

Analyse des Structures I (GCIV 0607-2)

Interrogation 2, 4 novembre 2019

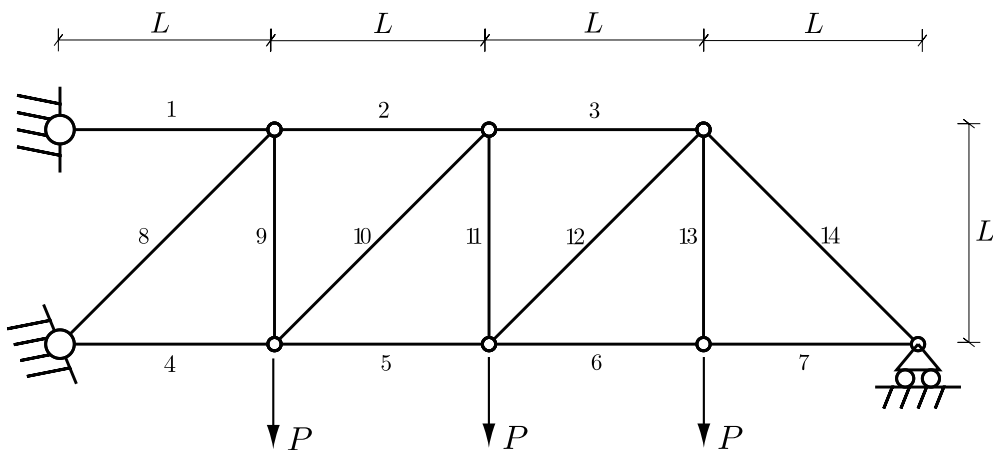
Méthodes des forces, Méthode des déplacements et Lignes d'influence

V. Denoël, M. Geuzaine

- lisez attentivement les 3 questions et répondez uniquement à ce qui est demandé
- indiquez vos nom et prénom sur chaque feuille
- munissez-vous uniquement d'une calculatrice, et de vos notes de cours

Question 1 (10 points)

Un treillis hyperstatique composé de 14 barres, est soumis à une charge concentrée P au niveau de ses noeuds inférieurs. Les membrures et les montants sont caractérisés par une raideur axiale infinie, les barres diagonales ont une raideur EA finie. Analysez la structure et répondez au questionnaire à choix multiples (juste +1, faux -0.5, abstention 0). Cochez une seule réponse par ligne.

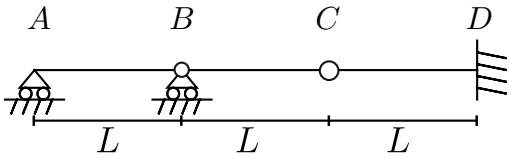


Que valent les efforts axiaux suivants? (en N)

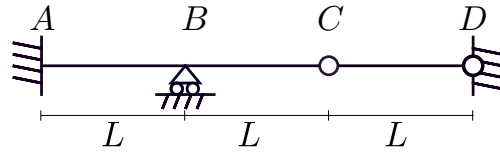
	$-3P\sqrt{2}/2$	$-2P$	$-3P/2$	$-P\sqrt{2}/2$	$P/2$	$P\sqrt{2}/2$	P	$3P/2$	$2P$	Autre
N_1	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
N_2	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
N_3	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
N_8	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
N_9	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
N_{10}	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
N_{11}	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
N_{12}	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
N_{13}	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
N_{14}	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Question 2 (10 points)

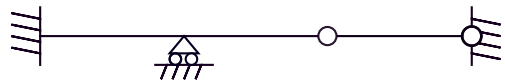
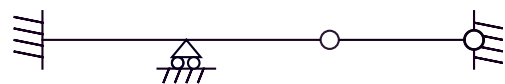
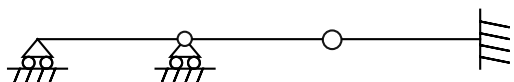
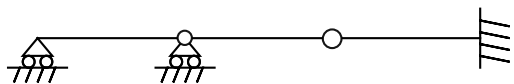
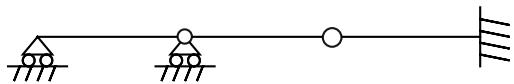
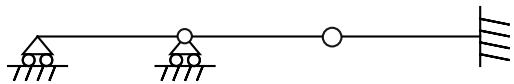
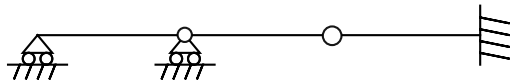
Pour chacune des poutres représentées ci-dessous, tracez les lignes d'influence demandées.



