Analyse des Structures I (GCIV 0607-2)

Interrogation 3, 2 décembre 2019

Méthode des rotations, Méthode de Cross

V. Denoël, M. Geuzaine

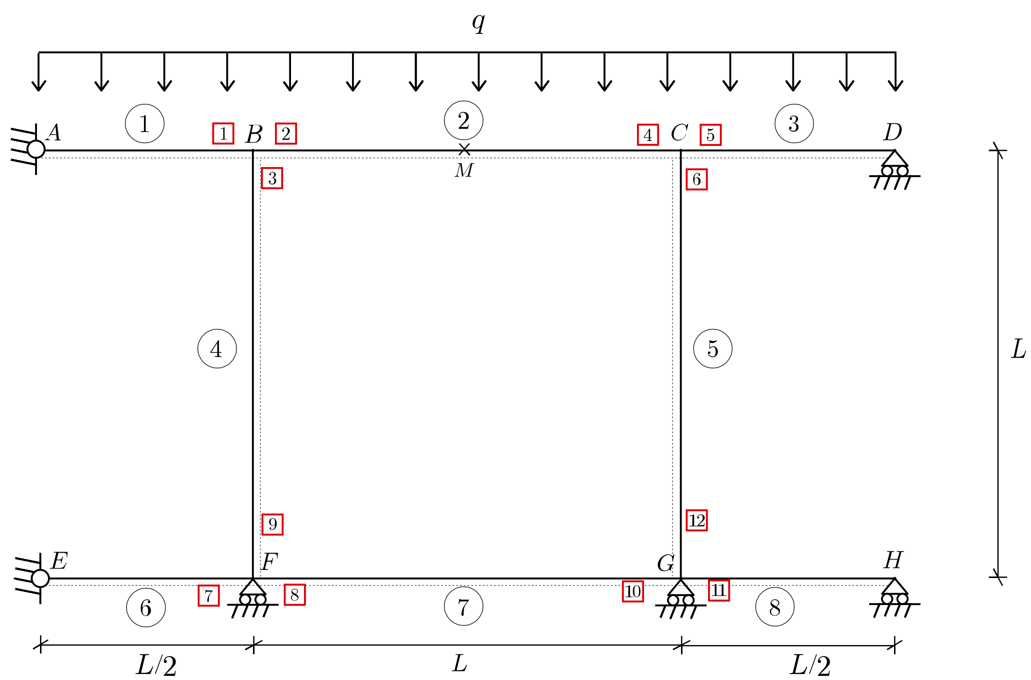
- *lisez attentivement les 2 questions et répondez uniquement à ce qui est demandé*
- *indiquez vos nom et prénom sur chaque feuille*
- *munissez-vous uniquement d'une calculatrice, et de vos notes de cours*

Question 1 (10 points)

La structure suivante de longueur $2L$ et de hauteur L est soumise à une charge répartie q. Analysez la structure en utilisant la méthode de Cross et répondez aux questions suivantes.

Données : $L = 10$ m ; $q = 1$ kN/m

Remarque : la ligne de référence considérée est représentée en trait discontinu.



Que valent les coefficients de répartition au point B ?

	1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7	7/7
Π_1	○	○	○	○	○	○	○
Π_2	○	○	○	○	○	○	○
Π_3	○	○	○	○	○	○	○

Que valent les moments suivants ? (en kNm) (Conventions RDM)

