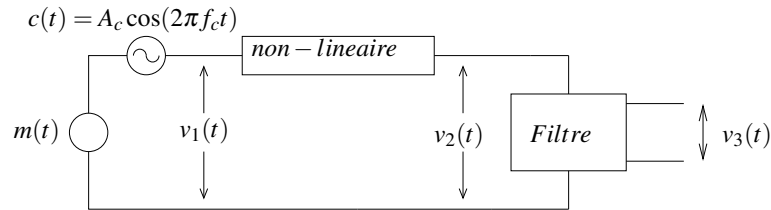
Spectre du signal modulé

$$\mathcal{S}(f) = \frac{A_c}{2} [\mathcal{M}(f - f_c) + \mathcal{M}(f + f_c)]$$

Démodulation cohérente : on multiplie le signal  $s(t)$  par  $\cos(2\pi f_c t)$  et on effectue un filtrage passe-bas

### 3. Exercices

1. Considérons le circuit de la figure suivante :



La fonction de transfert de l'élément non-linéaire est de la forme

$$v_2(t) = a_1 v_1(t) + a_2 v_1^2(t)$$

où  $a_1$  et  $a_2$  sont des constantes,  $v_1(t)$  est le signal d'entrée, et  $v_2(t)$  est le signal de sortie. Le signal d'entrée est défini par

$$v_1(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + m(t)$$

où  $m(t)$  est le signal "message" à bande limitée à  $-W \leq f \leq W$  et  $A_c \cos(2\pi f_c t)$  est l'onde porteuse.

- Évaluer le signal de sortie  $v_2(t)$ .
  - Déterminer les spécifications du filtre de sortie de telle sorte que le signal de sortie  $v_3(t)$  soit un signal AM de fréquence porteuse  $f_c$ .
  - Quelle est la sensibilité d'amplitude du signal AM obtenu ?
2. Considérons un récepteur ("Square-Law detector") utilisant un élément non-linéaire dont la fonction de transfert est

$$v_2(t) = a_1 v_1(t) + a_2 v_1^2(t)$$

où  $a_1$  et  $a_2$  sont des constantes. Le signal d'entrée est un signal AM :

$$v_1(t) = A_c [1 + k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

- Évaluer le signal de sortie  $v_2(t)$ .
- Déterminer les conditions pour lesquelles le message  $m(t)$  peut être retrouvé à partir de  $v_2(t)$ .

3. Le signal AM

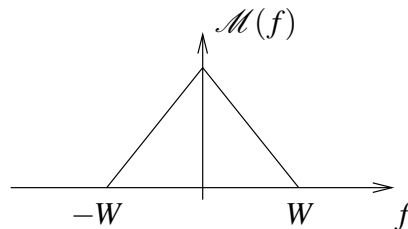
$$s(t) = A_c [1 + k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

est appliqué à l'entrée du système suivant :



Étant donné que  $|k_a m(t)| < 1$  pour  $t$ , que le signal  $m(t)$  est à bande limitée à  $-W \leq f \leq W$ , et que  $f_c > 2W$ , montrer que le signal  $m(t)$  peut être obtenu à partir de  $v_3(t)$ .

4. Considérons le signal  $m(t)$  dont le spectre est donné par



La bande passante du message  $W$  est égale à 1kHz. Le signal  $m(t)$  et la porteuse  $A_c \cos(2\pi f_c t)$  sont appliqués à l'entrée d'un mélangeur (les 2 signaux sont multipliés) produisant le signal DSB-SC  $s(t)$ . Le signal modulé est alors appliqué à l'entrée d'un détecteur cohérent. On suppose qu'il y a un parfait synchronisme entre les ondes porteuses dans le modulateur et le récepteur.

- (a) Déterminer le spectre du signal à la sortie du récepteur pour les deux cas suivants :  $f_c = 1,25\text{kHz}$  et  $f_c = 0,75\text{kHz}$ .
  - (b) Déterminer la plus petite fréquence possible de la porteuse permettant de récupérer correctement  $m(t)$ .
5. Considérons le *modulateur balancé*. Soit  $m(t)$  le signal modulant. La sortie du modulateur balancé est la différence des deux signaux provenant de la modulation AM de  $m(t)$  et  $-m(t)$ . Montrer que la sortie du modulateur est un signal modulé en DSB-SC, sachant que les porteuses des deux signaux AM sont identiques.
6. Un signal modulé en DSB-SC est démodulé grâce à un détecteur cohérent.
- (a) Évaluer l'effet d'une différence  $\Delta f$  (erreur en fréquence) entre la fréquence porteuse du signal modulé et la fréquence du détecteur.
  - (b) Dans le cas d'une onde modulante cosinusoidale, montrer que ce "décalage" en fréquence produit, dans le signal démodulé, un *battement* à la fréquence  $\Delta f$ .

7. Considérons le signal DSB-SC suivant :

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) m(t)$$

Ce signal est appliqué à l'entrée d'un élément non-linéaire générant le signal

$$y(t) = s^2(t)$$

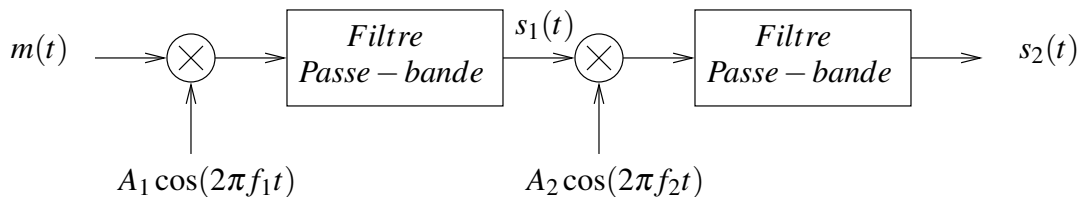
Le signal  $y(t)$  est alors appliqué à l'entrée d'un filtre passe-bande de réponse en amplitude unitaire, fréquence de milieu de bande  $2f_c$  et de bande passante  $\Delta f$ . On supposera que  $\Delta f$  est suffisamment petit pour pouvoir considérer que le spectre de  $y(t)$  est constant à l'intérieur de la bande passante du filtre. De plus, on supposera que le signal est à bande limitée à  $-W \leq f \leq W$ .

- Déterminer le spectre du signal  $y(t)$ .
- Montrer que la sortie du filtre  $v(t)$  est approximativement sinusoïdale, donnée par

$$v(t) = \frac{A_c^2}{2} E \Delta f \cos(4\pi f_c t)$$

où  $E$  est l'énergie du signal  $m(t)$ .

8. Voici le diagramme d'une modulation SSB à 2 étages :

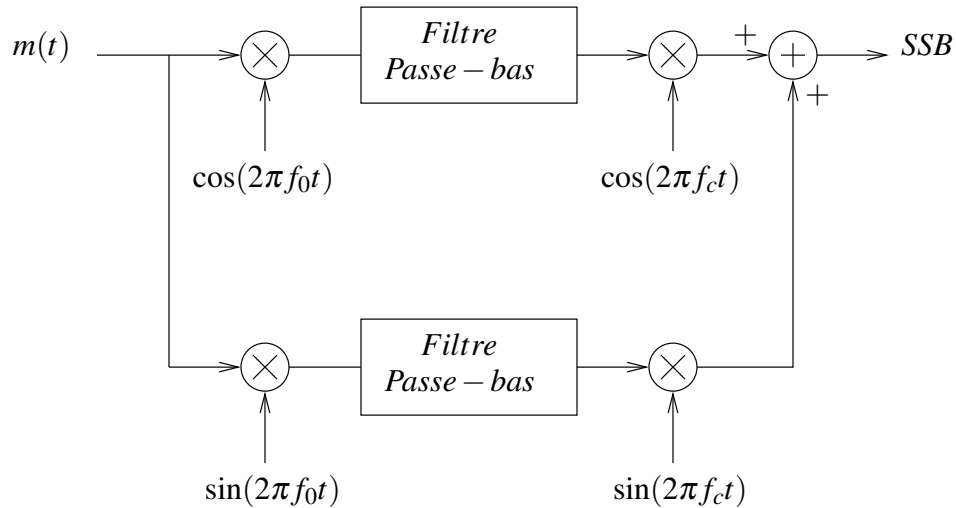


Le signal d'entrée  $m(t)$  est un signal vocal occupant la bande de fréquence de 0,3 à 3,4 kHz. Les fréquences des deux oscillateurs sont  $f_1 = 100$  kHz et  $f_2 = 10$  MHz.

- Déterminer les bandes latérales de tous les signaux apparaissant dans le système.
- Déterminer les caractéristiques des deux filtres de telle sorte que le signal de sortie  $s_2(t)$  soit un signal SSB (bande latérale supérieure conservée). Quel est l'espace de fréquence occupé par  $s_2(t)$  ?



9. Le schéma suivant montre la méthode de WEAVER pour générer des signaux modulés SSB :



Le signal modulant  $m(t)$  est à bande limitée à  $f_a \leq |f| \leq f_b$ . La fréquence auxiliaire appliquée à la première paire de mélangeur est  $f_0$ , donnée par

$$f_0 = \frac{f_a + f_b}{2}$$

Les filtres passe-bas des deux branches sont identiques, avec une fréquence de coupure égale à  $(f_b - f_a)/2$ . La fréquence auxiliaire appliquée à la deuxième paire de mélangeur est  $f_c$ , supérieure à  $(f_b - f_a)/2$ . Déterminer les spectres des signaux aux différents points du système. De plus, montrer

- Pour la bande latérale inférieure, les contributions des deux branches sont de polarités opposées et dès lors, la bande latérale inférieure est supprimée.
- Pour la bande latérale supérieure, les contributions des deux branches sont de mêmes polarités et dès lors, la bande latérale supérieure est transmise.
- Comment modifier ce modulateur pour transmettre la bande latérale inférieure ?

## Réponses

1. (a) 
$$v_2(t) = a_1 A_c \left[ 1 + \frac{2a_2}{a_1} m(t) \right] \cos(2\pi f_c t) + a_1 m(t) + a_2 m^2(t) + a_2 A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t)$$
- (b) Filtre passe-bande centré en  $f_c$  et de largeur de bande  $2W$ , à condition que  $f_c > 3W$
- (c)  $k_a = \frac{2a_2}{a_1}$
2. (a) 
$$v_2(t) = a_1 A_c [1 + k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2} a_2 A_c^2 [1 + 2k_a m(t) + k_a^2 m^2(t)] (1 + \cos(4\pi f_c t))$$
- (b) On souhaite retrouver le *message*  $a_2 A_c^2 k_a m(t)$  avec un filtre passe-bas, mais dans la bande passante du message, il y a aussi un signal de *distorsion*  $\frac{1}{2} a_2 A_c^2 k_a^2 m^2(t)$ . Il faut donc que  $|k_a m(t)| \gg 1$ ; afin que le rapport *message* divisé par *distorsion* soit très grand.
3. –
4. –
5.  $s_+(t) = A_c [1 + k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t)$  et  $s_-(t) = A_c [1 - k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t)$ , donc  $s(t) = s_+(t) - s_-(t) = 2A_c k_a m(t) \cos(2\pi f_c t)$ .
6. –
7. –
8. –
9. –

# Les modulations analogiques (2ème partie)

## Menu du jour :

1. Classification des modulations analogiques
2. Modulation FM
3. Exercices

# 1. Classification des modulations analogiques

## Les modulations d'amplitude

- **AM : Amplitude modulation**
- **DSB-SC : Double Sideband Suppressed Carrier modulation**
- VSB : Vestigial Sideband modulation
- SSB : Single Sideband modulation

## Les modulations angulaires

- PM : Phase modulation
- **FM : Frequency modulation**

## 2. Modulation FM

Signal modulant = message à transmettre

$$m(t) \Leftrightarrow \mathcal{M}(f) = 0 \text{ pour } |f| > W$$

Onde porteuse

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$$

Signal modulé

$$s(t) = A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right]$$

Fréquence instantanée

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t)$$

### 3. Modulation FM d'une onde cosinusoidale

Signal modulant

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

Fréquence instantanée

$$\begin{aligned} f_i(t) &= f_c + k_f A_m \cos(2\pi f_m t) \\ &= f_c + \Delta f \cos(2\pi f_m t) \end{aligned}$$

Déviaton de fréquence

$$\Delta f = k_f A_m$$

Signal modulé

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \\ &= A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + \frac{\Delta f}{f_m} \sin(2\pi f_m t) \right] \\ &= A_c \cos [2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)] \end{aligned}$$

Indice de modulation

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$$

### Modulation FM à bande étroite ( $\beta \leq 0.3$ radians)

$$\begin{aligned} s(t) &\simeq A_c \cos(2\pi f_c t) - \beta A_c \sin(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_m t) \\ &= A_c \cos(2\pi f_c t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \beta A_c \cos[2\pi(f_c + f_m)t] \\ &\quad - \frac{1}{2} \beta A_c \cos[2\pi(f_c - f_m)t] \end{aligned}$$

Spectre du signal FM à bande étroite

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(f) &= \frac{A_c}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] \\ &\quad + \frac{1}{4} \beta A_c [\delta(f - f_c - f_m) + \delta(f + f_c + f_m)] \\ &\quad - \frac{1}{4} \beta A_c [\delta(f - f_c + f_m) + \delta(f + f_c - f_m)] \end{aligned}$$

### Modulation FM à large bande ( $\beta \geq 0.3$ radians)

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + n f_m)t]$$

Spectre du signal FM à large bande

$$\mathcal{S}(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) [\delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m)]$$

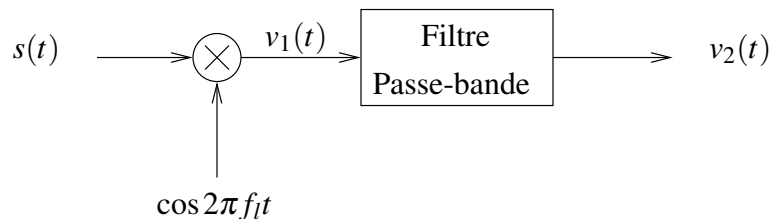
## Bande passante du signal modulé FM (règle de Carson)

$$B_T \simeq 2\Delta f + 2f_m = 2\Delta f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$



## 4. Exercices

1. Le spectre d'un signal vocal  $m(t)$  est nul en dehors de l'intervalle  $f_a \leq |f| \leq f_b$ . Afin de crypter le message, celui-ci est appliqué à l'entrée d'un "Scrambler" qui consiste en la cascade des éléments suivants : un mélangeur, un filtre passe-haut, un autre mélangeur, et un filtre passe-bas. La fréquence de l'onde porteuse appliquée au premier mélangeur est  $f_c$ , tandis que la fréquence de la porteuse appliquée au second mélangeur est  $f_b + f_c$ . Les deux porteuses ont une amplitude unitaire. Les fréquences de coupure des deux filtres sont toutes deux égales à  $f_c$ . Il est supposé que  $f_c > f_b$ .
  - (a) Déterminer la forme (spectre) de la sortie  $s(t)$  du *scrambler*.
  - (b) Montrer que l'on récupère le signal de départ  $m(t)$  si on applique  $s(t)$  à l'entrée du même *scrambler*.
2. Considérons le mixer représenté par la figure suivante :



Un mixer est constitué d'un mélangeur avec un oscillateur local de fréquence variable  $f_l$ , suivi d'un filtre passe-bande. Le signal d'entrée est un signal AM dont la bande passante est 10 kHz et dont la fréquence porteuse  $f_c$  peut avoir n'importe quelle valeur comprise dans l'intervalle 0.535-1.605 MHz, ces paramètres étant typiques en radio-diffusion AM. Il est nécessaire de translater le signal d'entrée vers une fréquence intermédiaire IF de 0.455 MHz. Déterminer l'intervalle de fréquence (l'ensemble des valeurs de  $f_l$  nécessaires) que doit fournir l'oscillateur local.

