

Analyse des Structures I (GCIV 0607-2)

Interrogation 1 - Analyse plastique, 8 octobre 2018

V. Denoël, M. Geuzaine

- lisez attentivement les 3 questions et répondez uniquement à ce qui est demandé
- indiquez vos nom et prénom sur chaque feuille
- munissez-vous uniquement d'un bloc de feuilles vierges et de bics ou stylos

Question 1 (10 points)

Analysez la structure représentée ci-dessous avec la méthode cinématique et détaillez votre raisonnement.

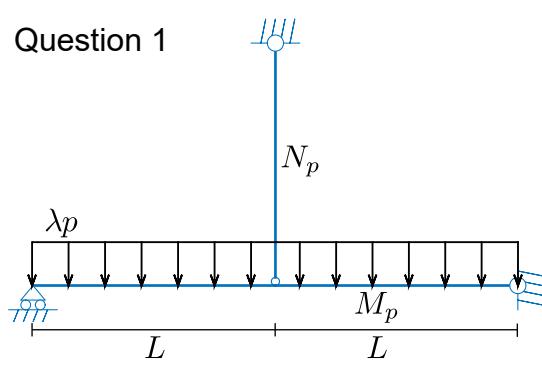
1. Combien de zones plastiques faut-il pour former un mécanisme de ruine complet ?
2. Combien y a-t-il de sections critiques ? Où se trouvent-elles ?
3. Combien existe-t-il de mécanismes différents ? Pour chacun de ces mécanismes, que vaut le multiplicateur plastique ?
4. Quelle est la plus petite valeur de N_p telle que la ruine se produit sans que le tirant ne plastifie ? Exprimez votre réponse en fonction de $\frac{M_p}{L}$.

Question 2 (10 points)

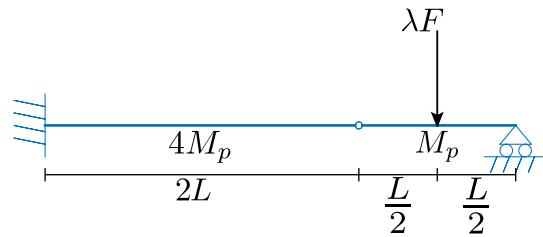
Analysez la structure représentée ci-dessous avec la méthode cinématique et détaillez votre raisonnement.

1. Combien de zones plastiques faut-il pour former un mécanisme de ruine complet ?
2. Combien y a-t-il de sections critiques ? Où se trouvent-elles ?
3. Combien existe-t-il de mécanismes différents ? Pour chacun de ces mécanismes, que vaut le multiplicateur plastique ?
4. Quel est le mécanisme de ruine et le multiplicateur de ruine associé ?
5. Tracez le diagramme des moments et le diagramme des efforts tranchants à la ruine.

Question 1



Question 2



Question 3 (20 points)

Analysez la structure représentée ci-dessous avec la méthode cinématique et répondez au questionnaire à choix multiples (juste +2, faux -1, je ne sais pas 0). Cochez une seule réponse par ligne.

1. Quel est le degré d'hyperstaticité de cette structure ?

- 0 1 2 3 4 Autre Je ne sais pas

2. Que vaut le multiplicateur de ruine de cette structure ?

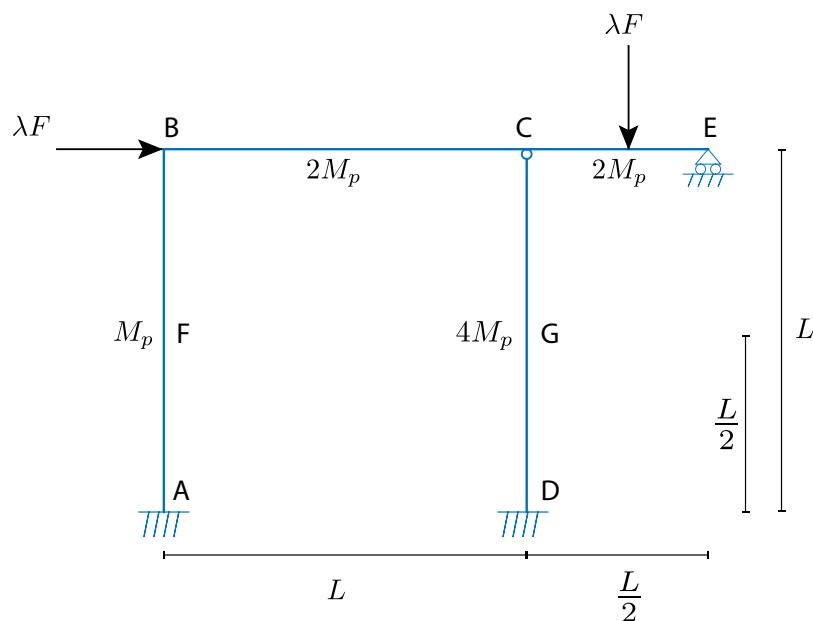
- $\frac{4M_p}{FL}$ $\frac{6M_p}{FL}$ $\frac{8M_p}{FL}$ $\frac{12M_p}{FL}$ $\frac{24M_p}{FL}$ Autre Je ne sais pas

3. Que valent les moments en B, D, E, F et G à la ruine (en valeur absolue) ?

	0	$\frac{3M_p}{4}$	M_p	$\frac{5M_p}{4}$	$4M_p$	Autre	Je ne sais pas
B	<input type="radio"/>						
D	<input type="radio"/>						
E	<input type="radio"/>						
F	<input type="radio"/>						
G	<input type="radio"/>						

4. Que valent les efforts tranchants en A, D et G à la ruine (en valeur absolue) ?

	0	$\frac{M_p}{L}$	$\frac{2M_p}{L}$	$\frac{4M_p}{L}$	$\frac{5M_p}{L}$	Autre	Je ne sais pas
A	<input type="radio"/>						
D	<input type="radio"/>						
G	<input type="radio"/>						



Solutions

Question 1

1. $h + 1 = 2$

2. $s = 4$

3. $C_4^2 = 6$ mécanismes voir Figures ci-dessous.

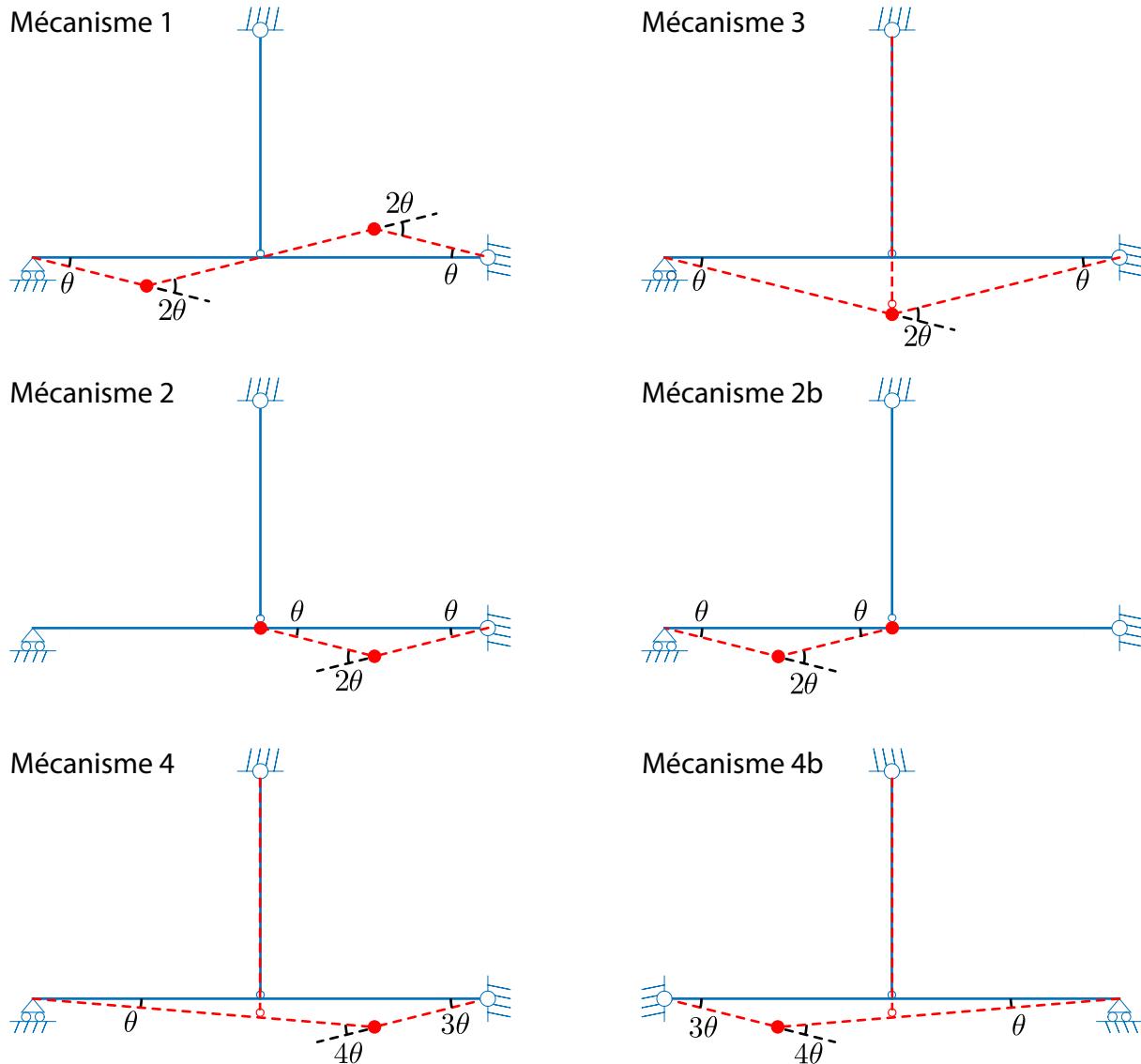
Mécanisme 1 : $T_i = 4M_p\theta$; $T_e = 0$; $\lambda = \infty$

Mécanisme 2(b) : $T_i = 3M_p\theta$; $T_e = \frac{\lambda p\theta L^2}{4}$; $\lambda = \frac{12M_p}{pL^2}$