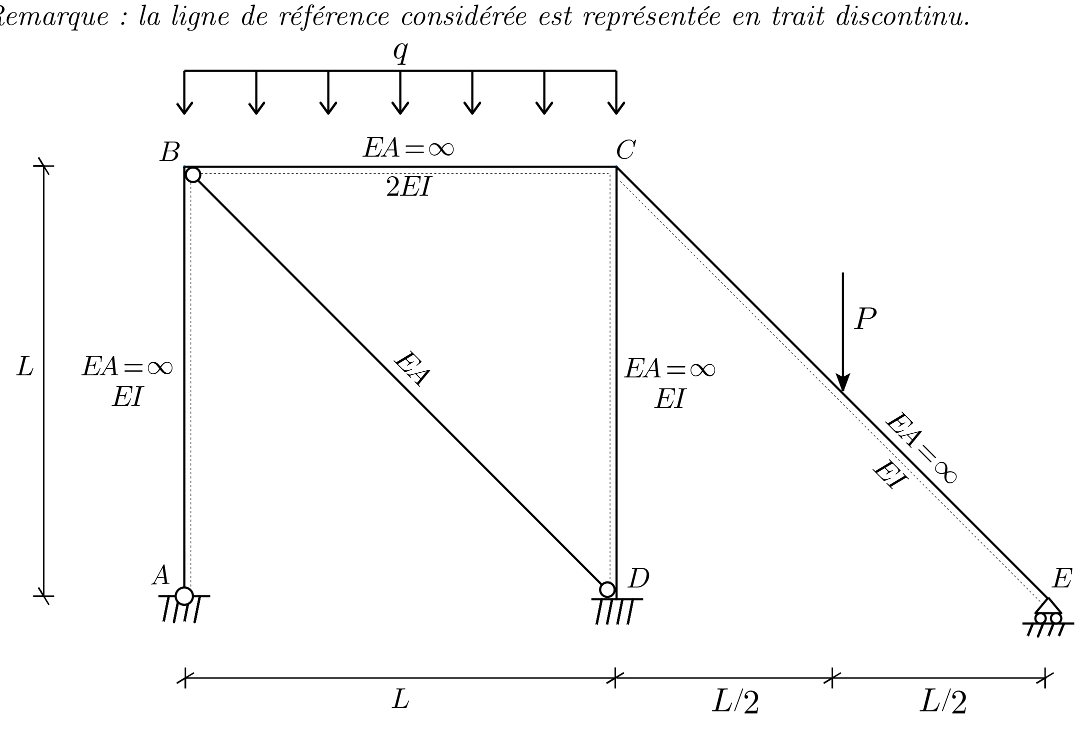
	$[-7.5;-7.3]$	$[-6.9;-6.7]$	$[-5.9;-5.7]$	$[-1.7;-1.5]$	$[-0.3;-0.1]$	$[0.4;0.6]$	$[0.5;0.7]$	$[1;3]$	$[4;6]$
$M_{B,b1}$	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$M_{B,b2}$	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$M_{B,b4}$	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$M_{F,b4}$	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$M_{F,b6}$	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$M_{F,b7}$	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$M_{M,b2}$	○	○	○	○	○	○	○	○	○

Question 2 (10 points)

La structure à étudier est composée d'un portique contreventé $ABCD$, et d'un élément de type poutre CE. Celle-ci est soumise à une charge répartie q et à une charge ponctuelle P. Il vous est demandé de faire une analyse de la structure en utilisant la méthode des rotations.

Données : $L = 5$ m ; $q = 1$ kN/m ; $P = 2$ kN

Remarque : la ligne de référence considérée est représentée en trait discontinu.



1. Déterminez le nombre de degrés de mobilité m de la structure.

Quelle est la condition à imposer sur la raideur du contreventement EA pour pouvoir utiliser la méthode des rotations ?

2. Déterminez la matrice de raideur $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$, ainsi que les vecteurs $\underline{\mathbf{k}}_{\mathrm{p}}$ et $\underline{\mathrm{p}}$.