3. La fréquence instantanée d'une onde cosinusoidale vaut  $f_c + \Delta f$  pour  $|t| < T/2$ , et  $f_c$  pour  $|t| > T/2$ . Déterminer le spectre de cette onde modulée en fréquence.

4. Le signal modulant

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

est appliqué à l'entrée d'un modulateur de phase avec une sensibilité de phase  $k_p$ . L'onde porteuse non-modulée a une fréquence  $f_c$  et une amplitude  $A_c$ . Déterminer le spectre du signal modulé en phase, en supposant que la déviation en phase maximum  $\beta_p = k_p A_m$  ne dépasse pas 0.3 radian.

5. Un signal cosinusoidale modulé FM avec un index de modulation  $\beta = 1$  est appliqué à l'entrée d'un filtre passe-bande idéal, de fréquence de milieu de bande  $f_c$  et de bande passante  $5f_m$ , où  $f_c$  est la fréquence de la porteuse et  $f_m$  la fréquence de l'onde modulante sinusoidale. Déterminer le spectre d'amplitude du signal de sortie du filtre. ( $J_0(1) = 0.765$ ,  $J_1(1) = 0.44$ ,  $J_2(1) = 0.115$ ,  $J_n(\beta) = (-1)^n J_{-n}(\beta)$ )
6. Une onde porteuse de 100MHz est modulée en fréquence par une onde sinusoidale d'amplitude 20 volts et de fréquence 100kHz. La sensibilité en fréquence du modulateur vaut 25 kHz par volt.
- Déterminer une approximation de la bande passante du signal FM en utilisant la règle de CARSON.
  - Répéter les calculs, en supposant que l'amplitude de l'onde modulante est doublée.
  - Répéter les calculs, en supposant que la fréquence de l'onde modulante est doublée.
7. Considérons un signal PM à large bande produit par l'onde modulante  $A_m \cos(2\pi f_m t)$ , en utilisant un modulateur de phase de sensibilité  $k_p$  radians par volt.
- Montrer que la bande de transmission du signal PM varie linéairement avec la fréquence modulante  $f_m$ .
  - Comparer les caractéristiques du signal PM à large bande (la déviation maximum de phase  $\beta_p = k_p A_m$  est très grande par rapport à un radian) avec celles du signal FM à large bande
8. Un signal FM (obtenu par modulation d'une onde cosinusoidale) avec une déviation en fréquence  $\Delta f = 10\text{kHz}$  et une fréquence modulante  $f_m = 5\text{kHz}$  est appliqué à l'entrée de deux multiplicateurs de fréquence connectés en cascade. Le premier multiplicateur double la fréquence et le second multiplicateur triple la fréquence.
- Déterminer la déviation en fréquence et l'index de modulation du signal FM obtenu à la sortie du second multiplicateur.

(b) Quelle est la séparation en fréquence des fréquences latérales du signal FM obtenu ?

9. Un signal FM est appliqué à l'entrée d'un élément non-linéaire dont la fonction de transfert est

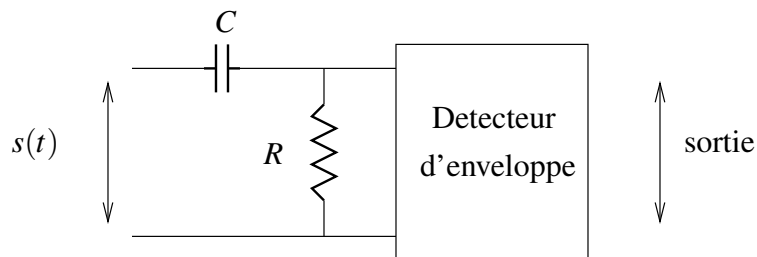
$$v_2 = av_1^2$$

où  $a$  est une constante. Expliquer comment un tel élément peut être utilisé pour obtenir un signal FM avec une plus grande déviation en fréquence  $\Delta f$  que celle du signal d'entrée.

10. Le signal FM

$$s(t) = A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right]$$

est appliqué à l'entrée du circuit suivant :



Ce circuit comporte un filtre RC passe-haut et un détecteur d'enveloppe. Il est supposé que (a) la résistance  $R$  est petite comparée à la réactance de la capacité pour toutes les fréquences significatives de  $s(t)$  et (b) le détecteur d'enveloppe ne charge pas le filtre. Déterminer le signal à la sortie du détecteur d'enveloppe, étant donné que  $k_f |m(t)| < f_c$  pour tout  $t$ .

## Réponses

1. -
2.  $f_l \in [0,08; 1,15]$  MHz.
3. -
4. -
5. -
6. (a) 1,2 MHz.  
(b) 2,2 MHz.  
(c) 1,4 MHz.
7. -
8. (a)  $\Delta f = 60$  kHz,  $\beta = 12$ .  
(b) 5 kHz.
9. -
- 10.

$$2\pi f_c A_c RC \left\{ 1 + \frac{k_f}{f_c} m(t) \right\}$$

# Outils stochastiques (1ère partie)

## Menu du jour :

1. Variables aléatoires
  - 1.1 Fonction de distribution de probabilité
  - 1.2 Fonction de densité de probabilité
  - 1.3 Moments d'une variable aléatoire
  - 1.4 Formule de changement de variable
  - 1.5 Cas de plusieurs variables aléatoires
2. Processus stochastiques
  - 2.1 Caractéristiques probabilistes
  - 2.2 Stationnarité
  - 2.3 Ergodisme
  - 2.4 Densité spectrale de puissance
3. Exercices

## 1.1 Fonction de distribution de probabilité

$$F_X(x) = p(X \leq x)$$

### Propriétés

1.  $F_X(x)$  est comprise entre 0 et 1.
2.  $F_X(x)$  est une fonction monotone non-décroissante de  $x$ , c'est-à-dire

$$F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \quad \text{si } x_1 < x_2$$

## 1.2 Fonction de densité de probabilité

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

### Probabilité d'un intervalle

$$\begin{aligned} p(x_1 < X \leq x_2) &= p(X \leq x_2) - p(X \leq x_1) \\ &= F_X(x_2) - F_X(x_1) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx \end{aligned} \tag{1}$$

### Propriétés de la fonction de densité de probabilité

1.  $f_X(x)$  est toujours non-négative.
2.  $f_X(x)$  possède sous sa courbe une aire totale égale à 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

## 1.3 Moments d'une variable aléatoire

Moments d'ordre  $n$

$$\mu_n = E \{X^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) dx$$

Moyenne

$$\mu_X = \mu_1 = E \{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

Moments centrés d'ordre  $n$

$$E \{(X - \mu_X)^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^n f_X(x) dx$$

Variance

$$\sigma_X^2 = E \{(X - \mu_X)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx$$

Fonction d'une variable aléatoire

$$E \{Y\} = E \{g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

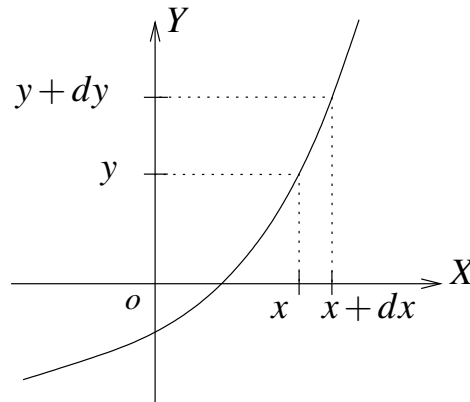


## 1.4 Formule de changement de variable

$$Y = g(X)$$

Donnée :  $f_X(x)$ . On cherche  $f_Y(y)$ .

**Transformations monotones dites “one-to-one”**



$$p(y < Y \leq y + dy) = p(x < X \leq x + dx)$$

$$f_Y(y) dy = f_X(x) dx$$

Si  $g$  est une fonction décroissante :

$$f_Y(y) dy = -f_X(x) dx$$

Dans les deux cas :

$$f_Y(y) |dy| = f_X(x) |dx|$$

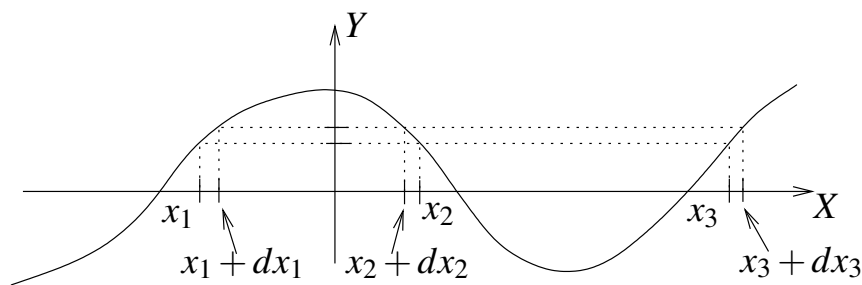
Nous écrivons donc

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|dy/dx|} = \frac{f_X(x)}{|dg/dx|} \Big|_{x=g^{-1}(y)} \quad (2)$$

**Transformations non-monotones dites “many-to-one”**

$$f_Y(y) = \sum_k \frac{f_X(x)}{|dg/dx|} \Big|_{x=x_k(y)}$$

où les  $x_k(y)$  sont les racines de l'équation  $y = g(x)$ .



$$\begin{aligned} p(y < Y \leq y + dy) &= p(x_1 < X \leq x_1 + dx_1) \\ &\quad + p(x_2 - |dx_2| < X \leq x_2) \\ &\quad + p(x_3 < X \leq x_3 + dx_3) \end{aligned}$$

$$f_Y(y) dy = f_X(x_1) dx_1 + f_X(x_2) |dx_2| + f_X(x_3) dx_3$$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|dg/dx|} \Big|_{x=x_1(y)} + \frac{f_X(x)}{|dg/dx|} \Big|_{x=x_2(y)} + \frac{f_X(x)}{|dg/dx|} \Big|_{x=x_3(y)}$$

## 1.5 Cas de plusieurs variables aléatoires

### Fonction de distribution conjointe

$$F_{X,Y}(x,y) = p(X \leq x, Y \leq y)$$

### Propriétés

1.  $F_{X,Y}(x,y)$  est comprise entre 0 et 1.
2.  $F_{X,Y}(x,y)$  est une fonction monotone non-décroissante de  $x$  et de  $y$ .

### Fonction de densité de probabilité conjointe

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

### Propriétés

1.  $f_{X,Y}(x,y)$  est toujours non-négative.
2.  $f_{X,Y}(x,y)$  possède sous son graphe un volume total égal à 1, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(\xi, \eta) d\xi d\eta = 1$$

## Fonction de densité marginale

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, \eta) d\eta$$

## Fonction de densité conditionnelle

$$f_Y(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

Propriété. Si  $X$  et  $Y$  sont statistiquement indépendantes,

$$f_Y(y|x) = f_Y(y)$$

Et dès lors,

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

## Moments de deux variables aléatoires conjointes

$$E \{X^i Y^k\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^i y^k f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

## Corrélation de deux VA

$$E \{XY\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

## Covariance de deux VA

$$\text{cov}\{XY\} = E\{(X - E\{X\})(Y - E\{Y\})\}$$

En notant  $\mu_X = E\{X\}$  et  $\mu_Y = E\{Y\}$ ,

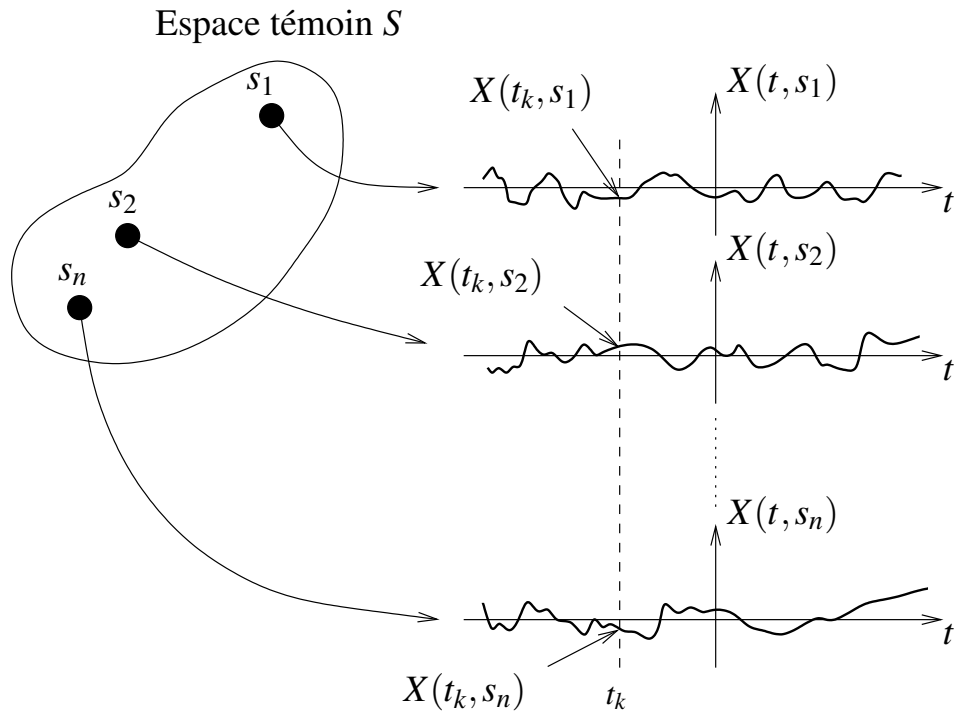
$$\text{cov}\{XY\} = E\{XY\} - \mu_X\mu_Y$$

**Propriétés.** *Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont dites*

$$\textit{incorrélées} \iff \text{cov}\{XY\} = 0$$

$$\textit{orthogonales} \iff E\{XY\} = 0$$

## 2. Processus stochastiques



## 2.1 Caractéristiques probabilistes

### a) Moments temporels

Moyenne temporelle

$$\mu_X(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

Fonction d'auto-corrélation temporelle

$$\Gamma_{XX}(\tau, T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau)x(t) dt$$

### b) Moments statistiques

Moyenne statistique

$$\mu_X(t) = E \{X(t)\} \quad (3)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x) dx \quad (4)$$

Fonction d'auto-corrélation statistique

$$\Gamma_{XX}(t_1, t_2) = E \{X(t_1)X(t_2)\} \quad (5)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (6)$$

## 2.2 Stationnarité

### a) Stationnarité au sens strict

$$\begin{aligned} F_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)}(x_1, x_2, \dots, x_k) \\ = \\ F_{X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), \dots, X(t_k+\tau)}(x_1, x_2, \dots, x_k) \end{aligned}$$

pour tout  $\tau$ , tout  $k$  et tous les choix possibles de temps d'observation  $t_1, t_2, \dots, t_k$ .