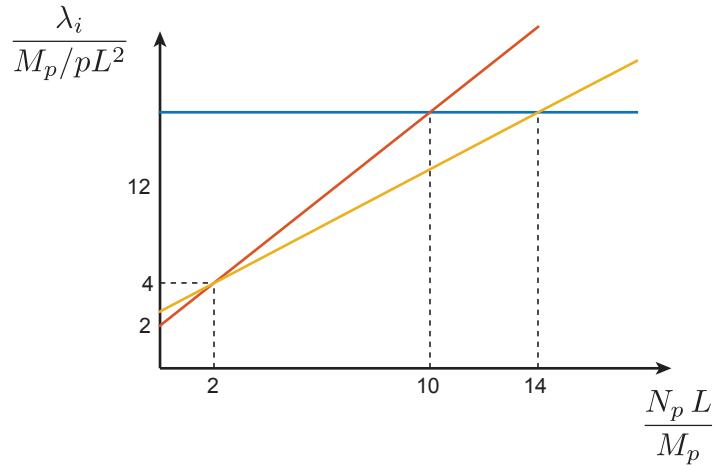
Mécanisme 3 : $T_i = 2M_p\theta + N_p\theta L$; $T_e = \lambda p\theta L^2$; $\lambda = \frac{N_p L + 2M_p}{pL^2}$

Mécanisme 4(b) : $T_i = 4M_p\theta + N_p\theta L$; $T_e = \frac{3}{2}\lambda p\theta L^2$; $\lambda = \frac{8M_p + 2N_p L}{3pL^2}$

4. $14\frac{M_p}{L} < N_p$

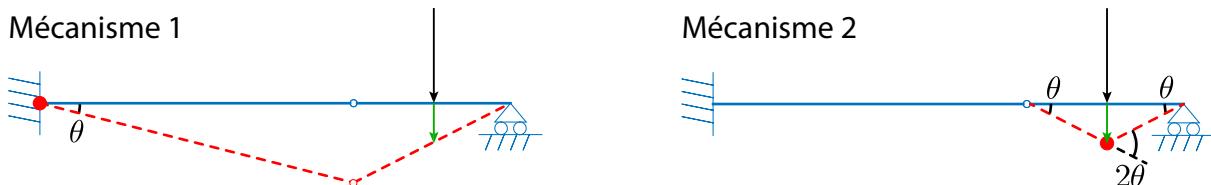


La figure ci-dessous représente les multiplicateurs de ruine des mécanismes 2, 3 et 4, en fonction de la résistance plastique (relative) de la barre. On voit que le mécanisme à la ruine est le mécanisme 3 si $N_p L / M_p \leq 2$, ensuite le mécanisme 4 si $2 \leq N_p L / M_p \leq 14$ et finalement le mécanisme 2 au-delà. D'où la condition sur la résistance plastique nécessaire de la barre pour qu'elle ne périsse pas dans le mécanisme à la ruine.



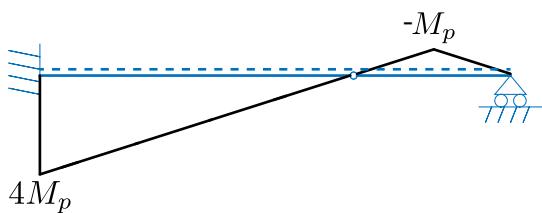
Question 2

1. $h + 1 = 1$
2. $s = 2$
3. $C_2^1 = 2$ mécanismes, voir Figures ci-dessous
Mécanisme 1 : $T_i = 4M_p\theta$; $T_e = \lambda F\theta L$; $\lambda = \frac{4M_p}{FL}$
Mécanisme 2 : $T_i = 2M_p\theta$; $T_e = \frac{\lambda F\theta L}{2}$; $\lambda = \frac{4M_p}{FL}$

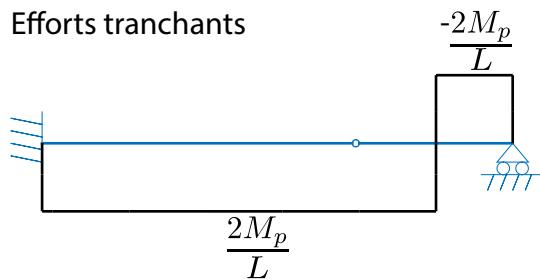


4. Les deux mécanismes apparaissent en même temps pour $\lambda = \frac{4M_p}{FL}$.
5. Voir Figures ci-dessous.

Moments



Efforts tranchants



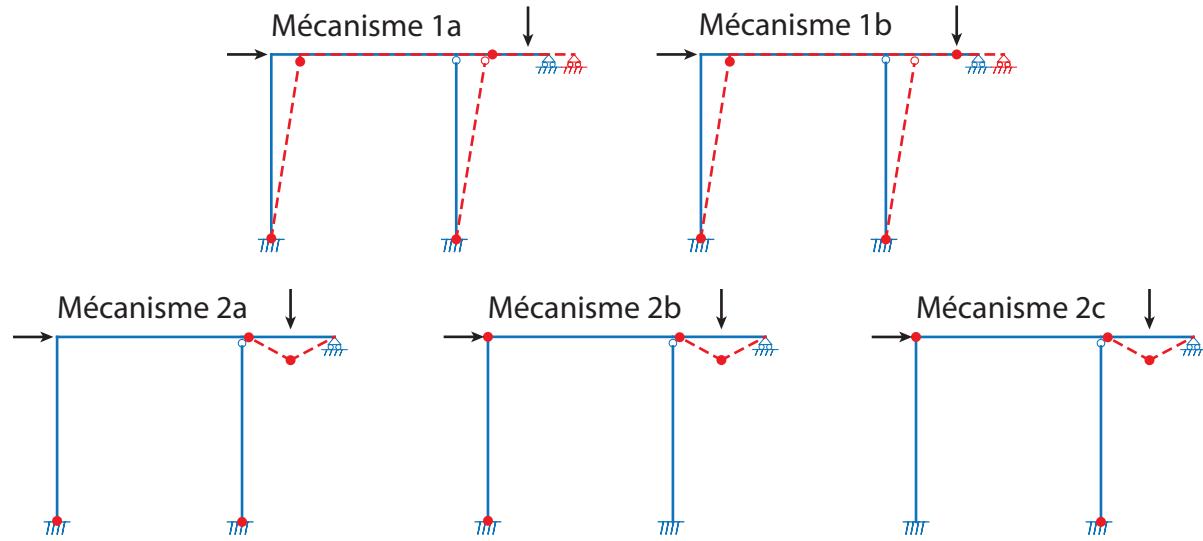
Question 3

1. $h = 3$ car il y a 7 réactions et 4 équations (3 équations d'équilibre + 1 équation de moment nul à la rotule)

2. $\lambda_{min} = \frac{6M_p}{FL}$

Mécanismes 1a et 1b : $T_i = 6M_p\theta$; $T_e = \lambda F\theta L$; $\lambda = \frac{6M_p}{FL}$

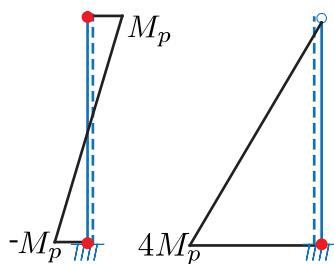
Mécanismes 2a, 2b et 2c : $T_i = 6M_p\theta$; $T_e = \frac{\lambda F\theta L}{4}$; $\lambda = \frac{24M_p}{FL}$



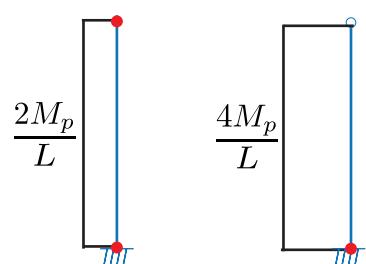
3. $M_B = M_p$; $M_D = 4M_p$; $M_E = 0$; $M_F = 0$; $M_G = 2M_p$ (autre)

4. $T_A = \frac{2M_p}{L}$; $T_D = \frac{4M_p}{L}$; $T_G = \frac{4M_p}{L}$

Moments



Efforts tranchants



Analyse des Structures I (GCIV 0607-2)

Interrogation 2 - Méthode des forces, 5 octobre 2018

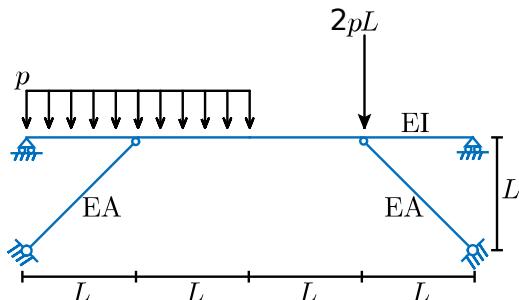
V. Denoël, M. Geuzaine

- lisez attentivement les 2 questions et répondez uniquement à ce qui est demandé
- indiquez vos nom et prénom sur chaque feuille
- munissez-vous uniquement d'une calculatrice, des tables de Mohr et de quoi écrire

Question 1 (12 points)

Un pont à béquilles est soumis à une charge répartie sur sa première moitié et à une charge concentrée au milieu de sa deuxième moitié. Son schéma statique est représenté ci-dessous. Analysez cette structure par la méthode des forces.

1. Quel est son degré d'hyperstaticité ? Dessinez une structure isostatique de référence.
2. Calculez les coefficients F_{ij} et f_{ip} associés à cette structure isostatique. Les déformations dues aux efforts tranchants sont supposées négligeables dans toute la structure tandis que les déformations dues aux efforts normaux sont supposées négligeables dans la poutre supérieure uniquement.
3. Donnez l'expression $M_{\text{mi-travée}}(\kappa)$ du moment de flexion à mi-travée en fonction du rapport des raideurs axiale et flexionnelle, exprimé par le paramètre adimensionnel $\kappa = \frac{EA}{L} / \frac{EI}{L^3}$. Esquissez cette expression de $M_{\text{mi-travée}}(\kappa)$ à l'aide d'un graphique et commentez son allure générale.
4. Quelle est l'efficacité des béquilles sur le moment de flexion à mi-travée, c'est-à-dire le moment de flexion minimal que l'on peut atteindre divisé par le moment de flexion sans les béquilles ?
5. Dans les deux cas limites où $\kappa \rightarrow \infty$ et $\kappa \rightarrow 0$, dessinez les diagrammes des moments et indiquez-y les valeurs principales.

