

# Analyse des Structures I (GCIV 0607-2)

Interrogation 4, 16 décembre 2019

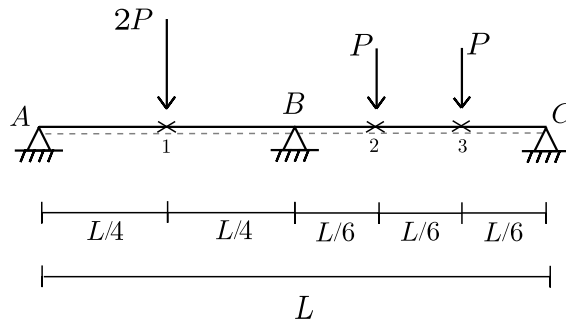
Analyse plastique

V. Denoël, M. Geuzaine

- lisez attentivement les 2 questions et répondez uniquement à ce qui est demandé
- indiquez vos nom et prénom sur chaque feuille
- munissez-vous uniquement d'une calculatrice, et de vos notes de cours

## Question 1 (10 points)

La poutre continue, de longueur  $L$  et de moment plastique  $M_p$ , est soumise à une charge ponctuelle  $2P$  sur la travée gauche, et à deux charges ponctuelles de norme  $P$  sur la travée droite. Analysez la structure et répondez aux questions suivantes.



Que valent les multiplicateurs critiques (Classez-les dans l'ordre croissant) ?

	$\frac{2M_p}{PL}$	$\frac{4M_p}{PL}$	$\frac{6M_p}{PL}$	$\frac{8M_p}{PL}$	$\frac{10M_p}{PL}$	$\frac{12M_p}{PL}$	$\frac{14M_p}{PL}$	$\frac{16M_p}{PL}$	<i>Autre</i>
$\lambda_1$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$\lambda_2$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$\lambda_3$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$\lambda_4$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$\lambda_5$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$\lambda_6$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Que valent les moments suivants (Convention RDM) ?

	$\frac{M_p}{6}$	$\frac{M_p}{4}$	$\frac{M_p}{3}$	$\frac{M_p}{2}$	$\frac{2M_p}{3}$	$\frac{3M_p}{4}$	$\frac{5M_p}{6}$	$M_p$	<i>Autre</i>
$M_2$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$M_3$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Que valent les efforts tranchants suivants (Convention RDM) ?

	$\frac{-8M_p}{L}$	$\frac{-6M_p}{L}$	$\frac{-4M_p}{L}$	$\frac{-2M_p}{L}$	$\frac{2M_p}{L}$	$\frac{4M_p}{L}$	$\frac{6M_p}{L}$	$\frac{8M_p}{L}$	<i>Autre</i>
$T_{2-3}$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$T_{3-C}$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

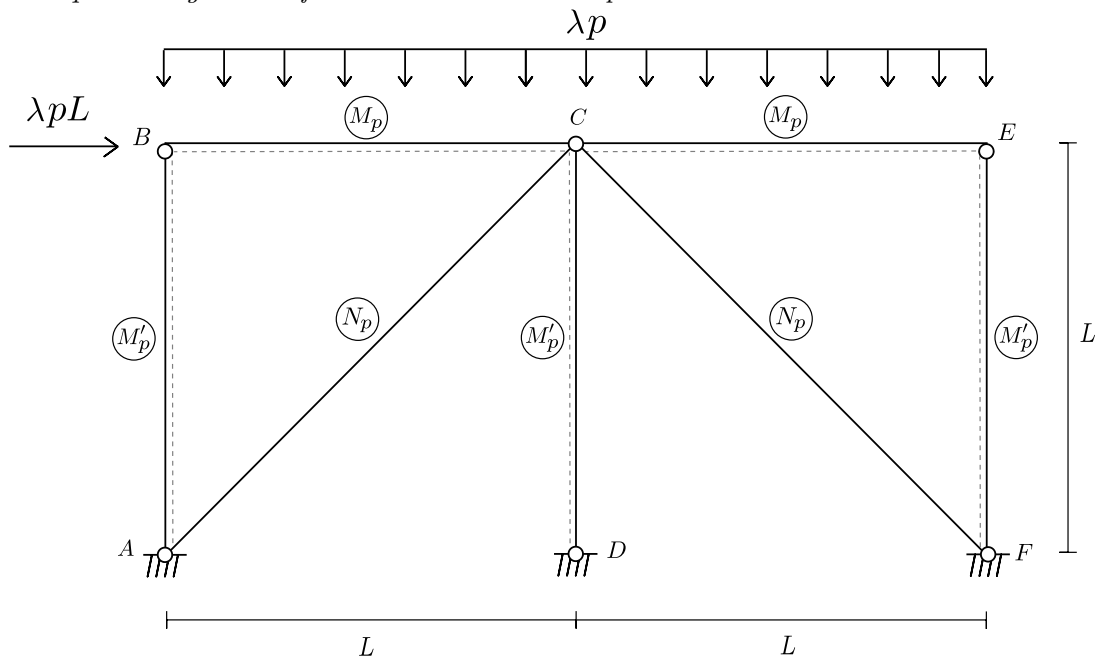
## Question 2 (10 points)