*Un processus aléatoire est stationnaire au sens strict si ses caractéristiques probabilistes sont invariantes pour tout changement de l'origine des temps.*

### Propriétés

1. Pour  $k = 1$ ,

$$F_{X(t)}(x) = F_{X(t+\tau)}(x) = F_X(x) \quad \forall t \text{ et } \tau$$

2. Pour  $k = 2$  et  $\tau = -t_1$ ,

$$F_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) = F_{X(0), X(t_2-t_1)}(x_1, x_2) \quad \forall t_1 \text{ et } t_2$$



## b) Stationnarité au sens large

Soit un processus aléatoire  $X(t)$ , stationnaire au sens strict. Alors,

$$\mu_X(t) = \mu_X \quad \forall t$$

$$\Gamma_{XX}(t_1, t_2) = \Gamma_{XX}(t_2 - t_1) \quad \forall t_1 \text{ et } t_2$$

*Un processus aléatoire est stationnaire au sens large si il vérifie les deux conditions :*

- *Sa moyenne est indépendante du temps.*
- *Sa fonction d'auto-corrélation ne dépend que de la différence entre les temps d'observation.*

### c) Fonction d'autocorrélation d'un processus stationnaire

$$\Gamma_{XX}(\tau) = E \{X(t + \tau)X(t)\} \quad \forall t$$

#### Propriétés

— Puissance d'un processus aléatoire stationnaire :

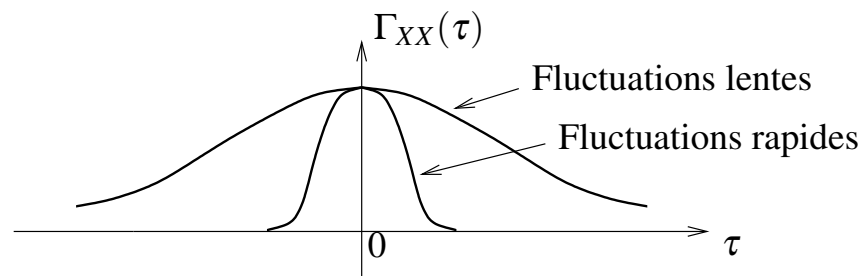
$$\Gamma_{XX}(0) = E \{X^2(t)\}$$

— Symétrie :

$$\Gamma_{XX}(\tau) = \Gamma_{XX}(-\tau)$$

— Valeur maximale :

$$|\Gamma_{XX}(\tau)| \leq \Gamma_{XX}(0)$$



## 2.3 Ergodisme

### a) Ergodicité dans la moyenne

Soit un processus aléatoire stationnaire  $X(t)$ ,

$$\begin{aligned} E \{ \mu_X(T) \} &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E \{ x(t) \} dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \mu_X dt \\ &= \mu_X \end{aligned}$$

**Définition.** *Un processus aléatoire stationnaire  $X(t)$  est dit ergodique dans la moyenne si*

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \mu_X(T) &= \mu_X \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \text{var} \{ \mu_X(T) \} &= 0 \end{aligned}$$

## b) Ergodicité dans la fonction d'autocorrélation

Soit un processus aléatoire stationnaire  $X(t)$ ,

$$\begin{aligned} E \{ \Gamma_{XX}(\tau, T) \} &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E \{ x(t + \tau)x(t) \} dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Gamma_{XX}(\tau) dt \\ &= \Gamma_{XX}(\tau) \end{aligned}$$

**Définition.** Un processus aléatoire stationnaire  $X(t)$  sera dit ergodique dans la fonction d'auto-corrélation si les deux conditions suivantes sont remplies :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Gamma_{XX}(\tau, T) = \Gamma_{XX}(\tau)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{var} \{ \Gamma_{XX}(\tau, T) \} = 0$$

## 2.4 Densité spectrale de puissance

Soit  $X(t)$  un processus aléatoire stationnaire.

$$\gamma_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{XX}(\tau) e^{-2\pi j\tau f} d\tau$$

$$\Gamma_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_X(f) e^{2\pi jf\tau} df$$

Relations d'EINSTEIN-WIENER-KHINTCHINE.

### Propriétés

— Valeur en  $f = 0$  :

$$\gamma_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{XX}(\tau) d\tau$$

— Puissance d'un processus aléatoire stationnaire :

$$E \{X^2(t)\} = \Gamma_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_X(f) df$$

— Symétrie :

$$\gamma_X(-f) = \gamma_X(f)$$

### 3. Exercices

1. Une pièce de monnaie est lancée 3 fois et la variable aléatoire  $X$  dénote le nombre de fois que l'évènement "*pile*" se réalise. En supposant que la pièce est non truquée,
  - (a) Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire  $X$ .
  - (b) Déterminer et dessiner les fonctions de distribution et de densité de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .
  - (c) Quelle est la probabilité que  $X$  soit supérieure à 1 ?

2. Soit la variable aléatoire  $X$  définie par sa fonction de distribution

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ K & x \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Déterminer la valeur de  $K$ .
  - (b) Quelle est la probabilité que  $\frac{1}{2} < X \leq 1$  ?
  - (c) Quelle est la probabilité que  $X$  soit supérieure à 2 ?
3. Soit  $X$  une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma_X^2$ . Déterminer la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire  $Y = |X|$ .
  4. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires distribuées de telle sorte que

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{K}{\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} & \text{si } xy \geq 0 \\ 0 & \text{si } xy < 0 \end{cases}$$

- (a) Déterminer la valeur de  $K$ .
- (b) Déterminer les densités marginales de  $X$  et  $Y$ .
- (c) Montrer que  $X$  et  $Y$  sont chacune des variables aléatoires gaussiennes.
- (d)  $X$  et  $Y$  sont-elles statistiquement indépendantes ?
- (e)  $X$  et  $Y$  sont-elles non-corrélées ?
- (f) Déterminer  $f_X(x|y)$ . Est-ce une distribution gaussienne ?

5. Soit  $\Theta$  une variable aléatoire uniformément distribuée sur  $[0, \pi[$  et soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies par  $X = \cos \Theta$  et  $Y = \sin \Theta$ . Montrer que  $X$  et  $Y$  sont non-corrélées mais non statistiquement indépendantes.
6. Soit le processus aléatoire  $X(t)$  défini par

$$X(t) = \sin(2\pi ft)$$

où  $f$  est une variable aléatoire uniformément distribuée sur  $[0, W]$ . Montrer que  $X(t)$  est non stationnaire.

7. Soit  $X(t)$  un processus aléatoire défini par  $X(t) = A + Bt$  où  $A$  et  $B$  sont deux variables aléatoires statistiquement indépendantes, chacune uniformément répartie sur  $[-1, 1]$ . Déterminer la moyenne statistique  $\mu_X(t)$  et la fonction d'auto-corrélation statistique  $\Gamma_{XX}(t_1, t_2)$ . Le processus aléatoire  $X(t)$  est-il stationnaire au sens large? L'est-il au sens strict?
8. Soit le processus aléatoire  $X(t)$  suivant

$$X(t) = A \cos(2\pi f_c t)$$

où  $f_c$  est constante et  $A$  est une variable aléatoire uniformément répartie :

$$f_A(a) = \begin{cases} 1 & 0 \leq a \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer si oui ou non le processus aléatoire  $X(t)$  est stationnaire au sens strict.

9. Le processus aléatoire  $X(t)$  est défini par

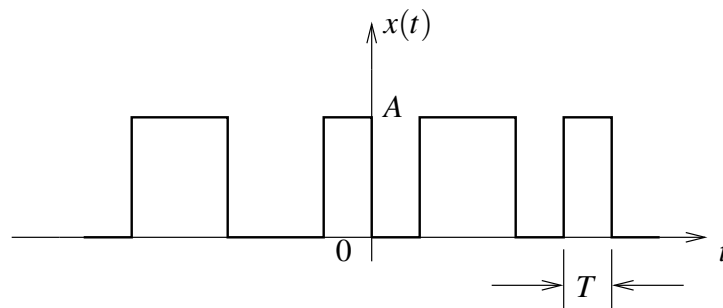
$$X(t) = A \cos(2\pi f_c t)$$

où  $A$  est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma_A^2$ . Ce processus aléatoire est appliqué à l'entrée d'un intégrateur idéal, produisant le signal

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau$$

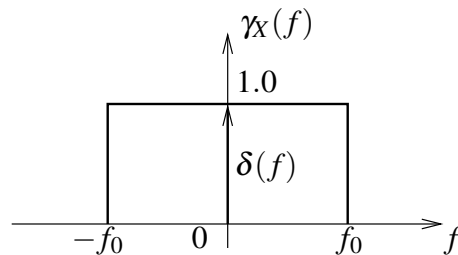
- (a) Déterminer la fonction de densité de probabilité de  $Y(t)$  observé au temps  $t_k$ .
- (b) Déterminer si oui ou non  $Y(t)$  est stationnaire.
- (c) Déterminer si oui ou non  $Y(t)$  est ergodique.

10. Montrer que si un processus aléatoire stationnaire  $X(t)$  contient une composante DC égale à  $A$ , alors sa fonction d'auto-corrélation  $\Gamma_{XX}(\tau)$  contient une composante DC égale à  $A^2$ .
11. La figure suivante montre une réalisation  $x(t)$  d'un processus aléatoire  $X(t)$  qui est constitué d'une séquence aléatoire de 1 et de 0 (ces deux valeurs sont supposés équiprobables) :



Le symbole 1 est représenté par un pulse d'une amplitude de  $A$  volts tandis que le symbole 0 est représenté par un pulse d'amplitude nulle. Tous les pulses ont une durée de  $T$  secondes et sont synchronisés par rapport à l'origine du temps.

- (a) Déterminer la fonction d'auto-corrélation du processus aléatoire  $X(t)$ .
- (b) Déterminer la densité spectrale de puissance  $\gamma_X(f)$  du processus aléatoire  $X(t)$ .
- (c) Quel pourcentage de la puissance est contenue dans la composante DC de l'onde binaire ?
12. La densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire  $X(t)$  est donnée par



- (a) Déterminer et dessiner la fonction d'auto-corrélation  $R_{XX}(\tau)$ .
- (b) Quelle est le % de la puissance DC contenue dans  $X(t)$  ?
- (c) Quelle est le % de la puissance AC contenue dans  $X(t)$  ?



## Réponses

1. (a)  $\{0, 1, 2, 3\}$ .  
(b) –  
(c)  $7/8$ .
2. (a) 1.  
(b) 0,75.  
(c) 0.

3.

$$f_Y(y) = \frac{2}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_X^2}}$$

4. (a) 1.  
(b)  $f_X(x) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-x^2/2)$ ,  $f_Y(y) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-y^2/2)$ .  
(c) –  
(d) non.  
(e) non.  
(f)

$$f_X(x|y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } xy \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. –
6. –
7. Pas stationnaire.
8. non.
9. (a)

$$f_{Y(t)}(y) = \frac{f_c \sqrt{2\pi}}{\sigma_A |\sin(2\pi f_c t)|} e^{-\frac{4\pi^2 f_c^2 y^2}{2\sigma_A^2 \sin^2(2\pi f_c t)}}$$

- (b) non.
- (c) non.

10. –
- 11.

$$\Gamma_{XX}(\tau) = \begin{cases} \frac{A^2}{4} & \text{si } |\tau| \geq T \\ \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\gamma_{XX}(f) = \frac{A^2}{4} \delta(f) + \frac{A^2 T}{4} \text{sinc}^2(fT)$$

$$\%_{DC} = 50.$$

12. (a)  $\Gamma_{XX}(\tau) = 1 + 2f_0 \text{sinc}(2f_0\tau)$ .  
(b)  $1/(1 + 2f_0)$ .  
(c)  $2f_0/(1 + 2f_0)$ .

# Outils stochastiques (2ème partie)

## Menu du jour :

1. Filtrage d'un processus aléatoire
  - 1.1 Moyenne
  - 1.2 Fonction d'auto-corrélation
  - 1.3 Densité spectrale de puissance
2. Bruit blanc gaussien
3. Exercices

# 1. Filtrage d'un processus aléatoire

## Données :

1. Processus aléatoire stationnaire au sens large :
  - (a) Moyenne  $\mu_X$
  - (b) Fonction d'auto-corrélation  $\Gamma_{XX}(\tau)$
  - (c) Densité spectrale de puissance  $\gamma_X(f)$
2. Réponse impulsionnelle du filtre  $h(t)$  ( $\mathcal{H}(f)$ )

## Sortie du filtre : processus aléatoire

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) X(t - \tau) d\tau$$

## On recherche :

1. Moyenne de  $Y(t)$
2. Fonction d'auto-corrélation de  $Y(t)$
3. Densité spectrale de puissance de  $Y(t)$

## 1.1 Moyenne

$$\begin{aligned}\mu_Y &= E\{Y(t)\} \\ &= E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) X(t - \tau) d\tau\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) E\{X(t - \tau)\} d\tau \\ &= \mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau \\ &= \mu_X \mathcal{H}(0)\end{aligned}$$

car

$$\mathcal{H}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

## 1.2 Fonction d'auto-corrélation

$$\begin{aligned}\Gamma_{YY}(t, u) &= E \{Y(t)Y(u)\} \\ &= E \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1)X(t - \tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2)X(u - \tau_2)d\tau_2 \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 h(\tau_1) \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_2 h(\tau_2) E \{X(t - \tau_1)X(u - \tau_2)\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 h(\tau_1) \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_2 h(\tau_2) \Gamma_{XX}(t - \tau_1, u - \tau_2)\end{aligned}$$

Or,  $X(t)$  stationnaire au sens large, on pose  $\tau = t - u$  et

$$\Gamma_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) \Gamma_{XX}(\tau - \tau_1 + \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

D'où,  $Y(t)$  est également un processus stationnaire au sens large.