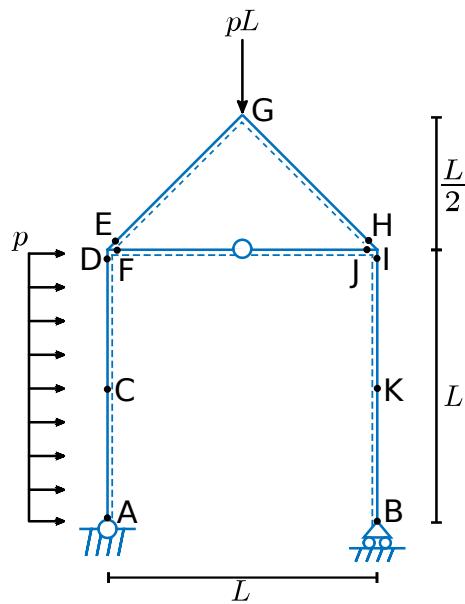


Question 2 (18 points)

Analysez la structure représentée ci-dessous avec la méthode des forces et répondez au questionnaire à choix multiples (juste +2, faux -1, ne sais pas 0). Cochez une seule réponse par ligne. Les déformations dues aux efforts tranchants et aux efforts normaux sont supposées négligeables dans toute la structure.

Que valent les moments en C, D, E, F, G, H, I, J et K ? Leur signe est positif lorsque la fibre de référence, représentée en pointillés sur la figure ci-dessous, est tendue.

	$\frac{-pL^2}{8}$	0	$\frac{pL^2}{8}$	$\frac{(2-\sqrt{2})pL^2}{4}$	$\frac{\sqrt{2}pL^2}{4}$	$\frac{pL^2}{2}$	Autre	Ne sais pas
C	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
D	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
E	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
F	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
G	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
H	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
I	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
J	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
K	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

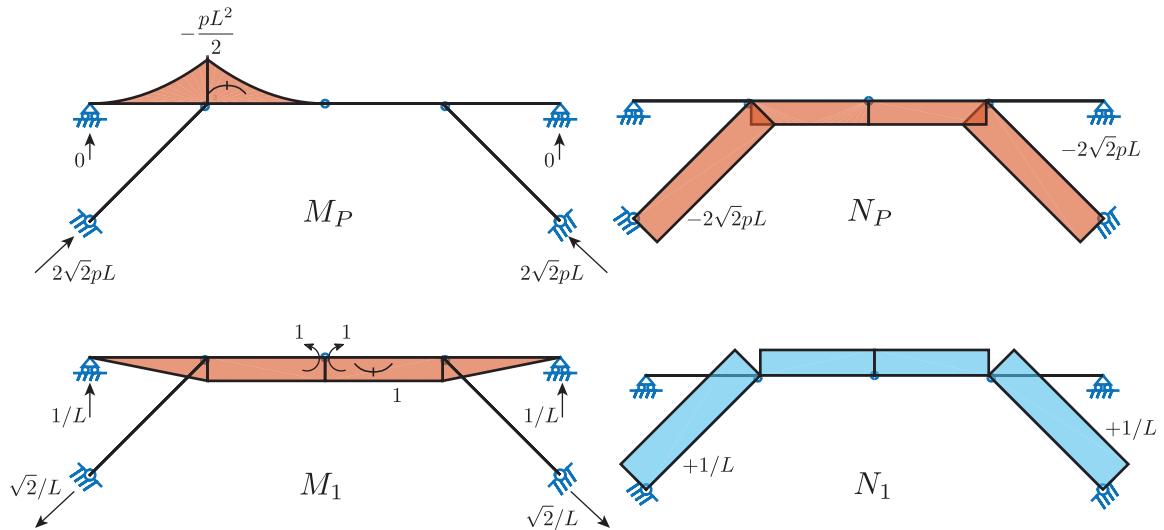


Solutions

Question 1

Solution 1

La structure est une fois hyperstatique. On peut la rendre isostatique en introduisant une rotule à mi-longueur du tablier. Cette solution est d'autant plus idéale que l'on demande de tracer l'évolution du moment à mi-travée en fonction de κ . Les diagrammes des moments et efforts axiaux sous l'effet de la sollicitation extérieure et du couple de moments unitaires conjugués à la rotation relative des lèvres de la coupure sont donnés ci-dessous.



Les coefficients de flexibilité peuvent dès lors être établis, compte tenu des hypothèses de déformabilité :

$$F_{11} = \frac{2}{EI} \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot L + 1 \cdot 1 \cdot L \right) + \frac{2}{EA} \left(\frac{\sqrt{2}}{L} \right)^2 L \sqrt{2} = \frac{8L}{3EI} + \frac{4\sqrt{2}}{EA L}$$

$$f_{1P} = \frac{1}{EI} \frac{1}{4} \left(\frac{-pL^2}{2} \right) \cdot 1 \cdot L + \frac{1}{EI} \frac{1}{3} \left(\frac{-pL^2}{2} \right) \cdot 1 \cdot L - \frac{2}{EA} \cdot 2\sqrt{2}pL \frac{\sqrt{2}}{L} L \sqrt{2} = -\frac{7pL^3}{24EI} - \frac{8\sqrt{2}pL}{EA}$$

L'équation de compatibilité est

$$F_{11}X_1 + f_{1P} = 0$$

où X_1 représente le moment à mi-travée dans le tablier. La solution de cette équation est

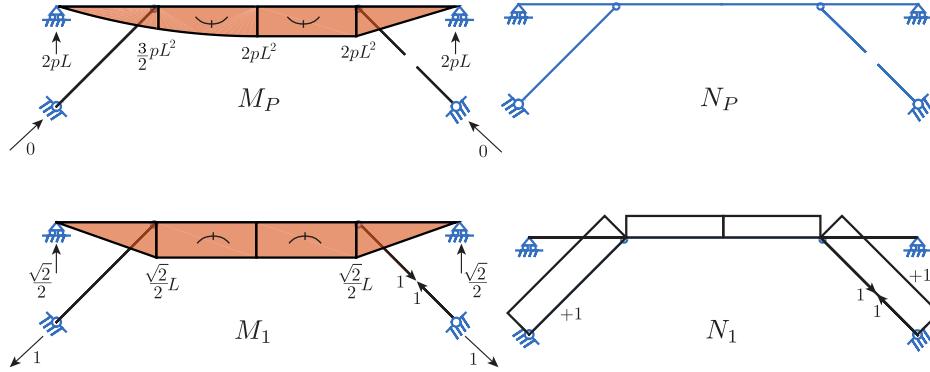
$$X_1 = \frac{7\kappa + 192\sqrt{2}}{2\kappa + 3\sqrt{2}} \frac{pL^2}{32}$$

Dans les deux cas limites, on trouve :

- $X_1 = 2pL^2$ ($\kappa \rightarrow 0$, poutre sur deux appuis) ;
- $X_1 = \frac{7}{64}pL^2$ ($\kappa \rightarrow +\infty$, appuis à rouleau sur le tablier, inclinés à 45°)

Solution 2

Une autre possibilité est de rendre la structure isostatique en réalisant une coupure dans une des béquilles. Les diagrammes des moments et des efforts axiaux obtenus dans la structure soumise aux sollicitations extérieures et au couple d'efforts normaux unitaires associés au déplacement relatif des lèvres de la coupure sont donnés ci-dessous.



Les coefficients de flexibilité sont alors établis comme suit, en prenant en compte les hypothèses de déformabilité :

$$\begin{aligned} F_{11} &= 2 \cdot \frac{L}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}L}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}L}{2} + \frac{2L}{EI} \cdot \frac{\sqrt{2}L}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}L}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}L}{EA} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{4L^3}{3EI} + \frac{2\sqrt{2}L}{EA} \\ f_{1P} &= -\frac{L}{EI} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} L \cdot \left(\frac{3}{2}pL^2 + \frac{7}{4}pL^2 \right) - \frac{L}{EI} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} L \cdot \left(\frac{3}{2}pL^2 + \frac{15}{2}pL^2 + 2pL^2 \right) \\ &\quad - \frac{L}{EI} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} L \cdot 2pL^2 - \frac{L}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} L \cdot 2pL^2 = -\frac{121\sqrt{2}pL^4}{48EI} \end{aligned}$$

Ensuite, l'équation de compatibilité est résolue. Dans cette équation, X_1 représente maintenant l'effort normal dans la bâche de droite.

$$X_1 = \frac{121\sqrt{2}\kappa}{4\kappa + 6\sqrt{2}} \frac{pL}{16}$$

Dans les deux cas limites, on obtient :

- $X_1 = 0$ ($\kappa \rightarrow 0$, les bâches se déforment et ne reprennent pas d'effort)
- $X_1 = \frac{121\sqrt{2}}{64}pL$ ($\kappa \rightarrow \infty$, les bâches sont assimilables à des appuis)

Pour finir, le moment à mi-travée est calculé en combinant le moment dans la structure isostatique de référence sous l'effet des sollicitations extérieures et celui de l'inconnue hyperstatique,

$$M_{\text{mi-travée}} = 2pL^2 - X_1 \frac{\sqrt{2}}{2} L = \frac{7\kappa + 192\sqrt{2}}{2\kappa + 3\sqrt{2}} \frac{pL^2}{32}$$

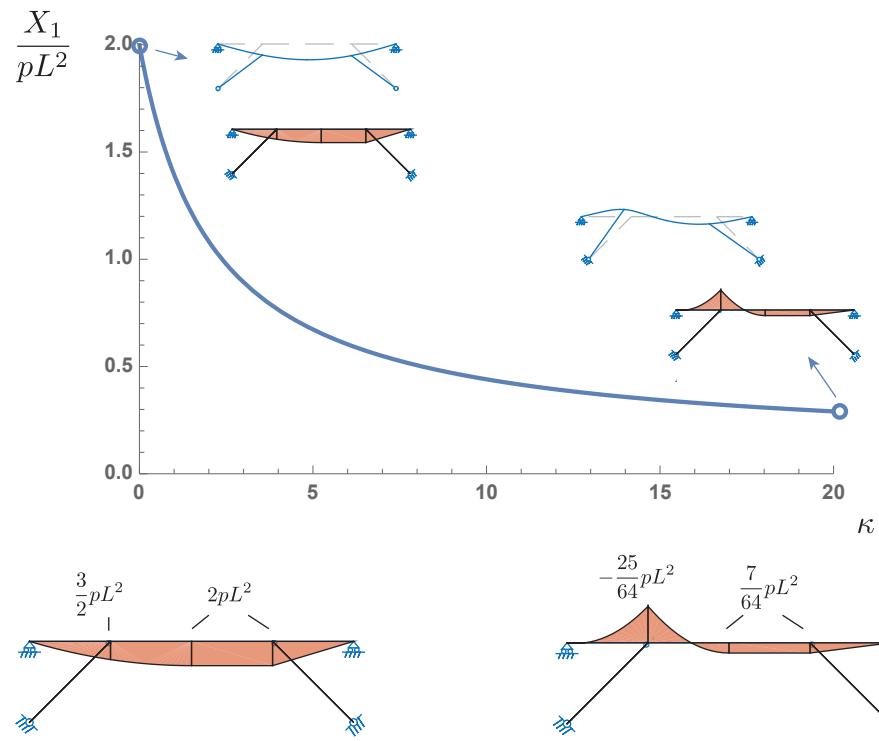
Ce résultat est naturellement identique au résultat de la solution 1 et rappelle que la structure peut être rendue isostatique de façon totalement arbitraire.