Une poutre de longueur  $2L$  et de raideur  $EI$  rotulée en  $C$ , est simplement posée sur 3 poteaux (hauteur :  $L$ , raideur :  $EI$ ). Le contreventement est assuré par 2 barres de raideur  $EA$ . La structure est soumise à une charge verticale répartie  $\lambda p$ , et à une charge horizontale ponctuelle  $\lambda pL$ . Il vous est demandé de faire une analyse limite de la structure en utilisant la méthode cinématique.

On note  $M_p$  le moment plastique dans la poutre,  $M'_p$  le moment plastique dans les poteaux et  $N_p$  l'effort axial plastique dans le contreventement.

**Hypothèse :** Les contreventements travaillent aussi bien en traction qu'en compression.

Remarque : la ligne de référence considérée est représentée en traits discontinus.



1. Déterminez le degré d'hyperstaticité  $h$  de la structure, ainsi que le nombre de mécanismes plastiques possibles  $m$ .
2. Dessinez ces mécanismes et calculez les multiplicateurs associés en fonction des paramètres du problème.
3. Tracez le diagramme des moments pour chacun des mécanismes identifiés.
4. Quelles conditions doit remplir  $N_p$  pour activer le mécanisme de ruine réel? Discutez en fonction des paramètres du problème.

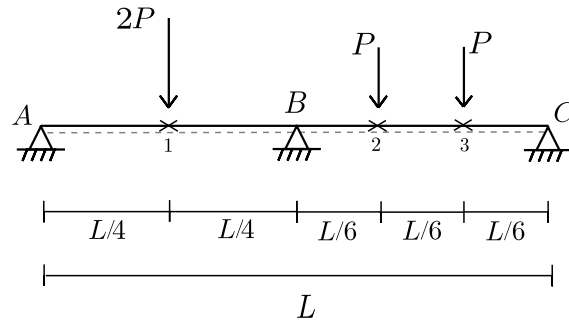
# Analyse des Structures I (GCIV 0607-2)

## Interrogation 4

Corrigé

### Question 1

	$\frac{2M_p}{PL}$	$\frac{4M_p}{PL}$	$\frac{6M_p}{PL}$	$\frac{8M_p}{PL}$	$\frac{10M_p}{PL}$	$\frac{12M_p}{PL}$	$\frac{14M_p}{PL}$	$\frac{16M_p}{PL}$	Autre
$\lambda_1$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$\lambda_2$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$\lambda_3$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$\lambda_4$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$\lambda_5$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
$\lambda_6$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
	$\frac{M_p}{6}$	$\frac{M_p}{4}$	$\frac{M_p}{3}$	$\frac{M_p}{2}$	$\frac{2M_p}{3}$	$\frac{3M_p}{4}$	$\frac{5M_p}{6}$	$M_p$	Autre
$M_2$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$M_3$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
	$\frac{-8M_p}{L}$	$\frac{-6M_p}{L}$	$\frac{-4M_p}{L}$	$\frac{-2M_p}{L}$	$\frac{2M_p}{L}$	$\frac{4M_p}{L}$	$\frac{6M_p}{L}$	$\frac{8M_p}{L}$	Autre
$T_{2-3}$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$T_{3-C}$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

