

Analyse des Structures I (GCIV 0607-2)

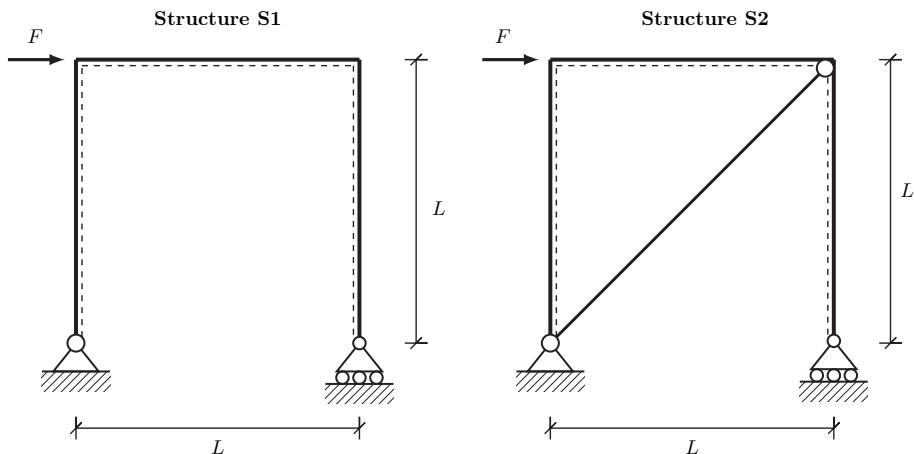
Interrogation 1 - Méthode des forces, 7 octobre 2019

V. Denoël, M. Geuzaine

- lisez attentivement les 2 questions et répondez uniquement à ce qui est demandé
- indiquez vos nom et prénom sur chaque feuille
- munissez-vous uniquement d'une calculatrice, et de vos notes de cours

Question 1 (20 points)

Un portique isostatique est soumis à une charge concentrée F au sommet de la colonne de gauche. Son schéma statique est représenté ci-dessous (Structure S1). Les éléments de ce portique sont des poutres caractérisées par un module de rigidité E et par une inertie I . La structure S2 est composée du même portique contreventé avec un câble de module E et de section A . Le but de cet exercice est d'analyser l'effet de ce câble sur la déformabilité du portique.



Remarque : la ligne de référence considérée est représentée en trait discontinu.

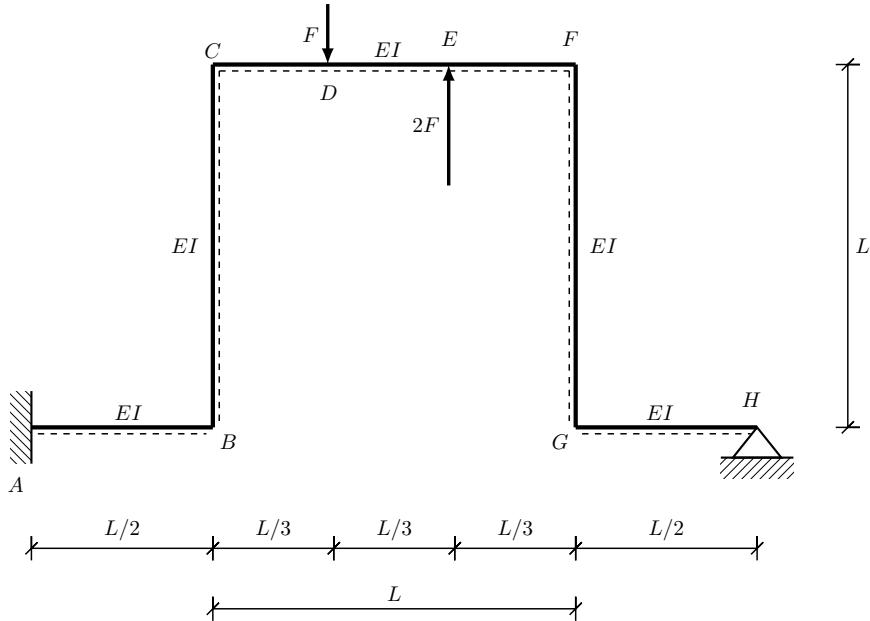
1. Déterminez le diagramme des moments dans la structure isostatique S1
2. Déterminez le déplacement horizontal en tête de portique Δ_1 en fonction de EI
3. Déterminez le diagramme des moments et de l'effort axial dans la structure S2
4. Déterminez le déplacement horizontal en tête de portique Δ_2 en fonction de α , défini par $\alpha = \frac{EAL^2}{EI}$.
5. Exprimez le ratio Δ_1/Δ_2 en fonction de α uniquement. Selon l'Eurocode, le contreventement est dit « efficace » lorsqu'il permet de diviser le déplacement horizontal par 5 ou plus. Déterminez la valeur α minimum pour que ce contreventement soit efficace.

