

# Analyse des Structures I (GCIV 0607-2)

Examen du 18 janvier 2019

V. Denoël, M. Geuzaine

- lisez attentivement les 5 questions et répondez uniquement à ce qui est demandé
- indiquez vos nom et prénom sur chaque feuille
- munissez-vous uniquement d'une calculatrice, des tables et de quoi écrire

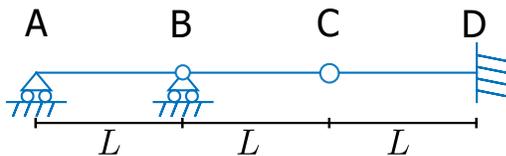
## Question 1 : Questions de théorie (10 points)

Réponse de façon concise aux questions suivantes.

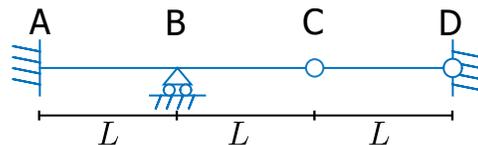
- (i) Théorèmes : Énoncez le théorème de la force unité et illustrez-le à l'aide d'un exemple de votre choix.
- (ii) Généralités : "La raideur appelle l'effort". Sous quelle(s) condition(s) ? Illustrez à l'aide d'un exemple de votre choix.
- (ii) Forces : Deux possibilités pour lever l'hyperstaticité interne d'une structure hyperstatique consistent à extérioriser un effort interne ou un moment de flexion interne. Dans chacun des deux cas, quelles sont les inconnues hyperstatiques associées ? Illustrez à l'aide d'un exemple de votre choix.
- (iv) Déplacements : Définissez la notion de coefficient de raideur  $K_{ij}$  et de coefficient de sollicitation  $k_{ip}$ .
- (v) Plasticité : Dans quelles conditions l'axe neutre plastique peut-il être à une position différente de celle de l'axe neutre élastique ?