## 1.3 Densité spectrale de puissance

$$\begin{aligned}\gamma_Y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{YY}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \int \int \int_{\mathfrak{R}^3} h(\tau_1)h(\tau_2)\Gamma_{XX}(\tau - \tau_1 + \tau_2) e^{-j2\pi f\tau} d\tau d\tau_1 d\tau_2\end{aligned}$$

Posons  $\tau = \tau_0 + \tau_1 - \tau_2$ , il vient

$$\gamma_Y(f) = \mathcal{H}(f) \mathcal{H}^*(f) \gamma_X(f)$$

$$\gamma_Y(f) = \|\mathcal{H}(f)\|^2 \gamma_X(f)$$

## 2. Bruit blanc gaussien

Bruit blanc  $X(t)$  :

$$\Gamma_{XX}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

$$\gamma_X(f) = \frac{N_0}{2}$$

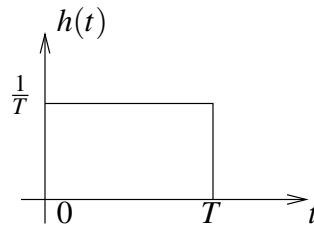
Bruit gaussien  $X(t)$  :

$\forall t_k : X(t_k)$  est une VA gaussienne

$$f_{X(t_k)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X}} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}$$

### 3. Exercices

1. Un processus aléatoire, stationnaire, gaussien de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance  $\gamma_X(f)$  est appliqué à l'entrée d'un filtre linéaire dont la réponse impulsionnelle  $h(t)$  est donnée à la figure suivante :

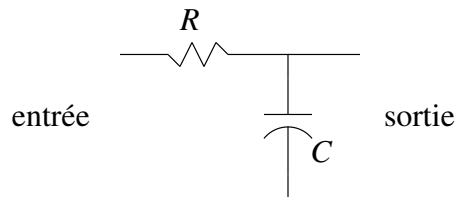


Une variable aléatoire  $Y$  est formée en observant la sortie du filtre à l'instant  $T$ .

- (a) Déterminer la moyenne et la variance de  $Y$ .
  - (b) Quelle est la fonction de densité de probabilité de  $Y$  ?
2. Un signal télégraphique aléatoire  $X(t)$ , caractérisé par sa fonction d'auto-corrélation

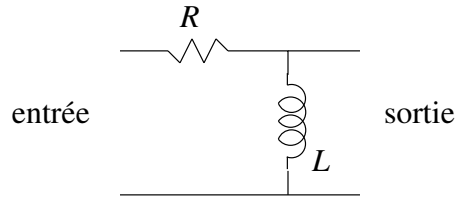
$$\Gamma_{XX}(\tau) = e^{-2\nu|\tau|}$$

où  $\nu$  est une constante positive, est appliqué à l'entrée d'un filtre passe-bas RC. Déterminer la densité spectrale de puissance du processus aléatoire à la sortie du filtre.

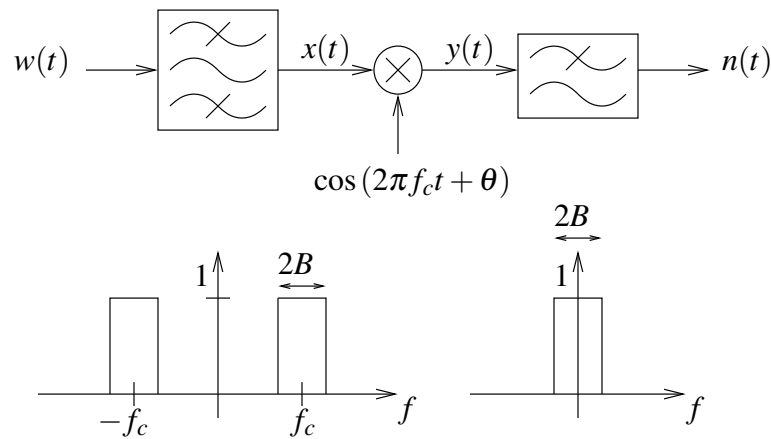




3. Soit un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance égale à  $N_0/2$ . Ce bruit est appliqué à l'entrée d'un filtre passe-haut RL décrit à la figure suivante :



- (a) Déterminer la fonction d'auto-corrélation et la densité spectrale de puissance du processus aléatoire à la sortie du filtre.
- (b) Quelle est la moyenne et la variance à la sortie du filtre ?
4. Un bruit blanc gaussien  $w(t)$  de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance égale à  $N_0/2$  est appliqué à l'entrée du système suivant, où  $\theta$  est une variable aléatoire uniformément répartie sur  $[0, 2\pi]$  :

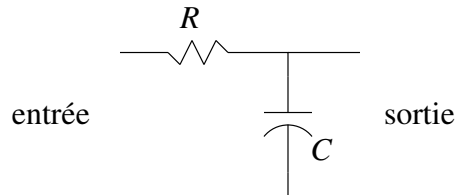


- (a) Déterminer la densité spectrale de puissance et la fonction d'auto-corrélation du signal de sortie  $n(t)$ .
- (b) Déterminer la moyenne et la variance de  $n(t)$ .

5. Le signal

$$x(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + w(t)$$

est appliqué à l'entrée d'un filtre passe-bas RC. L'amplitude  $A_c$  et la fréquence  $f_c$  sont constantes.  $w(t)$  est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance égale à  $N_0/2$ . Déterminer le rapport signal-bruit à la sortie du filtre en considérant la composante cosinusoidale de  $x(t)$  comme le signal d'intérêt.



6. Le rapport signal sur bruit à la sortie d'un récepteur AM utilisant une détection d'enveloppe, dans le cas d'une onde modulante sinusoidale est donné par

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{\mu^2 A_c^2}{4WN_0}$$

où  $\mu$  est le facteur de modulation. Le rapport porteuse sur bruit est défini par

$$\rho = \frac{A_c^2/2}{2WN_0}$$

Déterminer le rapport porteuse sur bruit dans le cas où le facteur de modulation est de 80% et le rapport signal sur bruit de sortie est de 30 dB.

## Réponses

1. (a)  $\mu_Y = 0$ .

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_X(f) \operatorname{sinc}^2(fT) df$$

- (b)

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_Y^2}}$$

- 2.

$$\frac{v}{(v^2 + \pi^2 f^2)(1 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2)}$$

3. (a)

$$\gamma(f) = \frac{N_0}{2} \frac{4\pi^2 L^2 f^2}{R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2}$$
$$\Gamma(\tau) = \frac{N_0}{2} \left\{ \delta(\tau) - \frac{R}{2L} e^{-\frac{R}{L}|\tau|} \right\}$$

- (b)  $\mu = 0$ .  $\sigma^2 = \infty$ .

4. (a)  $\Gamma_{nn}(\tau) = 0,5 N_0 B \operatorname{sinc}(2B\tau)$ .

$$\gamma_n(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{4} & \text{si } |f| < B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (b)  $\mu_n = 0$ .  $\sigma_n^2 = N_0 B / 2$ .

- 5.

$$\left( \frac{S}{N} \right)_o = \frac{2A_c^2 RC}{N_0 [1 + (2\pi f_c RC)^2]}$$

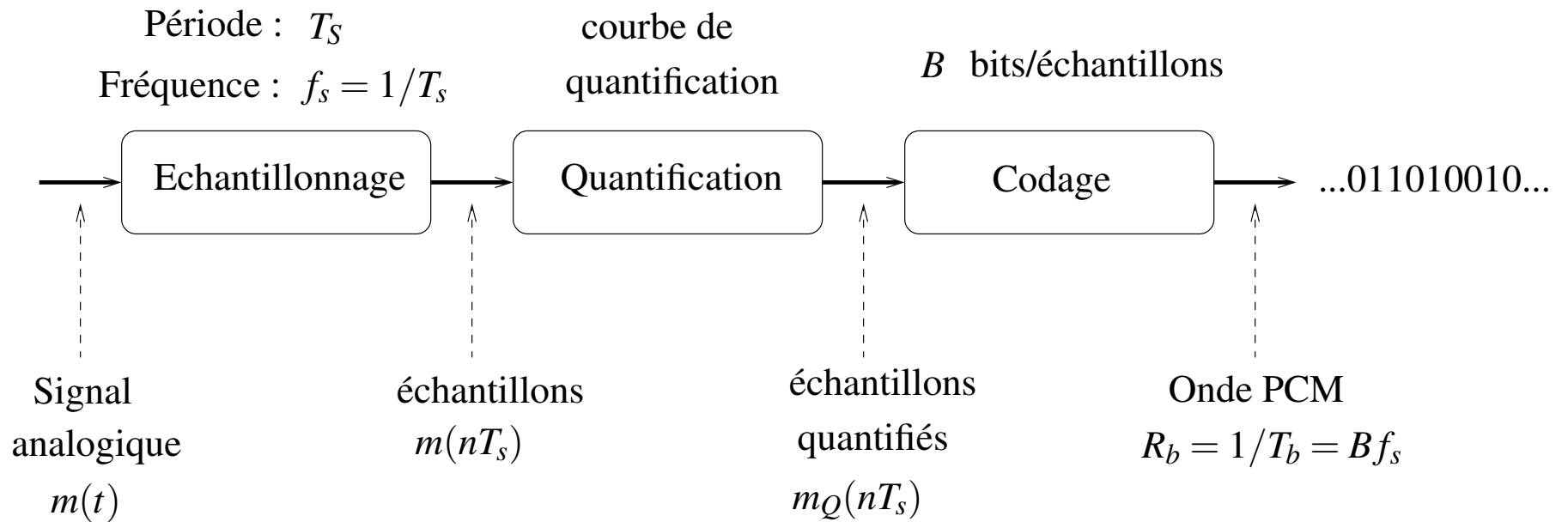
6. 31,9 dB.

# La numérisation

## Menu du jour :

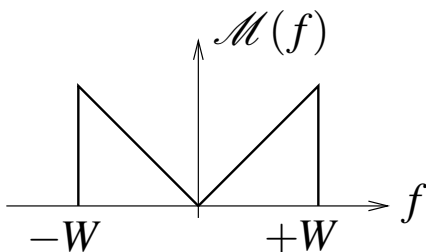
1. Schéma global
2. L'échantillonnage
3. La quantification et le codage
4. Exercices

# 1. Schéma global



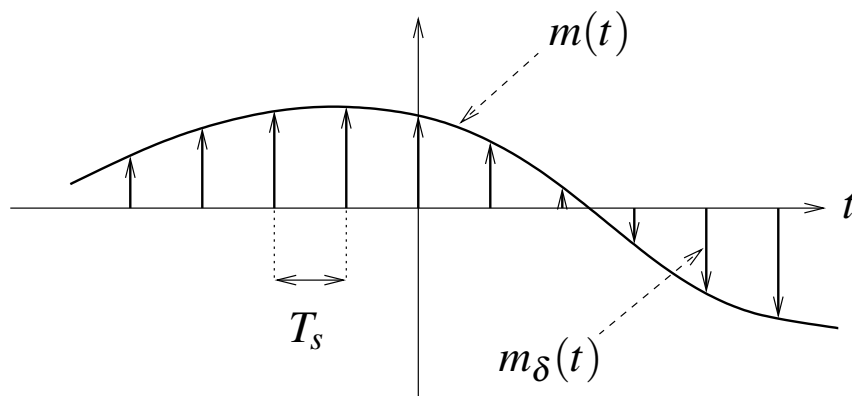
## 2. L'échantillonnage

Spectre de  $m(t)$  :



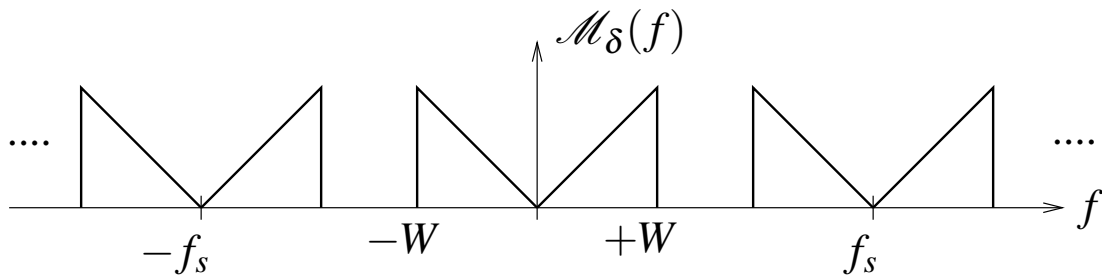
Signal échantillonné :

$$m_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m(nT_s) \delta(t - nT_s)$$



Spectre du signal échantillonné :

$$\mathcal{M}_\delta(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}(f - nf_s) \quad \text{où } f_s = \frac{1}{T_s}$$

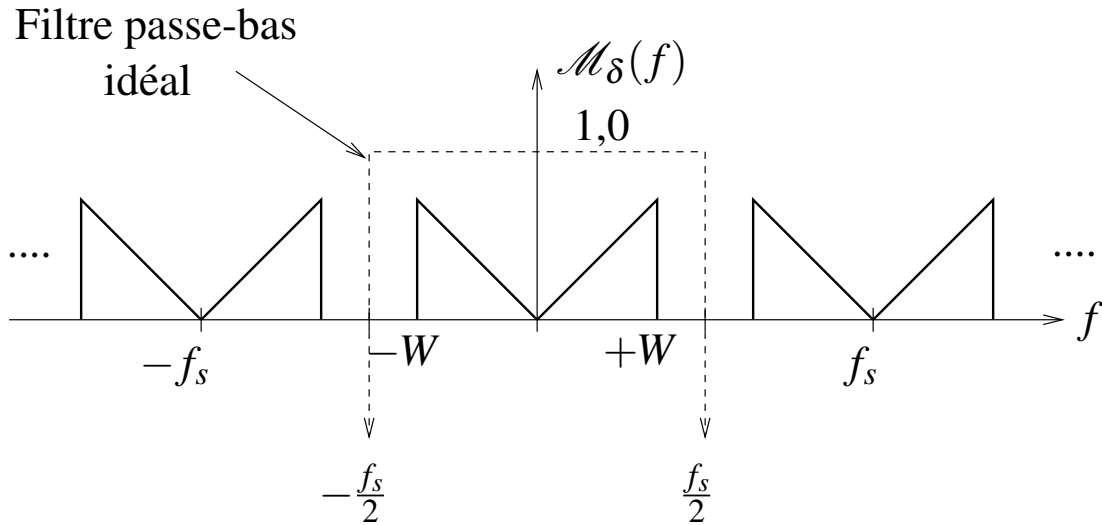


Conditions d'échantillonnage :

- $m(t)$  doit être à bande limitée  $W$  (pré-filtrage passe-bas préalable si nécessaire)
- La fréquence d'échantillonnage doit être strictement supérieure au double de  $W$  (théorème de SHANNON) :

$$f_s > 2W = f_{\text{Nyquist}}$$

Reconstruction de  $m(t)$  :



Filtrage passe-bas idéal :

$$\mathcal{M}(f) = \begin{cases} \mathcal{M}_\delta(f) & \text{si } -f_s < f < +f_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