Question 2 (20 points)

Analysez la structure représentée ci-dessous avec la méthode des forces et répondez au questionnaire à choix multiples (juste +2, faux -1, abstention 0). Cochez une seule réponse par ligne. Les déformations dues aux efforts tranchants et aux efforts normaux sont supposées négligeables dans toute la structure.

Données : $L = 6 \text{ m}$; $F = 1 \text{ kN}$

Remarque : la ligne de référence considérée est représentée en trait discontinu.



1. Que valent les réactions d'appui ? (en N) ($\uparrow^+, \rightarrow^+$)

	[-800, -700]	[-400, -300]	[-300, -200]	[200, 300]	[300, 400]	[600, 700]	[700, 800]
V_A	<input type="radio"/>						
H_A	<input type="radio"/>						
V_H	<input type="radio"/>						
H_H	<input type="radio"/>						

2. Que vaut le moment aux points A, B, D et E ? (en Nm) (Conventions RDM)

	[-1600, -1550]	[-1290, -1240]	[-620, -570]	[180, 230]	[920, 970]	[1240, 1290]	[1360, 1410]
M_A	<input type="radio"/>						
M_B	<input type="radio"/>						
M_D	<input type="radio"/>						
M_E	<input type="radio"/>						

3. Sur le tronçon CF, que vaut l'effort tranchant aux points C et F ? (en N) (Conventions RDM)

	[-800, -700]	[-300, -200]	[-200, -100]	[0, 100]	[200, 300]	[300, 400]	[700, 800]
T_C	<input type="radio"/>						
T_F	<input type="radio"/>						

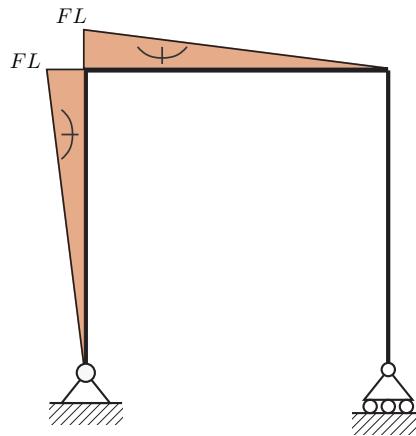
Analyse des Structures I (GCIV 0607-2)

