Calculer la complexité k-binomiale du mot de Thue-Morse

6 décembre 2018

Marie Lejeune

Plan

Plan

1. Mise en situation et premières définitions
   - Morphismes et mot de Thue-Morse
   - Fonctions de complexité
   - Complexité k-binomiale
2. Motivation de l'étude de $\mathbf{b}_t^{(k)}$
3. Calcul de la fonction $\mathbf{b}_\mathbf{t}^{(k)}$
   - Coefficients binomiaux d'images exactes
   - Factorisations d'ordre k
   - Types d'ordre k

Définition

Un *morphisme sur l'alphabet* A est une application

$$\sigma : A^* \to A^*$$

telle que, pour tout mot $u = u_1 \cdots u_n \in A^*$,

$$\sigma(u) = \sigma(u_1) \cdots \sigma(u_n).$$

Définition

Un *morphisme sur l'alphabet A* est une application

$$\sigma : A^* \to A^*$$

telle que, pour tout mot $u = u_1 \cdots u_n \in A^*$,

$$\sigma(u) = \sigma(u_1) \cdots \sigma(u_n).$$

S'il existe une lettre $a \in A$ telle que $\sigma(a)$ commence par la lettre a et si $\lim_{n\to+\infty} |\sigma^n(a)| = +\infty$, alors on peut définir le mot infini

$$\sigma^\omega(a) = \lim_{n\to+\infty} \sigma^n(a).$$

On dit que c'est un point fixe du morphisme σ.

Exemple (Thue-Morse)

Définissons le *morphisme de Thue-Morse*

$$\varphi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^* : \begin{cases} 0 \mapsto 01 = 0\overline{0}; \\ 1 \mapsto 10 = 1\overline{1}. \end{cases}$$

Exemple (Thue-Morse)

Définissons le *morphisme de Thue-Morse*

$$\varphi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^* : \left\{ \begin{array}{l} 0 \mapsto 01 = 0\overline{0}; \\ 1 \mapsto 10 = 1\overline{1}. \end{array} \right.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 01, \\ \varphi^2(0) &= 0110, \\ \varphi^3(0) &= 01101001, \\ &\dots \end{aligned}$$

Exemple (Thue-Morse)

Définissons le *morphisme de Thue-Morse*

$$\varphi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^* : \begin{cases} 0 \mapsto 01 = 0\overline{0}; \\ 1 \mapsto 10 = 1\overline{1}. \end{cases}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 01, \\ \varphi^2(0) &= 0110, \\ \varphi^3(0) &= 01101001, \\ &\cdots \end{aligned}$$

Nous pouvons alors définir le *mot de Thue-Morse* comme un des deux points fixes du morphisme φ :

$$\mathbf{t} := \varphi^\omega(0) = 0110100110010110\cdots$$

Remarque

Puisque $\mathbf{t}$ est un point fixe de φ, nous avons

$$\mathbf{t} = \varphi(\mathbf{t}) = \varphi^2(\mathbf{t}) = \varphi^3(\mathbf{t}) = \cdots .$$

Ainsi, tout facteur de $\mathbf{t}$ peut s'écrire

$$p\varphi^k(z)s,$$

où $k \geq 1$, p (resp., s) est un suffixe (resp., préfixe) propre d'un des mots $\{\varphi^k(0), \varphi^k(1)\}$, et où z est lui-même un facteur de Thue-Morse.

Plan

Les fonctions de complexité d'un mot w sont des applications liant chaque naturel n avec les différents facteurs de w de longueur n.

Les fonctions de complexité d'un mot w sont des applications liant chaque naturel n avec les différents facteurs de w de longueur n.

Définition

Soit $u = u_1 \cdots u_m$ un mot construit sur un alphabet A.
Un *sous-mot de u* est une sous-suite de $(u_j)_{j=1}^m$.
Un *facteur de u* est un sous-mot constitué de lettres consécutives.
Autrement dit, tout facteur de u (non vide) est de la forme $u_i u_{i+1} \cdots u_{i+\ell}$, avec $1 \leq i \leq m$, $0 \leq \ell \leq m - i$.

Les fonctions de complexité d'un mot w sont des applications liant chaque naturel n avec les différents facteurs de w de longueur n.

Définition

Soit $u = u_1 \cdots u_m$ un mot construit sur un alphabet A.
Un *sous-mot de* u est une sous-suite de $(u_j)_{j=1}^m$.
Un *facteur de* u est un sous-mot constitué de lettres consécutives.
Autrement dit, tout facteur de u (non vide) est de la forme $u_i u_{i+1} \cdots u_{i+\ell}$, avec $1 \leq i \leq m$, $0 \leq \ell \leq m - i$.

On note $\binom{u}{x}$ le nombre de fois que le mot x apparait comme sous-mot de u et $|u|_x$ le nombre de fois qu'il apparait comme facteur de u.

Les fonctions de complexité d'un mot w sont des applications liant chaque naturel n avec les différents facteurs de w de longueur n.

Définition

Soit $u = u_1 \cdots u_m$ un mot construit sur un alphabet A.
Un *sous-mot de u* est une sous-suite de $(u_j)_{j=1}^m$.
Un *facteur de u* est un sous-mot constitué de lettres consécutives.
Autrement dit, tout facteur de u (non vide) est de la forme $u_i u_{i+1} \cdots u_{i+\ell}$, avec $1 \leq i \leq m$, $0 \leq \ell \leq m - i$.

On note $\binom{u}{x}$ le nombre de fois que le mot x apparait comme sous-mot de u et $|u|_x$ le nombre de fois qu'il apparait comme facteur de u.

Exemple

Soit $u = 0102010$.
Le mot 021 est un sous-mot de u, mais pas un facteur.

Les fonctions de complexité d'un mot w sont des applications liant chaque naturel n avec les différents facteurs de w de longueur n.

Définition

Soit $u = u_1 \cdots u_m$ un mot construit sur un alphabet A.
Un *sous-mot de u* est une sous-suite de $(u_j)_{j=1}^m$.
Un *facteur de u* est un sous-mot constitué de lettres consécutives.
Autrement dit, tout facteur de u (non vide) est de la forme $u_i u_{i+1} \cdots u_{i+\ell}$, avec $1 \leq i \leq m$, $0 \leq \ell \leq m - i$.

On note $\binom{u}{x}$ le nombre de fois que le mot x apparait comme sous-mot de u et $|u|_x$ le nombre de fois qu'il apparait comme facteur de u.

Exemple

Soit $u = 0102010$.
Le mot 021 est un sous-mot de u, mais pas un facteur.
Le mot 0201 est un facteur de u, et donc un sous-mot.

La fonction de complexité la plus simple est la suivante.

Définition

La *complexité factorielle* du mot w est la fonction

$$p_w : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \#\mathrm{Fac}_w(n).$$

La fonction de complexité la plus simple est la suivante.

Définition

La *complexité factorielle* du mot w est la fonction

$$p_w : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \#(\mathrm{Fac}_w(n)/ \sim_=),$$

où $u \sim_= v \Leftrightarrow u = v$.

Exemple

Donnons les premières valeurs de la complexité factorielle du mot de Thue-Morse.
Nous avons
$$\mathbf{t} = 0110100110010110\cdots$$

Exemple

Donnons les premières valeurs de la complexité factorielle du mot de Thue-Morse.

Nous avons

$$\mathbf{t} = 0110100110010110\cdots$$

et

n	0	1	2	3	$\cdots$
$p_{\mathbf{t}}(n)$	1				

Exemple

Donnons les premières valeurs de la complexité factorielle du mot de Thue-Morse.

Nous avons

$$\mathbf{t} = 0110100110010110\cdots$$

et

n	0	1	2	3	$\cdots$
$p_{\mathbf{t}}(n)$	1	2			

Exemple

Donnons les premières valeurs de la complexité factorielle du mot de Thue-Morse.

Nous avons

$$\mathbf{t} = 0110100110010110\cdots$$

et

n	0	1	2	3	$\cdots$
$p_{\mathbf{t}}(n)$	1	2	4		

Exemple

Donnons les premières valeurs de la complexité factorielle du mot de Thue-Morse.

Nous avons

$$\mathbf{t} = 01101001100101101001011001101001\cdots$$

et

n	0	1	2	3	$\cdots$
$p_{\mathbf{t}}(n)$	1	2	4	6	

Exemple

Donnons les premières valeurs de la complexité factorielle du mot de Thue-Morse.
Nous avons

$$\mathbf{t} = 0110100110010110 \cdots$$

et

n	0	1	2	3	$\cdots$
$p_{\mathbf{t}}(n)$	1	2	4	6	$\cdots$

Ensuite, pour tout $n \geq 3$, il est connu que

$$p_{\mathbf{t}}(n) = \begin{cases} 4n - 2 \cdot 2^m - 4, & \text{si } 2 \cdot 2^m < n \leq 3 \cdot 2^m; \\ 2n + 4 \cdot 2^m - 2, & \text{si } 3 \cdot 2^m < n \leq 4 \cdot 2^m. \end{cases}$$

D'autres relations d'équivalence que $\sim_=$ peuvent être définies.

- Relation abélienne : $u \sim_{ab,1} v \Leftrightarrow |u|_a = |v|_a \ \forall a \in A$

D'autres relations d'équivalence que $\sim_=$ peuvent être définies.
Si $k \in \mathbb{N}_0$,

- Relation abélienne : $u \sim_{ab,1} v \Leftrightarrow |u|_a = |v|_a \ \forall a \in A$
- Relation k-abélienne : $u \sim_{ab,k} v \Leftrightarrow |u|_x = |v|_x \ \forall x \in A^{\leq k}$

D'autres relations d'équivalence que $\sim_=$ peuvent être définies.
Si $k \in \mathbb{N}_0$,

- Relation abélienne : $u \sim_{ab,1} v \Leftrightarrow |u|_a = |v|_a \; \forall a \in A$
- Relation k-abélienne : $u \sim_{ab,k} v \Leftrightarrow |u|_x = |v|_x \; \forall x \in A^{\leq k}$
- Relation k-binomiale : $u \sim_k v \Leftrightarrow \binom{u}{x} = \binom{v}{x} \; \forall x \in A^{\leq k}$

D'autres relations d'équivalence que $\sim_=$ peuvent être définies.
Si $k \in \mathbb{N}_0$,

- Relation abélienne : $u \sim_{ab,1} v \Leftrightarrow |u|_a = |v|_a \; \forall a \in A$
- Relation k-abélienne : $u \sim_{ab,k} v \Leftrightarrow |u|_x = |v|_x \; \forall x \in A^{\leq k}$
- Relation k-binomiale : $u \sim_k v \Leftrightarrow \binom{u}{x} = \binom{v}{x} \; \forall x \in A^{\leq k}$

C'est avec cette dernière relation que nous allons travailler.

Plan

Définition (rappel)

Soient u et x deux mots. Le *coefficient binomial* $\binom{u}{x}$ est le nombre de fois que le mot x apparait comme sous-mot de u.

Définition (rappel)

Soient u et x deux mots. Le *coefficient binomial* $\binom{u}{x}$ est le nombre de fois que le mot x apparait comme sous-mot de u.

Exemple

Si $u = aababa$,

$$\binom{u}{ab} = ?$$

Définition (rappel)

Soient u et x deux mots. Le *coefficient binomial* $\binom{u}{x}$ est le nombre de fois que le mot x apparait comme sous-mot de u.

Exemple

Si $u = aababa$,

$$\binom{u}{ab} = 1.$$

Définition (rappel)

Soient u et x deux mots. Le *coefficient binomial* $\binom{u}{x}$ est le nombre de fois que le mot x apparait comme sous-mot de u.