## Question 2 : Lignes d'influence (10 points)

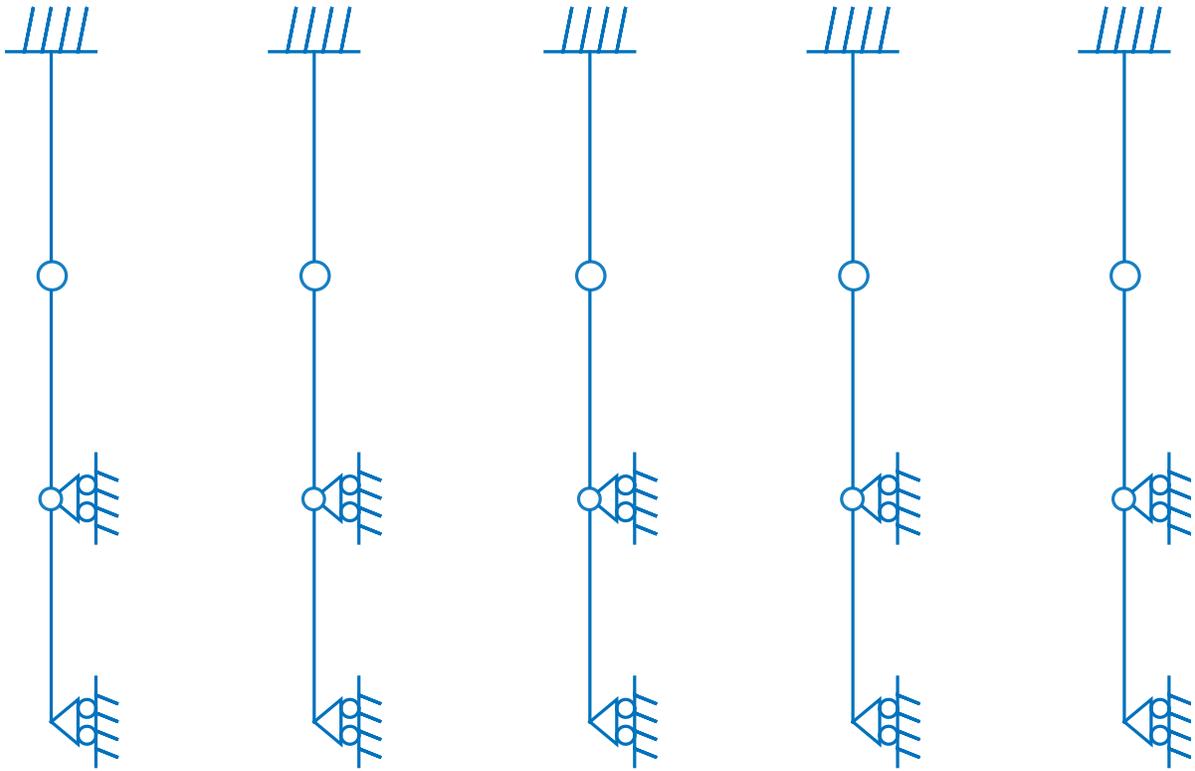
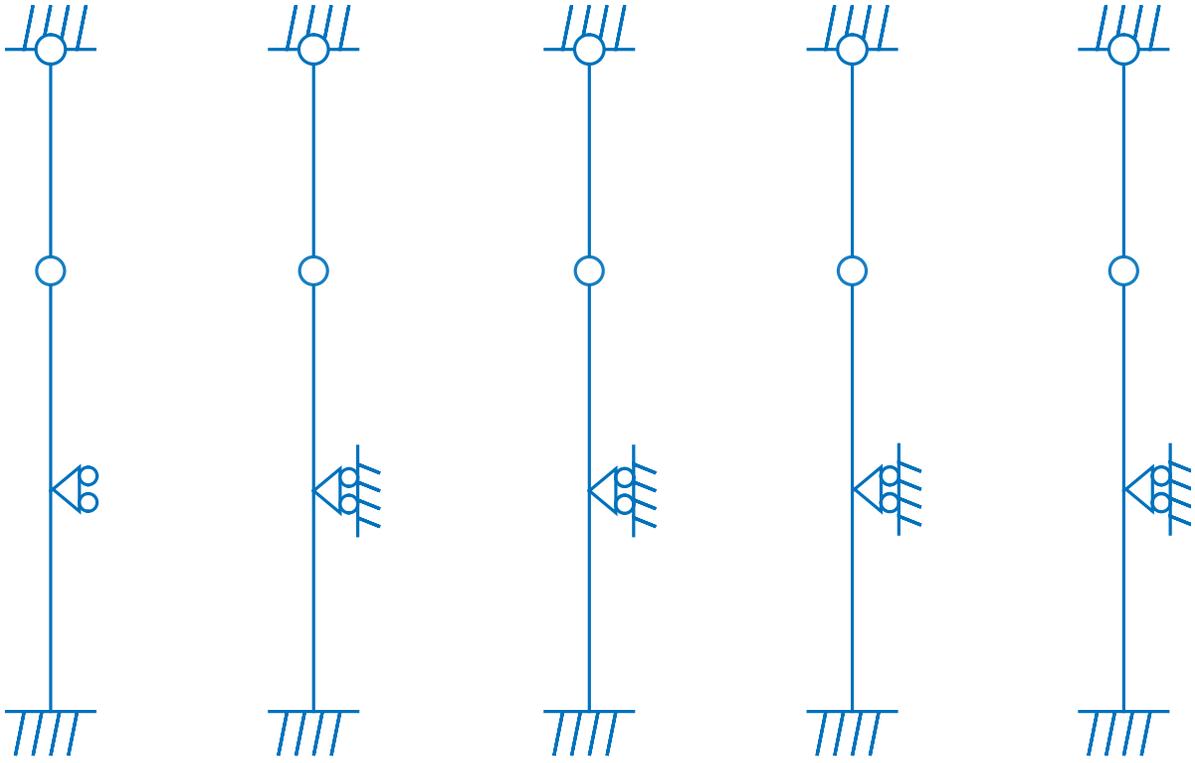
Pour chacune des poutres représentées ci-dessous, tracez les lignes d'influence demandées.