Solution 1 et 2

L'expression du moment à mi-travée est représentée à la figure ci-dessous. On voit que l'effet des béquilles est de réduire le moment de flexion à mi-travée. Au mieux, l'efficacité des béquilles permet d'atteindre un coefficient de réduction de

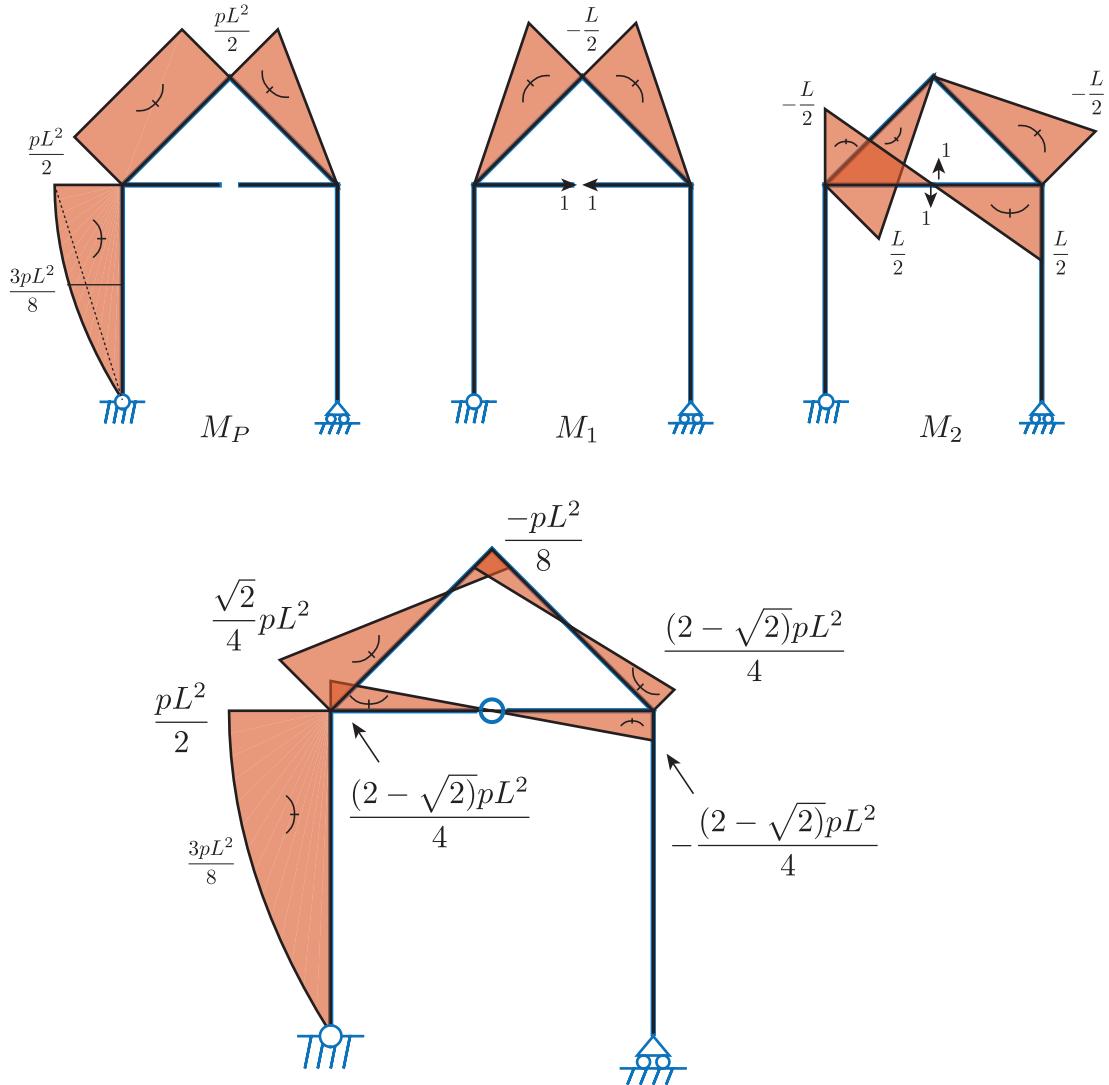
$$\varphi = \frac{7/64}{2} = 5.5\%,$$

c'est-à-dire une réduction de moment de flexion (que l'on aurait sans la béquille) par un facteur 18.3.



Question 2

Pour obtenir une structure isostatique de référence, on libère l'effort normal et l'effort tranchant dans la poutre horizontale. Dans ce cas, X_1 est l'effort normal dans cette poutre au niveau de la rotule et X_2 est l'effort tranchant au même endroit. Les diagrammes des moments sous l'effet des sollicitations extérieures et sous l'effet des forces unitaires sont donnés à la figure ci-dessous.



Avec ces notations et les conventions de signes choisies, on trouve

$$F_{11} = 2 \frac{1}{EI} \frac{1}{3} \frac{L}{2} \sqrt{2} \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{\sqrt{2} L^3}{12 EI}$$

$$F_{22} = k_{11} + 2 \frac{1}{EI} \frac{1}{3} \frac{L}{2} \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{(1 + \sqrt{2}) L^3}{12 EI}$$

$$F_{12} = 0$$

$$f_{1P} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{L}{2} \sqrt{2} \frac{pL^2}{2} \left(\frac{-L}{2} \right) = \frac{-5\sqrt{2}pL^4}{48EI}$$

$$f_{2P} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) \frac{L}{2} \sqrt{2} \frac{pL^2}{2} \frac{L}{2} = \frac{pL^4 \sqrt{2}}{24EI}$$

Les équations de compatibilité s'écrivent donc sous la forme

$$\frac{L^3}{12EI} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \frac{pL^4}{48EI} \begin{pmatrix} -5\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les inconnues hyperstatiques sont donc

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{2} \end{pmatrix} pL.$$

On obtient le diagramme des moments dans la structure étudiée sous les charges extérieures en combinant les diagrammes élémentaires. Le résultat obtenu est donné à la figure ci-dessus et les valeurs des moments demandées sont indiquées dans le tableau suivant.

	$\frac{-pL^2}{8}$	0	$\frac{pL^2}{8}$	$\frac{(2-\sqrt{2})pL^2}{4}$	$\frac{\sqrt{2}pL^2}{4}$	$\frac{pL^2}{2}$	Autre	Ne sais pas
C	○	○	○	○	○	○	●	○
D	○	○	○	○	○	●	○	○
E	○	○	○	○	●	○	○	○
F	○	○	○	●	○	○	○	○
G	●	○	○	○	○	○	○	○
H	○	○	○	●	○	○	○	○
I	○	●	○	○	○	○	○	○
J	○	○	○	○	○	○	●	○
K	○	●	○	○	○	○	○	○

Analyse des Structures I (GCIV 0607-2)

Interrogation 3 - Méthode des déplacements et méthode des rotations, 26 novembre 2018

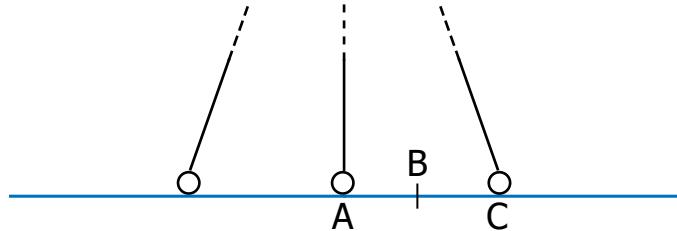
V. Denoël, M. Geuzaine

- lisez attentivement les 2 questions et répondez uniquement à ce qui est demandé
- indiquez vos nom et prénom sur chaque feuille
- munissez-vous uniquement d'une calculatrice, des tables et de quoi écrire

Question 1 (15 points)

Sur un chantier de construction, on désire soulever une poutre à l'aide d'une grue pour l'installer sur ses appuis définitifs. La poutre est attachée au crochet de la grue par trois élingues supposées infiniment raides, installées symétriquement et réglées de façon à ce que les extrémités inférieures des élingues soient dans un plan horizontal. Les points A et C représentent respectivement les sections droites de la poutre où sont fixées l'élingue centrale et l'élingue de droite. Le point B est à mi-longueur entre les points A et C. En écartant fortement les élingues, les moments de flexion en A et B sont importants ; à l'inverse, en les rapprochant, le porte-à-faux au-delà du point C provoque un moment de flexion important en C.

QUESTION : Comment positionner les élingues de façon à minimiser les contraintes de flexion ?



BONUS (+ 0,5 / question sur la note finale ramenée sur 20) :

- Dessinez et annotez le diagramme des moments dans la poutre en configuration optimale.
- Calculez l'effort axial dans l'élingue centrale en configuration optimale.

NB : On peut supposer que la poutre est de section droite constante, doublement symétrique et de raideur axiale infinie. On peut négliger les contraintes de cisaillement.