Exemple

Si $u = aababa$,

$$\binom{u}{ab} = 2.$$

Définition (rappel)

Soient u et x deux mots. Le *coefficient binomial* $\binom{u}{x}$ est le nombre de fois que le mot x apparait comme sous-mot de u.

Exemple

Si $u = aababa$,

$$\binom{u}{ab} = 3.$$

Définition (rappel)

Soient u et x deux mots. Le *coefficient binomial* $\binom{u}{x}$ est le nombre de fois que le mot x apparait comme sous-mot de u.

Exemple

Si $u = aababa$,

$$\binom{u}{ab} = 4.$$

Définition (rappel)

Soient u et x deux mots. Le *coefficient binomial* $\binom{u}{x}$ est le nombre de fois que le mot x apparait comme sous-mot de u.

Exemple

Si $u = aababa$,

$$\binom{u}{ab} = 5.$$

Définition (rappel)

Soient u et x deux mots. Le *coefficient binomial* $\binom{u}{x}$ est le nombre de fois que le mot x apparait comme sous-mot de u.

Exemple

Si $u = aababa$,

$$\binom{u}{ab} = 5.$$

Définition (rappel)

Soient u et v deux mots finis. Ils sont *k-binomialement équivalents* si

$$\binom{u}{x} = \binom{v}{x} \ \forall x \in A^{\leq k}.$$

Définition (rappel)

Soient u et v deux mots finis. Ils sont *k-binomialement équivalents* si

$$\binom{u}{x} = \binom{v}{x} \; \forall x \in A^{\leq k}.$$

Exemple

Les mots $u = bbaabb$ et $v = babbab$ sont 2-binomialement équivalents car

$$\binom{u}{a} = 1 = \binom{v}{a}.$$

Définition (rappel)

Soient u et v deux mots finis. Ils sont *k-binomialement équivalents* si

$$\binom{u}{x} = \binom{v}{x} \ \forall x \in A^{\leq k}.$$

Exemple

Les mots $u = bbaabb$ et $v = babbab$ sont 2-binomialement équivalents car

$$\binom{u}{a} = 2 = \binom{v}{a}.$$

Définition (rappel)

Soient u et v deux mots finis. Ils sont *k-binomialement équivalents* si

$$\binom{u}{x} = \binom{v}{x} \ \forall x \in A^{\leq k}.$$

Exemple

Les mots $u = bbaabb$ et $v = babbab$ sont 2-binomialement équivalents car

$$\binom{u}{a} = 2 = \binom{v}{a}, \binom{u}{b} = 1 = \binom{v}{b}.$$

Définition (rappel)

Soient u et v deux mots finis. Ils sont *k-binomialement équivalents* si

$$\binom{u}{x} = \binom{v}{x} \ \forall x \in A^{\leq k}.$$

Exemple

Les mots $u = bbaabb$ et $v = babbab$ sont 2-binomialement équivalents car

$$\binom{u}{a} = 2 = \binom{v}{a}, \binom{u}{b} = 2 = \binom{v}{b}.$$

Définition (rappel)

Soient u et v deux mots finis. Ils sont *k-binomialement équivalents* si

$$\binom{u}{x} = \binom{v}{x} \; \forall x \in A^{\leq k}.$$

Exemple

Les mots $u = bbaabb$ et $v = babbab$ sont 2-binomialement équivalents car

$$\binom{u}{a} = 2 = \binom{v}{a}, \binom{u}{b} = 3 = \binom{v}{b}.$$

Définition (rappel)

Soient u et v deux mots finis. Ils sont *k-binomialement équivalents* si

$$\binom{u}{x} = \binom{v}{x} \ \forall x \in A^{\leq k}.$$

Exemple

Les mots $u = bbaabb$ et $v = babbab$ sont 2-binomialement équivalents car

$$\binom{u}{a} = 2 = \binom{v}{a}, \binom{u}{b} = 4 = \binom{v}{b}.$$

Définition (rappel)

Soient u et v deux mots finis. Ils sont *k-binomialement équivalents* si

$$\binom{u}{x} = \binom{v}{x} \ \forall x \in A^{\leq k}.$$

Exemple

Les mots $u = bbaabb$ et $v = babbab$ sont 2-binomialement équivalents car

$$\binom{u}{a} = 2 = \binom{v}{a}, \binom{u}{b} = 4 = \binom{v}{b}, \binom{u}{aa} = 1 = \binom{v}{aa}.$$

Définition (rappel)

Soient u et v deux mots finis. Ils sont *k-binomialement équivalents* si

$$\binom{u}{x} = \binom{v}{x} \ \forall x \in A^{\leq k}.$$

Exemple

Les mots $u = bbaabb$ et $v = babbab$ sont 2-binomialement équivalents car

$$\binom{u}{a} = 2 = \binom{v}{a}, \binom{u}{b} = 4 = \binom{v}{b}, \binom{u}{aa} = 1 = \binom{v}{aa},$$
$$\binom{u}{bb} = 6 = \binom{v}{bb}.$$

Définition (rappel)

Soient u et v deux mots finis. Ils sont *k-binomialement équivalents* si

$$\binom{u}{x} = \binom{v}{x} \ \forall x \in A^{\leq k}.$$

Exemple

Les mots $u = bbaabb$ et $v = babbab$ sont 2-binomialement équivalents car

$$\binom{u}{a} = 2 = \binom{v}{a}, \binom{u}{b} = 4 = \binom{v}{b}, \binom{u}{aa} = 1 = \binom{v}{aa},$$
$$\binom{u}{bb} = 6 = \binom{v}{bb}, \binom{u}{ab} = 1 = \binom{v}{ab}.$$

Définition (rappel)

Soient u et v deux mots finis. Ils sont *k-binomialement équivalents* si

$$\binom{u}{x} = \binom{v}{x} \ \forall x \in A^{\leq k}.$$

Exemple

Les mots $u = bb{\color{red}a}ab{\color{red}b}$ et $v = b{\color{red}a}bb{\color{red}b}ab$ sont 2-binomialement équivalents car

$$\binom{u}{a} = 2 = \binom{v}{a}, \binom{u}{b} = 4 = \binom{v}{b}, \binom{u}{aa} = 1 = \binom{v}{aa},$$
$$\binom{u}{bb} = 6 = \binom{v}{bb}, \binom{u}{ab} = {\color{red}2} = \binom{v}{ab}.$$

Définition (rappel)

Soient u et v deux mots finis. Ils sont *k-binomialement équivalents* si

$$\binom{u}{x} = \binom{v}{x} \ \forall x \in A^{\leq k}.$$

Exemple

Les mots $u = bbaabb$ et $v = babbab$ sont 2-binomialement équivalents car

$$\binom{u}{a} = 2 = \binom{v}{a}, \binom{u}{b} = 4 = \binom{v}{b}, \binom{u}{aa} = 1 = \binom{v}{aa},$$
$$\binom{u}{bb} = 6 = \binom{v}{bb}, \binom{u}{ab} = 3 = \binom{v}{ab}.$$

Définition (rappel)

Soient u et v deux mots finis. Ils sont *k-binomialement équivalents* si

$$\binom{u}{x} = \binom{v}{x} \; \forall x \in A^{\leq k}.$$

Exemple

Les mots $u = bbaabb$ et $v = babbab$ sont 2-binomialement équivalents car

$$\binom{u}{a} = 2 = \binom{v}{a}, \binom{u}{b} = 4 = \binom{v}{b}, \binom{u}{aa} = 1 = \binom{v}{aa},$$
$$\binom{u}{bb} = 6 = \binom{v}{bb}, \binom{u}{ab} = 4 = \binom{v}{ab}.$$

Définition (rappel)

Soient u et v deux mots finis. Ils sont *k-binomialement équivalents* si

$$\binom{u}{x} = \binom{v}{x} \ \forall x \in A^{\leq k}.$$

Exemple

Les mots $u = bbaabb$ et $v = babbab$ sont 2-binomialement équivalents car

$$\binom{u}{a} = 2 = \binom{v}{a}, \binom{u}{b} = 4 = \binom{v}{b}, \binom{u}{aa} = 1 = \binom{v}{aa},$$
$$\binom{u}{bb} = 6 = \binom{v}{bb}, \binom{u}{ab} = 4 = \binom{v}{ab}, \binom{u}{ba} = 1 = \binom{v}{ba}.$$

Définition (rappel)

Soient u et v deux mots finis. Ils sont *k-binomialement équivalents* si

$$\binom{u}{x} = \binom{v}{x} \ \forall x \in A^{\leq k}.$$

Exemple

Les mots $u = bbaabb$ et $v = babbab$ sont 2-binomialement équivalents car

$$\binom{u}{a} = 2 = \binom{v}{a}, \binom{u}{b} = 4 = \binom{v}{b}, \binom{u}{aa} = 1 = \binom{v}{aa},$$
$$\binom{u}{bb} = 6 = \binom{v}{bb}, \binom{u}{ab} = 4 = \binom{v}{ab}, \binom{u}{ba} = 2 = \binom{v}{ba}.$$

Définition (rappel)

Soient u et v deux mots finis. Ils sont *k-binomialement équivalents* si

$$\binom{u}{x} = \binom{v}{x} \ \forall x \in A^{\leq k}.$$

Exemple

Les mots $u = bbaabb$ et $v = babbab$ sont 2-binomialement équivalents car

$$\binom{u}{a} = 2 = \binom{v}{a}, \binom{u}{b} = 4 = \binom{v}{b}, \binom{u}{aa} = 1 = \binom{v}{aa},$$
$$\binom{u}{bb} = 6 = \binom{v}{bb}, \binom{u}{ab} = 4 = \binom{v}{ab}, \binom{u}{ba} = 3 = \binom{v}{ba}.$$

Définition (rappel)

Soient u et v deux mots finis. Ils sont *k-binomialement équivalents* si

$$\binom{u}{x} = \binom{v}{x} \ \forall x \in A^{\leq k}.$$

Exemple

Les mots $u = bbaabb$ et $v = babbab$ sont 2-binomialement équivalents car

$$\binom{u}{a} = 2 = \binom{v}{a}, \binom{u}{b} = 4 = \binom{v}{b}, \binom{u}{aa} = 1 = \binom{v}{aa},$$
$$\binom{u}{bb} = 6 = \binom{v}{bb}, \binom{u}{ab} = 4 = \binom{v}{ab}, \binom{u}{ba} = 4 = \binom{v}{ba}.$$

Proposition

Pour tous mots u, v et pour tout naturel k,

$$u \sim_{k+1} v \Rightarrow u \sim_k v.$$

Proposition

Pour tous mots u, v et pour tout naturel k,

$$u \sim_{k+1} v \Rightarrow u \sim_k v.$$

Proposition

Pour tous mots u, v,

$$u \sim_1 v \Leftrightarrow u \sim_{ab,1} v.$$

Proposition

Pour tous mots u, v et pour tout naturel k,

$$u \sim_{k+1} v \Rightarrow u \sim_k v.$$

Proposition

Pour tous mots u, v,

$$u \sim_1 v \Leftrightarrow u \sim_{ab,1} v.$$

Définition (rappel)

Les mots u et v sont 1-abéliennement équivalents si

$$\binom{u}{a} = |u|_a = |v|_a = \binom{v}{a} \ \forall a \in A.$$

Définition

Si w est un mot infini, on lui associe la fonction

$$\mathbf{b}_w^{(k)} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \#(\mathrm{Fac}_w(n)/\sim_k),$$

appelée *complexité k-binomiale du mot w*.

Définition

Si w est un mot infini, on lui associe la fonction

$$\mathbf{b}_w^{(k)} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \#(\mathrm{Fac}_w(n)/\sim_k),$$

appelée *complexité k-binomiale du mot w*.