- LI de la réaction verticale en D
- LI du moment en B
- LI de la flèche verticale en C
- LI de la rotation en A
- LI du moment d'encastrement en D



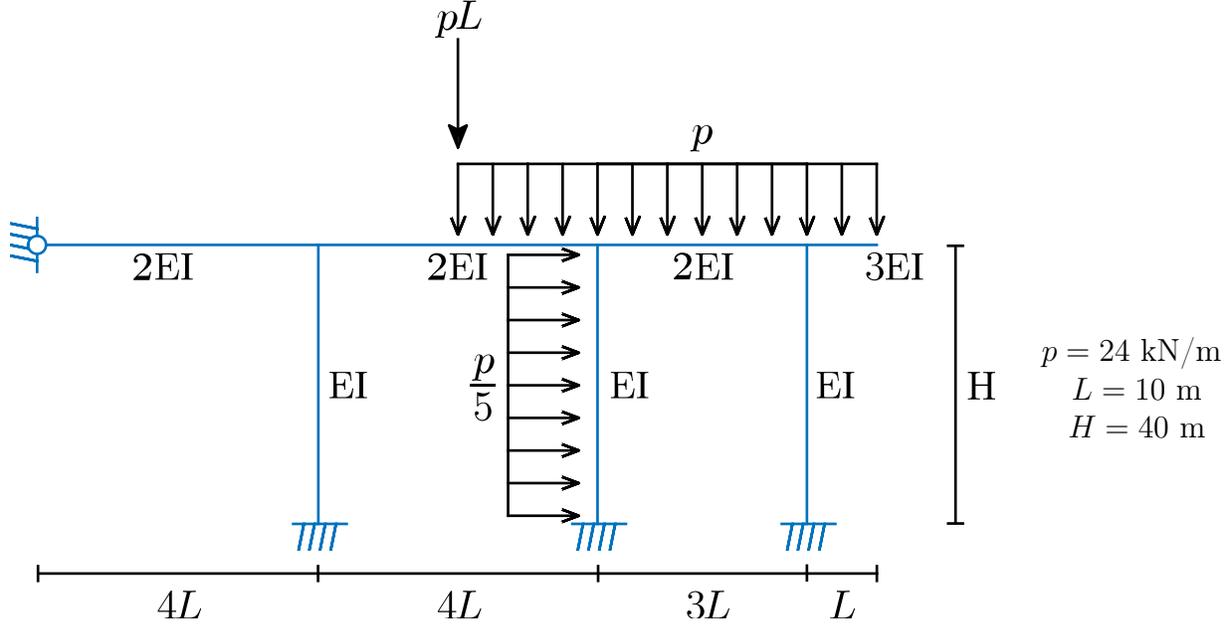
- LI de la réaction verticale en D
- LI du moment en B
- LI de la flèche verticale en B
- LI de la rotation en A
- LI de l'effort tranchant à droite de B



### Question 3 : Méthode de Cross (10 points)

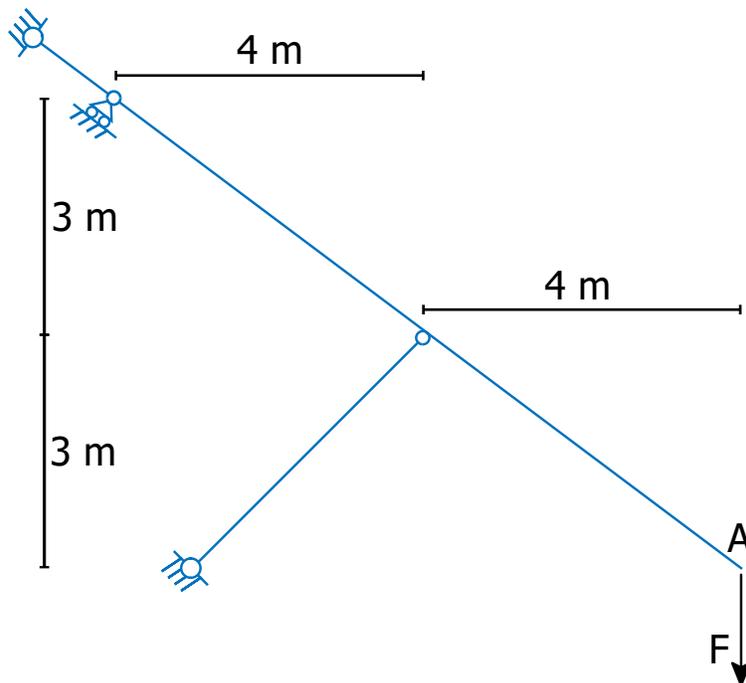
Analysez la structure représentée ci-dessous par la méthode de Cross en détaillant vos calculs.