Proposition de méthode de solution :

1. Modélisez ce problème et définissez ses paramètres
2. En fonction des paramètres du problème, déterminez l'expression des moments dans la poutre aux points A, B et C.
3. Représentez l'évolution de $|M_A|$, $|M_B|$ et $|M_C|$ en fonction de la position du point C.
4. Déterminez la position optimale du point C, qui minimise $\max(|M_A|, |M_B|, |M_C|)$.

Question 2 (20 points)

Analysez la structure représentée ci-dessous avec la méthode des déplacements ou la méthode des rotations et répondez au questionnaire à choix multiples (juste +2, faux -1, ne sais pas 0). La raideur axiale EA de tous les éléments de cette structure est supposée infinie. $EI_1 = EI_3 = 10^4 \text{ kNm}^2$ et $EI_2 = 2.10^4 \text{ kNm}^2$.

Que valent les moments en A, B, C, D, E, F et G (en kNm) ? Leur signe est positif lorsque la fibre de référence, représentée en pointillés sur la figure ci-dessous, est tendue.

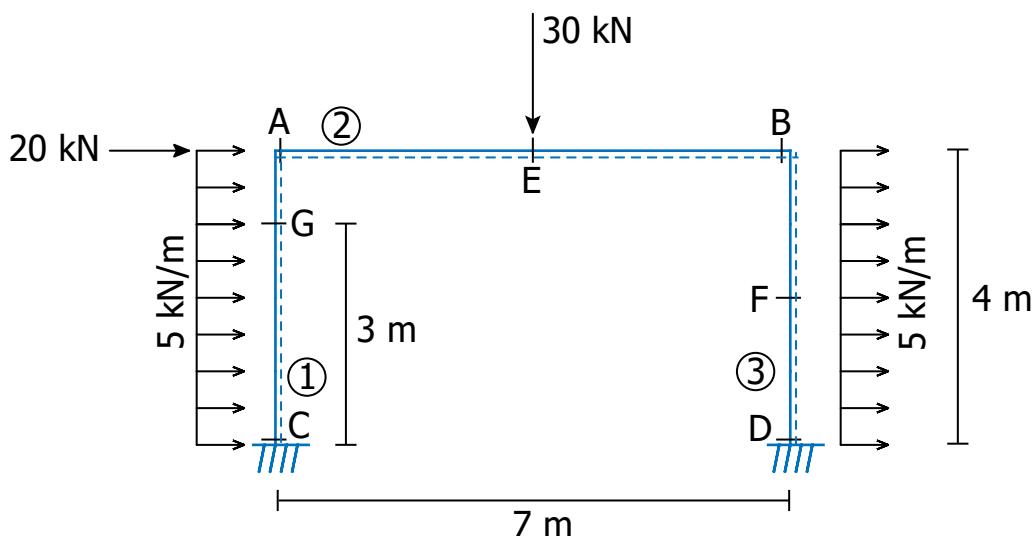
	$[-50; -40[$	$[-15; -5]$	$[0; 5[$	$[5; 15[$	$[35; 45[$	Autre	Ne sais pas
A	<input type="radio"/>						
B	<input type="radio"/>						
C	<input type="radio"/>						
D	<input type="radio"/>						
E	<input type="radio"/>						
F	<input type="radio"/>						
G	<input type="radio"/>						

Que valent les efforts tranchants en B et C, en valeur absolue (en kN) ?

	$[15; 20[$	$[20; 25[$	$[25; 30[$	$[30; 35[$	$[35; 40[$	Autre	Ne sais pas
B	<input type="radio"/>						
C	<input type="radio"/>						

Que vaut l'effort normal dans la poutre 2 (en kN) ? Il est positif si la poutre est tendue.

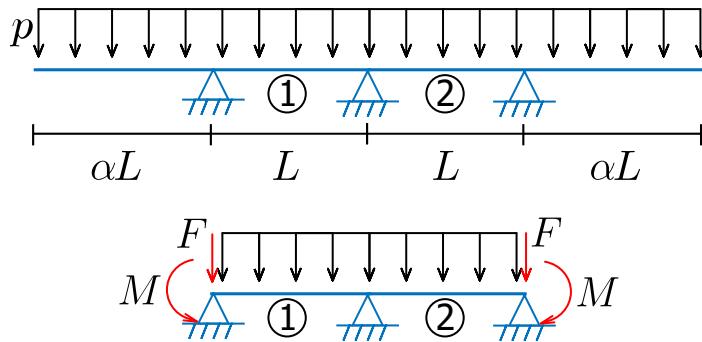
	$[-20; -10[$	$[-10; 0[$	0	$]0; 10]$	$]10; 20]$	Autre	Ne sais pas
N_2	<input type="radio"/>						



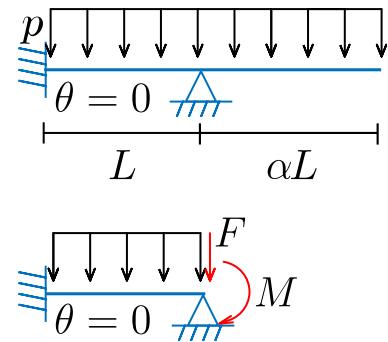
Solution

Question 1

Étant donné que la poutre et les élingues forment deux triangles rectangles et que la raideur axiale de tous ces éléments est infinie, les déplacements relatifs entre le point A, le point C et le crochet de la grue sont nuls. De plus, la poutre est soumise uniquement à son poids propre qui est un chargement symétrique et vertical. Le point A et le point C ne se déplaceront donc ni horizontalement, ni verticalement. Dès lors, le système étudié est équivalent à une poutre sur trois appuis simples. Pour finir, par symétrie, la rotation θ du point A est nulle. Pour simplifier le problème, on remplace aussi les porte-à-faux et leur chargement par un moment et une charge concentrée.



1-a.

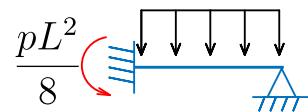
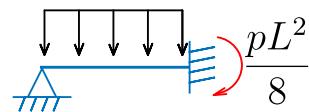


1-b.

Si on ne prend pas la symétrie en compte directement, on calcule θ comme suit, sur base de la Figure 1-a. :

$$\text{Barre 1 : } 3\frac{EI}{L}\theta + \frac{M}{2} - \frac{pL^2}{8} = M_{b1d}$$

$$\text{Barre 2 : } 3\frac{EI}{L}\theta - \frac{M}{2} + \frac{pL^2}{8} = M_{b2g}$$



Assemblage :

$$M_{b1d} + M_{b2g} = 0 \Leftrightarrow 6\frac{EI}{L}\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$$

Moments aux points A, B et C selon la convention RdM :

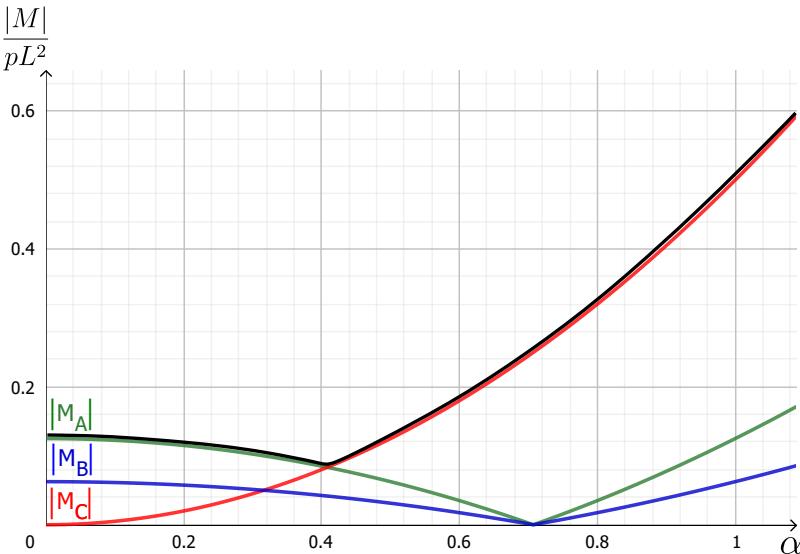
La fibre de référence est placée sous la poutre. Cela signifie que le signe des moments est positif lorsque la fibre inférieure de la poutre est tendue. Par exemple, si $\alpha \rightarrow 0$, on s'attend à obtenir un moment négatif au point A et c'est bien le cas selon son expression. De même, le moment en C est quant à lui toujours négatif (moment d'enca斯特ment d'une poutre encastrée libre soumise à une charge répartie dirigée vers le bas, pas besoin de la méthode des rotations pour le déterminer).

$$M_A = M_{b1d} = \frac{M}{2} - \frac{pL^2}{8} = \frac{pL^2}{8}(2\alpha^2 - 1)$$

$$M_C = M = -\frac{p(\alpha L)^2}{2}$$

$$M_B = \frac{M_A + M_C}{2} + \frac{pL^2}{8} = -\frac{pL^2}{16}(2\alpha^2 - 1) = -\frac{M_A}{2}$$

On trace ensuite l'évolution des moments en valeurs absolues par rapport à la position du point C, exprimée par le paramètre α .



Les moments en valeurs absolues $|M_A|$ et $|M_B|$ possèdent un minimum pour $\alpha = \sqrt{2}/2$ mais il ne s'agit pas de l'optimum recherché puisqu'on désire minimiser les contraintes de flexion au point C également. Pour ce faire, on cherche le minimum de la courbe noire qui représente la fonction $f(\alpha) = \max(|M_A|, |M_B|, |M_C|)$. Il se trouve à l'intersection de la courbe rouge et de la courbe verte. Lorsque le point C est disposé de manière optimale, on a donc $|M_A| = |M_C|$. Dans ce cas,

$$\alpha = \sqrt{1/6} = 0,4082 ; M_A = -0,083 pL^2 ; M_B = 0,042 pL^2 ; M_C = -0,083 pL^2 ; N_{EC} = pL$$

Question 2

La structure étudiée possède deux noeuds mobiles et donc au maximum 6 degrés de liberté. Les déplacements verticaux de ces deux noeuds sont nuls puisque les colonnes de la structure sont infiniment raides axialement. Cela réduit le nombre de degrés de liberté à 4. Ensuite, le déplacement horizontal du premier noeud équivaut à celui du deuxième étant donné que la raideur axiale de la poutre est infinie. On se retrouve finalement avec 3 degrés de liberté : le déplacement horizontal de la poutre u , la rotation du premier noeud θ_1 et la rotation du second noeud θ_2 .