Exemple

Pour le mot de Thue-Morse $\mathbf{t}$, nous avons $\mathbf{b}_{\mathbf{t}}^{(1)}(0) = 1$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbf{b}_{\mathbf{t}}^{(1)}(n) = \begin{cases} 3, & \text{si } n \equiv 0 \pmod 2; \\ 2, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple (suite)

- Si $n = 2\ell$, tout facteur de $\mathbf{t}$ est de la forme $\varphi(z)$ (avec $z \in \mathrm{Fac}_{\mathbf{t}}(\ell)$) ou de l'une des formes suivantes, avec $z' \in \mathrm{Fac}_{\mathbf{t}}(\ell - 1)$:

$$0\varphi(z')0,\ 0\varphi(z')1,\ 1\varphi(z')0,\ 1\varphi(z')1.$$

Exemple (suite)

- Si $n = 2\ell$, tout facteur de $\mathbf{t}$ est de la forme $\varphi(z)$ (avec $z \in \mathrm{Fac}_{\mathbf{t}}(\ell)$) ou de l'une des formes suivantes, avec $z' \in \mathrm{Fac}_{\mathbf{t}}(\ell - 1)$:

$$0\varphi(z')0,\ 0\varphi(z')1,\ 1\varphi(z')0,\ 1\varphi(z')1.$$

Nous avons

$$\binom{\varphi(z)}{0} = \binom{0\varphi(z')1}{0} = \binom{1\varphi(z')0}{0} = \ell,$$
$$\binom{0\varphi(z')0}{0} = \ell + 1 \quad \text{et} \quad \binom{1\varphi(z')1}{0} = \ell - 1,$$

Exemple (suite)

- Si $n = 2\ell$, tout facteur de $\mathbf{t}$ est de la forme $\varphi(z)$ (avec $z \in \mathrm{Fac}_{\mathbf{t}}(\ell)$) ou de l'une des formes suivantes, avec $z' \in \mathrm{Fac}_{\mathbf{t}}(\ell - 1)$:

$$0\varphi(z')0,\ 0\varphi(z')1,\ 1\varphi(z')0,\ 1\varphi(z')1.$$

Nous avons

$$\binom{\varphi(z)}{0} = \binom{0\varphi(z')1}{0} = \binom{1\varphi(z')0}{0} = \ell,$$
$$\binom{0\varphi(z')0}{0} = \ell + 1 \quad \text{et} \quad \binom{1\varphi(z')1}{0} = \ell - 1,$$

donc $\mathbf{b}_{\mathbf{t}}^{(1)}(n) = 3$.

Exemple (suite)

- Si $n = 2\ell - 1$, tout facteur de $\mathbf{t}$ est de l'une des formes suivantes, avec $z' \in \mathrm{Fac}_t(\ell - 1)$:

$$0\varphi(z'),\ 1\varphi(z'),\ \varphi(z')0,\ \varphi(z')1.$$

Exemple (suite)

- Si $n = 2\ell - 1$, tout facteur de $\mathbf{t}$ est de l'une des formes suivantes, avec $z' \in \mathrm{Fac}_t(\ell - 1)$:

$$0\varphi(z'),\ 1\varphi(z'),\ \varphi(z')0,\ \varphi(z')1.$$

  Nous avons

$$\binom{0\varphi(z')}{0} = \binom{\varphi(z')0}{0} = \ell,$$
$$\binom{1\varphi(z')}{0} = \binom{\varphi(z')1}{0} = \ell - 1,$$

Exemple (suite)

- Si $n = 2\ell - 1$, tout facteur de $\mathbf{t}$ est de l'une des formes suivantes, avec $z' \in \mathrm{Fac}_t(\ell - 1)$:

$$0\varphi(z'),\ 1\varphi(z'),\ \varphi(z')0,\ \varphi(z')1.$$

Nous avons

$$\binom{0\varphi(z')}{0} = \binom{\varphi(z')0}{0} = \ell,$$
$$\binom{1\varphi(z')}{0} = \binom{\varphi(z')1}{0} = \ell - 1,$$

donc $\mathbf{b}_{\mathbf{t}}^{(1)}(n) = 2$.

Plan

Les différentes fonctions de complexité s'emboîtent les unes dans les autres.

Proposition

$$\rho_w^{ab}(n) \leq \mathbf{b}_w^{(k)}(n) \leq \mathbf{b}_w^{(k+1)}(n) \leq p_w(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0$$

où ρ_w^{ab} est la fonction de complexité abélienne du mot w.

Les différentes fonctions de complexité s'emboîtent les unes dans les autres.

Proposition

$$\rho_w^{ab}(n) \leq \mathbf{b}_w^{(k)}(n) \leq \mathbf{b}_w^{(k+1)}(n) \leq p_w(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0$$

où ρ_w^{ab} est la fonction de complexité abélienne du mot w.

De plus, de nombreuses propriétés sur la fonction de complexité factorielle sont connues.

Théorème (Morse-Hedlund)

Soit w un mot infini construit sur un alphabet à ℓ lettres. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.

1. Le mot w est ultimement périodique : il existe des mots finis u, v tels que $w = u \cdot v^\omega$.
2. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_w(n) < n + \ell - 1$.
3. La fonction p_w est bornée par une constante.

On peut alors définir les mots apériodiques ayant une complexité factorielle minimale.

Définition

Un *mot sturmien* est un mot infini pour lequel, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p(n) = n + 1$.

On peut alors définir les mots apériodiques ayant une complexité factorielle minimale.

Définition

Un *mot sturmien* est un mot infini pour lequel, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p(n) = n + 1$.

Soit w un mot sturmien quelconque. Nous avons, pour tout $n \geq 2$,

$$n < p_w(n) < p_{\mathbf{t}}(n).$$

Cependant, les résultats sont assez différents pour la fonction de complexité k-binomiale.

Théorème (M. Rigo, P. Salimov)

Soit w un mot sturmien quelconque. Nous avons $\mathbf{b}_w^{(2)}(n) = p_w(n) = n + 1$.

Ainsi, puisque $\mathbf{b}_w^{(k)}(n) \leq \mathbf{b}_w^{(k+1)}(n) \leq p_w(n)$, nous avons $\mathbf{b}_w^{(k)}(n) = p_w(n)$ pour tout $k \geq 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème (M. Rigo, P. Salimov)

Soit w un mot sturmien quelconque. Nous avons $\mathbf{b}_w^{(2)}(n) = p_w(n) = n + 1$.

Ainsi, puisque $\mathbf{b}_w^{(k)}(n) \leq \mathbf{b}_w^{(k+1)}(n) \leq p_w(n)$, nous avons $\mathbf{b}_w^{(k)}(n) = p_w(n)$ pour tout $k \geq 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ce n'est pas du tout le cas pour le mot de Thue-Morse.

Théorème (M. Rigo, P. Salimov)

Pour tout $k \geq 1$, il existe une constante $C_k > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{b}_{\mathbf{t}}^{(k)}(n) \leq C_k.$$

Ce résultat est même valide pour tous les mots infinis qui sont points fixes d'un morphisme Parikh-constant.

Ce résultat est même valide pour tous les mots infinis qui sont points fixes d'un morphisme Parikh-constant.

Définition

Un morphisme $\sigma : A^* \to A^*$ est Parikh-constant si, pour tous $a, b, c \in A$, $|\sigma(a)|_c = |\sigma(b)|_c$. Autrement dit, les images des différentes lettres doivent être égales à permutation près.

Ce résultat est même valide pour tous les mots infinis qui sont points fixes d'un morphisme Parikh-constant.

Définition

Un morphisme $\sigma : A^* \to A^*$ est Parikh-constant si, pour tous $a, b, c \in A$, $|\sigma(a)|_c = |\sigma(b)|_c$. Autrement dit, les images des différentes lettres doivent être égales à permutation près.

Exemple

Le morphisme

$$\sigma : \{0,1,2\}^* \to \{0,1,2\}^* : \begin{cases} 0 & \mapsto & 0112; \\ 1 & \mapsto & 1201; \\ 2 & \mapsto & 1120; \end{cases}$$

est Parikh-constant.

Théorème (M. L., J. Leroy, M. Rigo)

Soit k un entier strictement positif. Pour tout $n \leq 2^k - 1$, nous avons

$$\mathbf{b}_{\mathbf{t}}^{(k)}(n) = p_{\mathbf{t}}(n),$$

tandis que pour tout $n \geq 2^k$,

$$\mathbf{b}_{\mathbf{t}}^{(k)}(n) = \begin{cases} 3 \cdot 2^k - 3, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2^k}; \\ 3 \cdot 2^k - 4, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème (M. L., J. Leroy, M. Rigo)

Soit k un entier strictement positif. Pour tout $n \leq 2^k - 1$, nous avons

$$\mathbf{b}_{\mathbf{t}}^{(k)}(n) = p_{\mathbf{t}}(n),$$

tandis que pour tout $n \geq 2^k$,

$$\mathbf{b}_{\mathbf{t}}^{(k)}(n) = \begin{cases} 3 \cdot 2^k - 3, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2^k}; \\ 3 \cdot 2^k - 4, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les cas $k = 1$ et $k = 2$ peuvent être calculés à la main. Nous allons donc considérer dans la suite que $k \geq 3$.

Plan

Plan

Tous nos raisonnements demandent de calculer explicitement les valeurs de certains coefficients binomiaux. Nous avons donc besoin de quelques outils.

Tous nos raisonnements demandent de calculer explicitement les valeurs de certains coefficients binomiaux. Nous avons donc besoin de quelques outils.

Proposition

Soient u, v des mots finis sur un alphabet A et soient a, b des lettres de A. Nous avons

$$\binom{ua}{vb} = \binom{u}{vb} + \delta_{a,b}\binom{u}{v},$$

où $\delta_{a,b}$ vaut 1 si $a = b$, 0 sinon.

Tous nos raisonnements demandent de calculer explicitement les valeurs de certains coefficients binomiaux. Nous avons donc besoin de quelques outils.

Proposition

Soient u, v des mots finis sur un alphabet A et soient a, b des lettres de A. Nous avons

$$\binom{ua}{vb} = \binom{u}{vb} + \delta_{a,b}\binom{u}{v},$$

où $\delta_{a,b}$ vaut 1 si $a = b$, 0 sinon.

Proposition

Soient u, u' des mots finis sur un alphabet A, et $v = v_1 \cdots v_m$ un mot de A^*. Nous avons

$$\binom{uu'}{v} = \sum_{j=0}^{m} \binom{u}{v_1 \cdots v_j}\binom{u'}{v_{j+1} \cdots v_m}.$$

Exemple

Illustrons le calcul d'un coefficient binomial $\binom{p\varphi^k(z)s}{v}$ sur un exemple.

$$\binom{0\varphi^3(011)1}{01} =$$

Exemple

Illustrons le calcul d'un coefficient binomial $\binom{p\varphi^k(z)s}{v}$ sur un exemple.

$$\binom{0\varphi^3(011)1}{01} = 1$$

Exemple

Illustrons le calcul d'un coefficient binomial $\binom{p\varphi^k(z)s}{v}$ sur un exemple.

$$\binom{0\varphi^3(011)1}{01} = 1 + \binom{\varphi^3(011)}{1}$$

Exemple

Illustrons le calcul d'un coefficient binomial $\binom{p\varphi^k(z)s}{v}$ sur un exemple.

$$\binom{0\varphi^3(011)1}{01} = 1 + \binom{\varphi^3(011)}{1} + \binom{\varphi^3(011)}{0}$$

Exemple

Illustrons le calcul d'un coefficient binomial $\binom{p\varphi^k(z)s}{v}$ sur un exemple.

$$\binom{0\varphi^3(011)1}{01} = 1 + \binom{\varphi^3(011)}{1} + \binom{\varphi^3(011)}{0} + \binom{\varphi^3(011)}{01}.$$

Exemple

Illustrons le calcul d'un coefficient binomial $\binom{p\varphi^k(z)s}{v}$ sur un exemple.

$$\binom{0\varphi^3(011)1}{01} = 1 + \binom{\varphi^3(011)}{1} + \binom{\varphi^3(011)}{0} + \binom{\varphi^3(011)}{01}.$$

Comment peut-on calculer les coefficients du type $\binom{\varphi(u)}{v}$ et, de façon plus générale, $\binom{\varphi^\ell(u)}{v}$?