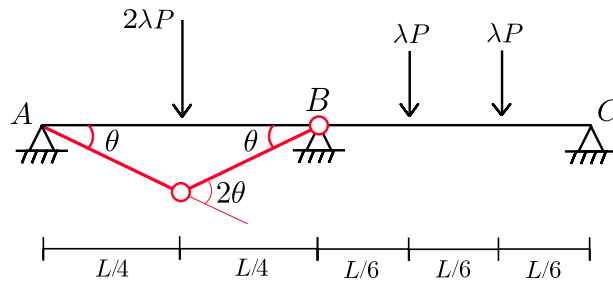


Degré d'hyperstaticité :  $h = 1$

Nombre de sections critiques :  $s = 4$

Nombre de mécanismes possibles :  $m = \binom{s}{h+1} = \binom{4}{2} = 6$

## Mécanisme 1

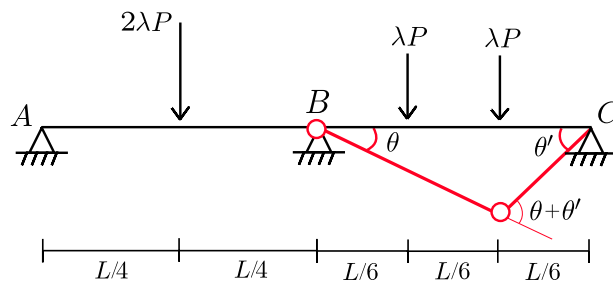


$$\tau_e = \lambda_1(2P)\frac{\theta L}{4} = \frac{1}{2}\lambda_1 P\theta L$$

$$\tau_i = 3\theta M_p$$

$$\lambda_1 = \frac{6M_p}{PL}$$

## Mécanisme 2

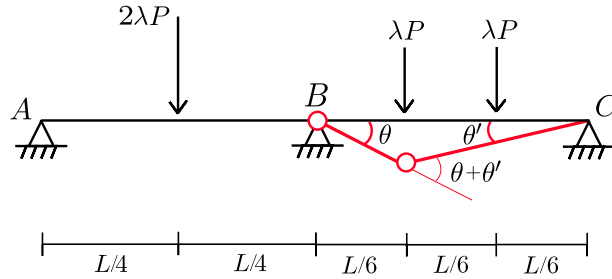


$$\tau_e = \lambda_2 P \frac{\theta L}{6} + \lambda_2 P (2\theta) \frac{L}{6} = \frac{1}{2}\lambda_2 P\theta L$$

$$\tau_i = (\theta + \theta + 2\theta)M_p = 4\theta M_p$$

$$\lambda_2 = \frac{8M_p}{PL}$$

### Mécanisme 3

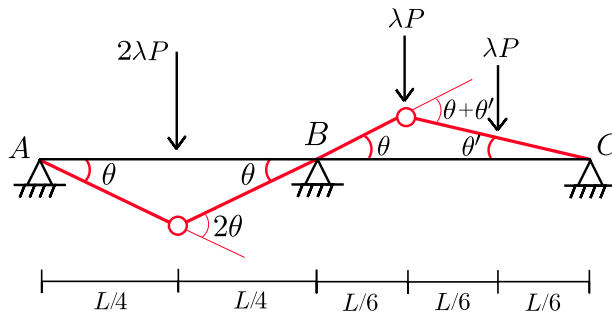


$$\tau_e = \lambda_3 P \frac{\theta L}{6} + \lambda_3 P \frac{\theta L}{2 \cdot 6} = \frac{1}{4} \lambda_3 P \theta L$$

$$\tau_i = \left( \theta + \theta + \frac{\theta}{2} \right) M_p = \frac{5}{2} \theta M_p$$

$$\lambda_3 = \frac{10 M_p}{P L}$$

### Mécanisme 4

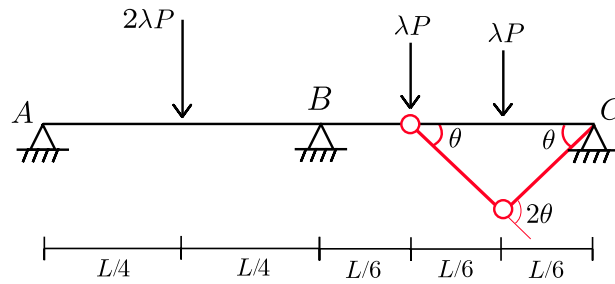


$$\tau_e = \lambda_4 (2P) \frac{\theta L}{4} - \lambda_4 P \frac{\theta L}{6} - \lambda_4 P \frac{\theta L}{2 \cdot 6} = \frac{1}{4} \lambda_4 P \theta L$$

$$\tau_i = \left( 2\theta + \theta + \frac{\theta}{2} \right) M_p = \frac{7}{2} \theta M_p$$