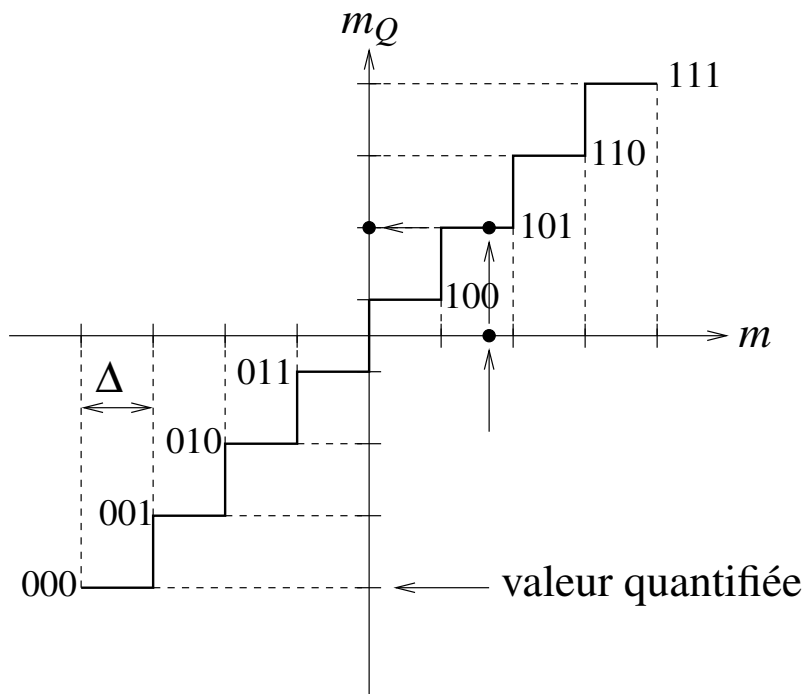
Formule d'interpolation de WHITTAKER :

$$m(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m(nT_s) \operatorname{sinc} \left( \frac{t - nT_s}{T_s} \right)$$



### 3. La quantification et le codage

Courbe de quantification uniforme :



Pas de quantification :  $\Delta$

Nombre de niveaux de quantification :  $n$  (dans cet exemple,  $n = 8$ )

Nombre de bits par échantillon :  $B$  (dans cet exemple,  $B = 3$ ) :

$$B = \log_2 n$$

Codage avec perte, erreur de quantification :  $\Delta/2$

## 4. Exercices

1. Déterminer la fréquence de NYQUIST des signaux suivants :

(a)  $g(t) = \sin(300t)$

(b)  $g(t) = \text{sinc}(200t)$

(c)  $g(t) = \sin(300t) + \text{sinc}(200t)$

2. Considérons le signal suivant :

$$g(t) = \cos(2\pi f_m t)$$

avec  $f_m = 30$  kHz. Ce signal est échantillonné avec une période d'échantillonnage  $T_s$  égale à  $25 \mu s$ . Déterminer et dessiner le spectre de  $g(t)$ , ainsi que celui de la fonction échantillonnée. Quelle est la fréquence de NYQUIST de  $g(t)$ ? Qu'en déduisez-vous? Appliquer à la fonction échantillonnée le filtre de reconstruction, c'est-à-dire le filtre passe-bas idéal. Qu'obtenez-vous à la sortie de ce filtre? Donner une interprétation graphique de ce phénomène.

3. Considérons le signal suivant :

$$g(t) = \text{sinc}(300t)$$

Déterminer la période d'échantillonnage minimum afin que le filtre de reconstruction puisse présenter une bande de transition minimum de 100 Hz.

4. Considérons un signal  $m(t)$  échantillonné toutes les  $T_s$  secondes. Les échantillons  $m(nT_s)$  sont alors utilisés pour former le signal suivant :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m(nT_s)h(t - nT_s)$$

où  $h(t)$  est un pulse rectangulaire unitaire de durée  $T$  (supposée inférieure à  $T_s$ ), défini par

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 1/2 & t = 0, t = T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la relation existant entre les transformées de FOURIER respectives de  $s(t)$  et  $m(t)$ .

5. Lors d'un échantillonnage naturel, un signal  $g(t)$  est multiplié par un train périodique d'impulsions rectangulaires  $c(t)$ . La fréquence de répétition des pulses vaut  $f_s$  et la durée de chacun des pulses vaut  $T$  (avec  $f_s T \ll 1$ ).
- Déterminer le spectre du signal  $s(t) = g(t)c(t)$  résultant de l'échantillonnage naturel. *Suggestion* : utiliser la série de FOURIER représentant  $c(t)$ .
  - Montrer que le signal  $g(t)$  peut être retrouvé à partir de  $s(t)$  si les conditions d'échantillonnage sont vérifiées.
6. Illustrer le phénomène de sous-échantillonnage en appliquant le filtre passe-bas idéal sur la fonction échantillonnée ( $f_s = \frac{3}{2}f_0$ ) du signal  $m(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ .
7. Un signal sinusoïdal d'amplitude 3.25 volts est appliqué à l'entrée d'un quantificateur uniforme du type "midtread" dont les sorties prennent les valeurs  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$  volts.
- Dessiner le signal de sortie du quantificateur pour un cycle complet du signal d'entrée.
  - Faire de même mais pour un quantificateur du type "midrise" dont les sorties prennent les valeurs  $\pm 0.5, \pm 1.5, \pm 2.5, \pm 3.5$  volts.

8. Le signal  $m(t) = 6 \sin(2\pi t)$  volts est échantillonné et numérisé sur 4 bits. Le quantificateur est du type "midrise" avec un pas de quantification de 1 volt. Le taux d'échantillonnage est de 4 échantillons par secondes, avec des instants d'échantillonnage  $t = \pm 1/8, \pm 3/8, \pm 5/8, \dots$  secondes. Dessiner l'onde binaire résultante pour un cycle complet du signal d'entrée.
9. Un système PCM utilise un quantificateur uniforme suivi d'encodeur à 7 bits. Le taux de transmission du système est égal à  $50 \cdot 10^6$  bits/seconde. Quelle la plus grande bande passante du message que le système peut transmettre correctement.
10. Un signal analogique est échantillonné à sa fréquence de NYQUIST  $1/T_s$  et quantifié sur  $L$  niveaux de quantifications. Le signal digital dérivé est alors transmis sur un canal.
  - (a) Montrer que la durée  $T_b$  d'un bit doit satisfaire  $T_b \leq T_s / \log_2 L$ .
  - (b) Quand le signe d'égalité est-il valable ?

## Réponses

- (a) 95,5 Hz.  
(b) 200 Hz.  
(c) 200 Hz.

2. –

3. 2,5 ms.

4.

$$\mathcal{S}(f) = T e^{-j\pi fT} \operatorname{sinc}(fT) f_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}(f - nf_s)$$

5. (a) Si  $c(t)$  est symétrique par rapport à l'origine  $t = 0$ ,

$$\mathcal{S}(f) = T f_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(nf_s T) \mathcal{G}(f - nf_s)$$

(b) –

6. –

7. –

8. –

9. 3,57 MHz.

10. –

# Transmission en bande de base (1ère partie)

## Menu du jour :

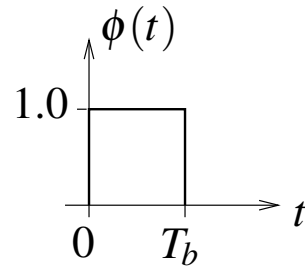
1. Mise en forme d'une onde PCM
2. Modulation PAM (Pulse Amplitude Modulation)
3. Bande de base (ou de Nyquist)
4. Densité spectrale de puissance
5. Exercices

# 1. Mise en forme d'une onde PCM

Onde PCM :

...101101001...

Impulsion de mise en forme :

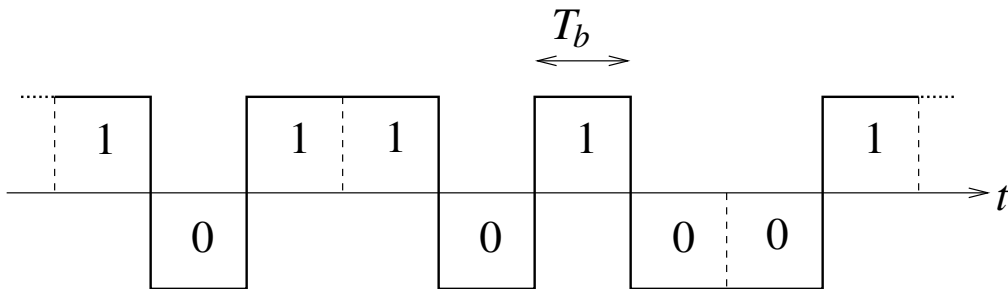


Amplitude du signal de mise en forme (ex : NRZ) :

$$\begin{aligned} A_k = 1 & \longleftrightarrow \text{bit 1} \\ A_k = -1 & \longleftrightarrow \text{bit 0} \end{aligned}$$

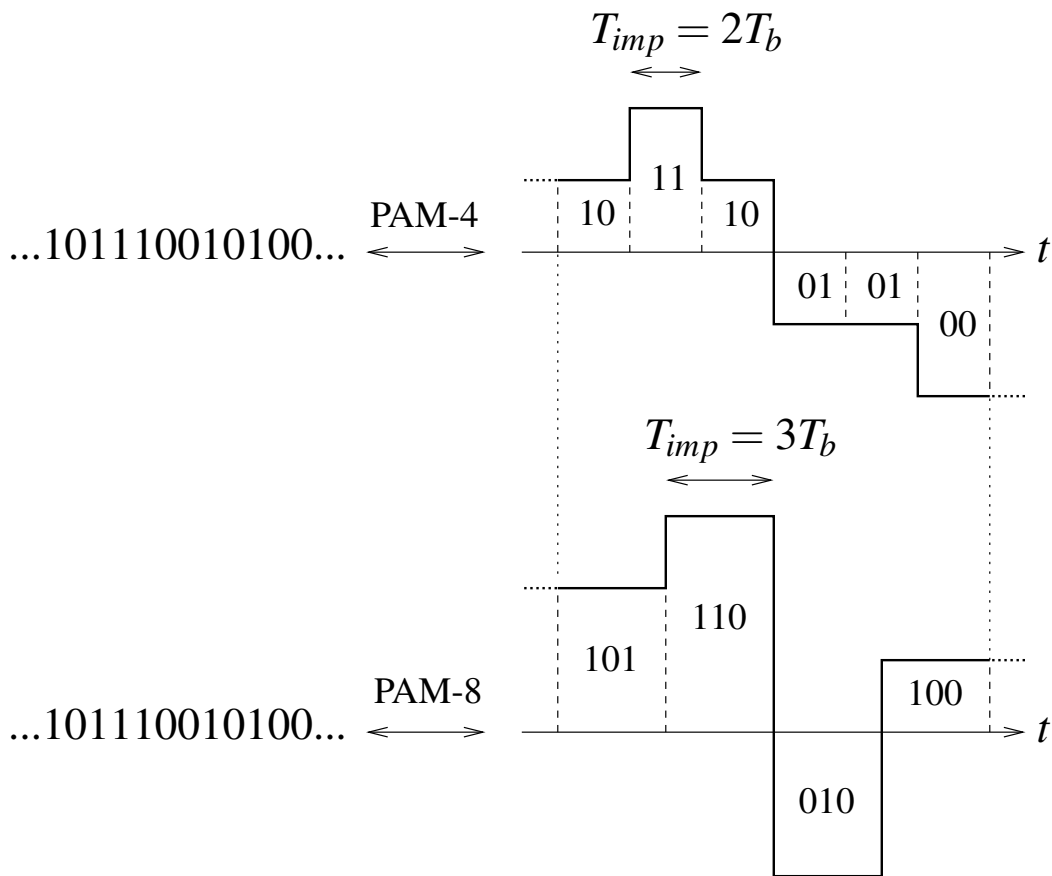
Signal mis en forme :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \phi(t - kT_b)$$



## 2. Modulation PAM (Pulse Amplitude Modulation)

PAM- $n$  :  $A_k = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{n}{2}\}$  ( $n =$  puissance de 2)

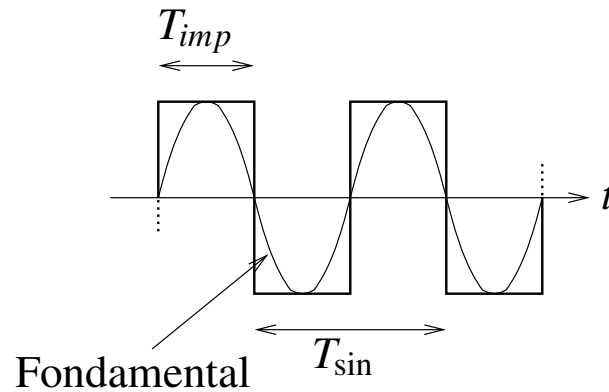


Remarque : PAM-2 = NRZ



### 3. Bande de base (ou de Nyquist)

Situation critique :



Période du fondamental :

$$T_{sin} = 2T_{imp}$$

Bande de base (ou de Nyquist) :

$$W_b = \frac{1}{T_{sin}} = \frac{1}{2T_{imp}}$$

NRZ ou PAM-2 :

$$W_b = \frac{1}{2T_{imp}} = \frac{1}{2T_b} = \frac{R_b}{2}$$

PAM-4 :

$$W_b = \frac{1}{2T_{imp}} = \frac{1}{2(2T_b)} = \frac{R_b}{4}$$

## 4. Densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance d'une onde PCM :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \phi(t - kT_b)$$

lorsque  $A_k$  est une séquence de variables aléatoires *non-corrélées* est donnée par :

$$\gamma_s(f) = \|\Phi(f)\|^2 \frac{1}{T} \left[ \sigma_A^2 + \mu_A^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \right]$$

## 5. Exercices

1. Considérer les séquences suivantes de 1 et de 0 :
  - (a) une séquence alternative de 1 et de 0.
  - (b) une longue séquence de 1 suivie d'une longue séquence de 0.
  - (c) une longue séquence de 1 suivie d'un 0, suivi par une longue séquence de 1.

Dessiner les signaux obtenus pour chacune de ces séquences en utilisant les méthodes suivantes :

- i. On-Off signaling.
  - ii. NRZ (nonreturn-to-zero) bipolaire.
  - iii. RZ (return-to-zero) bipolaire.
  - iv. Manchester.
2. Un signal analogique est échantillonné, quantifié et encodé en PCM binaire dont voici les spécifications :  
Fréquence d'échantillonnage = 8 kHz.  
Nombre de niveaux de quantification = 64.  
L'onde binaire PCM est transmise sur un canal en bande de base utilisant une modulation PAM.
  - (a) Déterminer la bande passante minimum nécessaire pour la transmission si chaque impulsion PAM peut seulement prendre ;
    - i. 2 niveaux de tension différents,
    - ii. 4 niveaux de tension différents,
    - iii. 8 niveaux de tension différents.
  - (b) Calculer la densité spectrale de puissance du signal si
    - i. les 2 niveaux de tension  $V$  et  $-V$  sont équiprobables,
    - ii. les 4 niveaux de tension  $(0, V, 2V, 3V)$  ont des probabilités d'occurrence telles que  $P(V) = P(2V) = 2P(0) = 2P(3V)$ ,
    - iii. les 8 niveaux de tension  $(\pm V, \pm 3V, \pm 5V, \pm 7V)$  ont des probabilités d'occurrence  $P(\pm V) = 0.2$ ,  $P(\pm 3V) = 0.15$ ,  $P(\pm 5V) = 0.1$  et  $P(\pm 7V) = 0.05$ .