Exemple

Illustrons le calcul d'un coefficient binomial $\binom{p\varphi^k(z)s}{v}$ sur un exemple.

$$\binom{0\varphi^3(011)1}{01} = 1 + \binom{\varphi^3(011)}{1} + \binom{\varphi^3(011)}{0} + \binom{\varphi^3(011)}{01}.$$

Comment peut-on calculer les coefficients du type $\binom{\varphi(u)}{v}$ et, de façon plus générale, $\binom{\varphi^\ell(u)}{v}$?

Chaque fois qu'apparait un facteur 01 ou 10 dans v, on peut le voir apparaitre dans $\varphi(u)$ comme l'image d'une seule lettre de u, ou bien dans l'image de deux lettres différentes de u.
On va donc étudier les différentes factorisations de v.

Définition : φ-factorisation

Soit v un mot fini sur $A = \{0,1\}$. Si v contient un au moins un facteur parmi $\{01, 10\}$, il peut être factorisé sous la forme

$$\begin{aligned} v &= w_0 a_1 \overline{a_1} w_1 \cdots w_{\ell-1} a_\ell \overline{a_\ell} w_\ell \\ &= w_0 \varphi(a_1) w_1 \cdots w_{\ell-1} \varphi(a_\ell) w_\ell \end{aligned}$$

pour $\ell \geq 1$, $a_1, \ldots, a_\ell \in A$ et $w_0, \ldots w_\ell \in A^*$.

Définition : φ-factorisation

Soit v un mot fini sur $A = \{0, 1\}$. Si v contient un au moins un facteur parmi $\{01, 10\}$, il peut être factorisé sous la forme

$$\begin{aligned} v &= w_0 a_1 \overline{a_1} w_1 \cdots w_{\ell-1} a_\ell \overline{a_\ell} w_\ell \\ &= w_0 \varphi(a_1) w_1 \cdots w_{\ell-1} \varphi(a_\ell) w_\ell \end{aligned}$$

pour $\ell \geq 1$, $a_1, \ldots, a_\ell \in A$ et $w_0, \ldots w_\ell \in A^*$.
Cette factorisation est appelée *φ-factorisation* de v et elle est codée par le tuple

$$\kappa = (|w_0|, |w_0\varphi(a_1)w_1|, \ldots, |w_0\varphi(a_1)w_1 \ldots \varphi(a_{\ell-1})w_{\ell-1}|).$$

L'ensemble des tuples codant les φ-factorisations de v est noté φ-Fac(v).

Exemple

Soit $v = 01101$. L'arbre des φ-factorisations de v est le suivant.

$$\boxed{01101}$$

Exemple

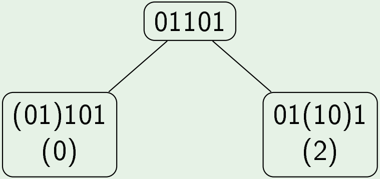
Soit $v = 01101$. L'arbre des φ-factorisations de v est le suivant.

01101

(01)101
(0)

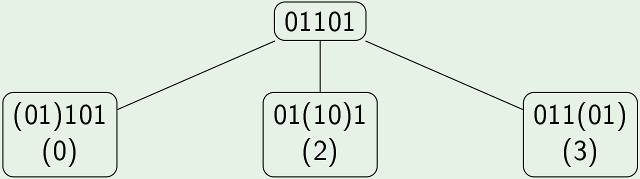
Exemple

Soit $v = 01101$. L'arbre des φ-factorisations de v est le suivant.



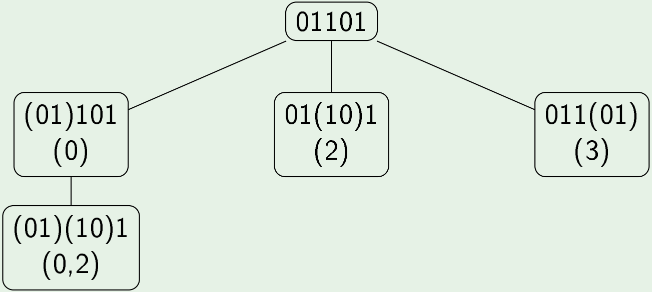
Exemple

Soit $v = 01101$. L'arbre des φ-factorisations de v est le suivant.



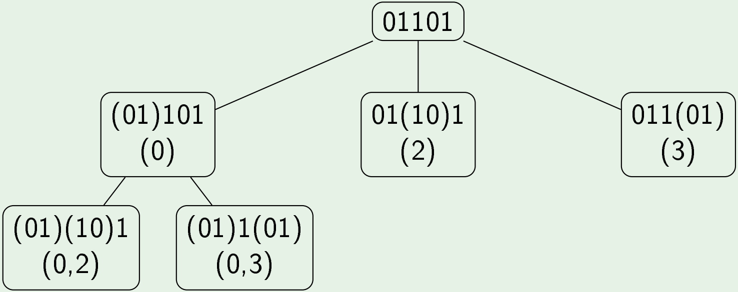
Exemple

Soit $v = 01101$. L'arbre des φ-factorisations de v est le suivant.



Exemple

Soit $v = 01101$. L'arbre des φ-factorisations de v est le suivant.



Avant de l'écrire formellement, illustrons le calcul de $\binom{\varphi(u)}{v}$ sur un exemple et calculons $\binom{\varphi(01101001)}{01101}$.

Avant de l'écrire formellement, illustrons le calcul de $\binom{\varphi(u)}{v}$ sur un exemple et calculons $\binom{\varphi(01101001)}{01101}$.

$$\binom{\varphi(01101001)}{01101} = \binom{|u|}{5}$$

- Les 5 lettres de v proviennent de 5 lettres différentes de u.
  Ce cas pourrait correspondre à la factorisation triviale $\kappa = ()$.

Avant de l'écrire formellement, illustrons le calcul de $\binom{\varphi(u)}{v}$ sur un exemple et calculons $\binom{\varphi(01101001)}{01101}$.

$$\binom{\varphi(01101001)}{(01)101} = \binom{|u|}{5} + \sum_{z\in A^3} \binom{u}{0z}$$

- Les 5 lettres de v proviennent de 5 lettres différentes de u. Ce cas pourrait correspondre à la factorisation triviale $\kappa = ()$.
- Les deux premières lettres de v proviennent de l'image par φ d'une lettre 0 de u, tandis que les trois suivantes proviennent de trois lettres différentes de u. Ce cas correspond à $\kappa = (0)$.

Avant de l'écrire formellement, illustrons le calcul de $\binom{\varphi(u)}{v}$ sur un exemple et calculons $\binom{\varphi(01101001)}{01101}$.

$$\binom{\varphi(01101001)}{01{\color{red}(10)}1} = \binom{|u|}{5} + \sum_{z \in A^3} \binom{u}{0z} + {\color{red}\sum_{z \in A^2, z' \in A} \binom{u}{z1z'}}$$

- Les 5 lettres de v proviennent de 5 lettres différentes de u. Ce cas pourrait correspondre à la factorisation triviale $\kappa = ()$.
- Les deux premières lettres de v proviennent de l'image par φ d'une lettre 0 de u, tandis que les trois suivantes proviennent de trois lettres différentes de u. Ce cas correspond à $\kappa = (0)$.
- Les lettres v_3 et v_4 proviennent d'un bloc $\varphi(1)$ tandis que les 3 autres lettres proviennet de lettres différentes dans u. La factorisation associée est ${\color{red}\kappa = (2)}$.

$$\binom{\varphi(01101001)}{011(01)} = \binom{|u|}{5} + \sum_{z\in A^3} \binom{u}{0z} + \sum_{z\in A^2, z'\in A} \binom{u}{z1z'} + \sum_{z\in A^3} \binom{u}{z0}$$

- Les lettres v_4 et v_5 proviennent d'un bloc $\varphi(0)$, ce qui correspond à $\kappa = (3)$.

$$\binom{\varphi(01101001)}{(01)(10)1} = \binom{|u|}{5} + \sum_{z\in A^3}\binom{u}{0z} + \sum_{z\in A^2, z'\in A}\binom{u}{z1z'} + \sum_{z\in A^3}\binom{u}{z0} + \sum_{z\in A}\binom{u}{01z}$$

- Les lettres v_4 et v_5 proviennent d'un bloc $\varphi(0)$, ce qui correspond à $\kappa = (3)$.
- Les lettres v_1 et v_2 proviennent de $\varphi(0)$ tandis que v_3 et v_4 proviennent de $\varphi(1)$. La factorisation associée est $\kappa = (0, 2)$.

$$\binom{\varphi(01101001)}{(01)1(01)} = \binom{|u|}{5} + \sum_{z\in A^3} \binom{u}{0z} + \sum_{z\in A^2, z'\in A} \binom{u}{z1z'} + \sum_{z\in A^3} \binom{u}{z0} + \sum_{z\in A} \binom{u}{01z} + \sum_{z\in A} \binom{u}{0z0}$$

- Les lettres v_4 et v_5 proviennent d'un bloc $\varphi(0)$, ce qui correspond à $\kappa = (3)$.
- Les lettres v_1 et v_2 proviennent de $\varphi(0)$ tandis que v_3 et v_4 proviennent de $\varphi(1)$. La factorisation associée est $\kappa = (0, 2)$.
- Les lettres v_1 et v_2 proviennent de $\varphi(0)$, tout comme les lettres v_4 et v_5. La factorisation associée est $\kappa = (0, 3)$.

A chaque factorisation $\kappa \in \varphi$-Fac(v) de la forme

$$w_0\varphi(a_1)w_1 \cdots w_{\ell-1}\varphi(a_\ell)w_\ell,$$

on lui associe le langage

$$\mathcal{L}(v,\kappa) := A^{|w_0|}a_1A^{|w_1|} \cdots A^{|w_{\ell-1}|}a_\ell A^{|w_\ell|},$$

de sorte que le mot $v = w_0\varphi(a_1)w_1 \cdots w_{\ell-1}\varphi(a_\ell)w_\ell$ factorisé comme indiqué puisse être vu dans n'importe quel $\varphi(z)$, pour $z \in \mathcal{L}(v,\kappa)$.

A chaque factorisation $\kappa \in \varphi$-Fac(v) de la forme

$$w_0\varphi(a_1)w_1 \cdots w_{\ell-1}\varphi(a_\ell)w_\ell,$$

on lui associe le langage

$$\mathcal{L}(v,\kappa) := A^{|w_0|}a_1A^{|w_1|} \cdots A^{|w_{\ell-1}|}a_\ell A^{|w_\ell|},$$

de sorte que le mot $v = w_0\varphi(a_1)w_1 \cdots w_{\ell-1}\varphi(a_\ell)w_\ell$ factorisé comme indiqué puisse être vu dans n'importe quel $\varphi(z)$, pour $z \in \mathcal{L}(v,\kappa)$.