- 1) Déterminez les moments aux extrémités de tous les éléments.
- 2) Dessinez et annotez le diagramme des moments dans la structure.



### Question 4 : Méthode des déplacements (ou plus simple, 10 points)

Sachant que  $EA \rightarrow \infty$ , simplifiez le schéma statique de la structure représentée ci-dessous et calculez le déplacement vertical du point A en fonction de  $EI$  et  $F$ .



### Question 5 : Méthode des forces (10 points)

Analysez la structure représentée ci-dessous avec la méthode des forces et répondez au questionnaire à choix multiples (juste +1, faux -0.5, ne sais pas 0). Cochez une seule réponse par ligne. Les déformations dues aux efforts tranchants et aux efforts normaux sont supposées négligeables dans les poutres mais pas dans la barre.

Que vaut l'effort normal dans la barre ? (positif en traction)

	-133	-113	-31	-13	0	13	31	113	133	Ne sais pas
N	<input type="radio"/>									

Que valent les réactions d'appuis ? (sens positifs  $\rightarrow$ ,  $\uparrow$  et  $\odot$ )

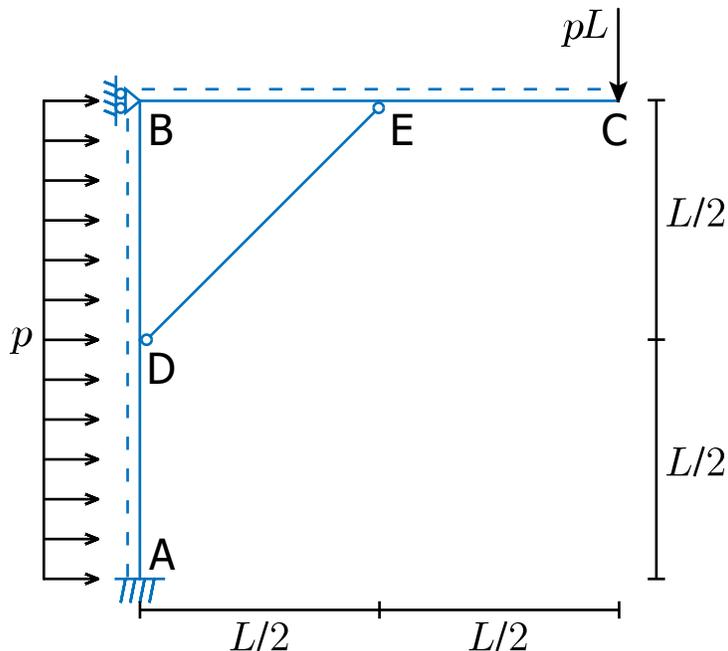
	< -50	-40	-30	-20	0	20	30	40	> 50	Ne sais pas
$H_B$	<input type="radio"/>									
$H_A$	<input type="radio"/>									
$V_A$	<input type="radio"/>									
$M_A$	<input type="radio"/>									

Que valent les moments en B, D et E ? (positif quand la fibre de référence est tendue)

	-80	-60	-40	-20	0	20	40	60	80	Ne sais pas
$M_B$	<input type="radio"/>									
$M_D$	<input type="radio"/>									
$M_E$	<input type="radio"/>									

Que valent les efforts tranchants en D ? (en valeur absolue)