Interrogation 1 - Méthode des forces

Corrigé

Question 1

1. Diagramme des moments dans la structure S1

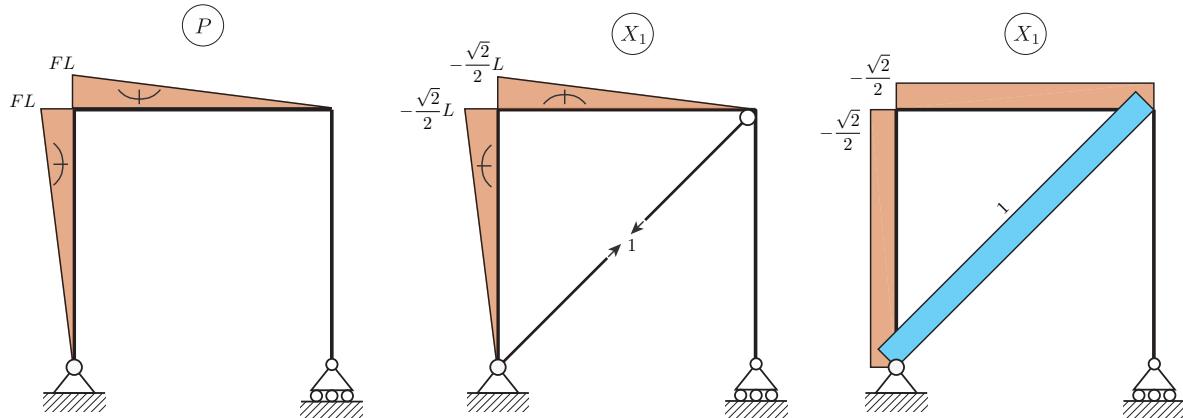


2. $\Delta_1 = 2 \cdot \frac{1}{3} FL \cdot L \cdot L \Rightarrow \boxed{\Delta_1 = \frac{2}{3} \frac{FL^3}{EI}}$ (Le diagramme M_1 est similaire au diagramme M en prenant $F = 1$)

3. Afin de rendre la structure S2 isostatique, il s'agit d'effectuer une coupure interne au niveau de la barre libérant ainsi le couple d'efforts X_1 .

La structure S2 est hyperstatique une fois ($h_{ext} + h_{int} = 0 + 1$), l'équation de compatibilité s'écrit : $b_{p,1} + A_{11}X_1 = 0$

Les diagrammes des moments des systèmes et de l'effort axial du système sont présentés ci-dessous :



$$b_{p,1} = \frac{1}{EI} \left(2 \cdot \frac{1}{3} \cdot FL \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} L \cdot L \right) = \frac{-\sqrt{2} FL^3}{3EI}$$

$$A_{11} = \frac{1}{EI} (2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} L \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} L \cdot L) + \frac{1}{EA} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} L = \frac{L^3}{3EI} + \frac{\sqrt{2}L}{EA}$$

L'effort dans le câble X_1

$$X_1 = \frac{\sqrt{2}F\alpha}{\alpha + 3\sqrt{2}} = F \cdot \Omega(\alpha)$$

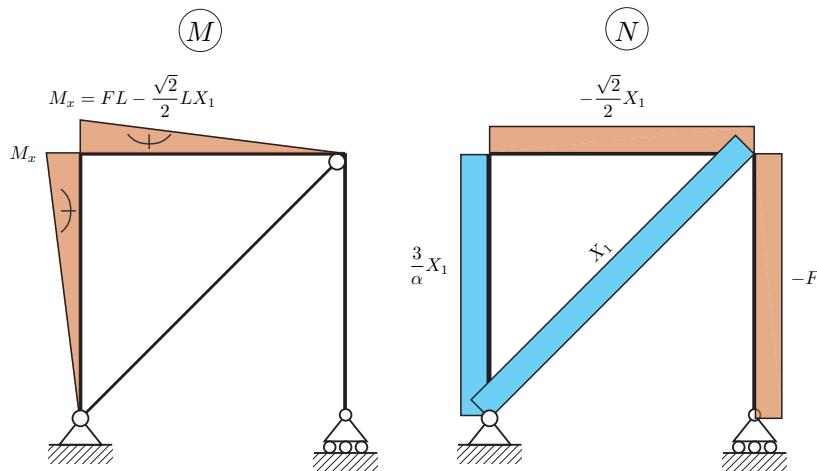
avec $\Omega(\alpha) = \frac{\sqrt{2}\alpha}{\alpha + 3\sqrt{2}}$.

Le moment M_x est calculé

$$M_x = FL - \frac{\sqrt{2}}{2} LX_1 = FL - \frac{\sqrt{2}}{2} L \cdot F \cdot \Omega(\alpha) = FL \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Omega(\alpha)\right) ;$$

$$M_x = \frac{3\sqrt{2}FL}{\alpha + 3\sqrt{2}} = FL \cdot \Gamma(\alpha)$$

avec $\Gamma(\alpha) = \frac{3\sqrt{2}}{\alpha + 3\sqrt{2}}$.