On définit alors

$$f(v) = \biguplus_{\kappa \in \varphi\text{-Fac}(v)} \mathcal{L}(v,\kappa)$$

si φ-Fac(v) contient au moins une factorisation (non triviale). Sinon, $f(v) = \emptyset$.

L'union $\biguplus$ doit être considérée comme une union de multi-ensembles, où les multiplicités des différents éléments sont sommées.

Exemple (suite)

Si $v = 01101$, nous avions

$$\varphi\text{-Fac}(v) = \{(0), (2), (3), (0,2), (0,3)\}$$

et donc nous avons

$$f(01101) = \mathcal{L}(v,(0)) \uplus \mathcal{L}(v,(2)) \uplus \mathcal{L}(v,(3)) \uplus \mathcal{L}(v,(0,2)) \uplus \mathcal{L}(v,(0,3)).$$

Rappel

A chaque factorisation de la forme $w_0\varphi(a_1)w_1\cdots w_{\ell-1}\varphi(a_\ell)w_\ell$ codée par $\kappa = (|w_0|, |w_0\varphi(a_1)w_1|, \ldots)$, on lui associe le langage

$$\mathcal{L}(v,\kappa) := A^{|w_0|}a_1A^{|w_1|}\cdots A^{|w_{\ell-1}|}a_\ell A^{|w_\ell|}.$$

Exemple (suite)

Si $v = 01101$, nous avions

$$\varphi\text{-Fac}(v) = \{(0),(2),(3),(0,2),(0,3)\}$$

et donc nous avons

$$\begin{aligned} f((01)101) &= \mathcal{L}(v,(0)) \uplus \mathcal{L}(v,(2)) \uplus \mathcal{L}(v,(3)) \uplus \mathcal{L}(v,(0,2)) \uplus \mathcal{L}(v,(0,3)) \\ &= 0A^3 \end{aligned}$$

Rappel

A chaque factorisation de la forme $w_0\varphi(a_1)w_1\cdots w_{\ell-1}\varphi(a_\ell)w_\ell$ codée par $\kappa = (|w_0|, |w_0\varphi(a_1)w_1|, \ldots)$, on lui associe le langage

$$\mathcal{L}(v,\kappa) := A^{|w_0|}a_1A^{|w_1|}\cdots A^{|w_{\ell-1}|}a_\ell A^{|w_\ell|}.$$

Exemple (suite)

Si $v = 01101$, nous avions

$$\varphi\text{-Fac}(v) = \{(0),(2),(3),(0,2),(0,3)\}$$

et donc nous avons

$$\begin{aligned} f(01(10)1) &= \mathcal{L}(v,(0)) \uplus \mathcal{L}(v,(2)) \uplus \mathcal{L}(v,(3)) \uplus \mathcal{L}(v,(0,2)) \uplus \mathcal{L}(v,(0,3)) \\ &= 0A^3 \uplus A^2 1A \end{aligned}$$

Rappel

A chaque factorisation de la forme $w_0\varphi(a_1)w_1\cdots w_{\ell-1}\varphi(a_\ell)w_\ell$ codée par $\kappa = (|w_0|, |w_0\varphi(a_1)w_1|, \ldots)$, on lui associe le langage

$$\mathcal{L}(v,\kappa) := A^{|w_0|}a_1A^{|w_1|}\cdots A^{|w_{\ell-1}|}a_\ell A^{|w_\ell|}.$$

Exemple (suite)

Si $v = 01101$, nous avons

$$\varphi\text{-Fac}(v) = \{(0),(2),(3),(0,2),(0,3)\}$$

et donc nous avons

$$\begin{aligned} f(011(01)) &= \mathcal{L}(v,(0)) \uplus \mathcal{L}(v,(2)) \uplus \mathcal{L}(v,(3)) \uplus \mathcal{L}(v,(0,2)) \uplus \mathcal{L}(v,(0,3)) \\ &= 0A^3 \uplus A^2 1A \uplus A^3 0 \end{aligned}$$

Rappel

A chaque factorisation de la forme $w_0\varphi(a_1)w_1 \cdots w_{\ell-1}\varphi(a_\ell)w_\ell$ codée par $\kappa = (|w_0|, |w_0\varphi(a_1)w_1|, \ldots)$, on lui associe le langage

$$\mathcal{L}(v,\kappa) := A^{|w_0|}a_1A^{|w_1|}\cdots A^{|w_{\ell-1}|}a_\ell A^{|w_\ell|}.$$

Exemple (suite)

Si $v = 01101$, nous avions

$$\varphi\text{-Fac}(v) = \{(0), (2), (3), (0,2), (0,3)\}$$

et donc nous avons

$$\begin{aligned} f((01)(10)1) &= \mathcal{L}(v,(0)) \uplus \mathcal{L}(v,(2)) \uplus \mathcal{L}(v,(3)) \uplus \mathcal{L}(v,(0,2)) \uplus \mathcal{L}(v,(0,3)) \\ &= 0A^3 \uplus A^2 1A \uplus A^3 0 \uplus 01A \end{aligned}$$

Rappel

A chaque factorisation de la forme $w_0\varphi(a_1)w_1 \cdots w_{\ell-1}\varphi(a_\ell)w_\ell$ codée par $\kappa = (|w_0|, |w_0\varphi(a_1)w_1|, \ldots)$, on lui associe le langage

$$\mathcal{L}(v,\kappa) := A^{|w_0|}a_1A^{|w_1|}\cdots A^{|w_{\ell-1}|}a_\ell A^{|w_\ell|}.$$

Exemple (suite)

Si $v = 01101$, nous avons

$$\varphi\text{-Fac}(v) = \{(0),(2),(3),(0,2),(0,3)\}$$

et donc nous avons

$$\begin{aligned} f((01)1(01)) &= \mathcal{L}(v,(0)) \uplus \mathcal{L}(v,(2)) \uplus \mathcal{L}(v,(3)) \uplus \mathcal{L}(v,(0,2)) \uplus \mathcal{L}(v,(0,3)) \\ &= 0A^3 \uplus A^2 1A \uplus A^3 0 \uplus 01A \uplus 0A0. \end{aligned}$$

Exemple (suite)

Si $v = 01101$, nous avions

$$\varphi\text{-Fac}(v) = \{(0), (2), (3), (0,2), (0,3)\}$$

et donc nous avons

$$\begin{aligned} f(01101) =& \mathcal{L}(v,(0)) \uplus \mathcal{L}(v,(2)) \uplus \mathcal{L}(v,(3)) \uplus \mathcal{L}(v,(0,2)) \uplus \mathcal{L}(v,(0,3)) \\ =& 0A^3 \uplus A^2 1A \uplus A^3 0 \uplus 01A \uplus 0A0 \\ =& \{0000_2, 0001_1, 0010_3, 0011_2, 0100_2, 0101_1, 0110_3, 0111_2, \\ & 1010_2, 1011_1, 1110_2, 1111_1, 1000_2, 1100_2, 010_2, 011_1, 000_1\}. \end{aligned}$$

Proposition

Pour tous mots finis u et v, nous avons

$$\binom{\varphi(u)}{v} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{\kappa \in \varphi\text{-Fac}(v)} \sum_{y \in \mathcal{L}(v,\kappa)} \binom{u}{y}.$$

Proposition

Pour tous mots finis u et v, nous avons

$$\binom{\varphi(u)}{v} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{\kappa\in\varphi\text{-Fac}(v)} \sum_{y\in\mathcal{L}(v,\kappa)} \binom{u}{y} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{y\in f(v)} m_{f(v)}(y)\binom{u}{y}.$$

Proposition

Pour tous mots finis u et v, nous avons

$$\binom{\varphi(u)}{v} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{\kappa \in \varphi\text{-Fac}(v)} \sum_{y \in \mathcal{L}(v,\kappa)} \binom{u}{y} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{y \in f(v)} m_{f(v)}(y) \binom{u}{y}.$$

Exemple (suite)

Nous avions auparavant calculé

$$\binom{\varphi(01101001)}{01101} = \binom{|u|}{5} + \sum_{z \in A^3} \binom{u}{0z} + \sum_{z \in A^2, z' \in A} \binom{u}{z1z'} + \sum_{z \in A^3} \binom{u}{z0} + \sum_{z \in A} \binom{u}{01z} + \sum_{z \in A} \binom{u}{0z0}$$

Proposition

Pour tous mots finis u et v, nous avons

$$\binom{\varphi(u)}{v} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{\kappa\in\varphi\text{-Fac}(v)} \sum_{y\in\mathcal{L}(v,\kappa)} \binom{u}{y} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{y\in f(v)} m_{f(v)}(y)\binom{u}{y}.$$

Exemple (suite)

$$\binom{\varphi(01101001)}{01101} = \binom{|u|}{5} + \sum_{z\in A^3}\binom{u}{0z} + \sum_{z\in A^2, z'\in A}\binom{u}{z1z'} + \sum_{z\in A^3}\binom{u}{z0} + \sum_{z\in A}\binom{u}{01z} + \sum_{z\in A}\binom{u}{0z0}.$$

Proposition

Pour tous mots finis u et v, nous avons

$$\binom{\varphi(u)}{v} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{\kappa\in\varphi\text{-Fac}(v)} \sum_{y\in\mathcal{L}(v,\kappa)} \binom{u}{y} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{y\in f(v)} m_{f(v)}(y)\binom{u}{y}.$$

Exemple (suite)

$$\binom{\varphi(01101001)}{01101} = \binom{|u|}{5} + \sum_{\color{red}{y\in 0A^3}} \binom{u}{\color{red}{y}} + \sum_{z\in A^2, z'\in A} \binom{u}{z1z'} + \sum_{z\in A^3} \binom{u}{z0} + \sum_{z\in A} \binom{u}{01z} + \sum_{z\in A} \binom{u}{0z0}.$$

Proposition

Pour tous mots finis u et v, nous avons

$$\binom{\varphi(u)}{v} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{\kappa \in \varphi\text{-Fac}(v)} \sum_{y \in \mathcal{L}(v,\kappa)} \binom{u}{y} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{y \in f(v)} m_{f(v)}(y) \binom{u}{y}.$$

Exemple (suite)

$$\binom{\varphi(01101001)}{01101} = \binom{|u|}{5} + \sum_{y \in \mathcal{L}(v,(0))} \binom{u}{y} + \sum_{z \in A^2, z' \in A} \binom{u}{z1z'}$$
$$+ \sum_{z \in A^3} \binom{u}{z0} + \sum_{z \in A} \binom{u}{01z} + \sum_{z \in A} \binom{u}{0z0}.$$

Proposition

Pour tous mots finis u et v, nous avons

$$\binom{\varphi(u)}{v} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{\kappa \in \varphi\text{-Fac}(v)} \sum_{y \in \mathcal{L}(v,\kappa)} \binom{u}{y} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{y \in f(v)} m_{f(v)}(y) \binom{u}{y}.$$

Exemple (suite)

$$\binom{\varphi(01101001)}{01101} = \binom{|u|}{5} + \sum_{y \in \mathcal{L}(v,(0))} \binom{u}{y} + \sum_{z \in A^2, z' \in A} \binom{u}{z1z'} + \sum_{z \in A^3} \binom{u}{z0} + \sum_{z \in A} \binom{u}{01z} + \sum_{z \in A} \binom{u}{0z0}.$$

Proposition

Pour tous mots finis u et v, nous avons

$$\binom{\varphi(u)}{v} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{\kappa \in \varphi\text{-Fac}(v)} \sum_{y \in \mathcal{L}(v,\kappa)} \binom{u}{y} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{y \in f(v)} m_{f(v)}(y) \binom{u}{y}.$$