- LI de la réaction verticale en D
- LI du moment en B
- LI de la flèche verticale en C
- LI de la rotation en A
- LI du moment d'encastrement en D



- LI de la réaction verticale en D
- LI du moment en B
- LI de la flèche verticale en B
- LI de la rotation en A
- LI de l'effort tranchant à droite de B

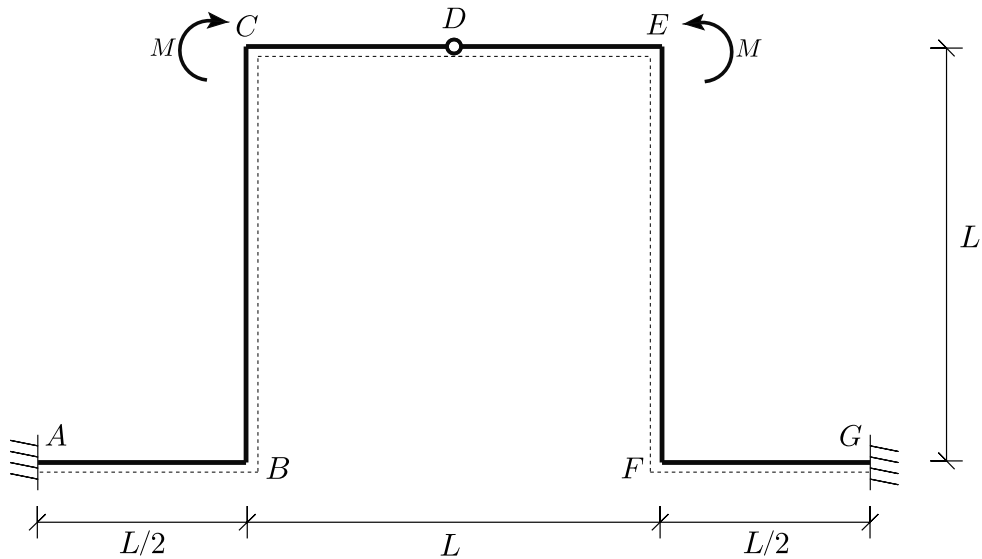


Question 3 (10 points)

Un portique de hauteur L et de longueur $2L$, est soumis à un moment concentré M aux points C et E . Analysez cette structure en utilisant la méthode des forces.

Données : $L = 6m$; $M = 1kNm$

Remarque : la ligne de référence considérée est représentée en trait discontinu.



1. Déterminez le degré d'hyperstaticité dans la structure.
2. Déterminez les réactions d'appui aux points A et G .
3. Tracez le diagramme des moments, de l'effort tranchant et de l'effort axial.

Analyse des Structures I (GCIV 0607-2)

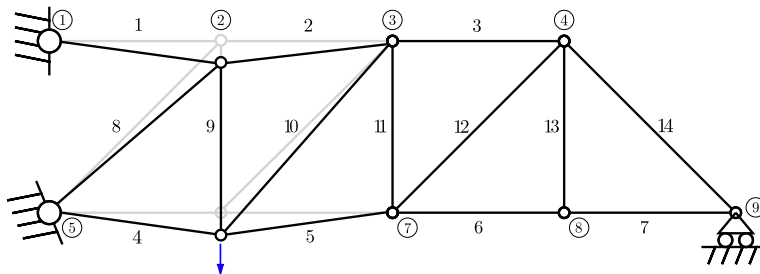
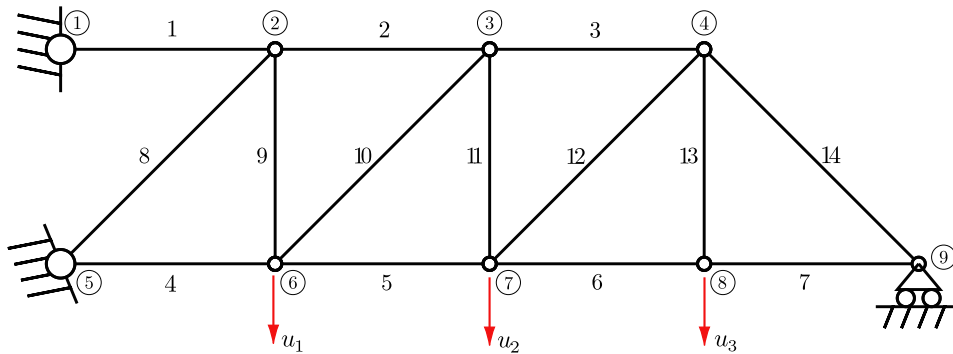
Interrogation 2