3. Le problème est de montrer que la densité spectrale de puissance d'une onde PCM dépend du type de format de signal utilisé pour représenter les 1 et les 0. En supposant que les 1 et les 0 sont équiprobables et non-corrélés, les bits adjacents sont statistiquement indépendants. Déterminer les densités spectrales de puissance pour les formats suivants :
- (a) NRZ bipolaire.
  - (b) NRZ unipolaire.
  - (c) Manchester.

4. Pour une transmission PAM en bande de base, on utilise l'impulsion de base suivante :

$$p(t) = \text{sinc} \left( \frac{t - \frac{T_b}{2}}{T_b} \right)$$

où  $T_b$  est la durée d'un bit. Les amplitudes à la sortie du modulateur sont +1 ou -1 selon que le symbole binaire est 1 ou 0 respectivement.

- (a) Dessiner l'onde à la sortie du modulateur pour la séquence binaire 001101001.
  - (b) Calculer la forme générale de la densité spectrale de puissance du signal.
5. L'information à transmettre est un signal analogique dont la fréquence maximum est  $f_m = 3\text{kHz}$ . Ce signal est échantillonné et quantifié de telle sorte que l'erreur de quantification ne dépasse pas  $\pm 1\%$  de la valeur crête à crête du signal analogique.
- (a) Déterminer le débit binaire minimum nécessaire.
  - (b) Si l'onde binaire PCM ainsi formée est transmise grâce à une modulation PAM à  $M = 16$  niveaux de tension, quel est le taux de transmission des symboles ?

## Réponses

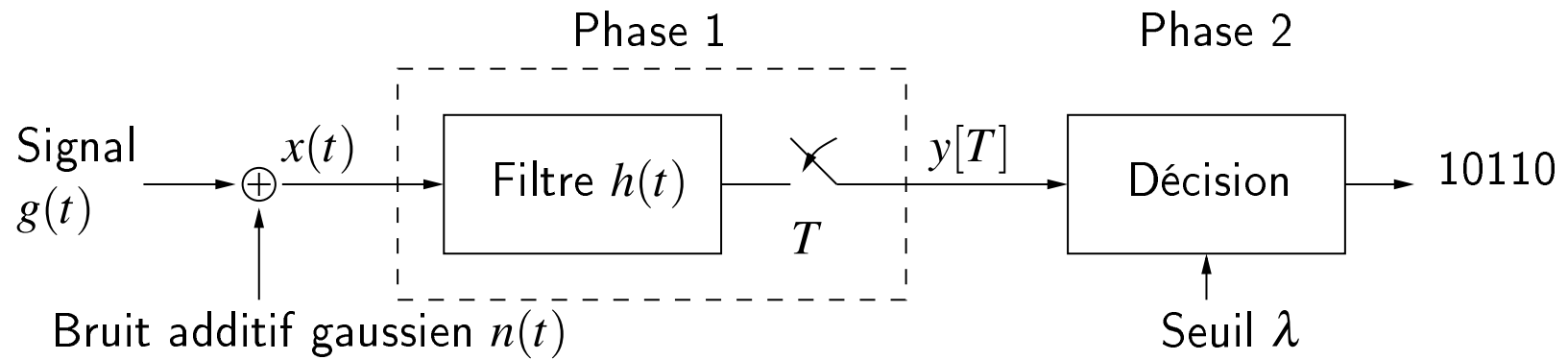
1. –
2. (i) 24 kHz.  
(ii) 12 kHz.  
(iii) 8 kHz.
3. –
4. –
5. (a) 36 kb/s.  
(b) 9000 symboles/s.

# Transmission en bande de base (2ème partie)

## Menu du jour :

1. Récepteur numérique
2. Implémentation du filtre adapté
3. Probabilité d'erreur
4. Exercices

# 1. Récepteur numérique



## 2. Implémentation du filtre adapté

Réponse impulsionnelle du filtre adapté :

$$h(t) = k \phi(T_b - t)$$

Par convolution :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Par corrélation :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \phi(T_b - t + \tau) d\tau$$

$$y = y(T_b) = \int_0^{T_b} x(\tau) \phi(\tau) d\tau$$

Par intégration (uniquement mise en forme rectangulaire) :

$$y = \int_0^{T_b} x(\tau) d\tau$$

avec remise à zéro de l'intégrateur après chaque détection.



### 3. Probabilité d'erreur

Dans le cas NRZ :

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right), \quad E_b = A^2 T_b$$

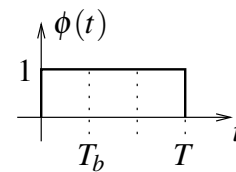
Table de la fonction  $\operatorname{erf}(u) = 1 - \operatorname{erfc}(u)$  :

$u$	$\operatorname{erf}(u)$	$u$	$\operatorname{erf}(u)$
0,00	0,00000	1,10	0,88021
0,05	0,05637	1,15	0,89612
0,10	0,11246	1,20	0,91031
0,15	0,16800	1,25	0,92290
0,20	0,22270	1,30	0,93401
0,25	0,27633	1,35	0,94376
0,30	0,32863	1,40	0,95229
0,35	0,37938	1,45	0,95970
0,40	0,42839	1,50	0,96611
0,45	0,47548	1,55	0,97162
0,50	0,52050	1,60	0,97635
0,55	0,56332	1,65	0,98038
0,60	0,60386	1,70	0,98379
0,65	0,64203	1,75	0,98667
0,70	0,67780	1,80	0,98909
0,75	0,71116	1,85	0,99111
0,80	0,74210	1,90	0,99279
0,85	0,77067	1,95	0,99418
0,90	0,79691	2,00	0,99532
0,95	0,82089	2,50	0,99959
1,00	0,84270	3,00	0,99998
1,00	0,86244	3,30	0,99998

## 4. Exercices

1. Un filtre adapté est utilisé pour démoduler un signal PAM à 4 niveaux de tension :  $-2(00)$ ,  $-1(01)$ ,  $+1(10)$ ,  $+2(11)$  volts. L'impulsion de mise en forme est un pulse rectangulaire de durée  $T$  et d'amplitude unitaire. Après décodage, le récepteur fournit la série de bits suivante : 01 11 10 00 10.
  - (a) Sachant que les symboles sont équiprobables et non-corrélés, déterminer la densité spectrale de puissance du signal PAM.
  - (b) Déterminer et dessiner l'allure du signal à la sortie du filtre adapté (implémenté par convolution), signal qui a permis de reconstruire la séquence de bits donnée.
  
2. Une onde PCM obtenue après quantification est ensuite modulée par un modulateur PAM-8 dont les caractéristiques sont données dans le tableau suivant. Par ailleurs,  $T_b$  étant la durée d'un bit de l'onde PCM et  $T = 3T_b$ , l'impulsion de mise en forme est un signal rectangulaire d'amplitude unitaire s'étendant de 0 à  $T$ .

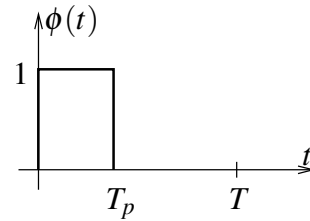
Symbole	Probabilité	Tension [Volt]
000	0,25	-3.5
001	0,15	-2.5
010	0,075	-1.5
011	0,025	-0.5
100	0,025	+0.5
101	0,075	+1.5
110	0,15	+2.5
111	0,25	+3.5



- (a) Dans l'hypothèse où les symboles sont non-corrélés, déterminez la densité spectrale de puissance du signal PAM-8.
- (b) Calculez la puissance du signal modulé en  $[dBW]$  et  $[dBm]$ .
- (c) Pour une même probabilité de symbole, l'assignation des tensions aux différents symboles vous semble-t-il judicieux ? Expliquez pourquoi. Si non, proposez une nouvelle répartition des tensions et montrez, valeurs à l'appui, l'influence d'une telle modification.
- (d) Lorsque le signal arrive au récepteur, celui-ci décode 111101000011110. Déterminez l'allure du signal à la sortie du filtre adapté (par intégration et par convolution) qui a permis de reconstruire la séquence binaire donnée.

3. Une onde PCM obtenue après quantification est ensuite modulée par un modulateur PAM-4 dont les caractéristiques sont données dans le tableau suivant.

Symbole	Probabilité	Tension [Volt]
00	0.1	-1
01	0.4	-3
10	0.4	3
11	0.1	1



On utilise une impulsion de mise en forme s'étendant de 0 à  $T$  où  $T_p$  est la durée pendant laquelle l'onde PCM est positive et  $T_p = \frac{T}{k} \leq \frac{T}{2}$  et donc  $k \geq 2$ .

- Donnez l'expression analytique de l'impulsion de mise en forme  $\phi(t)$ , de sa transformée de Fourier  $\Phi(f)$  et du module de la transformée de Fourier  $\|\Phi(f)\|$ .
- Dans l'hypothèse où les symboles sont non-corrélés, déterminez la densité spectrale de puissance du signal PAM-4.
- En partant de la densité spectrale de puissance obtenue au point précédent, calculez la fonction d'auto-corrélation du signal PAM-4.
- Calculez la puissance du signal modulé en  $[dBW]$  et  $[dBm]$ .
- Donnez la réponse impulsionnelle du filtre adapté  $h(t)$ . Puis, représentez par un graphique le résultat de la convolution de cette réponse impulsionnelle du filtre avec l'onde de mise en forme (déterminez  $h(t) * \phi(t)$  graphiquement OU analytiquement).
- On décide de transmettre la séquence de bit 11000110. Dessinez l'onde modulée PAM-4 correspondante. Puis, déterminez l'allure du signal à la sortie du filtre adapté par convolution (grâce au résultat du point précédent) ET par intégration. Indiquez sur les deux graphiques les instants d'échantillonnage après le filtre adapté.
- Si l'on conserve les niveaux de tension mentionnés dans le tableau (c-à-d.  $\pm 1 [V]$  et  $\pm 3 [V]$ ), proposez un nouveau tableau en modifiant uniquement la troisième colonne afin de minimiser la puissance du signal. Déterminez la puissance correspondante.
- Sans calcul, discutez des conséquences de cette nouvelle répartition des niveaux de tension sur la probabilité d'erreur  $P_e$ .
- Si  $T_p$  est égal à  $1 [\mu s]$  et  $k = 4$ , calculez le débit binaire, le débit de symboles et la bande passante du signal PAM-4.

4. Dans un système PCM binaire, la probabilité d'erreur est donnée par

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

où  $E_b$  est l'énergie du signal par bit et  $N_0$  est la densité spectrale de puissance du bruit blanc gaussien.

Dans le système qui nous concerne, on utilise un codage du type NRZ et la probabilité d'erreur est égale à  $10^{-6}$ .

- (a) Supposons que le taux de transmission soit doublé. Déterminer la nouvelle valeur de la probabilité d'erreur.
- (b) Sachant que les impulsions ont une amplitude valant  $\pm 1,5V$  et que la densité spectrale de puissance du bruit  $N_0/2$  est égale à  $10^{-5}$ , déterminez le débit binaire maximal transmissible si on impose une probabilité d'erreur maximale de  $10^{-4}$ .

## Réponses

1. (a)  $\frac{5T}{2} \text{sinc}^2(fT)$

(b) -

2.

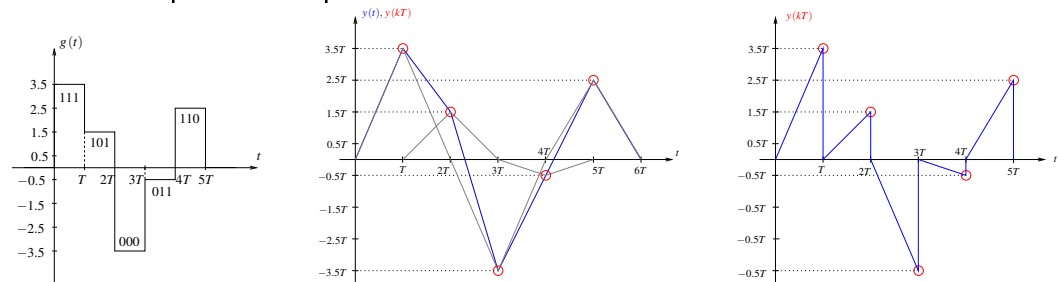
(a)  $\phi(t) = \text{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$ ,  $\Phi(f) = T \text{sinc}(fT) \exp(-\pi j f T) \Rightarrow \|\Phi(f)\|^2 = T^2 \text{sinc}^2(fT)$   
 $\mu_A = 0 \text{ V}$ ,  $\sigma_A^2 = 8.35 \text{ V}^2$  et  $\gamma_g(f) = 8.35 T \text{sinc}^2(fT)$

(b)  $P = 8.35 \text{ W} \equiv 9.22 \text{ dBW} \equiv 39.22 \text{ dbm}$

(c) L'assignation est optimale en terme de probabilité d'erreurs mais est mauvaise en terme de puissance nécessaire. Pour minimiser la puissance, on utilise la répartition suivante pour laquelle la puissance du signal PAM-8 vaut  $P = 2.35 \text{ W}$

Symb.	Prob.	Tension	Symb.	Prob.	Tension
000	0,25	-0.5 V	111	0,25	+0.5 V
001	0,15	-1.5 V	110	0,15	+1.5 V
010	0,075	-2.5 V	101	0,075	+2.5 V
011	0,025	-3.5 V	100	0,025	+3.5 V

(d) Le signal PAM-8, le signal de sortie du filtre adapté (par convolution) et le signal utilisé pour obtenir (par intégration) les valeurs échantillonnées en sortie du filtre adapté sont respectivement



3. -

4. -

# Codes correcteurs d'erreurs

## Menu du jour :

1. Codes blocs linéaires
2. Poids et distance de HAMMING - Capacité de correction
3. Algorithme de correction d'erreurs
5. Exercices

# 1. Codes blocs linéaires

## Code bloc

Dans un code bloc  $(n, k)$  :

- Les données binaires sont groupées en blocs de  $k$  bits; le message  $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ .
- Chaque mot de données est représenté par un mot de code de longueur  $n$  bits (avec  $n > k$ ) :  $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)$

## Code bloc linéaire

Un code bloc linéaire est défini par l'équation matricielle

$$\vec{c} = \vec{m} \mathbf{G}$$

La matrice  $\mathbf{G} \in \mathbb{F}_2^{k \times n}$  est appelée *matrice génératrice*.

## Code systématique

Un code est dit *systématique* si une partie du mot codé coïncide avec le message.