$$\lambda_4 = \frac{14 M_p}{P L}$$

### Mécanisme 5

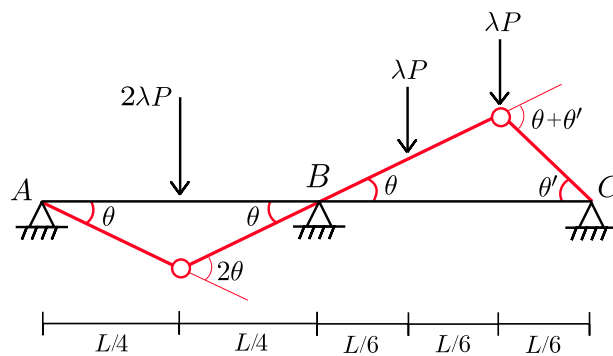


$$\tau_e = \lambda_5 P \frac{\theta L}{6} = \frac{1}{6} \lambda_5 P \theta L$$

$$\tau_i = (\theta + 2\theta) M_p = 3\theta M_p$$

$$\boxed{\lambda_5 = \frac{18 M_p}{P L}}$$

### Mécanisme 6



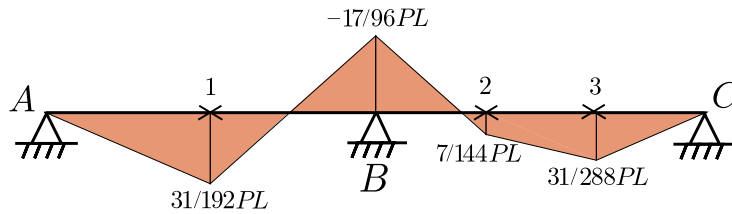
$$\tau_e = \lambda_6 (2P) \frac{\theta L}{4} - \lambda_6 P \frac{\theta L}{6} - \lambda_6 P (2\theta) \frac{L}{6} = 0$$

$$\tau_i = (2\theta + \theta + 2\theta) M_p = 5\theta M_p$$

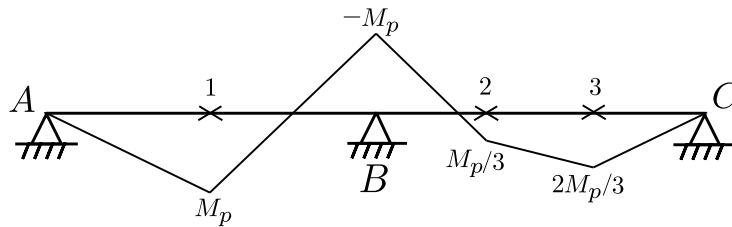
$$\boxed{\lambda_6 = \infty}$$

Tout multiplicateur cinématique est supérieur ou égal au multiplicateur limite, nous avons donc :  $\lambda_{réel} = \min(\lambda_i) = \frac{6M_p}{PL}$ .

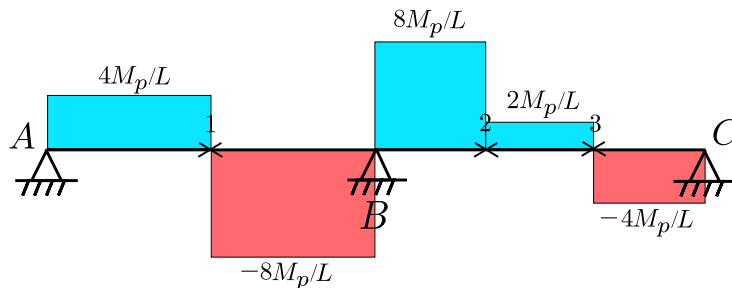
Ce multiplicateur correspond au mécanisme de ruine où les rotules plastiques se forment au niveau de la mi-travée  $AB$  et de l'appui intermédiaire. On aurait pu le prédire en traçant le diagramme des moments élastique, où les moments maximums se trouvent aux positions 1 et  $B$ .