Exemple (suite)

$$\binom{\varphi(01101001)}{01101} = \binom{|u|}{5} + \sum_{y \in \mathcal{L}(v,(0))} \binom{u}{y} + \sum_{y \in A^2 1 A} \binom{u}{y}$$
$$+ \sum_{z \in A^3} \binom{u}{z0} + \sum_{z \in A} \binom{u}{01z} + \sum_{z \in A} \binom{u}{0z0}.$$

Proposition

Pour tous mots finis u et v, nous avons

$$\binom{\varphi(u)}{v} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{\kappa\in\varphi\text{-Fac}(v)} \sum_{y\in\mathcal{L}(v,\kappa)} \binom{u}{y} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{y\in f(v)} m_{f(v)}(y)\binom{u}{y}.$$

Exemple (suite)

$$\binom{\varphi(01101001)}{01101} = \binom{|u|}{5} + \sum_{y\in\mathcal{L}(v,(0))} \binom{u}{y} + \sum_{y\in\mathcal{L}(v,(2))} \binom{u}{y}$$
$$+ \sum_{z\in A^3} \binom{u}{z0} + \sum_{z\in A} \binom{u}{01z} + \sum_{z\in A} \binom{u}{0z0}.$$

Proposition

Pour tous mots finis u et v, nous avons

$$\binom{\varphi(u)}{v} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{\kappa \in \varphi\text{-Fac}(v)} \sum_{y \in \mathcal{L}(v,\kappa)} \binom{u}{y} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{y \in f(v)} m_{f(v)}(y) \binom{u}{y}.$$

Exemple (suite)

$$\binom{\varphi(01101001)}{01101} = \binom{|u|}{5} + \sum_{y \in \mathcal{L}(v,(0))} \binom{u}{y} + \sum_{y \in \mathcal{L}(v,(2))} \binom{u}{y}$$

$$+ \sum_{z \in A^3} \binom{u}{z0} + \sum_{z \in A} \binom{u}{01z} + \sum_{z \in A} \binom{u}{0z0}.$$

Proposition

Pour tous mots finis u et v, nous avons

$$\binom{\varphi(u)}{v} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{\kappa \in \varphi\text{-Fac}(v)} \sum_{y \in \mathcal{L}(v,\kappa)} \binom{u}{y} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{y \in f(v)} m_{f(v)}(y) \binom{u}{y}.$$

Exemple (suite)

$$\binom{\varphi(01101001)}{01101} = \binom{|u|}{5} + \sum_{y \in \mathcal{L}(v,(0))} \binom{u}{y} + \sum_{y \in \mathcal{L}(v,(2))} \binom{u}{y}$$
$$+ \sum_{y \in A^3 0} \binom{u}{y} + \sum_{z \in A} \binom{u}{01z} + \sum_{z \in A} \binom{u}{0z0}.$$

Proposition

Pour tous mots finis u et v, nous avons

$$\binom{\varphi(u)}{v} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{\kappa \in \varphi\text{-Fac}(v)} \sum_{y \in \mathcal{L}(v,\kappa)} \binom{u}{y} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{y \in f(v)} m_{f(v)}(y) \binom{u}{y}.$$

Exemple (suite)

$$\binom{\varphi(01101001)}{01101} = \binom{|u|}{5} + \sum_{y \in \mathcal{L}(v,(0))} \binom{u}{y} + \sum_{y \in \mathcal{L}(v,(2))} \binom{u}{y}$$
$$+ \sum_{y \in \mathcal{L}(v,(3))} \binom{u}{y} + \sum_{z \in A} \binom{u}{01z} + \sum_{z \in A} \binom{u}{0z0}.$$

Proposition

Pour tous mots finis u et v, nous avons

$$\binom{\varphi(u)}{v} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{\kappa \in \varphi\text{-Fac}(v)} \sum_{y \in \mathcal{L}(v,\kappa)} \binom{u}{y} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{y \in f(v)} m_{f(v)}(y) \binom{u}{y}.$$

Exemple (suite)

$$\begin{aligned}\binom{\varphi(01101001)}{01101} =& \binom{|u|}{5} + \sum_{y \in \mathcal{L}(v,(0))} \binom{u}{y} + \sum_{y \in \mathcal{L}(v,(2))} \binom{u}{y} \\ &+ \sum_{y \in \mathcal{L}(v,(3))} \binom{u}{y} + \sum_{z \in A} \binom{u}{01z} + \sum_{z \in A} \binom{u}{0z0}.\end{aligned}$$

Proposition

Pour tous mots finis u et v, nous avons

$$\binom{\varphi(u)}{v} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{\kappa\in\varphi\text{-Fac}(v)} \sum_{y\in\mathcal{L}(v,\kappa)} \binom{u}{y} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{y\in f(v)} m_{f(v)}(y)\binom{u}{y}.$$

Exemple (suite)

$$\begin{aligned}\binom{\varphi(01101001)}{01101} =& \binom{|u|}{5} + \sum_{y\in\mathcal{L}(v,(0))} \binom{u}{y} + \sum_{y\in\mathcal{L}(v,(2))} \binom{u}{y}\\ &+ \sum_{y\in\mathcal{L}(v,(3))} \binom{u}{y} + \sum_{y\in 01A} \binom{u}{y} + \sum_{z\in A} \binom{u}{0z0}.\end{aligned}$$

Proposition

Pour tous mots finis u et v, nous avons

$$\binom{\varphi(u)}{v} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{\kappa \in \varphi\text{-Fac}(v)} \sum_{y \in \mathcal{L}(v,\kappa)} \binom{u}{y} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{y \in f(v)} m_{f(v)}(y) \binom{u}{y}.$$

Exemple (suite)

$$\binom{\varphi(01101001)}{01101} = \binom{|u|}{5} + \sum_{y \in \mathcal{L}(v,(0))} \binom{u}{y} + \sum_{y \in \mathcal{L}(v,(2))} \binom{u}{y}$$

$$+ \sum_{y \in \mathcal{L}(v,(3))} \binom{u}{y} + \sum_{y \in \mathcal{L}(v,(0,2))} \binom{u}{y} + \sum_{z \in A} \binom{u}{0z0}.$$

Proposition

Pour tous mots finis u et v, nous avons

$$\binom{\varphi(u)}{v} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{\kappa\in\varphi\text{-Fac}(v)} \sum_{y\in\mathcal{L}(v,\kappa)} \binom{u}{y} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{y\in f(v)} m_{f(v)}(y)\binom{u}{y}.$$

Exemple (suite)

$$\binom{\varphi(01101001)}{01101} = \binom{|u|}{5} + \sum_{y\in\mathcal{L}(v,(0))} \binom{u}{y} + \sum_{y\in\mathcal{L}(v,(2))} \binom{u}{y}$$
$$+ \sum_{y\in\mathcal{L}(v,(3))} \binom{u}{y} + \sum_{y\in\mathcal{L}(v,(0,2))} \binom{u}{y} + \sum_{z\in A} \binom{u}{0z0}.$$

Proposition

Pour tous mots finis u et v, nous avons

$$\binom{\varphi(u)}{v} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{\kappa\in\varphi\text{-Fac}(v)} \sum_{y\in\mathcal{L}(v,\kappa)} \binom{u}{y} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{y\in f(v)} m_{f(v)}(y)\binom{u}{y}.$$

Exemple (suite)

$$\binom{\varphi(01101001)}{01101} = \binom{|u|}{5} + \sum_{y\in\mathcal{L}(v,(0))} \binom{u}{y} + \sum_{y\in\mathcal{L}(v,(2))} \binom{u}{y}$$

$$+ \sum_{y\in\mathcal{L}(v,(3))} \binom{u}{y} + \sum_{y\in\mathcal{L}(v,(0,2))} \binom{u}{y} + \sum_{z\in 0A0} \binom{u}{y}.$$

Proposition

Pour tous mots finis u et v, nous avons

$$\binom{\varphi(u)}{v} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{\kappa\in\varphi\text{-Fac}(v)} \sum_{y\in\mathcal{L}(v,\kappa)} \binom{u}{y} = \binom{|u|}{|v|} + \sum_{y\in f(v)} m_{f(v)}(y)\binom{u}{y}.$$

Exemple (suite)

$$\binom{\varphi(01101001)}{01101} = \binom{|u|}{5} + \sum_{y\in\mathcal{L}(v,(0))} \binom{u}{y} + \sum_{y\in\mathcal{L}(v,(2))} \binom{u}{y}$$
$$+ \sum_{y\in\mathcal{L}(v,(3))} \binom{u}{y} + \sum_{y\in\mathcal{L}(v,(0,2))} \binom{u}{y} + \sum_{z\in\mathcal{L}(v,(0,3))} \binom{u}{y}.$$

En appliquant plusieurs fois la proposition précédente, nous obtenons une formule permettant de calculer les coefficients d'images exactes ℓ fois.

Proposition

Pour tous mots finis u, v et pour tout $\ell \geq 1$, nous avons

$$\binom{\varphi^{\ell}(u)}{v} = \sum_{i=0}^{\ell-1} \sum_{y \in f^i(v)} m_{f^i(v)}(y) \binom{|\varphi^{\ell-i-1}(u)|}{|v|} + \sum_{y \in f^{\ell}(v)} m_{f^{\ell}(v)}(y) \binom{u}{y}.$$

En appliquant plusieurs fois la proposition précédente, nous obtenons une formule permettant de calculer les coefficients d'images exactes ℓ fois.

Proposition

Pour tous mots finis u, v et pour tout $\ell \geq 1$, nous avons

$$\binom{\varphi^\ell(u)}{v} = \sum_{i=0}^{\ell-1} \sum_{y \in f^i(v)} m_{f^i(v)}(y) \binom{|\varphi^{\ell-i-1}(u)|}{|v|} + \sum_{y \in f^\ell(v)} m_{f^\ell(v)}(y) \binom{u}{y}.$$

Corollaire

Si u et u' sont deux mots finis de même longueur, alors, pour tout mot fini v, nous avons

$$\binom{\varphi^\ell(u)}{v} - \binom{\varphi^\ell(u')}{v} = \sum_{y \in f^\ell(v)} m_{f^\ell(v)}(y) \left[\binom{u}{y} - \binom{u'}{y} \right].$$

Plan

Comment calculer $\mathbf{b}_{\mathbf{t}}^{(k)}(n)$? Il faut regarder, pour chaque paire de mots $u, v \in \mathrm{Fac}_n(\mathbf{t})$, si $u \sim_k v$ ou non.
Nous allons exploiter le fait que tout facteur u peut s'écrire

$$p\varphi^k(z)s.$$

Comment calculer $\mathbf{b}_{\mathbf{t}}^{(k)}(n)$? Il faut regarder, pour chaque paire de mots $u, v \in \mathrm{Fac}_n(\mathbf{t})$, si $u \sim_k v$ ou non.
Nous allons exploiter le fait que tout facteur u peut s'écrire

$$p\varphi^k(z)s.$$

Définition : factorisation d'ordre k

Soit $u \in \mathrm{Fac}(\mathbf{t})$. S'il existe $(p, s) \in A^{<2^k} \times A^{<2^k}$, $a, b \in A$ et $z \in \mathrm{Fac}(\mathbf{t})$ tels que

- $u = p\varphi^k(z)s$;
- p est un suffixe propre de $\varphi^k(a)$;
- s est un préfixe propre de $\varphi^k(b)$;

alors (p, s) est appelée *factorisation d'ordre k* de u tandis que le triplet (a, z, b) est appelé *désubstitution d'ordre k* de u.

Cette écriture est-elle unique ?