4.

$$\Delta_2 = \frac{2}{3} \frac{FL^3}{EI} \Gamma^2(\alpha) + \sqrt{2} \frac{FL}{EA} \Omega(\alpha)^2$$

$$\Delta_2 = \frac{FL^3}{EI} \frac{12}{(\alpha + 3\sqrt{2})^2} + \frac{FL}{EA} \frac{2\sqrt{2}\alpha^2}{(\alpha + 3\sqrt{2})^2}$$

5.

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{1}{3\sqrt{2}} (\alpha + 3\sqrt{2})$$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 5 \Leftrightarrow \alpha + 3\sqrt{2} = 15\sqrt{2} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 12\sqrt{2}}$$

Question 2

1. Que valent les réactions d'appui ? (en N)

	[-800, -700]	[-400, -300]	[-300, -200]	[200, 300]	[300, 400]	[600, 700]	[700, 800]
V_A	○	○	●	○	○	○	○
H_A	○	●	○	○	○	○	○
V_H	●	○	○	○	○	○	○
H_H	○	○	○	○	●	○	○

2. Que vaut le moment aux points A, B, D et E ? (en Nm)

	[-1600, -1550]	[-1290, -1240]	[-620, -570]	[180, 230]	[920, 970]	[1240, 1290]	[1360, 1410]
M_A	○	○	○	●	○	○	○
M_B	○	○	●	○	○	○	○
M_D	○	○	○	○	●	○	○
M_E	●	○	○	○	○	○	○

3. Sur le tronçon CF, que vaut l'effort tranchant aux points C et F ? (en N)

	[-800, -700]	[-300, -200]	[-200, -100]	[0, 100]	[200, 300]	[300, 400]	[700, 800]
T_C	○	●	○	○	○	○	○
T_F	○	○	○	○	○	○	●

Éléments de réponse :

La structure étant 2 fois hyperstatique, une solution serait de supprimer l'appui de droite et de libérer ses efforts H_H et V_H :

Les équations de compatibilité s'écrivent

$$\begin{cases} b_{p,1} + A_{11}H_H + A_{12}V_H = 0 \\ b_{p,2} + A_{21}H_H + A_{22}V_H = 0 \end{cases}$$

$$A_{11} = \frac{5}{3} \frac{L^3}{EI}; \quad A_{22} = \frac{31}{6} \frac{L^3}{EI}; \quad A_{12} = 2 \frac{L^3}{EI}$$

$$b_{p,1} = \frac{8}{9} \frac{FL^3}{EI}; \quad b_{p,2} = \frac{1337}{432} \frac{FL^3}{EI}$$

La résolution du système donne

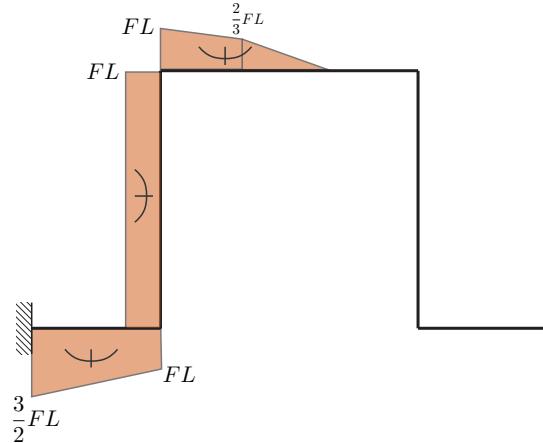
$$H_H = \frac{115}{332}F = 346.39N; \quad V_H = -\frac{4381}{5976}F = -733.1N$$

L'utilisation des équations de la statique permet de retrouver les réactions au niveau de l'encastrement :