Corrigé

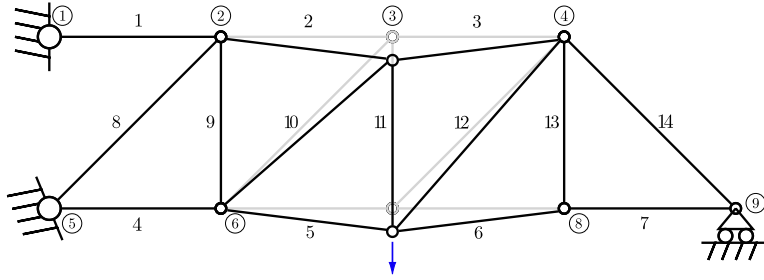
Question 1

	$-3P\sqrt{2}/2$	$-2P$	$-3P/2$	$-P\sqrt{2}/2$	$P/2$	$P\sqrt{2}/2$	P	$3P/2$	$2P$	Autre
N_1	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
N_2	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
N_3	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
N_8	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
N_9	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
N_{10}	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
N_{11}	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
N_{12}	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
N_{13}	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
N_{14}	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

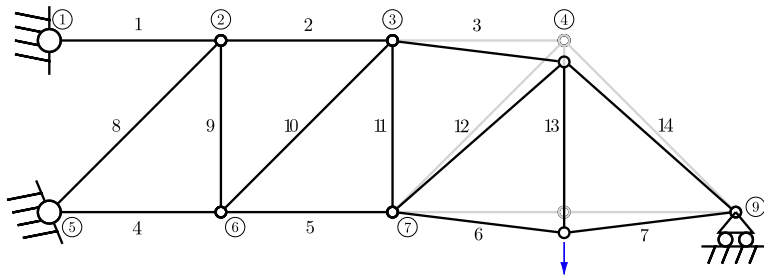
La structure admet 3 degrés de libertés (u_1, u_2, u_3), correspondants aux déplacements verticaux aux noeuds (6), (7) et (8). Les barres diagonales 8, 10, 14 se compriment, tandis que la barre 12 s'allonge.



$$K_{1,1} = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{EA}{L\sqrt{2}} = \frac{EA}{L\sqrt{2}}; \quad K_{1,2} = -\frac{1}{2} \frac{EA}{L\sqrt{2}}; \quad K_{1,3} = 0$$



$$K_{2,2} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} ; K_{2,3} = -\frac{1}{2} \frac{EA}{L\sqrt{2}}$$



$$K_{3,3} = \frac{EA}{L\sqrt{2}}$$

La matrice de raideur globale \mathbf{K} est établie

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \frac{EA}{L\sqrt{2}},$$

Et connaissant le vecteur de chargement

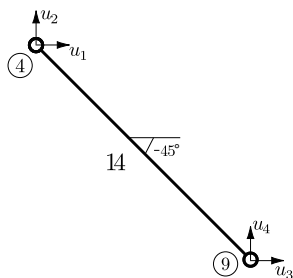
$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} P,$$

Les déplacements sont obtenus

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \frac{PL}{EA} \sqrt{2}.$$

Les efforts axiaux dans les différentes barres sont déterminés sur base des matrices de raideur locales.

L'effort axial dans l'élément 14 est obtenu (consulter le memento) :



$$N_{14,x} = \frac{1}{2} \frac{EA}{L\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{3PL\sqrt{2}}{EA} \right) = -\frac{3P}{2}$$

$$N_{14,y} = \frac{1}{2} \frac{EA}{L\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{3PL\sqrt{2}}{EA} \right) = \frac{3P}{2}$$

$$\Rightarrow N_{14} = -\frac{3P\sqrt{2}}{2}.$$

L'effort axial dans l'élément 12 :

$$\begin{bmatrix} N_{12,x} \\ N_{12,y} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u_2 \\ -u_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow N_{12} = \frac{P\sqrt{2}}{2}.$$

L'équilibre au noeud (4) fournit les efforts N_3 et N_{13} :

$$N_3 = -2P ; N_{13} = P.$$

L'effort dans la barre 10 est obtenu en reprenant le même raisonnement pour la barre 12 :

$$\Rightarrow N_{10} = -\frac{P\sqrt{2}}{2}.$$

L'équilibre au noeud (3) fournit les efforts N_2 et N_{11} :