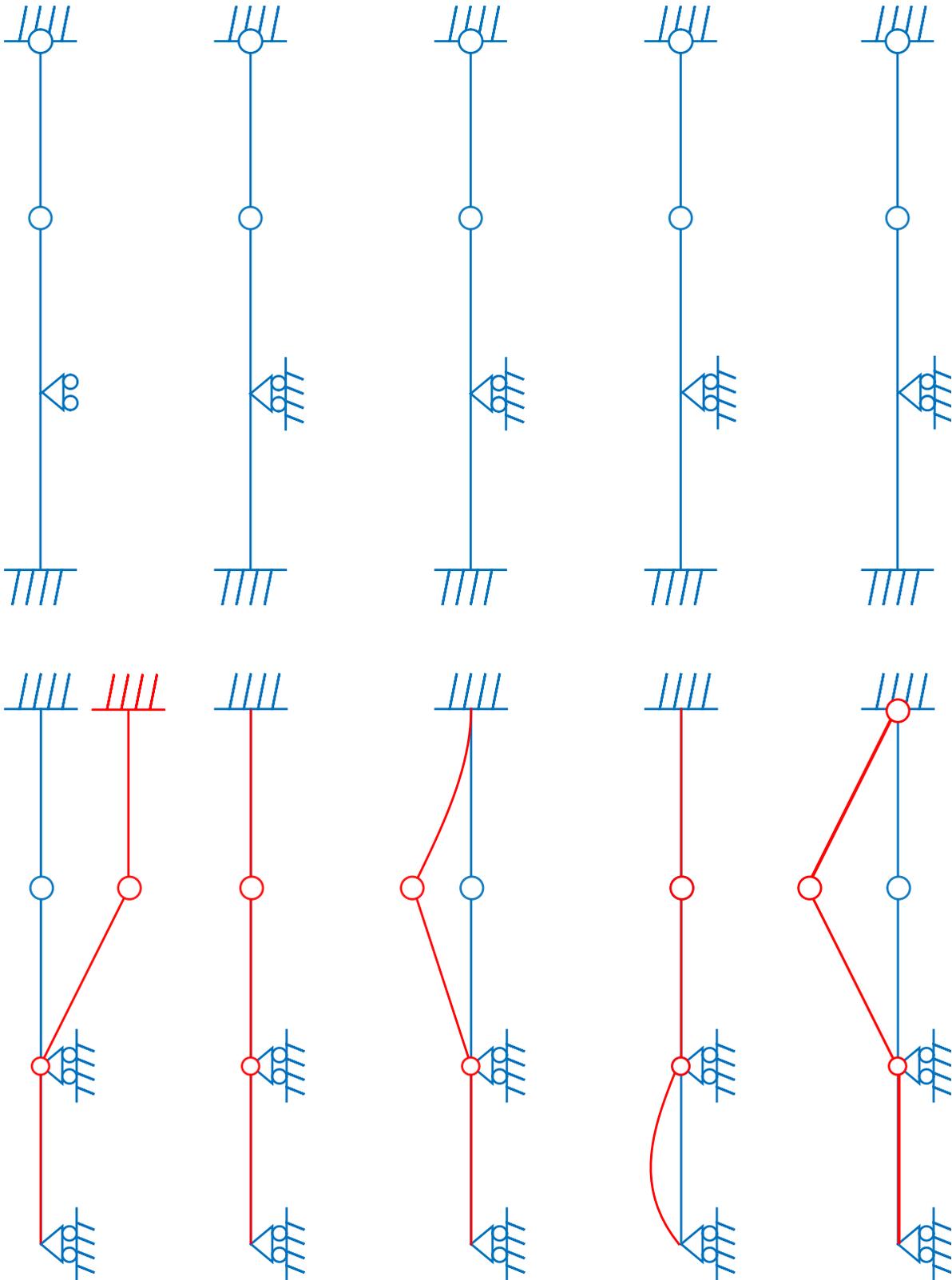
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	Ne sais pas
$D_{bas}$	<input type="radio"/>									
$D_{haut}$	<input type="radio"/>									



$$\begin{aligned}
 p &= 10 \text{ kN/m} \\
 L &= 4 \text{ m} \\
 E &= 210\,000 \text{ MPa} \\
 I &= 23\,130 \text{ cm}^4 \\
 A &= 14,274 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

