



Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Analyse des Structures I

Vincent Denoël

GCIV0607-2

Année académique 2023-2024

Last update : 15 septembre 2023



Informations Générales

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Mises à jour ce document ?

<http://hdl.handle.net/2268/228117>

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Où ? Quand ?

Le cours est organisé tous les lundi du premier quadrimestre de 13h30 à 17h30. La présence au cours est obligatoire (horaire : voir CELCAT)

Contacts

Prof. Vincent Denoël
Bureau : B52/3, +1/422
Phone : 04/366.29.30
Mail : v.denoel@uliege.be

Anass Mayou, Assistant
Bureau : B52/3, +1/426
Phone : 04/366.92.45
Mail : a.mayou@uliege.be



Objectifs du cours et plan pédagogique ? Méthode d'évaluation ?

5 ECTS (voir "Engagements pédagogiques" sur MyULiege)

Interros pendant l'année (40%), Examen écrit (60%). Savoir déterminer les sollicitations dans une structure isostatique est un prérequis. L'étudiant qui n'en est pas capable échoue d'office à ce cours. Interros éventuellement non pénalisantes (matière par matière). Principe des interros : une/deux question(s) ouverte et une question à choix multiples.



Organisation

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Références : **Analyse des structures I**, V. Denoël
(exclusivement disponible à la Centrale des Cours,
<http://cdc-fsa.be/website/>)

Table des matières

- Analyse élastique des structures
 - Théorèmes généraux
 - Méthode des forces
 - Méthode des déplacements/rotations
 - Méthodes de Cross
- Lignes d'influence
- Analyse plastique



Agenda Prévisionnel

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Analyse des structures I

Lundi PM		Théorie		Exercices TP		Interro / Projet	
18/09/2023	1	Introduction - Théorèmes	V 2,5	Théorèmes, F. unité, D unité	A 1,5		
25/09/2023	2	Méthode des forces	V 2	Théorèmes, F. unité, D unité, Méthode des forces	A 2		
02/10/2023	3			Méthode des forces	A 3	Introduction projet	A 1
09/10/2023	4	Méthode des déplacements	V 3			Projet (Q&A)	A 1
16/10/2023	5			Méthode des forces (2), Méthode des déplacements (2)	A 4		
23/10/2023	6	Méthode des rotations	V 1			Interro forces (1,5) + Projet (1,5)	A 3
30/10/2023		Toussaint					
06/11/2023	7			Méthode des dépl. / rot.	A 4		
13/11/2023	8	Méthode de Cross	V 1,5	Méthode de Cross	A 2,5		
20/11/2023	9	Plasticité	V 2,5			Projet (finalisation)	A 1,5
27/11/2023	10	Plasticité	V 1	Méthode de Cross (1) + Plasticité (2)	A 3		
04/12/2023	11	Plasticité	V 2	Plasticité	A 1	Interro Dépl., ou rotations	A 1
11/12/2023	12	Lignes influence	V 2	Plasticité	A 2		
18/12/2023	13	Théorie des câbles ??		Plasticité (2), lignes d'influences (2)	A 4		
Somme			17,5		27		7,5



Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Section I : Introduction



Objectifs

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

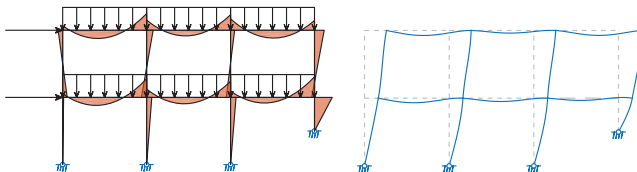
Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

- Déterminer les diagrammes MNV dans des structures (hyperstatiques)
- Calculer des déplacements dans des structures (év. hyperstatiques)
- Pouvoir déterminer des solutions analytiques simples → étude paramétrique rapide
- Comprendre le comportement de structures hyperstatiques (co-existence de systèmes porteurs, redondance, redistribution plastique,...)