Matrice de raideur globale (1 couleur par poutre, voir diagrammes M et T ci-dessous) :

$$\mathbf{K}_b = 10^4 \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{4^3} + \frac{12}{4^3} & \frac{6}{4^2} & \frac{6}{4^2} \\ \frac{6}{4^2} & \frac{4}{4} + \frac{8}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{6}{4^2} & \frac{4}{7} & \frac{4}{4} + \frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

Vecteurs de sollicitations :

$$\mathbf{k}_{p1} = \begin{pmatrix} -\frac{5.4}{2} \\ -\frac{5.4^2}{12} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k}_{p2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{30.7}{8} \\ -\frac{30.7}{8} \end{pmatrix} \quad \mathbf{k}_{p3} = \begin{pmatrix} -\frac{5.4}{2} \\ 0 \\ -\frac{5.4^2}{12} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_{p1} + \mathbf{k}_{p2} + \mathbf{k}_{p3}$$

Vecteur des charges nodales appliquées et vecteur des déplacements :

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{k}_p) = \begin{pmatrix} 14 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -3,4 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ 26 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Efforts relatifs aux degrés de liberté, aux extrémités des barres :

$$\begin{pmatrix} M_A \\ M_B \end{pmatrix} = 2 \cdot 10^4 \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{30.7}{8} \\ -\frac{30.7}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12,4 \\ -45,8 \end{pmatrix} \text{ kNm, MD}$$

$$\begin{pmatrix} T_{b1h} \\ M_{b1h} \end{pmatrix} = 10^4 \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{4^3} & \frac{6}{4^2} \\ \frac{6}{4^2} & \frac{4}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5.4}{2} \\ -\frac{5.4^2}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,74 \\ 12,4 \end{pmatrix} \text{ kN, vers la droite kNm, MD et RdM}$$

$$\begin{pmatrix} T_{b3h} \\ M_{b3h} \end{pmatrix} = 10^4 \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{4^3} & \frac{6}{4^2} \\ \frac{6}{4^2} & \frac{4}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5.4}{2} \\ -\frac{5.4^2}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16,3 \\ 45,8 \end{pmatrix} \text{ kN, vers la droite kNm, MD et RdM}$$

$$\begin{pmatrix} M_A \\ M_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,4 \\ -45,8 \end{pmatrix} \text{ kNm, RdM} ; \quad N_2 = -T_{b3h} = T_{b1h} - 20 = -16,3 \text{ kN}$$

Efforts ailleurs dans la structure :

$$M_C = M_{b1h} - 4T_{b1h} - 5.4 \cdot 2 = -42,6 \text{ kNm, RdM}$$

$$M_D = M_{b3h} - 4T_{b3h} - 5.4 \cdot 2 = -59,3 \text{ kNm, RdM}$$

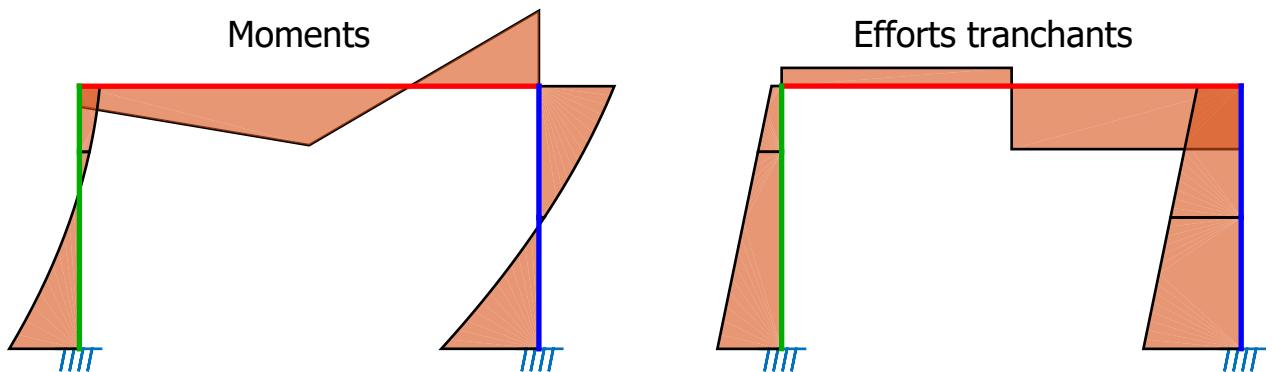
$$M_E = \frac{M_{A,RdM} + M_{B,RdM}}{2} + \frac{30.7}{4} = 35,8 \text{ kNm, RdM}$$

$$M_F = \frac{M_{b3h} + M_{D,RdM}}{2} + \frac{5.4^2}{8} = 3,25 \text{ kNm, RdM}$$

$$M_G = \left(\frac{3}{4}M_{b1h} + \frac{1}{4}M_{C,RdM} \right) + \frac{3 \cdot 5.4^2}{32} = 6,15 \text{ kNm, RdM}$$

$$T_B = \frac{M_E - M_B}{7/2} = -23,3 \text{ kN}$$

$$T_C = T_{b1h} + 5.4 = 23,7 \text{ kN}$$



Analyse des Structures I (GCIV 0607-2)

Interrogation 4

Méthode de Cross, lignes d'influence et méthode des forces, 17 décembre 2018

V. Denoël, M. Geuzaine

- lisez attentivement les 3 questions et répondez uniquement à ce qui est demandé
- indiquez vos nom et prénom sur chaque feuille
- munissez-vous uniquement d'une calculatrice, des tables et de quoi écrire

Question 1 (12 points)

Pour chacune des poutres représentées ci-dessous, tracez les lignes d'influence demandées.

Pour la poutre n°1 :

- LI de la réaction verticale en A
- LI de la flèche verticale en D
- LI du moment d'encastrement en E
- LI de la rotation en C
- LI de la rotation en A
- LI de l'effort tranchant à gauche de B

Pour la poutre n°2 :

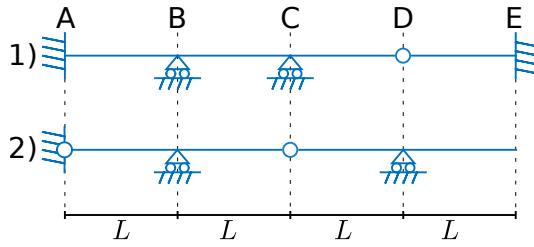
- LI de la flèche verticale en C
- LI de l'effort tranchant à droite de D
- LI de la réaction verticale en B
- LI du moment en C
- LI du moment en D
- LI de la rotation en A

Question 2 (20 points)

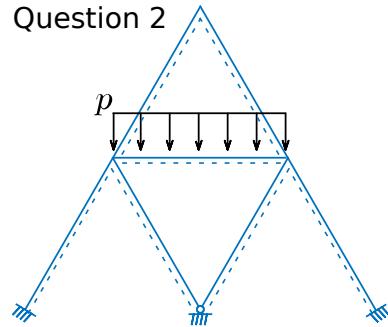
Analysez la structure représentée ci-dessous ($p = 20 \text{ kN/m}$) avec la méthode de Cross et détaillez votre raisonnement. Tous les éléments de cette structure sont de longueur $L = 10 \text{ m}$ et $EI = 10^4 \text{ kNm}^2$.

- 1) Calculez les moments aux extrémités de tous les éléments par la méthode de Cross.
 - 2) Dessinez et annotez le diagramme des moments dans la structure.
 - 3) Dessinez et annotez le diagramme des efforts tranchants dans la structure.
- BONUS : Esquissez la configuration déformée de la structure, en accord avec les résultats des calculs précédents.

Question 1



Question 2



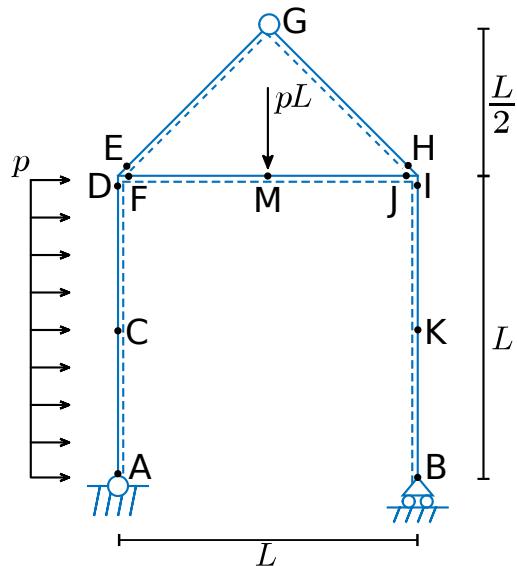
Question 3 (20 points)

Analysez la structure représentée ci-dessous avec la méthode des forces et répondez au questionnaire à choix multiples (juste +2, faux -1, ne sais pas 0). Cochez une seule réponse par ligne. Les déformations dues aux efforts tranchants et aux efforts normaux sont supposées négligeables dans toute la structure.

$$p = 10 \text{ kN/m} ; L = 4 \text{ m} ; EI = 10^4 \text{ kNm}^2$$

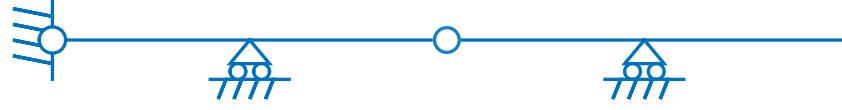
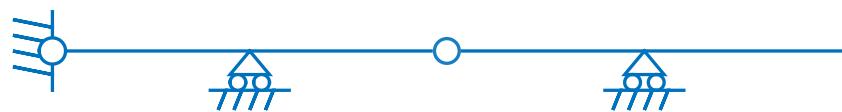
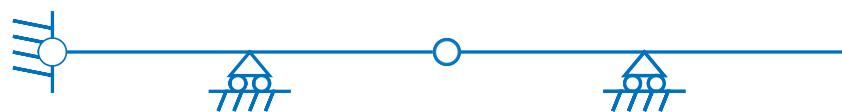
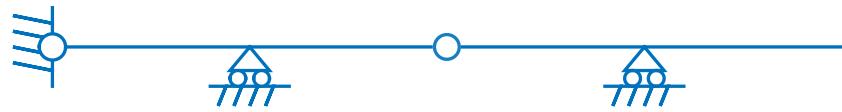
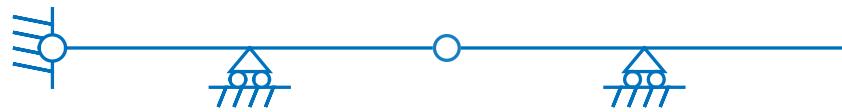
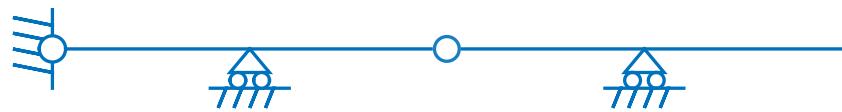
Que valent les moments en C, D, E, F, G, H, I, J, K et M ? Leur signe est positif lorsque la fibre de référence, représentée en pointillés sur la figure ci-dessous, est tendue.