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= [\mathbf{P} | \mathbf{I}_k] \\ &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1(n-k)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2(n-k)} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & 0 \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{k(n-k)} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Matrice de contrôle de parité

$$H^T = \left[ \begin{array}{c} I_{n-k} \\ P \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1(n-k)} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2(n-k)} \\ \vdots & & & \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{k(n-k)} \end{array} \right]$$

On observe que

$$GH^T = \left[ \begin{array}{cccccccc} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1(n-k)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2(n-k)} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & 0 \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{k(n-k)} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1(n-k)} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2(n-k)} \\ \vdots & & & \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{k(n-k)} \end{array} \right] = \underline{0}$$



## Syndrome d'erreur

Vecteur à la réception

$$\vec{r} = \vec{c} + \vec{e}$$

Le vecteur  $\vec{s} = \vec{r}H^T$  est appelé *vecteur syndrome d'erreur* ou plus simplement *syndrome*.

$$\vec{s} = \vec{r}H^T$$

En développant l'expression du syndrome,

$$\begin{aligned}\vec{s} &= (\vec{c} + \vec{e})H^T \\ &= \vec{c}H^T + \vec{e}H^T \\ &= \vec{e}H^T\end{aligned}$$

## 2. Poids et distance de Hamming - Capacité de correction

### Poids de Hamming

Le *poids de HAMMING*  $w(\vec{c})$  du vecteur  $\vec{c}$  est le nombre de 1 qu'il contient.

### Distance de Hamming entre deux mots binaires

Soient deux vecteurs binaires de même taille (messages ou mots de code)  $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ , la distance de HAMMING  $d(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$  est le nombre de bits qui diffèrent.

$$\begin{cases} d(\vec{c}_1, \vec{c}_2) = w(\vec{c}_1 \oplus \vec{c}_2) \\ w(\vec{c}) = d(\vec{c}, \vec{0}) \end{cases}$$

## Distance de Hamming d'un code

La distance de HAMMING d'un code est la distance de HAMMING minimum  $d_{\min}$  entre deux mots de ce code. Pour un code bloc linéaire, c'est le poids minimum d'un vecteur de code non nul :

$$d_{\min} = \min_{\vec{c}_l \in C, \vec{c}_l \neq \vec{0}} \{w(\vec{c}_l)\}$$

## Capacité de détection

C'est le nombre maximum de bits erronés que l'on peut détecter :

$$t_d = d_{\min} - 1$$

## Capacité de correction

C'est le nombre maximum de bits erronés que l'on peut corriger :

$$t_c = \text{arrondi}_- \frac{d_{\min} - 1}{2}$$

### 3. Algorithme de correction d'erreurs

En partant du tableau ainsi construit :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vec{c}_0 = \vec{e}_0 = \vec{0} & \vec{c}_1 & \dots & \vec{c}_{2^k} & \rightarrow & \vec{s}_0 = \mathbf{0} \\
 \vec{e}_1 & \vec{c}_1 + \vec{e}_1 & \dots & \vec{c}_{2^k} + \vec{e}_1 & \rightarrow & \vec{s}_1 \\
 \vec{e}_2 & \vec{c}_1 + \vec{e}_2 & \dots & \vec{c}_{2^k} + \vec{e}_2 & \rightarrow & \vec{s}_2 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \vec{e}_i & \vec{c}_1 + \vec{e}_i & \dots & \vec{c}_{2^k} + \vec{e}_i & \rightarrow & \vec{s}_i \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \vec{e}_{2^{n-k}} & \vec{c}_1 + \vec{e}_{2^{n-k}} & \dots & \vec{c}_{2^k} + \vec{e}_{2^{n-k}} & \rightarrow & \vec{s}_{2^{n-k}}
 \end{array}$$

Algorithme de *correction d'erreur* suivant :

1. Calcul du syndrome  $\vec{s} = \vec{r} \mathbf{H}^T$  sur base du signal reçu.
2. Détermination du vecteur d'erreur  $\vec{e}_i$  correspondant.
3. Estimation du mot codé réel au moyen de  $\vec{c} = \vec{r} + \vec{e}_i$ .

## 4. Exercices

1. Soit un code bloc linéaire (4,3) avec 1 seul bit de parité tel que :

$$m_1 + m_2 + m_3 + p_1 = 0$$

- (a) Calculer la matrice génératrice  $G$  et la matrice  $H$  de contrôle de parité.
  - (b) Quelle est la distance de HAMMING de ce code ?
  - (c) Combien peut-on détecter et/ou corriger d'erreurs ?
  - (d) On reçoit le mot de code 1101. La transmission s'est-elle déroulée sans erreurs ? Quel est le message qui a été transmis ?
2. Soit un code de répétition (4,1).
- (a) Calculer la matrice génératrice  $G$  et la matrice  $H$  de contrôle de parité.
  - (b) Quelle est la distance de HAMMING de ce code ?
  - (c) Combien peut-on détecter et/ou corriger d'erreurs ?
  - (d) On reçoit le mot de code 0100. La transmission s'est-elle déroulée sans erreurs ? Quel est le message qui a été transmis ?
  - (e) On reçoit le mot de code 1100. La transmission s'est-elle déroulée sans erreurs ? Quel est le message qui a été transmis ?

3. Soit le code linéaire (7,3) donné par le tableau :

Message			Mot codé						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1

- Est-ce un code systématique ?
- Calculer la matrice génératrice  $G$  et la matrice  $H$  de contrôle de parité.
- Quelle est la distance de HAMMING de ce code ?
- Combien peut-on détecter et/ou corriger d'erreurs ?
- On reçoit le mot de code 1010100. La transmission s'est-elle déroulée sans erreurs ? Quel est le message qui a été transmis ?
- Montrez par un exemple qu'il n'est pas possible de détecter ou de corriger plus d'erreurs que ce que vous avez déterminé au point (d).

4. Soit le code de HAMMING (7,4) donné par sa matrice génératrice :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Écrivez le tableau de correspondance entre les messages et les mots de codes.
- Calculer la matrice  $H$  de contrôle de parité.
- Quelle est la distance de HAMMING de ce code ?
- Combien peut-on détecter et/ou corriger d'erreurs ?
- On reçoit le mot de code 0110100. La transmission s'est-elle déroulée sans erreurs ? Quel est le message qui a été transmis ?
- On reçoit le mot de code 0110011. La transmission s'est-elle déroulée sans erreurs ? Quel est le message qui a été transmis ?

## Answers

1. -

2. -

3. -

4. (c) et (d)  $d_H(C) = 3$ ,  $t_d(C) = 2$ ,  $t_c(C) = 1$

$$(b) H^T = \left( \frac{I_3}{P} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e)  $\vec{s} = \vec{r}H^T = (000)$ , pas d'erreurs,  $\vec{m} = (0100)$

(f)  $\vec{s} = \vec{r}H^T = (001)$ ,  $\vec{e} = (0010000)$ ,  $\vec{c} = (0100011)$ ,  $\vec{m} = (0011)$

	$\vec{m}$	$\vec{c}$	$w_H(\vec{c})$
	0000	0000000	0
	0001	1010001	3
	0010	1110010	4
	0011	0100011	3
	0100	0110100	3
	0101	1100101	4
	0110	1000110	3
(a) et (c)	0111	0010111	4
	1000	1101000	3
	1001	0111001	4
	1010	0011010	3
	1011	1001011	4
	1100	1011100	4
	1101	0001101	3
	1110	0101110	4
	1111	1111111	7

(e) et (f)

$\vec{m}_0 = (0000)$	...	$\vec{m}_{15} = (1111)$	
$\vec{e}_0 = \vec{c}_0 = (0000000) = \vec{0}$	...	$\vec{c}_{15} = (1111111)$	$\vec{s}_0 = (000)$
$\vec{e}_1 = (1000000)$	...	...	$\vec{s}_1 = (100)$
$\vec{e}_2 = (0100000)$	...	...	$\vec{s}_2 = (010)$
$\vec{e}_3 = (0010000)$	...	...	$\vec{s}_3 = (001)$
$\vec{e}_4 = (0001000)$	...	...	$\vec{s}_4 = (110)$
$\vec{e}_5 = (0000100)$	...	...	$\vec{s}_5 = (011)$
$\vec{e}_6 = (0000010)$	...	...	$\vec{s}_6 = (111)$
$\vec{e}_7 = (0000001)$	...	...	$\vec{s}_7 = (101)$



# Systemes radio - Bilan de puissance

## Menu du jour :

- 1 Paramètres caractéristiques d'une antenne
- 2 Puissance émise dans une direction donnée
- 3 Puissance du signal reçu
- 4 Particularités d'une communication satellite
- 5 Exercices

# 1 Paramètres caractéristiques d'une antenne

## a) Gain

Définition :

$$G = \frac{\text{Puissance émise dans une direction donnée /u.a.s.}}{\text{Puissance émise par une antenne isotrope /u.a.s.}}$$

u.a.s. = unité d'angle solide

Aire effective  $A_{eff}$  :

$$G_{max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{eff}$$

où  $\lambda = c/f$  et  $c = 3 \times 10^8$  m/s.

Antenne circulaire de diamètre  $D$  :

$$A_{eff} = \eta A \quad \text{et} \quad A = \frac{\pi D^2}{4}$$

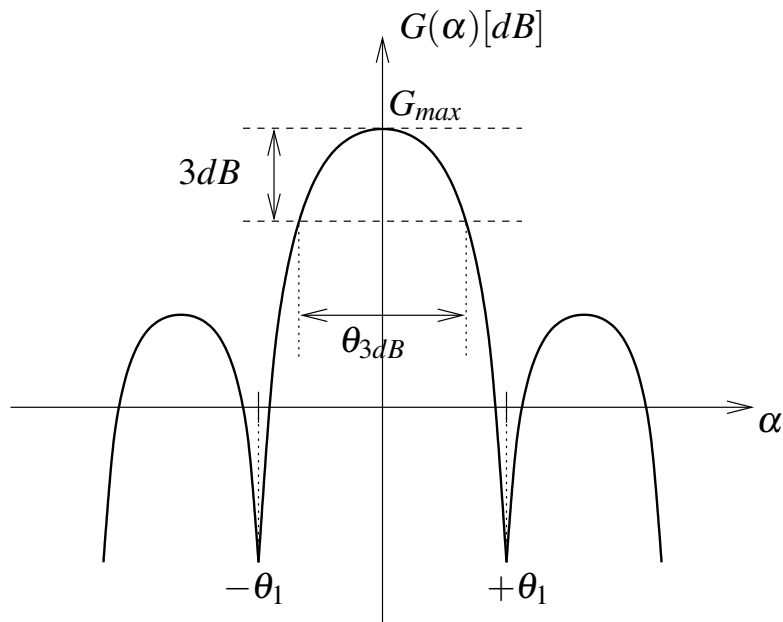
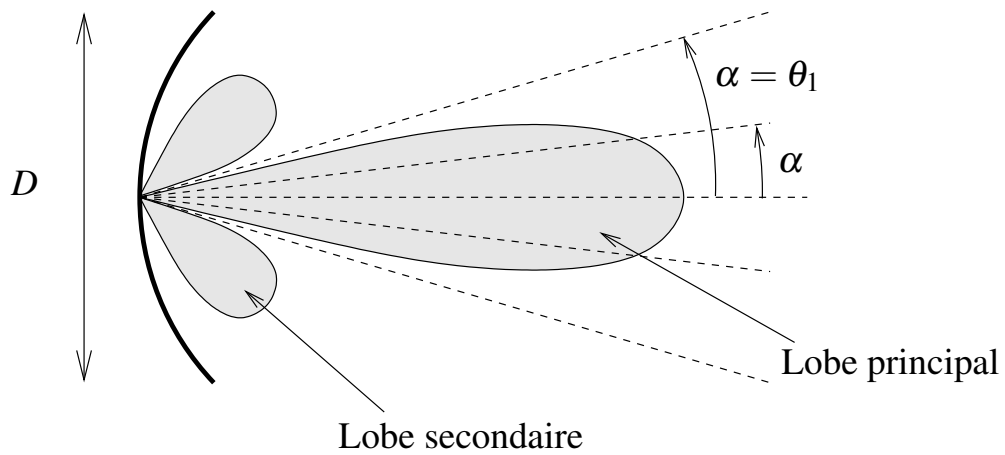
où  $\eta$  est l'efficacité de l'antenne (ordre de grandeur : de 55% à 75%).

Dès lors,

$$G_{max} = \eta \left( \frac{\pi D}{\lambda} \right)^2 = \eta \left( \frac{\pi D f}{c} \right)^2$$

## b) Diagramme de rayonnement

Utilité : indique la variation du gain avec la direction



### c) Effet de la directivité

On peut montrer que

$$\theta_{3dB} = 70 \frac{\lambda}{D}$$

Dès lors,

$$G_{max} = \eta \left( \frac{\pi D}{\lambda} \right)^2 = \eta \left( \frac{70\pi}{\theta_{3dB}} \right)^2$$

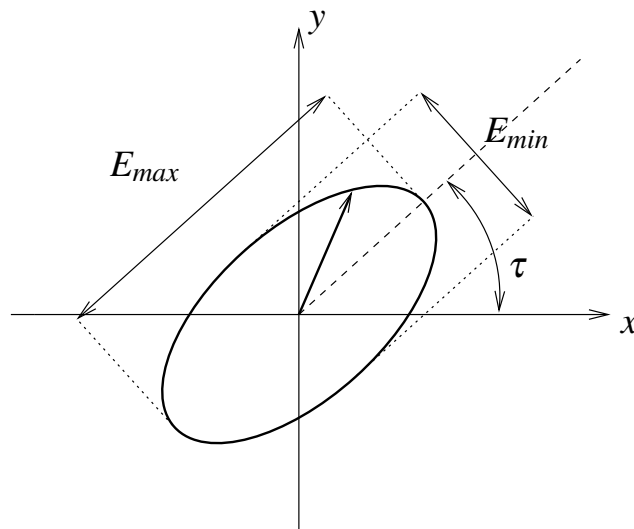
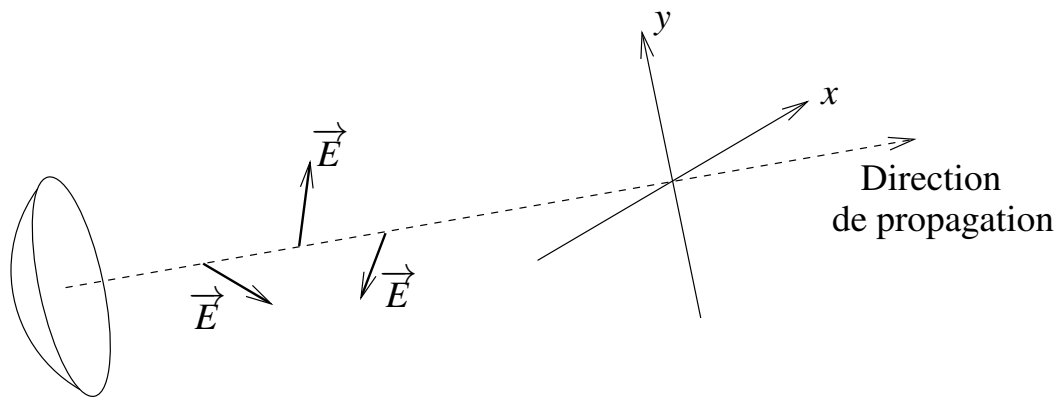
Pour  $\theta_{3dB}$  fixé,  $G_{max}$  est indépendant de la fréquence.

$$G(\alpha) [dB] = G_{max} [dB] - 12 \left( \frac{\alpha}{\theta_{3dB}} \right)^2$$

valable pour  $\alpha \in [0, \theta_{3dB}/2]$ .