Cette écriture est-elle unique ?
Non : le facteur 010 apparait dans $\mathbf{t}$ plusieurs fois, et peut donc être écrit comme $0\varphi(1)$ ou $\varphi(0)0$.

$$\mathbf{t} = 01 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 01 \cdot 10 \cdot 01 \cdot 01 \cdot 10 \cdots$$

Cette écriture est-elle unique ?
Non : le facteur 010 apparait dans $\mathbf{t}$ plusieurs fois, et peut donc être écrit comme $0\varphi(1)$ ou $\varphi(0)0$.

$$\mathbf{t} = 01 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 01 \cdot 10 \cdot 01 \cdot 01 \cdot 10 \cdots$$

Proposition

Soit u un facteur de $\mathbf{t}$ de longueur au moins $2^k - 1$. Le mot u possède exactement deux factorisations différentes d'ordre k si et seulement s'il est facteur de $\varphi^{k-1}(010)$ ou de $\varphi^{k-1}(101)$.

Cette écriture est-elle unique ?
Non : le facteur 010 apparait dans $\mathbf{t}$ plusieurs fois, et peut donc être écrit comme $0\varphi(1)$ ou $\varphi(0)0$.

$$\mathbf{t} = 01 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 01 \cdot 10 \cdot 01 \cdot 01 \cdot 10 \cdots$$

Proposition

Soit u un facteur de $\mathbf{t}$ de longueur au moins $2^k - 1$. Le mot u possède exactement deux factorisations différentes d'ordre k si et seulement s'il est facteur de $\varphi^{k-1}(010)$ ou de $\varphi^{k-1}(101)$. Sinon, il possède une unique factorisation d'ordre k.

Cette écriture est-elle unique ?
Non : le facteur 010 apparait dans $\mathbf{t}$ plusieurs fois, et peut donc être écrit comme $0\varphi(1)$ ou $\varphi(0)0$.

$$\mathbf{t} = 01 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 01 \cdot 10 \cdot 01 \cdot 01 \cdot 10 \cdots$$

Proposition

Soit u un facteur de $\mathbf{t}$ de longueur au moins $2^k - 1$. Le mot u possède exactement deux factorisations différentes d'ordre k si et seulement s'il est facteur de $\varphi^{k-1}(010)$ ou de $\varphi^{k-1}(101)$. Sinon, il possède une unique factorisation d'ordre k.
De plus, si u possède deux factorisations (p, s) et (p', s'), nous avons $||p| - |p'|| = ||s| - |s'|| = 2^{k-1}$.

Nous allons travailler uniquement avec des facteurs de longueur au moins $2^k - 1$.

Exemple

Considérons le facteur $u = 01001011$.

$$\mathbf{t} = \varphi^3(\mathbf{t}) = 01101001 \cdot 10010110 \cdot 10010110 \cdot 01101001 \cdot 10010110 \cdot 01101001 \cdot 01101001 \cdots$$

Exemple

Considérons le facteur $u = 01001011$.

$$\mathbf{t} = \varphi^3(\mathbf{t}) = 01101001 \cdot 1001011{\color{red}0} \cdot {\color{red}1001011}0 \cdot 01101001 \cdot \\ 10010110 \cdot 011{\color{red}01001} \cdot {\color{red}011}01001 \cdots$$

Ainsi, $(0, 1001011)$ et $(01001, 011)$ sont les deux factorisations d'ordre 3 de u.

Exemple

Considérons le facteur $u = 01001011$.

$$\mathbf{t} = \varphi^3(\mathbf{t}) = 01101001 \cdot 1001011{\color{red}0} \cdot {\color{red}1001011}0 \cdot 01101001 \cdot$$
$$10010110 \cdot 011{\color{red}01001} \cdot {\color{red}011}01001 \cdots$$

Ainsi, $(0, 1001011)$ et $(01001, 011)$ sont les deux factorisations d'ordre 3 de u. Les désubstitutions associées sont $(1, \varepsilon, 1)$ et $(0, \varepsilon, 0)$.

Exemple

Considérons le facteur $u = 01001011$.

$$\mathbf{t} = \varphi^3(\mathbf{t}) = 01101001 \cdot 10010110 \cdot 10010110 \cdot 01101001 \cdot 10010110 \cdot 01101001 \cdot 01101001 \cdots$$

Ainsi, $(0, 1001011)$ et $(01001, 011)$ sont les deux factorisations d'ordre 3 de u. Les désubstitutions associées sont $(1, \varepsilon, 1)$ et $(0, \varepsilon, 0)$.
Remarquons que

$$(0, 1001011) = (0, \varphi^2(1)011)$$

et

$$(01001, 011) = (0\varphi^2(1), 011).$$

Exemple

Considérons le facteur $u = 01001011$.

$$\mathbf{t} = \varphi^3(\mathbf{t}) = 01101001 \cdot 10010110 \cdot 10010110 \cdot 01101001 \cdot 10010110 \cdot 01101001 \cdot 01101001 \cdots$$

Ainsi, $(0, 1001011)$ et $(01001, 011)$ sont les deux factorisations d'ordre 3 de u. Les désubstitutions associées sont $(1, \varepsilon, 1)$ et $(0, \varepsilon, 0)$.
Remarquons que

$$(0, 1001011) = (0, \varphi^2(1)011)$$

et

$$(01001, 011) = (0\varphi^2(1), 011).$$

Que faire pour les facteurs qui ont deux factorisations ? Nous allons définir une relation d'équivalence sur les factorisations, de sorte que si un mot possède deux factorisations, celles-ci sont équivalentes.

Plan

Définition : équivalence $\equiv_k$

Soient (p_1, s_1) et (p_2, s_2) deux couples de $A^{<2^k} \times A^{<2^k}$. Ceux-ci sont équivalents pour $\equiv_k$ s'il existe $a \in A$, $x, y \in A^*$ tels que l'un des cas suivants a lieu :

1. $|p_1| + |s_1| = |p_2| + |s_2|$ et
   1. $(p_1, s_1) = (p_2, s_2)$;
   2. $(p_1, s_1) = (x\varphi^{k-1}(a), y)$ et $(p_2, s_2) = (x, \varphi^{k-1}(a)y)$;
   3. $(p_1, s_1) = (x, \varphi^{k-1}(a)y)$ et $(p_2, s_2) = (x\varphi^{k-1}(a), y)$;
   4. $(p_1, s_1) = (\varphi^{k-1}(a), \varphi^{k-1}(\bar{a}))$ et $(p_2, s_2) = (\varphi^{k-1}(\bar{a}), \varphi^{k-1}(a))$;
2. $\big|(|p_1| + |s_1|) - (|p_2| + |s_2|)\big| = 2^k$ et
   1. $(p_1, s_1) = (x, y)$ et $(p_2, s_2) = (x\varphi^{k-1}(a), \varphi^{k-1}(\bar{a})y)$;
   2. $(p_1, s_1) = (x\varphi^{k-1}(a), \varphi^{k-1}(\bar{a})y)$ et $(p_2, s_2) = (x, y)$.

Définition : équivalence $\equiv_k$

Soient (p_1, s_1) et (p_2, s_2) deux couples de $A^{<2^k} \times A^{<2^k}$. Ceux-ci sont équivalents pour $\equiv_k$ s'il existe $a \in A$, $x, y \in A^*$ tels que l'un des cas suivants a lieu :

1. $|p_1| + |s_1| = |p_2| + |s_2|$ et
   1. $(p_1, s_1) = (p_2, s_2)$;
   2. $(p_1, s_1) = (x\varphi^{k-1}(a), y)$ et $(p_2, s_2) = (x, \varphi^{k-1}(a)y)$;
   3. $(p_1, s_1) = (x, \varphi^{k-1}(a)y)$ et $(p_2, s_2) = (x\varphi^{k-1}(a), y)$;
   4. $(p_1, s_1) = (\varphi^{k-1}(a), \varphi^{k-1}(\bar{a}))$ et $(p_2, s_2) = (\varphi^{k-1}(\bar{a}), \varphi^{k-1}(a))$;
2. $\big|(|p_1| + |s_1|) - (|p_2| + |s_2|)\big| = 2^k$ et
   1. $(p_1, s_1) = (x, y)$ et $(p_2, s_2) = (x\varphi^{k-1}(a), \varphi^{k-1}(\bar{a})y)$;
   2. $(p_1, s_1) = (x\varphi^{k-1}(a), \varphi^{k-1}(\bar{a})y)$ et $(p_2, s_2) = (x, y)$.

Exemple (suite)

Le mot $u = 01001011$ possédait les deux factorisations $(0, \varphi^2(1)011)$ et $(0\varphi^2(1), 011)$. Cela correspond au cas (1.3), avec $x = 0$, $y = 011$.

Proposition

Si un mot $u \in A^{\geq 2^k - 1}$ possède deux factorisations (p_1, s_1) et (p_2, s_2), alors celles-ci sont équivalentes pour $\equiv_k$.

Soit $u \in A^{\geq 2^k - 1}$. On peut donc définir le *type de u d'ordre k* comme la classe d'équivalence de ses factorisations. On note (p_u, s_u) le type d'ordre k de u, avec $|p_u|$ minimal.

Proposition

Si un mot $u \in A^{\geq 2^k - 1}$ possède deux factorisations (p_1, s_1) et (p_2, s_2), alors celles-ci sont équivalentes pour $\equiv_k$.

Soit $u \in A^{\geq 2^k - 1}$. On peut donc définir le *type de u d'ordre k* comme la classe d'équivalence de ses factorisations. On note (p_u, s_u) le type d'ordre k de u, avec $|p_u|$ minimal.

On peut également avoir deux mots différents, dont les factorisations sont équivalentes. Alors, les deux mots dont elles proviennent sont équivalents. Cela vient des résultats suivants.

Proposition (Ochsenschläger)

Pour tout $k \geq 1$, nous avons

$$\varphi^k(0) \sim_k \varphi^k(1) \quad \text{et} \quad \varphi^k(0) \not\sim_{k+1} \varphi^k(1).$$

Donc, pour tous mots z, z' de même longueur, $\varphi^k(z) \sim_k \varphi^k(z')$.

Proposition (Ochsenschläger)

Pour tout $k \geq 1$, nous avons

$$\varphi^k(0) \sim_k \varphi^k(1) \quad \text{et} \quad \varphi^k(0) \not\sim_{k+1} \varphi^k(1).$$

Donc, pour tous mots z, z' de même longueur, $\varphi^k(z) \sim_k \varphi^k(z')$.

Proposition (Lemme du transfert)

Soient $k \geq 1$ et $u, z, z' \in A^*$ des mots tels que $|z| = |z'|$. Nous avons

$$\varphi^{k-1}(u)\, \varphi^k(z')\sim_k \varphi^k(z)\, \varphi^{k-1}(u).$$

Proposition (Ochsenschläger)

Pour tout $k \geq 1$, nous avons

$$\varphi^k(0) \sim_k \varphi^k(1) \quad \text{et} \quad \varphi^k(0) \not\sim_{k+1} \varphi^k(1).$$

Donc, pour tous mots z, z' de même longueur, $\varphi^k(z) \sim_k \varphi^k(z')$.

Proposition (Lemme du transfert)

Soient $k \geq 1$ et $u, z, z' \in A^*$ des mots tels que $|z| = |z'|$. Nous avons

$$\varphi^{k-1}(u)\,\varphi^k(z')\sim_k \varphi^k(z)\,\varphi^{k-1}(u).$$

Exemple

Soient x, y, z, z' des mots tels que $|z| = |z'|$. Soit $a \in \{0, 1\}$. Nous avons

$$\varphi^{k-1}(a)\varphi^k(z') \;\sim_k\; \varphi^k(z)\varphi^{k-1}(a).$$

Proposition (Ochsenschläger)

Pour tout $k \geq 1$, nous avons

$$\varphi^k(0) \sim_k \varphi^k(1) \quad \text{et} \quad \varphi^k(0) \not\sim_{k+1} \varphi^k(1).$$

Donc, pour tous mots z, z' de même longueur, $\varphi^k(z) \sim_k \varphi^k(z')$.