# Solutions

## Question 2 : Lignes d'influence





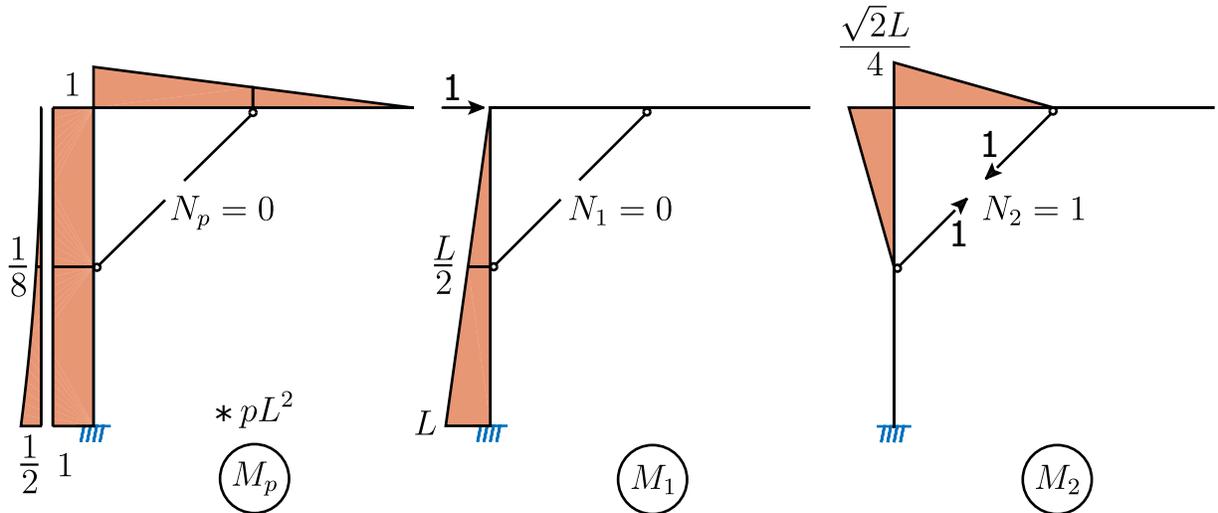
#### Question 4 : Méthode des déplacements (ou plus simple)

Lorsque  $EA \rightarrow \infty$ , la structure se ramène à une simple poutre bi-appuyée isostatique. Les déformations dues à l'effort normal sont négligeables étant donné que  $EA \rightarrow \infty$ . Il n'est donc pas nécessaire de déterminer le diagramme des efforts normaux dans la structure. Le diagramme des moments obtenu dans la poutre sous la charge  $F$  est donné ci-dessous et le théorème de la force unité est appliqué pour calculer le déplacement vertical du point A. Lorsqu'une force unitaire verticale est appliquée au point A, le diagramme des moments dans la structure est semblable à celui qui est dessiné ci-dessous, en posant  $F = 1$ . Dès lors,

$$d = \int \frac{MM_1}{EI} ds = \frac{160F}{3EI}$$

## Question 5 : Méthode des forces

La structure est deux fois hyperstatique (une fois intérieurement et une fois extérieurement). Elle est rendue isostatique, par exemple, en libérant la réaction horizontale à l'appui en B ( $X_1 = H_B$ ) et en libérant l'effort normal dans la barre oblique ( $X_2 = N$ ).



Coefficients de flexibilité :

$$F_{11} = \frac{L^3}{3EI}; F_{12} = \frac{\sqrt{2}L^3}{96EI}; F_{22} = \frac{L^3}{24EI} + \frac{\sqrt{2}L}{2EA}$$

$$f_{1p} = \frac{pL^4}{2EI} + \frac{pL^4}{8EI}; f_{2p} = \frac{5\sqrt{2}pL^4}{96EI} + \frac{\sqrt{2}pL^4}{16EI} + \frac{\sqrt{2}pL^4}{768EI}$$