3. Tracez le diagramme des moments. Précisez les moments maximums sur le segment BC et CE (positifs et négatifs).

Analyse des Structures I (GCIV 0607-2)

Interrogation 3

Corrigé

Question 1

	1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7	7/7
Π_1	○	○	●	○	○	○	○
Π_2	○	●	○	○	○	○	○
Π_3	○	●	○	○	○	○	○

	$[-7.5;-7.3]$	$[-6.9;-6.7]$	$[-5.9;-5.7]$	$[-1.7;-1.5]$	$[-0.3;-0.1]$	$[0.4;0.6]$	$[0.5;0.7]$	$[1;3]$	$[4;6]$
$M_{B,b1}$	○	○	●	○	○	○	○	○	○
$M_{B,b2}$	●	○	○	○	○	○	○	○	○
$M_{B,b4}$	○	○	○	●	○	○	○	○	○
$M_{F,b4}$	○	○	○	○	○	○	●	○	○
$M_{F,b6}$	○	○	○	○	○	●	○	○	○
$M_{F,b7}$	○	○	○	○	●	○	○	○	○
$M_{M,b2}$	○	○	○	○	○	○	○	○	●

— Les raideurs locales :

$$\begin{aligned} k_{B,b1} &= \tfrac{3EI}{L/2} = k_{C,b3} = k_{F,b6} = k_{G,b8} \\ k_{B,b2} &= \tfrac{4EI}{L} = k_{C,b2} = k_{F,b7} = k_{G,b7} \\ k_{B,b4} &= \tfrac{4EI}{L} = k_{F,b4} = k_{C,b5} = k_{G,b5} \end{aligned}$$

— Les coefficients de répartition :

$$\Pi_1 = \frac{6}{4+4+6} = \frac{3}{7} = \Pi_5 = \Pi_7 = \Pi_{11}$$

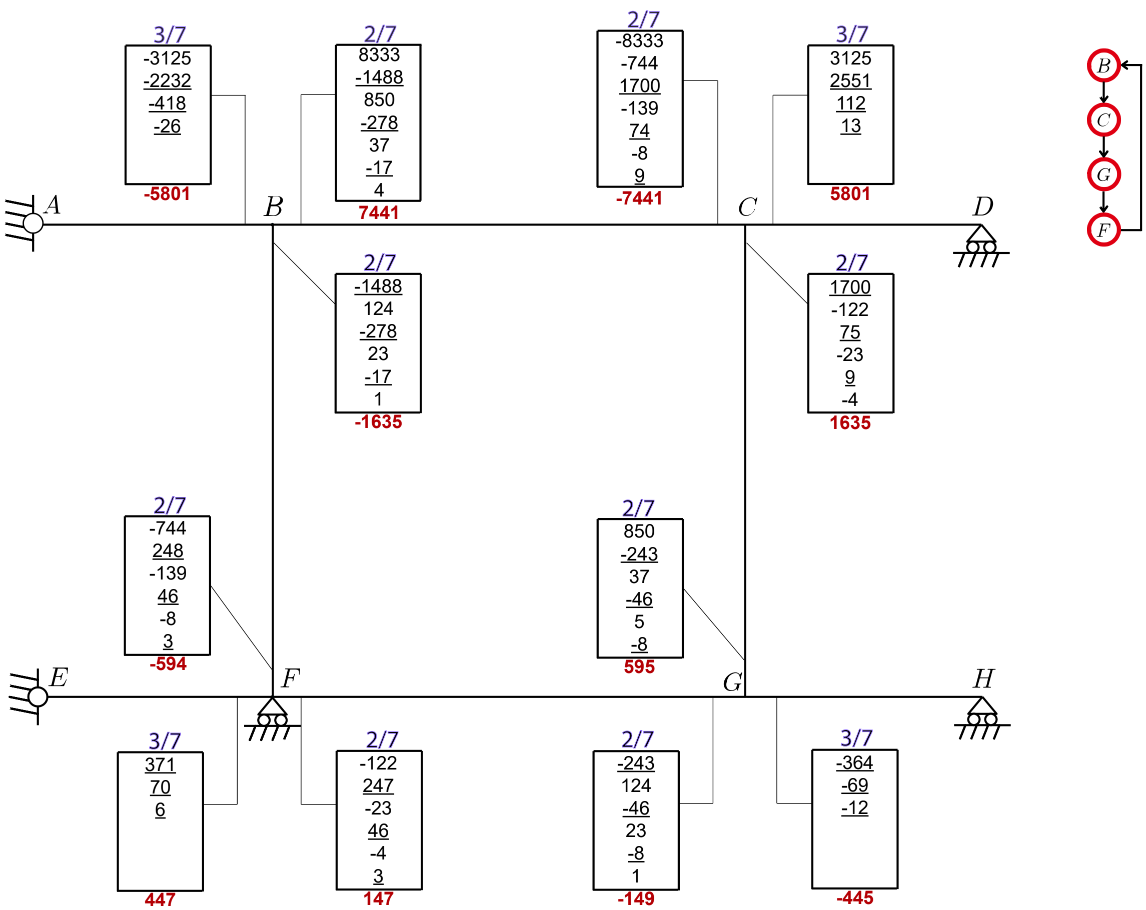
$$\Pi_2 = \frac{4}{4+4+6} = \frac{2}{7} = \Pi_4 = \Pi_8 = \Pi_{10}$$