NB1 : On se limite à l'étude de structures formées de barres (de treillis) et de poutres, la plupart du temps rectilignes



Iso vs. Hyper

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Co-existence de systèmes porteurs (raideur appelle l'effort)

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

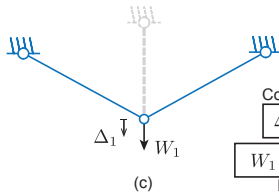
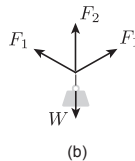
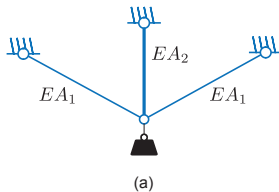
Rotations

Cross

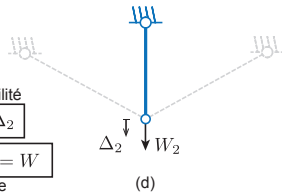
Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



Compatibilité
 $\Delta_1 = \Delta_2$
 Équilibre
 $W_1 + W_2 = W$





Redondance

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

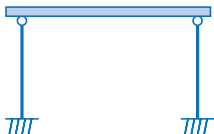
Cross

Lignes d'influence

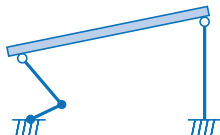
Analyse plastique

Câbles

Isostatique

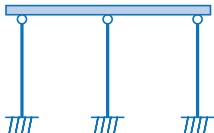


(a)

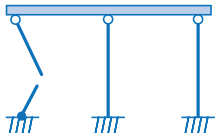


(b)

Hyperstatique



(c)



(d)



Principe de Superposition

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Pour les structures à comportement élastique linéaire :

$$E \left[\sum_{i=1}^r \lambda_i P_i \right] = \sum_{i=1}^r \lambda_i E [P_i]$$

Effet d'une combinaison linéaire = combinaison linéaire des effets
[*Effet* = déplacement, déplacement relatif, contrainte, réaction]



Chapitre II : Théorèmes Energétiques

Acquis d'apprentissage :

- connaître les théorèmes énergétiques principaux et leurs limites d'utilisation
- pouvoir appliquer le principe des travaux virtuels pour calculer les réactions dans une structure isostatique
- pouvoir appliquer le théorème de la force unité pour calculer des déplacements dans des structures iso- ou hyperstatiques



Contents

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



Equilibre d'un Corps Indéformable

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

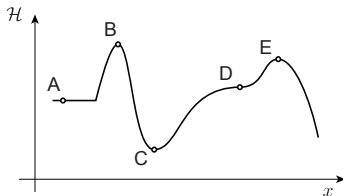
Analyse plastique

Câbles



Daniel Firman, Würsa (à 18 000 Km de la terre)

Comment écrire qu'un corps indéformable est en équilibre ?



$$\text{Equilibre} \iff \partial_x \mathcal{H} = 0$$

$\mathcal{H}$: énergie potentielle totale

x : paramètre décrivant la configuration du système (déformée)

Equilibre = configuration où $\mathcal{H}$ est minimum (stable), maximum (instable)
ou localement constante (neutre/indifférent)



Pour un corps indéformable, l'énergie potentielle totale $\mathcal{H}$ correspond au potentiel dont dérivent les forces extérieures, c'est-à-dire

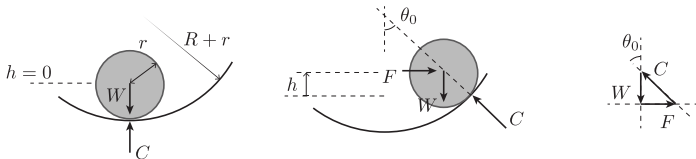
$$\mathcal{H} = -\mathcal{W}$$

où $\mathcal{W}$ est le travail réalisé par les forces agissant sur le corps depuis la configuration de référence, jusqu'à la configuration d'équilibre.