## d) Polarisation

Polarisation  $\equiv$  Direction de  $\vec{E}$



$$\text{Axial Ratio : } AR = \frac{E_{max}}{E_{min}} = \begin{cases} = 1 & \text{polarisation circulaire} \\ > 1 & \text{polarisation elliptique} \\ \rightarrow \infty & \text{polarisation linéaire} \end{cases}$$

## 2 Puissance émise dans une direction donnée

### a) Puissance Isotrope Rayonnée Équivalente (PIRE)

Soit une source radio de puissance d'émission  $P_E$  (Watts).

Puissance rayonnée par u.a.s. par une antenne isotrope :

$$\frac{P_E}{4\pi} \quad [\text{W/steradian}]$$

Puissance rayonnée par u.a.s. pour une antenne non-isotrope :

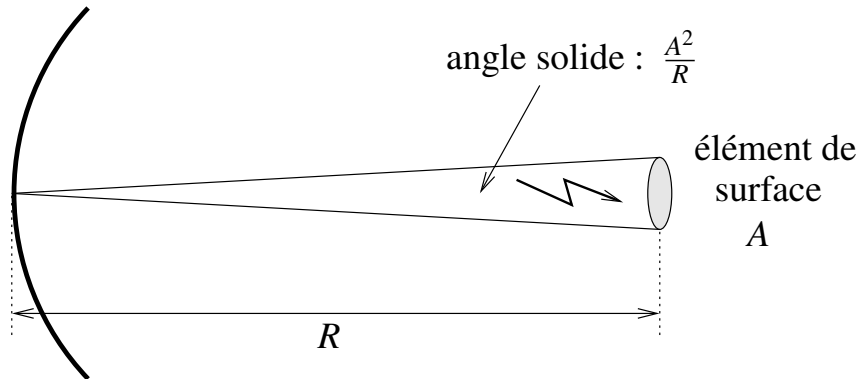
$$\frac{P_E G_E}{4\pi} \quad [\text{W/steradian}]$$

Puissance Isotrope Rayonnée Équivalente :

$$PIRE = P_E G_E \quad [\text{W}]$$

Le PIRE dépend donc de la direction de propagation.

## b) Densité de flux de puissance



L'élément de surface  $A$  reçoit une puissance égale à

$$P_R = \left( \frac{P_E G_E}{4\pi} \right) \frac{A}{R^2} = \Phi(R) A \quad [\text{W}]$$

où

$$\Phi(R) = \frac{P_E G_E}{4\pi R^2} \quad [\text{W/m}^2]$$

est la densité de flux de puissance.

### 3 Puissance du signal reçu

Soit une antenne de réception d'aire effective  $A_{effR}$ , située à une distance  $R$  de l'antenne d'émission.

Puissance reçue :

$$\begin{aligned}P_R &= \Phi(R) A_{effR} \\ &= \frac{P_E G_E}{4\pi R^2} A_{effR}\end{aligned}$$

Or

$$G_R = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{effR}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}P_R &= \frac{P_E G_E}{4\pi R^2} \frac{G_R \lambda^2}{4\pi} \\ &= P_E G_E \left( \frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 G_R \\ &= PIRE \frac{1}{L_{FS}} G_R\end{aligned}$$

(Équation de Friis) où

$$L_{FS} = \left( \frac{4\pi R}{\lambda} \right)^2 = \text{atténuation en espace libre}$$



## 4 Particularités d'une communication satellite

### a) Atténuation dans l'atmosphère

Présence de gaz, d'eau dans la troposphère caractérisée par une atténuation  $L_A$ . Dès lors,

$$L_{FS} \rightarrow L = L_{FS}L_A$$

### b) Pertes dans les circuits d'émission et de réception

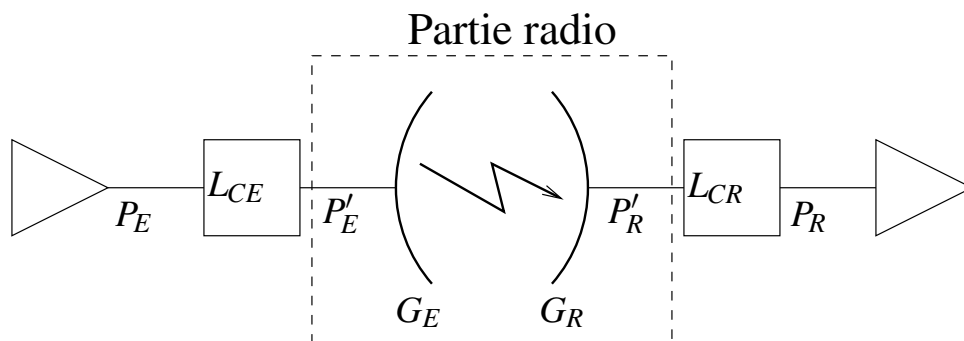
Atténuation entre l'amplificateur et l'antenne d'émission :  $L_{CE}$

$$P'_E = \frac{P_E}{L_{CE}}$$

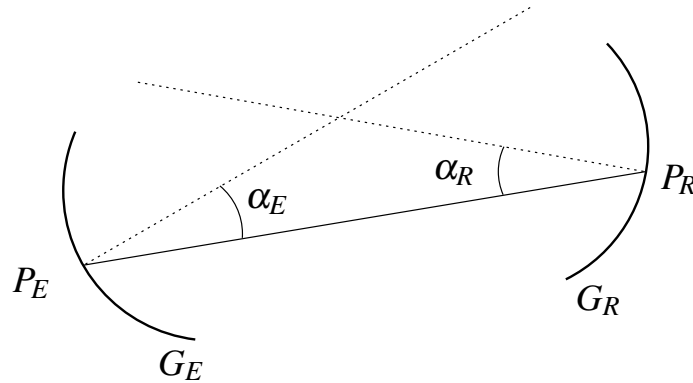
$$\rightarrow PIRE = P'_E G_E = \frac{P_E G_E}{L_{CE}}$$

Atténuation entre l'antenne et l'ampli de réception :  $L_{CR}$

$$P_R = \frac{P'_R}{L_{CR}}$$



### c) Pertes dues au mauvais alignement des antennes



A l'émission :

$$L_E = 12 \left( \frac{\alpha_E}{\theta_{3dBE}} \right)^2 \quad [\text{db}]$$

$$\rightarrow G_E = G_{E_{max}} - L_E \quad [\text{db}]$$

A la réception :

$$L_R = 12 \left( \frac{\alpha_R}{\theta_{3dBR}} \right)^2 \quad [\text{db}]$$

$$\rightarrow G_R = G_{R_{max}} - L_R \quad [\text{db}]$$

### d) Pertes dues à la dépolarisation

$$L_{POL} = 20 \log_{10} (\cos \gamma) \quad [\text{db}]$$

où  $\gamma$  est l'angle de dépolarisation.

### e) Équation de Friis généralisée

$$P_R = \left( \frac{P_E G_{E_{max}}}{L_{CE} L_E} \right) \frac{1}{L_{FS} L_A} \frac{G_{R_{max}}}{L_R L_{CR} L_{POL}}$$

avec

$$PIRE = \frac{P_E G_{E_{max}}}{L_{CE} L_E}$$

## 5 Exercices

1. Un émetteur radio transmet un signal FM (fréquence porteuse = 100MHz) d'une puissance de 1W via une antenne présentant un gain d'émission de 30db. Déterminez la puissance reçue par un récepteur muni d'une antenne isotrope situé à une distance de 100km de l'émetteur.
2. Une station terrestre émet un signal à la fréquence de 12GHz vers un satellite géostationnaire ( $R = 40000\text{km}$ ) présentant une antenne de réception de gain égal à 30db. Sachant que la puissance reçue par le satellite vaut 0,1nW, calculez le PIRE.
3. Une station terrestre émet un signal de puissance 100W et de fréquence 14GHz en direction d'un satellite géostationnaire ( $R = 40000\text{km}$ ). Elle dispose d'une antenne ayant un diamètre de 6m, une efficacité de 0,6, et présentant un défaut d'alignement  $\alpha_E = 0,1^\circ$  avec l'antenne montée à bord du satellite. L'atténuation dans les circuits d'émission est égale à 0,5db. L'antenne de réception est caractérisée par  $\theta_{3dB} = 2^\circ$  et une efficacité de 0,55. Elle présente de plus un défaut d'alignement de  $\alpha_R = 1^\circ$  avec l'antenne terrestre. L'atténuation dans les circuits de réception est égale à 1db. Enfin, l'atténuation dans l'atmosphère est donnée par 0,3db.
  - (a) Calculez le PIRE.
  - (b) Calculez la puissance reçue au niveau de l'ampli de réception.

Rappels:

$$\theta_{3[db]} = 70 \frac{\lambda}{D} \quad [^\circ]$$
$$G_{max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{eff}$$
$$L_{E,R} = 12 \left( \frac{\alpha_{E,R}}{\theta_{3[db]}} \right)^2 \quad [db]$$

4. L'opérateur de communication mobile par satellites GLOBALSTAR est composé de 48 satellites à basse altitude ( $R = 1414\text{km}$ ), prévus pour des liaisons mobiles directes avec des terminaux portables à antenne isotrope et à la fréquence de 3GHz. L'antenne à bord d'un satellite est du type parabolique avec un diamètre de 3m. Nous considérerons le pire des cas où le défaut d'alignement d'émission  $\alpha_E$  est égal à  $\theta_{3dB}/2$ . Les pertes dues à l'atmosphère sont estimées à 0,3db. Les pertes dans les circuits d'émissions sont de 1db. Les pertes dans les circuits de réception sont de 0,15db. Ces terminaux nécessitent un niveau minimum de réception égal à  $-120\text{db}$  pour fonctionner correctement.
- Déterminez l'affaiblissement en espace libre.
  - Déterminez l'ouverture à 3db, le gain maximum et l'aire effective de l'antenne d'émission si l'efficacité de celle-ci est égale à 0,6.
  - Déterminez la puissance d'émission minimum d'un satellite.
  - Définissez et déterminez le PIRE.
  - Le rapport signal-à-bruit minimum nécessaire au bon fonctionnement des circuits électroniques des terminaux est de 10db. Déterminez la bande passante maximum utilisable si la densité spectrale de bruit estimée dans la bande de fréquence considérée est de  $N_0/2 = 5 \cdot 10^{-18} \text{W/Hz}$ .
  - Déterminez le débit binaire maximum si la modulation utilisée est une modulation d'amplitude numérique à deux états (porteuse modulée par un signal de type NRZ bipolaire).

Rappels:

$$\theta_{3[db]} = 70 \frac{\lambda}{D} \quad [^\circ]$$

$$G_{max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{eff}$$

$$L_{E,R} = 12 \left( \frac{\alpha_{E,R}}{\theta_{3[db]}} \right)^2 \quad [db]$$

5. Un opérateur de télécommunications souhaiterait mettre en place un système composé de deux stations terrestres (A et B) distantes de 1200km et capables de communiquer à la fréquence de 15GHz. Les stations sont identiques et utilisent des antennes paraboliques de 3m de diamètre et d'efficacité égale à 0,55. La puissance d'émission est de 100W. La sensibilité (niveau de puissance minimum requis) en réception est de  $-50\text{db}$ . Les défauts d'alignement, les pertes dans les circuits d'émission et réception, les pertes dues à l'atmosphère et à la dépolarisation sont négligées.
- Déterminez l'affaiblissement en espace libre de A à B.
  - Déterminez l'ouverture à 3db, le gain maximum et l'aire effective des antennes d'émission et réception.
  - Définissez et déterminez le PIRE.
  - Montrez que la puissance reçue en B est inférieure à la sensibilité et que le système est inutilisable tel-quel.
  - Si nous pouvions changer la fréquence, quelle serait la nouvelle fréquence à utiliser pour que le système soit opérationnel.
  - La fréquence ne pouvant être modifiée à cause des normes, l'opérateur décide d'insérer une station intermédiaire C à équidistance de A et B et sur la même droite. Le rôle de C est de réceptionner le signal en provenance de A, l'amplifier et le renvoyer vers B avec un niveau de puissance tel qu'il arrive en B juste au-dessus de la sensibilité. Calculez le gain nécessaire à appliquer au signal dans la station C, en considérant que les antennes de réception et de transmission en C possèdent exactement les mêmes caractéristiques que les antennes en A et B.

Rappels:

$$\theta_{3[\text{dB}]} = 70 \frac{\lambda}{D} \quad [^\circ]$$

$$G_{\text{max}} = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{\text{eff}}$$

$$L_{E,R} = 12 \left( \frac{\alpha_{E,R}}{\theta_{3[\text{dB}]}} \right)^2 \quad [\text{db}]$$

## Réponses

1.  $P_R = -82.44 \text{ dBW} \equiv 5.7 \text{ nW}$ .
2.  $PIRE = 76.07 \text{ dBW} \equiv 40.46 \text{ MW}$ .
3. (a)  $PIRE = 74.26 \text{ dBW} \equiv 26.66 \text{ MW}$ .  
(b)  $P_R = -99.23 \text{ dBW} \equiv 0.12 \text{ nW}$ .
4. (a)  $L_{FS} = 165 \text{ dB}$ .  
(b)  $\theta_{E3[\text{dB}]} = 2.33^\circ$ ,  $A_{E\text{eff}} = 4.24 \text{ m}^2$ ,  $G_{E\text{max}} = 37.25 \text{ dB}$ .  
(c)  $P_{E\text{min}} = 12.2 \text{ dBW} \equiv 16.6 \text{ W}$ .  
(d)  $PIRE = 45.45 \text{ dBW} \equiv 35.1 \text{ kW}$ .  
(e)  $B = 10 \text{ kHz}$ .  
(f)  $R_b = 8.33 \text{ kbit/s}$ .
5. (a)  $L_{FS} = 177.55 \text{ dB}$ .  
(b)  $\theta_{3[\text{dB}]} = 0.47^\circ$ ,  $A_{\text{eff}} = 3.89 \text{ m}^2$ ,  $G_{\text{max}} = 50.87 \text{ dB}$ .  
(c)  $PIRE = 70.87 \text{ dBW}$ .  
(d)  $P_B = -55.81 \text{ dBW}$ .  
(e)  $f = 29.28 \text{ GHz}$ .  
(f)  $G_C = 69.58 \text{ dB}$ .