	-80	[-60; -55]	[-25; -20]	0	[20; 25]	39, 2	[55; 60]	80	Ne sais pas
C	<input type="radio"/>								
D	<input type="radio"/>								
E	<input type="radio"/>								
F	<input type="radio"/>								
G	<input type="radio"/>								
H	<input type="radio"/>								
I	<input type="radio"/>								
J	<input type="radio"/>								
K	<input type="radio"/>								
M	<input type="radio"/>								

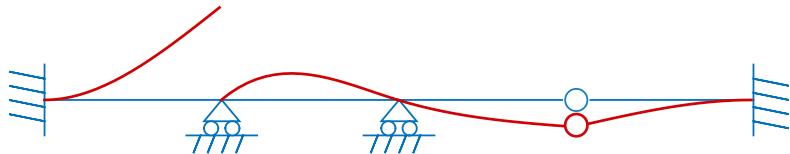
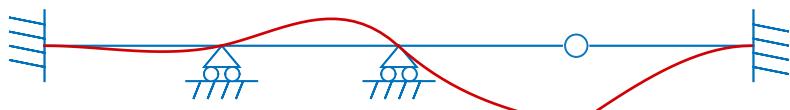
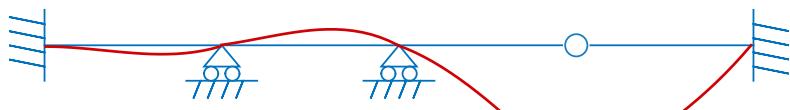
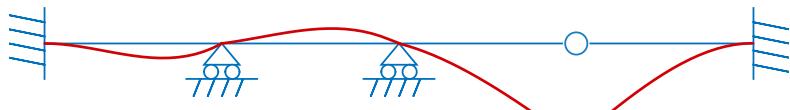
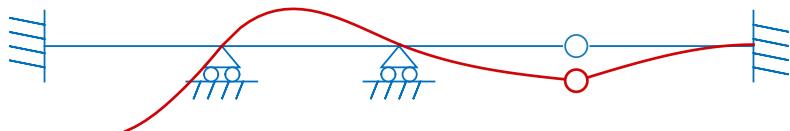


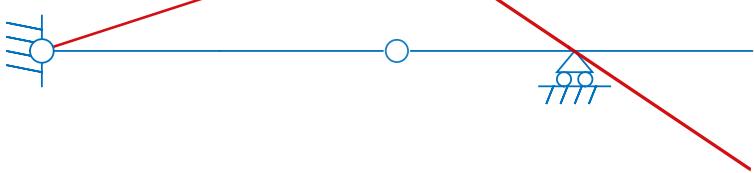
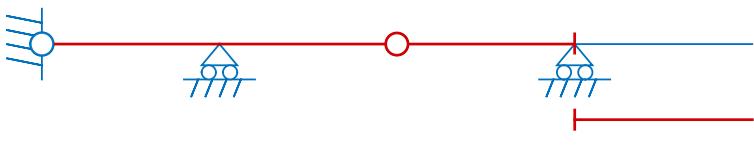
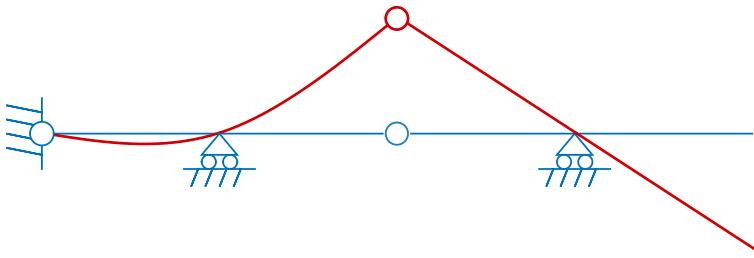
Rappel : dans la méthode des forces, lorsqu'on réalise une coupure dans un élément de structure, on doit faire apparaître deux **forces ou moments auto-équilibrés** ! (de même direction et de même amplitude, mais de sens contraire)



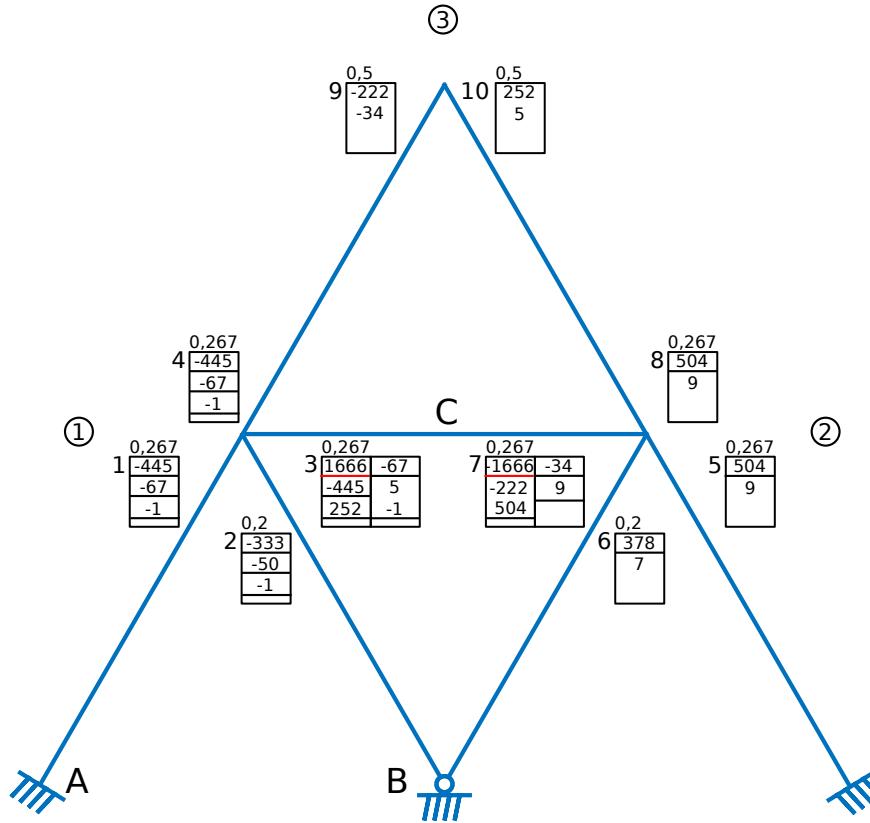


Solutions : Question 1

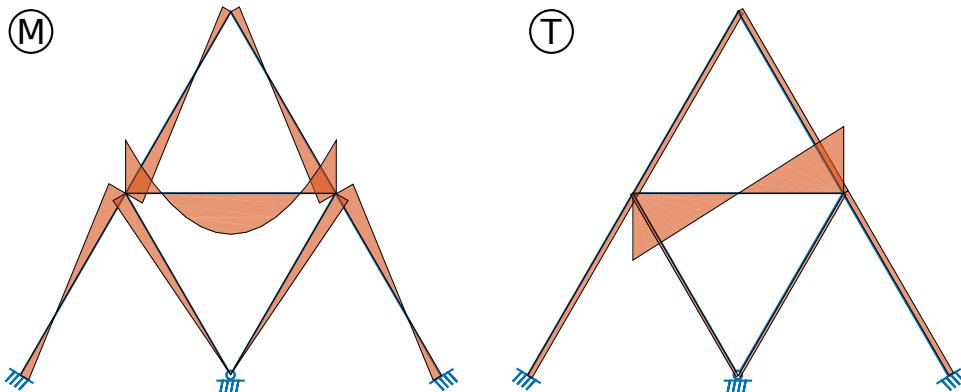




Question 2



$$\begin{aligned}
 M_1 &= -51,3 \text{ kNm} ; M_2 = 38,5 \text{ kNm} ; M_3 = -141 \text{ kNm} ; M_4 = 51,3 \text{ kNm} ; M_9 = -25,6 \text{ kNm} \\
 M_A &= 25,6 \text{ kNm} ; M_B = 0 \text{ kNm} ; M_C = 109 \text{ kNm} ; T_1 = 7,7 \text{ kN} ; T_2 = 3,85 \text{ kN} ; T_3 = 100 \text{ kN} \\
 T_4 &= 7,7 \text{ kN} ; T_9 = 7,7 \text{ kN}
 \end{aligned}$$



Question 3

La structure est 2 fois hyperstatique intérieurement et isostatique extérieurement. Elle est rendue isostatique intérieurement en réalisant deux coupures dans le triangle qui forme un