$$N_2 = -3P/2 ; N_{11} = P/2.$$

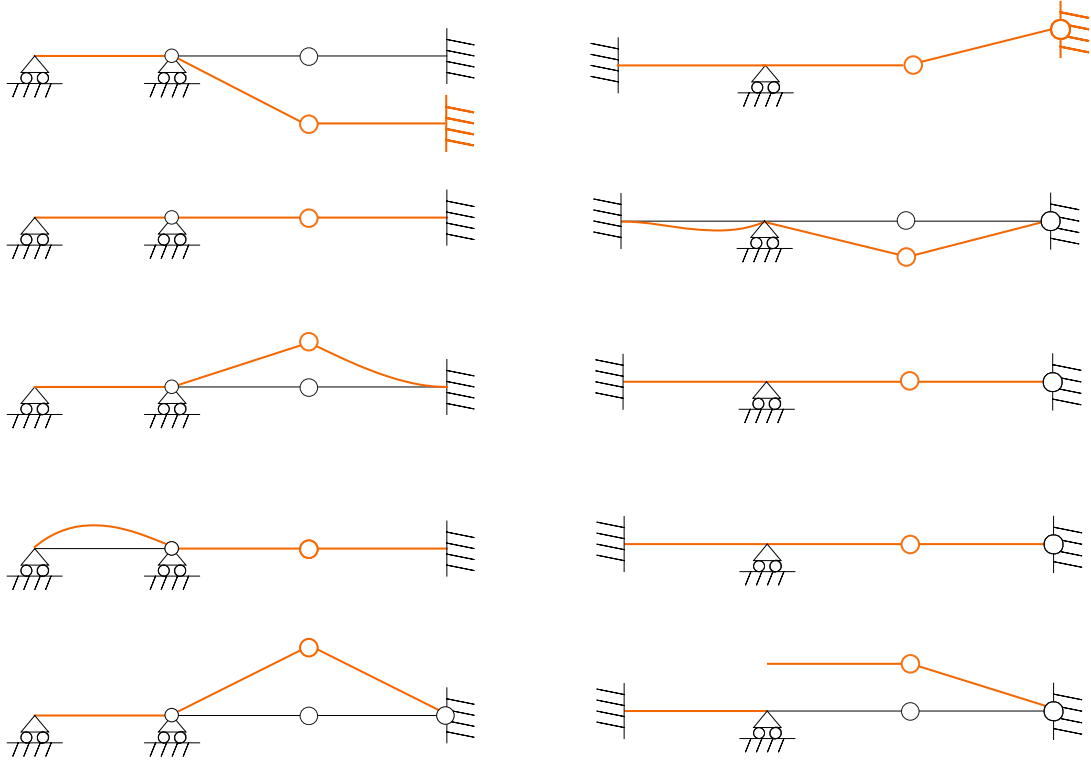
L'effort dans la barre 8 est obtenu en reprenant le même raisonnement pour la barre 14 :

$$\Rightarrow N_8 = -\frac{3P\sqrt{2}}{2}.$$

L'équilibre au noeud (2) fournit les efforts N_1 et N_9 :

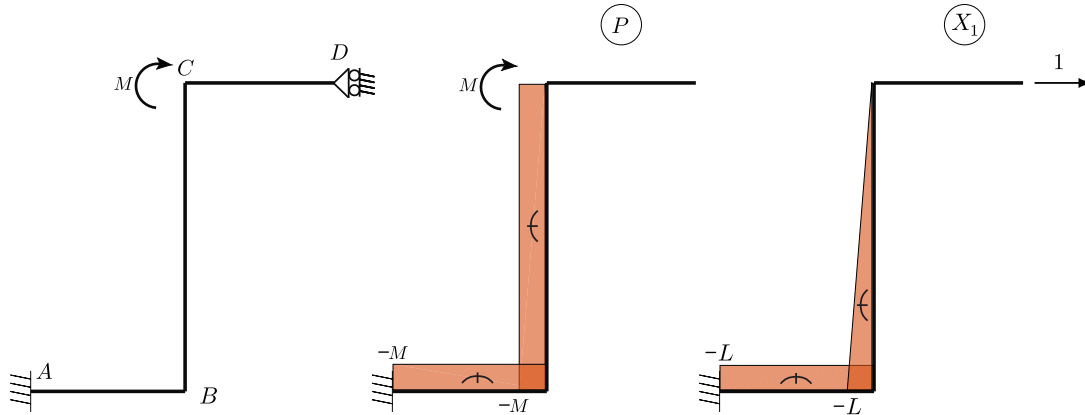
$$N_1 = 0 ; N_9 = 3P/2.$$

Question 2



Question 3

La structure présente une symétrie géométrique, le chargement est également symétrique. Il est donc judicieux de ne traiter qu'une des deux moitiés, ce qui permet de réduire le problème à une seule inconnue hyperstatique. Le moment et l'effort tranchant étant nuls au point D , la rotation autour de ce point et le déplacement vertical sont permis. L'appui correspondant est présenté à la figure suivante.



L'équation de compatibilité s'écrit : $A_{11}X_1 + b_{p,1} = 0$, avec :

$$A_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3}(-L)(-L)L + (-L)(-L)\frac{L}{2} \right) = \frac{5L^3}{6EI} ;$$

$$b_{p,1} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2}(-M)(-L)L + (-M)(-L)\frac{L}{2} \right) = \frac{ML^2}{EI} ;$$

$$X_1 = -\frac{b_{p,1}}{A_{11}} = -\frac{6M}{5L} .$$