Moment élastique



Moment plastique



Effort tranchant plastique

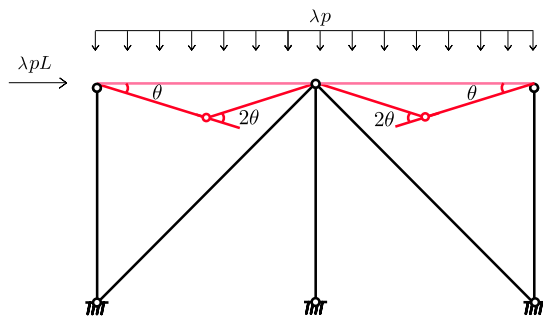
## Question 2

Degré d'hyperstaticité :  $h = 1$

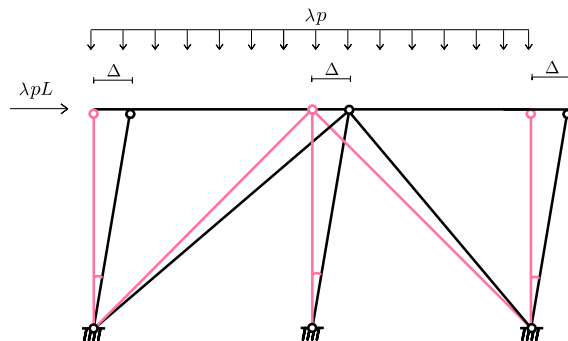
Nombre de sections critiques :  $s = 4$

Nombre de mécanismes possibles :  $m = \binom{s}{h+1} = \binom{4}{2} = 6$

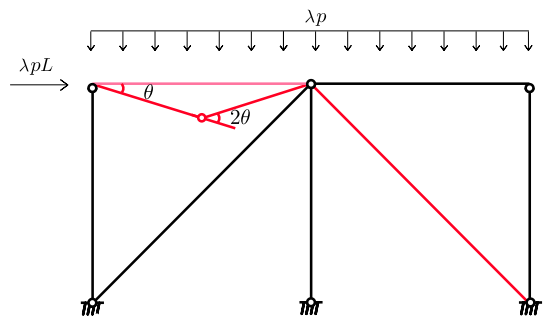
Mécanisme 1



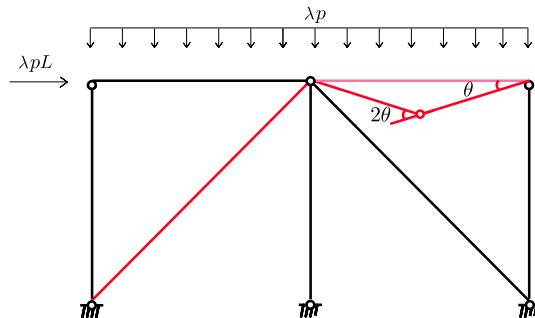
Mécanisme 2



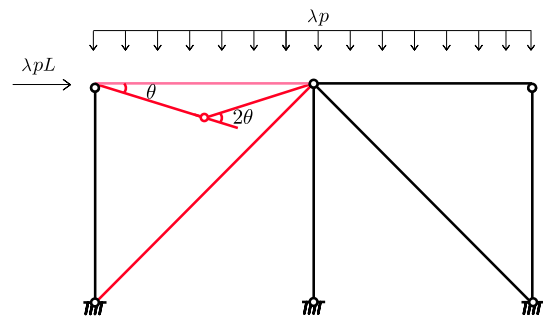
Mécanisme 3



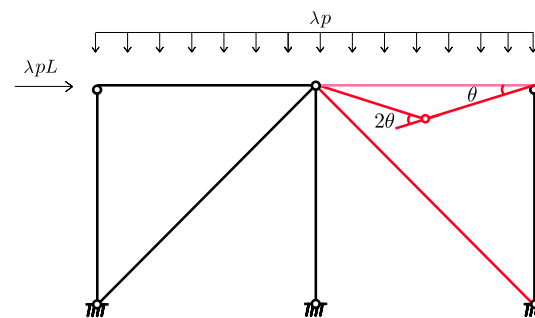
Mécanisme 4



Mécanisme 5



Mécanisme 6





Comme vu au cours, en réalité les deux travées de la poutre  $BE$  voient leur rotules se former en même temps, étant donné qu'elles sont soumises au même chargement. Le nombre de mécanismes plastiques est donc réduit à 2, ce qui est confirmé par le calcul des multiplicateurs plastiques ci-dessous.

**Mécanisme 1 : Les diagonales restent élastiques**

$$\tau_e = \frac{1}{2}\lambda_1 pL \cdot \frac{\theta L}{2} + \frac{1}{2}\lambda_1 pL \cdot \frac{\theta L}{2} = \frac{1}{2}\lambda_1 pL^2 \theta$$

$$\tau_i = 4M_p \theta$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{8M_p}{pL^2}$$

**Mécanisme 2 : Les deux diagonales plastifient**

$$\tau_e = \lambda_2 pL \Delta$$

$$\tau_i = N_p \cdot \frac{\Delta \sqrt{2}}{2} + N_p \cdot \frac{\Delta \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} N_p \Delta$$