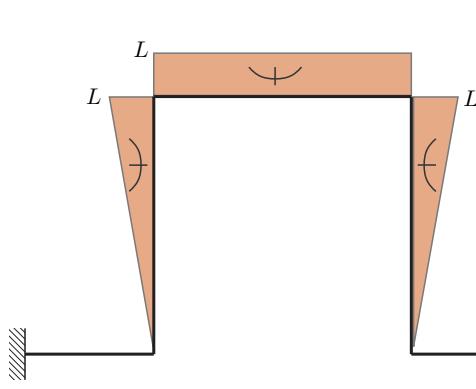
$$H_A = -H_H = -346.39N; \quad V_A = -\frac{1595}{5976}F = -266.9N$$

Les diagrammes des moments sont présentés ci-dessous :

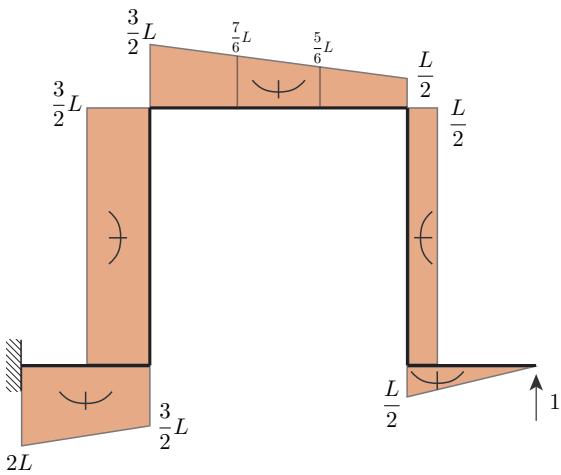
(P)



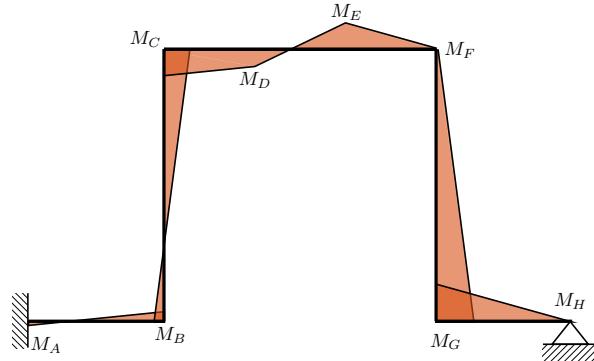
(X₁)



(X₂)

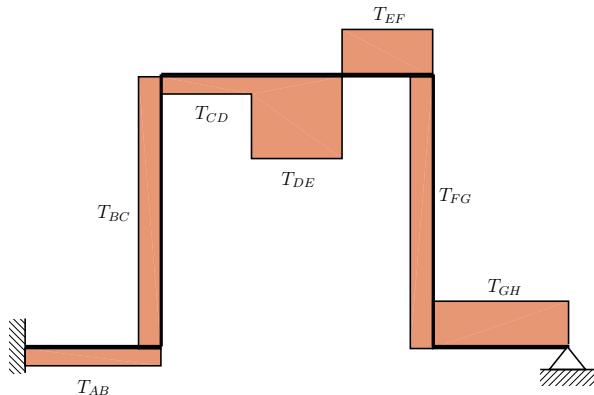


Les valeurs numériques du diagramme des moments sont données au tableau ci-dessous.



$M_i (Nm)$	A	B	C	D	E	F	G	H
$\frac{101}{2988} FL$	$-\frac{397}{3984} FL$	$\frac{983}{3984} FL$	$\frac{5657}{35856} FL$	$-\frac{9485}{35856} FL$	$-\frac{241}{11952} FL$	$-\frac{4381}{11952} FL$	0	
202.81	-597.89	1480.4	946.62	-1587.2	-120.98	-2199.3	0	

Les moments étant des fonctions linéaires, l'effort tranchant est donc constant par tronçon (l'effort tranchant = la dérivée du moment). Les valeurs numériques du diagramme de l'effort tranchant sont données au tableau ci-dessous.



$T_i (N)$	AB	BC	CD	DE	EF	FG	GH
-266.9	346.39	-266.9	-1266.9	733.1	-346.39	733.1	