Proposition (Lemme du transfert)

Soient $k \geq 1$ et $u, z, z' \in A^*$ des mots tels que $|z| = |z'|$. Nous avons

$$\varphi^{k-1}(u)\,\varphi^k(z')\sim_k \varphi^k(z)\,\varphi^{k-1}(u).$$

Exemple

Soient x, y, z, z' des mots tels que $|z| = |z'|$. Soit $a \in \{0, 1\}$. Nous avons

$$x\varphi^{k-1}(a)\varphi^k(z')y \ \sim_k \ x\varphi^k(z)\varphi^{k-1}(a)y.$$

Ces deux résultats mènent au théorème suivant.

Théorème

Soient u et v deux facteurs de $\mathbf{t}$ de longueur $n \geq 2^k - 1$. Nous avons

$$u \sim_k v \Leftrightarrow (p_u, s_u) \equiv_k (p_v, s_v).$$

Ces deux résultats mènent au théorème suivant.

Théorème

Soient u et v deux facteurs de $\mathbf{t}$ de longueur $n \geq 2^k - 1$. Nous avons

$$u \sim_k v \Leftrightarrow (p_u, s_u) \equiv_k (p_v, s_v).$$

Le sens $\Leftarrow$ est direct ; il suffit de considérer tous les cas dans la définition de $\equiv_k$.

Ces deux résultats mènent au théorème suivant.

Théorème

Soient u et v deux facteurs de $\mathbf{t}$ de longueur $n \geq 2^k - 1$. Nous avons

$$u \sim_k v \Leftrightarrow (p_u, s_u) \equiv_k (p_v, s_v).$$

Le sens $\Leftarrow$ est direct ; il suffit de considérer tous les cas dans la définition de $\equiv_k$.
Pour prouver $\Rightarrow$, on va plutôt démontrer la contraposée :

$$(p_u, s_u) \not\equiv_k (p_v, s_v) \Rightarrow u \not\sim_k v,$$

en faisant appel à 2 résultats principaux.

Lemme 1

Si $u = xu'y$ et $v = xv'y$ sont deux mots de même longueur tels que u' et v' n'ont pas de préfixe ni suffixe commun et n'ayant pas le même type d'ordre k, alors si u' (et v') sont de longueur au moins $2^k - 1$, les mots u' et v' ne sont pas non plus de même type d'ordre k.

Lemme 1

Si $u = xu'y$ et $v = xv'y$ sont deux mots de même longueur tels que u' et v' n'ont pas de préfixe ni suffixe commun et n'ayant pas le même type d'ordre k, alors si u' (et v') sont de longueur au moins $2^k - 1$, les mots u' et v' ne sont pas non plus de même type d'ordre k.

Lemme 2

Soient $u, v \in \mathrm{Fac}_n(\mathbf{t})$ deux mots de longueur au moins $2^k - 1$ sans préfixe ni suffixe commun et n'ayant pas le même type d'ordre k. Alors $u \not\sim_k v$.

Démonstration du théorème

Supprimons les préfixes et suffixes communs de u et v.

- Si $|u'| \geq 2^k - 1$, par le Lemme 1, les mots obtenus n'ont pas le même type d'ordre k. Vu le Lemme 2, ils ne sont pas équivalents.

Démonstration du théorème

Supprimons les préfixes et suffixes communs de u et v.

- Si $|u'| \geq 2^k - 1$, par le Lemme 1, les mots obtenus n'ont pas le même type d'ordre k. Vu le Lemme 2, ils ne sont pas équivalents.
- Sinon, on prend le plus grand j pour lequel le type d'ordre j est bien défini.

Démonstration du théorème

Supprimons les préfixes et suffixes communs de u et v.

- Si $|u'| \geq 2^k - 1$, par le Lemme 1, les mots obtenus n'ont pas le même type d'ordre k. Vu le Lemme 2, ils ne sont pas équivalents.
- Sinon, on prend le plus grand j pour lequel le type d'ordre j est bien défini.
    - Si les deux mots n'ont pas le même type d'ordre j, on applique le Lemme 2.

Démonstration du théorème

Supprimons les préfixes et suffixes communs de u et v.

- Si $|u'| \geq 2^k - 1$, par le Lemme 1, les mots obtenus n'ont pas le même type d'ordre k. Vu le Lemme 2, ils ne sont pas équivalents.
- Sinon, on prend le plus grand j pour lequel le type d'ordre j est bien défini.
  - Si les deux mots n'ont pas le même type d'ordre j, on applique le Lemme 2.
  - Sinon, on revient à la définition de $\equiv_j$. On montre que $u' \not\sim_{j+1} v'$ en calculant
$$\binom{u'}{01^j} - \binom{v'}{01^j}.$$

Démonstration du théorème

Supprimons les préfixes et suffixes communs de u et v.

- Si $|u'| \geq 2^k - 1$, par le Lemme 1, les mots obtenus n'ont pas le même type d'ordre k. Vu le Lemme 2, ils ne sont pas équivalents.
- Sinon, on prend le plus grand j pour lequel le type d'ordre j est bien défini.
  - Si les deux mots n'ont pas le même type d'ordre j, on applique le Lemme 2.
  - Sinon, on revient à la définition de $\equiv_j$. On montre que $u' \not\sim_{j+1} v'$ en calculant
$$\binom{u'}{01^j} - \binom{v'}{01^j}.$$

Le même raisonnement permet de montrer que pour tous facteurs $u, v \in \mathrm{Fac}(\mathbf{t})$ de longueur au plus $2^k - 1$, nous avons $u \not\sim_k v$.
Ainsi, pour tout $n \leq 2^k - 1$, pour tout $k \geq 3$, nous avons $\mathbf{b}_{\mathbf{t}}^{(k)}(n) = p_{\mathbf{t}}(n)$.

Théorème (rappel)

Soient u et v deux facteurs de $\mathbf{t}$ de longueur $n \geq 2^k - 1$. Nous avons

$$u \sim_k v \Leftrightarrow (p_u, s_u) \equiv_k (p_v, s_v).$$

Corollaire

Soient $k \geq 3$ et $n \geq 2^k$. Nous avons

$$\mathbf{b}_{\mathbf{t}}^{(k)}(n) = \#(\mathrm{Fac}_n(\mathbf{t})/\sim_k) = \#(\{(p_u, s_u) : u \in \mathrm{Fac}_n(\mathbf{t})\}/\equiv_k)$$

Théorème (rappel)

Soient u et v deux facteurs de $\mathbf{t}$ de longueur $n \geq 2^k - 1$. Nous avons

$$u \sim_k v \Leftrightarrow (p_u, s_u) \equiv_k (p_v, s_v).$$

Corollaire

Soient $k \geq 3$ et $n \geq 2^k$. Nous avons

$$\mathbf{b}_{\mathbf{t}}^{(k)}(n) = \#(\mathrm{Fac}_n(\mathbf{t})/\sim_k) = \#(\{(p_u, s_u) \,:\, u \in \mathrm{Fac}_n(\mathbf{t})\}/\equiv_k)$$

Il reste à calculer cette dernière quantité. Fixons $n \in \mathbb{N}_0$.

Pour tout $\ell \in \{0, \ldots, 2^{k-1}-1\}$, définissons

$$P_\ell = \{(p_u, s_u) : u \in \mathrm{Fac}_n(\mathbf{t}), |p_u| = \ell \text{ ou } |p_u| = 2^{k-1}+\ell\}.$$

Ainsi,

$$\{(p_u, s_u) \,:\, u \in \mathrm{Fac}_n(\mathbf{t})\} = \bigcup_{\ell=0}^{2^{k-1}-1} P_\ell \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_{\mathbf{t}}^{(k)}(n) = \sum_{\ell=0}^{2^{k-1}-1} \#(P_\ell/\equiv_k).$$

Pour tout $\ell \in \{0, \dots, 2^{k-1}-1\}$, définissons

$$P_\ell = \{(p_u, s_u) : u \in \mathrm{Fac}_n(\mathbf{t}), |p_u| = \ell \ \text{ ou } \ |p_u| = 2^{k-1} + \ell\}.$$

Ainsi,

$$\{(p_u, s_u)\ :\ u \in \mathrm{Fac}_n(\mathbf{t})\} = \bigcup_{\ell=0}^{2^{k-1}-1} P_\ell \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_{\mathbf{t}}^{(k)}(n) = \sum_{\ell=0}^{2^{k-1}-1} \#(P_\ell/\equiv_k).$$

Il existe ℓ_0 tel que

$$P_{\ell_0} = \{(p_u, s_u) : u \in \mathrm{Fac}_n(\mathbf{t}), |s_u| = 0 \ \text{ ou } \ |s_u| = 2^{k-1}\}.$$

Pour tout $\ell \in \{0, \dots, 2^{k-1} - 1\}$, définissons

$$P_\ell = \{(p_u, s_u) : u \in \mathrm{Fac}_n(\mathbf{t}), |p_u| = \ell \text{ ou } |p_u| = 2^{k-1} + \ell\}.$$

Ainsi,

$$\{(p_u, s_u) \ : \ u \in \mathrm{Fac}_n(\mathbf{t})\} = \bigcup_{\ell=0}^{2^{k-1}-1} P_\ell \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_{\mathbf{t}}^{(k)}(n) = \sum_{\ell=0}^{2^{k-1}-1} \#(P_\ell/\equiv_k).$$

Il existe ℓ_0 tel que

$$P_{\ell_0} = \{(p_u, s_u) : u \in \mathrm{Fac}_n(\mathbf{t}), |s_u| = 0 \text{ ou } |s_u| = 2^{k-1}\}.$$

Notons $\lambda = n \bmod 2^k$. Nous avons

$$\#\{0, \dots, 2^{k-1} - 1\} \setminus \{0, \ell_0\} = \begin{cases} 2^{k-1} - 1, & \text{si } \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 2^{k-1}; \\ 2^{k-1} - 2, & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, nous pouvons montrer que

$$\#\left((P_0 \cup P_{\ell_0})/\equiv_k\right) = \begin{cases} 3, & \text{si } \lambda = 0; \\ 2, & \text{si } \lambda = 2^{k-1}; \\ 8, & \text{sinon}; \end{cases}$$

De plus, nous pouvons montrer que

$$\#\left((P_0 \cup P_{\ell_0})/\equiv_k\right) = \begin{cases} 3, & \text{si } \lambda = 0; \\ 2, & \text{si } \lambda = 2^{k-1}; \\ 8, & \text{sinon;} \end{cases}$$

et que, pour tout $\ell \notin \{0, \ell_0\}$,

$$\#\left(P_\ell/\equiv_k\right) = 6.$$

Ainsi, regroupant toutes ces informations,

$$\#\left(\{(p_u, s_u) : u \in \mathrm{Fac}_n(\mathbf{t})\}/\equiv_k\right) = \# \bigcup_{\ell=0}^{2^{k-1}-1} P_\ell$$

$$= \begin{cases} 6\,(2^{k-1}-1)+3, & \text{si } \lambda = 0; \\ 6\,(2^{k-1}-1)+2, & \text{si } \lambda = 2^{k-1}; \\ 6\,(2^{k-1}-2)+8, & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3\cdot 2^k - 3, & \text{si } \lambda = 0; \\ 3\cdot 2^k - 4, & \text{sinon}, \end{cases}$$

ce qui donne le résultat annoncé depuis le début de l'exposé.