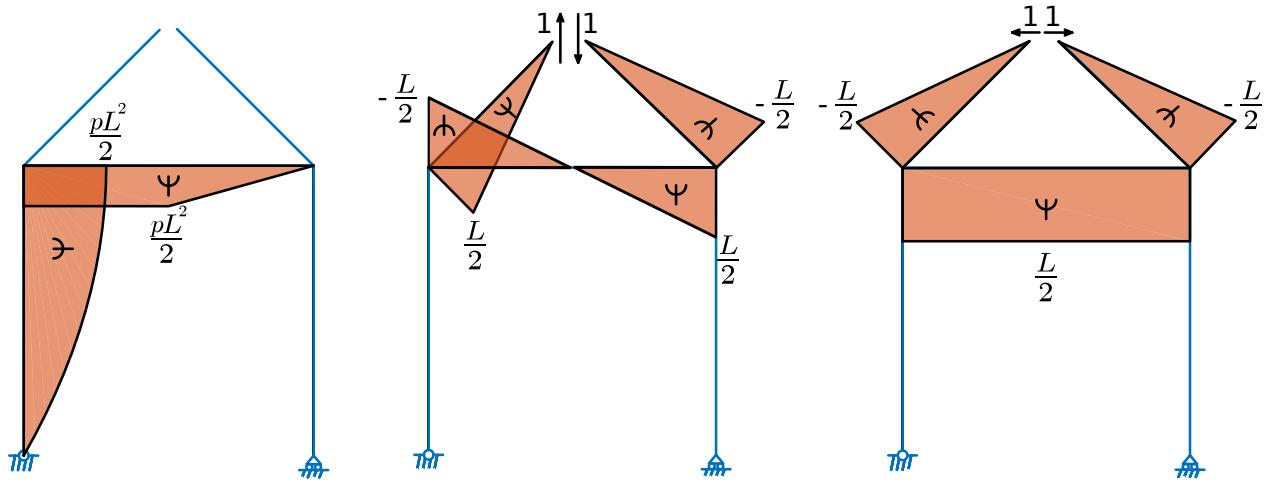
contour fermé. Une première possibilité est, par exemple, de libérer un couple d'efforts verticaux et un couple d'efforts horizontaux autoéquilibrés au niveau de la rotule. Une deuxième possibilité est de libérer des couples de moments en F et en J en plaçant une rotule à ces deux endroits. Ces deux manières de rendre la structure isostatique semblent être les plus évidentes mais il en existe encore plein d'autres. Intéressons nous à la première d'entre elles.

Sous l'action des forces extérieures, les moments dans les poutres inclinées et dans la colonne de droite sont nuls étant donné qu'aucune charge perpendiculaire ne s'applique sur ces éléments ou à leur extrémité libre. Il n'y a qu'une seule réaction horizontale, à l'appui de gauche, pour contrer la charge horizontale pL . Dès lors, $R_H = pL$ est orientée vers la gauche. Ensuite, par équilibre en rotation autour de l'appui de gauche, $R_{Vd} = pL$ est orientée vers le haut. Puis, par équilibre vertical, $R_{Vg} = 0$. En dessinant le schéma rendu libre (SRL) de la structure, la colonne de gauche est soumise :

- 1) À une charge répartie dirigée vers la droite, associée à un diagramme de moment parabolique négatif (fibre de référence comprimée, $M_A = 0$, pente nulle en A, $M_D = -pL^2/2$)
 - 2) À une charge concentrée dirigée vers la gauche en A, associée à un diagramme de moment linéaire positif (fibre de référence tendue, $M_A = 0$, pente non nulle en A, $M_D = pL^2/2$)
- Globalement, les moments dans la colonne de gauche sont donc positifs. Etant donné que R_{Vg} est nul, le moment reste constant entre les points F et M puis il diminue à partir de M (cassure de pente liée à la charge concentrée pL) jusqu'à atteindre 0 en haut de la colonne de droite.

Sous l'action des couples d'efforts unitaires auto-équilibrés, toutes les réactions d'appui sont nulles par équilibre et, par conséquent, le moment dans les colonnes est nul. Le diagramme de moments dans la partie triangulaire de la structure est alors obtenu de proche en proche à partir des extrémités des poutres inclinées où les efforts unitaires s'appliquent. Ces efforts sont décomposés en deux : une partie orientée selon une direction parallèle et l'autre selon une direction perpendiculaire aux poutres inclinées (angle de 45° , effort perpendiculaire de $\pm\sqrt{2}/2$). Seule cette deuxième partie de l'effort intervient pour déterminer le diagramme des moments qui évolue donc linéairement de G à E (pareil de G à H). Ensuite, l'équilibre des moments aux noeud DEF montre que le moment en F équivaut au moment en E (pareil en HIJ, $M_J = M_H$). Pour finir, le diagramme des moments entre F et J est formé en reliant les moments en F et J par une droite, une fois que les signes des moments ou les courbures des poutres ont été correctement établis (signe positif si la fibre de référence est tendue).

Il est impératif pour l'examen que vous soyez capables de calculer très rapidement les diagrammes de moments dans les structures isostatiques.



Tous les éléments de cette structure sont caractérisés par le même EI . Dès lors, ce paramètre n'aura aucune influence sur la répartition des efforts dans la structure et il est donc omis volontairement dans les équations suivantes.

Coefficients de flexibilité :

$$F_{11} = 2 \left(\frac{1}{3} \frac{L}{2} \frac{L}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} \frac{L}{2} \frac{L}{2} \frac{L}{2} \right) = \frac{L^3}{12} (1 + \sqrt{2})$$

$$F_{22} = \frac{2}{3} \frac{L}{2} \frac{L}{2} \frac{L\sqrt{2}}{2} + \frac{L}{2} \frac{L}{2} L = \frac{L^3}{12} (3 + \sqrt{2})$$

$$F_{12} = F_{21} = 0 \text{ (compensation parfaite, immédiat)}$$

$$F_{1p} = \frac{1}{6} \frac{pL^2}{2} \frac{L}{2} \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \frac{pL^2}{2} \frac{L}{2} \frac{L}{2} = \frac{-pL^4}{24}$$

$$F_{2p} = \frac{pL^2}{2} \frac{L}{2} \frac{L}{2} + \frac{1}{2} \frac{pL^2}{2} \frac{L}{2} \frac{L}{2} = \frac{3pL^4}{16}$$

Inconnues hyperstatiques :

$$X_1 = \frac{-F_{p1}}{F_{11}} = \frac{pL}{2} \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{pL}{2} \alpha_1 \text{ avec } \alpha_1 = 0,4142$$

$$X_2 = \frac{-F_{p2}}{F_{22}} = \frac{pL}{2} \frac{-9}{2(3 + \sqrt{2})} = \frac{pL}{2} \alpha_2 \text{ avec } \alpha_2 = -1,0194$$

Moments internes :

Pour commencer, il est possible de calculer les moments suivants sans avoir recours à la méthode des forces.

$$M_A = 0 ; M_B = 0 ; M_G = 0 ; M_I = 0 ; M_K = 0$$

$$M_C = \frac{3pL^2}{8} = 60 \text{ kNm} ; M_D = \frac{pL^2}{2} = 80 \text{ kNm}$$

Ensuite, une fois que les inconnues hyperstatiques ont été déterminées, les moments restants sont calculés comme suit :

$$M = M_p + X_1 M_1 + X_2 M_2$$

$$M_E = 0 + \frac{pL^2}{4}\alpha_1 - \frac{pL^2}{4}\alpha_2 = 57,35 \text{ kNm}$$

$$M_F = \frac{pL^2}{2} - \frac{pL^2}{4}\alpha_1 + \frac{pL^2}{4}\alpha_2 = 22,65 \text{ kNm}$$

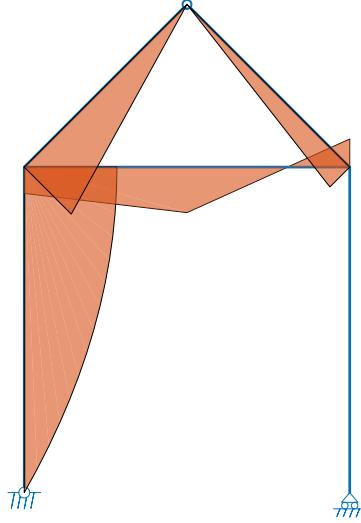
$$M_H = 0 - \frac{pL^2}{4}\alpha_1 - \frac{pL^2}{4}\alpha_2 = 24,21 \text{ kNm}$$

$$M_J = 0 + \frac{pL^2}{4}\alpha_1 + \frac{pL^2}{4}\alpha_2 = -24,21 \text{ kNm}$$

$$M_M = \frac{pL^2}{2} + 0 + \frac{pL^2}{4}\alpha_2 = 39,22 \text{ kNm}$$

	-80	[-60; -55]	[-25; -20]	0	[20; 25]	39, 2	[55; 60]	80	Ne sais pas
C	○	○	○	○	○	○	●	○	○
D	○	○	○	○	○	○	○	●	○
E	○	○	○	○	○	○	●	○	○
F	○	○	○	○	●	○	○	○	○
G	○	○	○	●	○	○	○	○	○
H	○	○	○	○	●	○	○	○	○
I	○	○	○	●	○	○	○	○	○
J	○	○	●	○	○	○	○	○	○
K	○	○	○	●	○	○	○	○	○
M	○	○	○	○	○	●	○	○	○

Le diagramme des moments que l'on obtient ainsi dans la structure est finalement esquissé à la Figure ci-dessous.



Solution alternative.

Une autre possibilité pour rendre la structure isostatique consiste à introduire des rotules aux extrémités de la poutre, comme indiqué ci-dessous. En introduisant une rotule, on doit extérioriser une paire de moments unitaires. Ces moments agissent de chaque côté de la rotule, comme illustré dans le zoom.

Dans cette structure isostatique de référence, les diagrammes des moments sont obtenus facilement, notamment dans les cas de charges M_1 et M_2 sous l'effet des deux couples de moments unitaires, puisque les réactions extérieures sont alors nulles.

Les coefficients de flexibilité valent

$$\begin{aligned} F_{11} &= F_{22} = \frac{1}{3} \frac{L}{EI} + \frac{1}{3} \frac{L}{EI} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{L}{6EI} (2 + \sqrt{2}) \\ F_{12} &= \frac{L}{6EI} \\ F_{1P} &= \frac{1}{4EI} \frac{pL^2}{4} \cdot L - \frac{1}{3EI} \frac{pL^2}{2} L \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{pL^3}{48EI} (3 - 4\sqrt{2}) \\ F_{2P} &= \frac{1}{4EI} \frac{pL^2}{4} \cdot L - = \frac{3pL^3}{48EI} \end{aligned}$$

de sorte que les équations de compatibilité s'écrivent

$$\frac{L}{6EI} \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \frac{pL^3}{48EI} \begin{pmatrix} 3 - 4\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

et donc, finalement

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1416pL^2 \\ -0.1513pL^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22.65 \\ -24.21 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

Ces résultats sont naturellement les mêmes que ceux obtenus avec l'autre structure isostatique de référence.