Inconnues hyperstatiques :

$$X_1 = H_B = -70 \text{ kN et } X_2 = N = -113 \text{ kN}$$

Étant donné le choix de la structure isostatique de référence posé ici, le calcul des valeurs des inconnues hyperstatiques donne les réponses des deux premières questions du QCM. Les réponses des questions suivantes sont ensuite calculées de la manière suivante :

$$H_A = -H_B - pL = 30 \text{ kN}$$

$$V_A = pL = 40 \text{ kN (calculable sans } X_1 \text{ et } X_2)$$

$$M_A = pL^2 + \frac{pL^2}{2} + LH_B = -40 \text{ kNm}$$

$$M_B = pL^2 + \frac{\sqrt{2}L}{4}N = 0 \text{ kNm}$$

$$M_D = \frac{pL^2}{8} + pL^2 + \frac{L}{2}H_B = 40 \text{ kNm}$$

$$M_E = \frac{pL^2}{2} = 80 \text{ kNm (calculable sans } X_1 \text{ et } X_2)$$

$$|T_{D,bas}| = \left| H_A + \frac{pL}{2} \right| = 50 \text{ kN}$$

$$|T_{D,haut}| = |T_{D,bas} + N \cos(45^\circ)| = 30 \text{ kN}$$

En résumé :

Que vaut l'effort normal dans la barre ? (positif en traction)

	-133	-113	-31	-13	0	13	31	113	133	Ne sais pas
N	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>							

Que valent les réactions d'appuis ? (sens positifs  $\rightarrow$ ,  $\uparrow$  et  $\odot$ )

	< -50	-40	-30	-20	0	20	30	40	> 50	Ne sais pas
$H_B$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$H_A$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$V_A$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$M_A$	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>				

Que valent les moments en B, D et E ? (positif quand la fibre de référence est tendue)

	-80	-60	-40	-20	0	20	40	60	80	Ne sais pas
$M_B$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$M_D$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>				
$M_E$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>				

Que valent les efforts tranchants en D ? (en valeur absolue)

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	Ne sais pas
$D_{bas}$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$D_{haut}$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

# Analyse des Structures I (GCIV 0607-2)

Septembre 2019

V. Denoël, M. Geuzaine

- lisez attentivement les 4 questions et répondez uniquement à ce qui est demandé
- indiquez vos nom et prénom sur chaque feuille
- munissez-vous uniquement d'une calculatrice, des tables et de quoi écrire

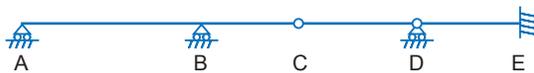
## Question 1 : Questions de théorie (10 points)

Répondre de façon concise aux questions suivantes.

- Théorèmes : Énoncez le principe des travaux virtuels et illustrez-le à l'aide d'un exemple de votre choix.
- Forces : Quels sont les 4 types d'inconnues hyperstatiques ? Appariez les types de coupures réalisées et les inconnues extériorisées.
- Déplacements : Quelles sont les unités des éléments de la matrice de raideur  $\mathbf{K}$  ? Justifiez/discutez.
- Plasticité : Dans quelles conditions l'axe neutre plastique peut-il être à une position différente de celle de l'axe neutre élastique ?

## Question 2 : Lignes d'influence (10 points)

Pour chacune des poutres représentées ci-dessous, tracez les lignes d'influence demandées.



- LI de la réaction verticale en  $D$
- LI du moment en  $B$
- LI de la flèche verticale en  $C$
- LI de la rotation en  $A$
- LI du moment d'encastrement en  $E$

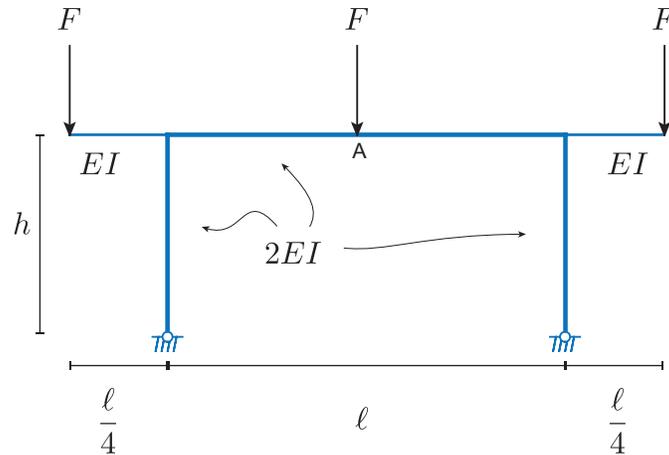


- LI de la réaction verticale en  $D$
- LI de l'effort tranchant en  $B$
- LI de la flèche verticale en  $B$
- LI de la rotation en  $A$
- LI de l'effort tranchant à droite de  $D$