$$\Pi_3 = \frac{4}{4+4+6} = \frac{2}{7} = \Pi_6 = \Pi_9 = \Pi_{12}$$

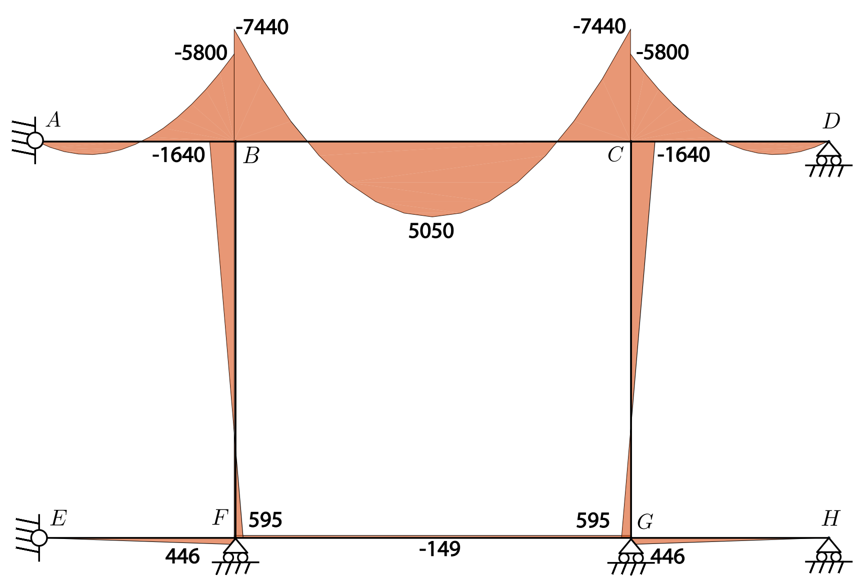
— Les moments attaquants :

$$M_{B,1} = -M_{C,5} = -\frac{q(L/2)^2}{8} = -3125\ kNm$$

$$M_{B,2} = -M_{C,4} = \frac{qL^2}{12} = 8333\ kNm$$



— Diagramme des moments :