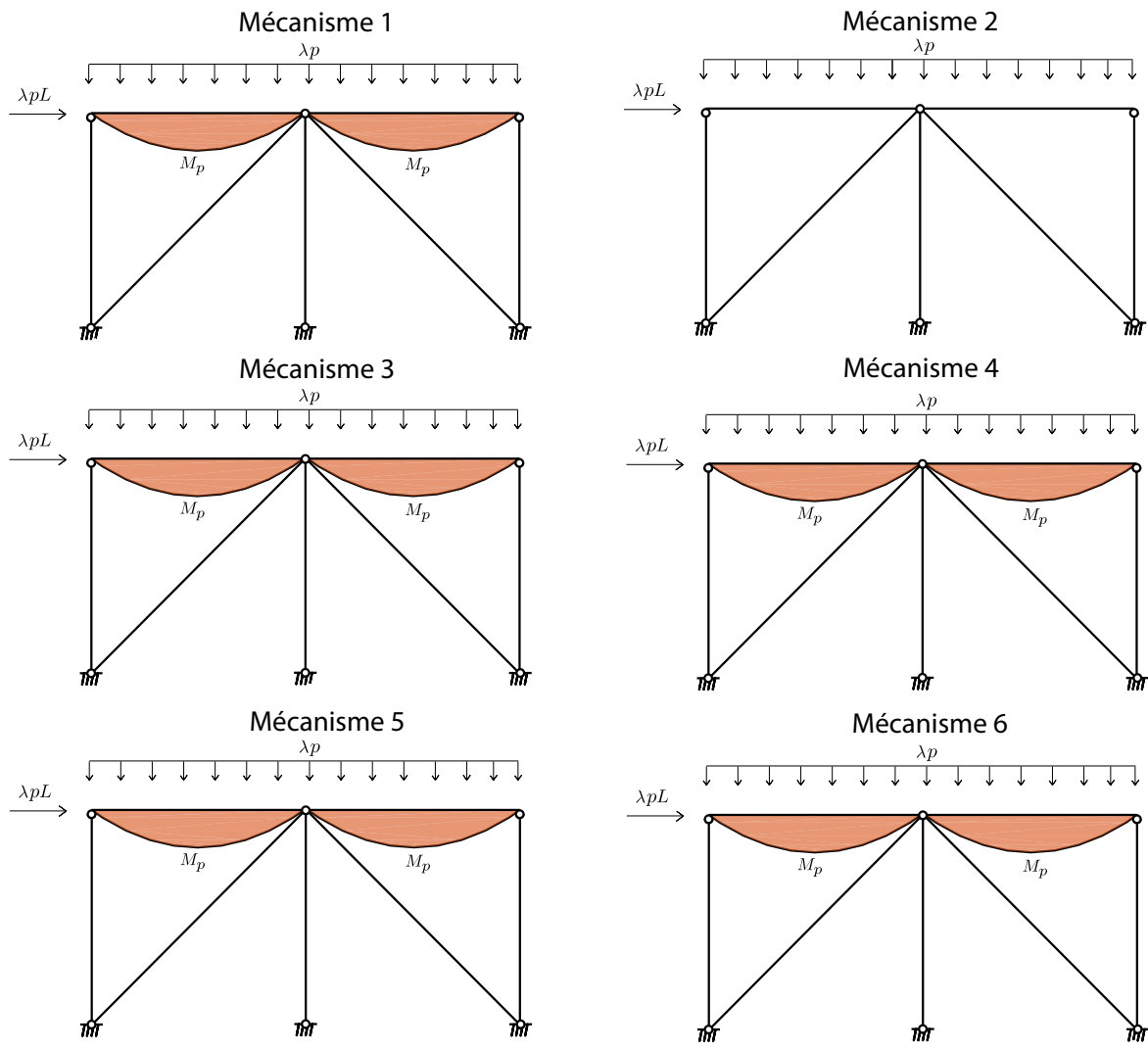
$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{\sqrt{2} N_p}{pL}$$

**Mécanismes 3,4,5,6 : Une des diagonale plastifie**

$$\tau_e = \frac{1}{2}\lambda_3 pL \cdot \frac{\theta L}{2} = \frac{1}{4}\lambda_3 pL^2 \theta$$

$$\tau_i = 2M_p \theta$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \frac{8M_p}{pL^2} = \lambda_1$$



Tout multiplicateur cinématique est supérieur ou égal au multiplicateur limite. Deux cas se profilent :

—  $\lambda_{réel} = \min(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1$

$$N_p < \frac{8}{\sqrt{2}} \frac{M_p}{L}$$

—  $\lambda_{réel} = \min(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2$

$$N_p > \frac{8}{\sqrt{2}} \frac{M_p}{L}$$