### Question 3 : Méthode des forces (10 points)

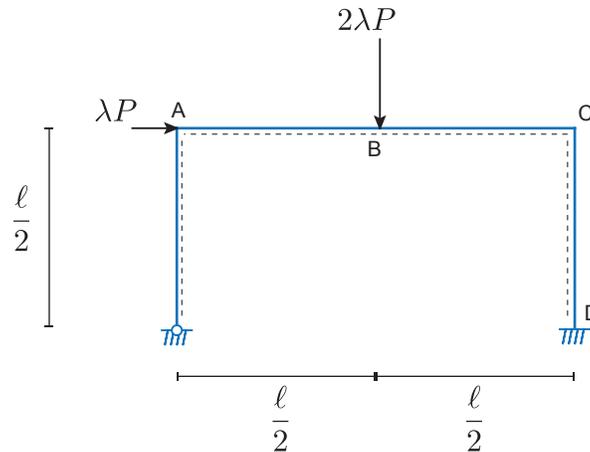
Analysez la structure représentée ci-dessous en employant la méthode des forces :

- dressez les diagrammes des moments, efforts tranchants et efforts axiaux dans la structure, en fonction des paramètres donnés.
- donnez la valeur du moment de flexion au point A (sur l'axe de symétrie) en fonction du rapport  $h/\ell$  et du moment de référence  $F\ell$ . Montrez que les deux cas limites  $h/\ell \ll 1$  et  $h/\ell \gg 1$  correspondent à des configurations bien connues.



### Question 4 : Analyse plastique (10 points)

Déterminez la valeur du multiplicateur de charge  $\lambda$  menant à la ruine plastique de la structure représentée ci-dessous, sachant que  $\ell = 6m$ ,  $P = 5kN$  et que la poutre et les colonnes ont un moment plastique de flexion  $M_p^+ = M_p^- = 15kNm$ . Utilisez la méthode cinématique et supposez que les sections droites ont un comportement élastique parfaitement plastique en rotation. Les déformations d'effort axial peuvent être négligées.



### Question 5 : Méthode des déplacements, rotations ou Cross (10 points)

Sachant que sachant que  $EI = 30 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2$  pour tous les éléments constitutifs du cadre,  $\ell = 6\text{m}$ ,  $P = 5\text{kN}$ , analysez la structure de la Question 4 pour  $\lambda = 1$  et répondez au questionnaire à choix multiples (juste +1, faux -0.5, ne sais pas 0). Cochez une seule réponse par ligne.

Que valent les efforts normaux dans la poutre et les deux colonnes, en kN ? (positif en traction)

	-12,3	-10,9	-9,1	-6,0	-4,0	-2,6	0	0,9	2,6	Ne sais pas
$N_{\text{poutre}}$	<input type="radio"/>									
$N_{\text{gauche}}$	<input type="radio"/>									
$N_{\text{droite}}$	<input type="radio"/>									

Que valent les moments en A, B, D et E, en kN.m ? (positif quand la fibre de référence est tendue)

	< -20	-15,1	-9,3	-3,0	0	7,9	8,7	8,8	> 20	Ne sais pas
$M_A$	<input type="radio"/>									
$M_B$	<input type="radio"/>									
$M_D$	<input type="radio"/>									
$M_E$	<input type="radio"/>									

Que valent les efforts tranchants sur chacun des 3 tronçons de la traverse, en kN ? (en valeur absolue)

	0,9	2,6	4,0	5,6	6,0	10,1	10,9	15,6	19,1	Ne sais pas
$T_{AB}$	<input type="radio"/>									
$T_{BC}$	<input type="radio"/>									
$T_{CD}$	<input type="radio"/>									