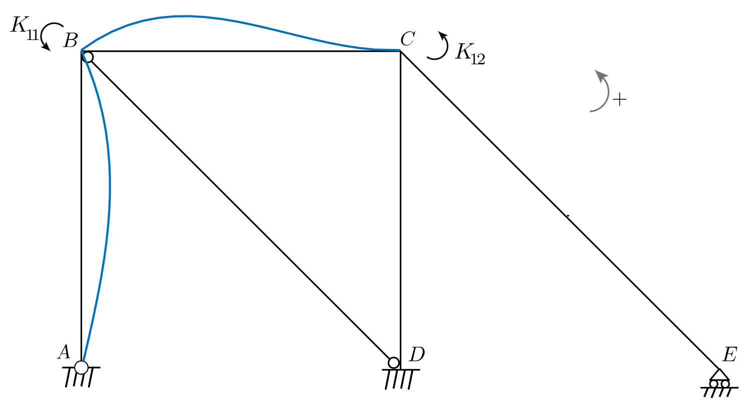


Question 2

1. La structure admet 3 degrés de liberté : translation au point B (liée à la translation au point C), rotation au point B, et rotation au point C. On a besoin d'un blocage au minimum pour la rendre à noeuds fixes ($m = 1$). La raideur du contreventement doit être infinie pour appliquer la méthode des rotations : la structure n'est pas à noeuds fixes (translation possible des noeuds dans le plan). En imposant cette condition, le point B devient fixe car il est relié aux points fixes D et A, le point C devient également fixe car il est relié aux points B et D. Le système admet donc deux inconnues aux points B et C : respectivement ϕ_1 et ϕ_2.

2. La première étape est de déterminer la matrice de raideur.

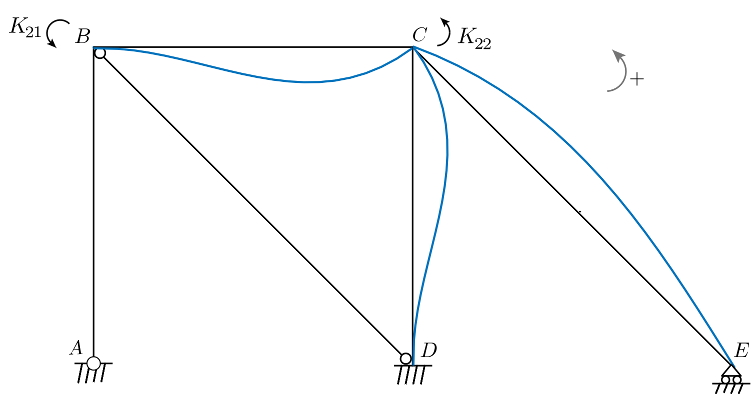
En appliquant une rotation d'une unité au point B ($\phi_1 = 1$) :



$$K_{11} = \frac{3E(I)}{L} + \frac{4E(2I)}{L} = \frac{11EI}{L} \ ;$$

$$K_{12} = \frac{2E(2I)}{L} = \frac{4EI}{L} \ .$$

En appliquant une rotation unitaire au point C ($\phi_2 = 1$) :



$$K_{22} = \frac{4E(2I)}{L} + \frac{4E(I)}{L} + \frac{3E(I)}{L\sqrt{2}} = (12 + \frac{3\sqrt{2}}{2})\frac{EI}{L} \ ; \ K_{21} = \frac{2E(2I)}{L} = \frac{4EI}{L} \ .$$

La seconde étape est de déterminer le chargement :

$$k_{p,1} = \frac{qL^2}{12} \ ;$$

$$k_{p,2} = -\frac{qL^2}{12} + \frac{3}{16}(\frac{P\sqrt{2}}{2})L\sqrt{2} = -\frac{qL^2}{12} + \frac{3PL}{16}.$$

Pas de moment concentré au niveau des noeuds, cela donne :

$$\underline{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Les rotations sont donc obtenus par inversion du système $\underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{k}_{\mathrm{p}}} = \underline{\mathrm{p}}$, avec $\underline{\mathbf{u}} = [\phi_1 \ \phi_2]^T$:

$$\begin{cases} \phi_1 & = \frac{1085{,}6}{EI} \\ \phi_2 & = \frac{-381{,}3}{EI} \end{cases}$$

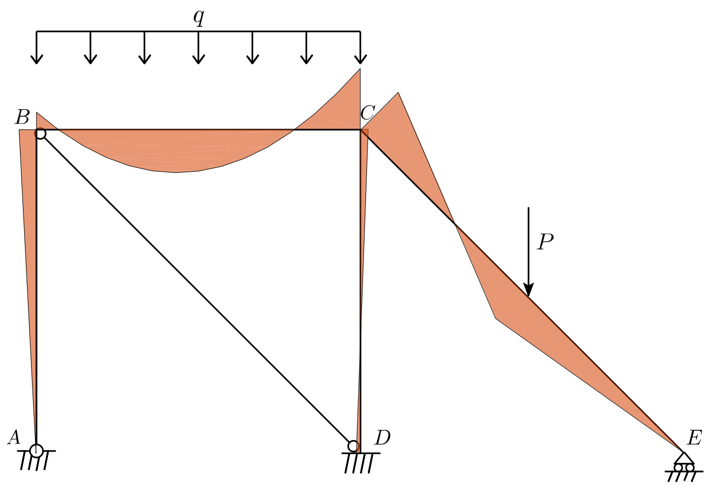
$$M_{B,[AB]} = \frac{3EI}{L}\phi_1$$

$$\begin{bmatrix} M_{B,[BC]} \\ M_{C,[BC]} \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{qL^2}{12} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{bmatrix}$$

$$M_{C,[CD]} = \frac{4EI}{L}\phi_2 \ ; \ M_{D,[CD]} = \frac{M_{C,[CD]}}{2}$$

$$M_{C,[CE]} = \frac{3EI}{L}\phi_2 + \frac{3PL}{16}$$

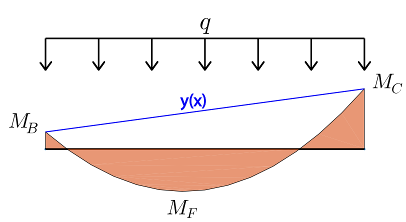
Diagramme des moments :



$M_{B,[AB]}$	$M_{B,[BC]}$	$M_{C,[BC]}$	$M_{C,[CD]}$	$M_{D,[CE]}$	$M_{C,[CE]}$	$M_{E,[CE]}$
$-651\ Nm$	$-651\ Nm$	$-2340\ Nm$	$-305\ Nm$	$153\ Nm$	$-2040\ Nm$	$0\ Nm$

Nous appelons F le point de moment maximum sur le segment $[BC]$. La parabole $m(x)$ est définie par la règle des deux moments :

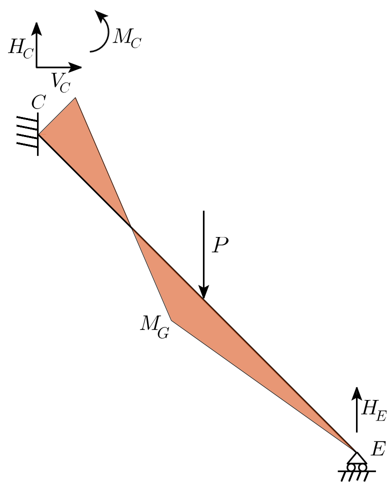
$$m(x) = y(x) + m_0(x) \ ;$$



avec $m_0(x) = \frac{q}{2}x(L-x)$ la fonction du moment pour une poutre isostatique, et $y(x) = \frac{M_C - M_B}{L}x + M_B$ la fonction linéaire qui relie les moments aux extrémités (avec $M_B, M_C < 0$).

$$\frac{dm}{dx} = 0 \Rightarrow x_F = \frac{1}{q}(\frac{qL}{2} + \frac{M_C - M_B}{L}) = 2,16\ m \ \Rightarrow M_F = m(x_F) = 1686\ Nm$$

Sur le segment $[CE]$, nous appelons M_G le moment sous la charge ponctuelle P.



L'équilibre en rotation donne :

$$H_E = (M_C + \frac{PL}{2})\frac{1}{L} = 592N \ \Rightarrow M_G = H_E\frac{L}{2} = 1480 \ Nm$$