- Le choix d'une configuration de référence est arbitraire
- L'énergie potentielle totale est définie à une constante additive près
- Pour un système à un degré de liberté, $\mathcal{H}$ est une fonction d'un paramètre x , $\mathcal{H}(x)$
- Pour un système à plusieurs degrés de liberté, $\mathcal{H}$ est une fonction de plusieurs paramètres $\mathbf{x}$, $\mathcal{H}(\mathbf{x})$
- Pour un système continu (à un nombre infini de degrés de liberté), $\mathcal{H}$ est une fonction d'une fonction $v(x)$, c'est-à-dire une fonctionnelle, $\mathcal{H}[v(x)]$



Exemple (à 1DDL) : Soit une bille de rayon r , dans une coupelle de rayon R , soumise à son poids W . Quelle est la configuration d'équilibre ?
Imaginons ensuite que la bille soit soumise à une force F . Quelle est la configuration d'équilibre ?



$$\mathcal{H}(\theta) := -\mathcal{W}(\theta) = WR(1 - \cos \theta) - FR \sin \theta$$

NB. Le paramètre décrivant la configuration du système (noté x avant) est noté θ .
Le choix d'une configuration de référence est arbitraire (ici, on a choisi $\mathcal{H}(0) = 0$)



En pratique :

- Fastidieux d'écrire $\mathcal{H}$, surtout si c'est pour dériver $\mathcal{H}$ ensuite
- $\rightarrow$ écrire directement $\partial_{\theta} \mathcal{H} = 0$

Une dérivée = lié à une petite variation

$$\partial_{\theta} \mathcal{H} \big|_{\theta=\theta_0} = \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}(\theta_0 + \delta\theta) - \mathcal{H}(\theta_0)}{\delta\theta} := \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\theta} = 0$$

Quand un corps indéformable est en équilibre, l'énergie potentielle totale ne change pas ($\mathcal{H}(\theta_0 + \delta\theta) = \mathcal{H}(\theta_0)$) dans un déplacement virtuel $\delta\theta$ infiniment petit, compatible avec les conditions limites du système : $\delta\mathcal{H} = 0$. Puisque $\mathcal{H} = -\mathcal{W}$, on traduit l'équilibre en écrivant

$$\delta\mathcal{H} = \delta\mathcal{W} = 0$$



Principe des Travaux Virtuels

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Principe des travaux virtuels. *Pour tout corps indéformable en équilibre, le travail virtuel développé par les forces extérieures est nul pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons du système. Il s'écrit sous la forme*

$$\delta \mathcal{W} = 0$$

où $\delta \mathcal{W}$ représente le travail virtuel des forces extérieures ou travail extérieur pour le champ de déplacements virtuels choisi.

Méthode pour écrire l'équilibre d'un corps indéformable (à 1 DDL)

1. paramétrer la configuration d'équilibre θ_0 (a priori inconnue) puis donner un (champ de) déplacement virtuel $\delta \theta$ compatible avec les liaisons du système (**cinématiquement admissible**)
2. exprimer que le travail virtuel des forces extérieures dans ce déplacement virtuel est nul
3. l'équation ainsi obtenue **traduit l'équilibre** du corps :

$$\delta \mathcal{W} = -WR \sin \theta_0 \delta \theta_0 + FR \cos \theta_0 \delta \theta_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \theta_0 = \arctan F/W$$



Déplacement virtuel cinématiquement admissible = les matériaux restent continus et les conditions limites sont satisfaites.

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

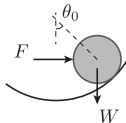
Câbles

Structure initiale



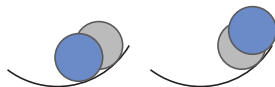
(a)

Configuration déformée
(d'équilibre)



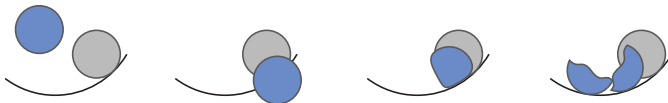
(b)

Déplacements virtuels
cinématiquement admissibles



(c)

Déplacements virtuels cinématiquement NON admissibles



(d)



Déplacement virtuel cinématiquement admissible = les matériaux restent continus et les conditions limites sont satisfaites.

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

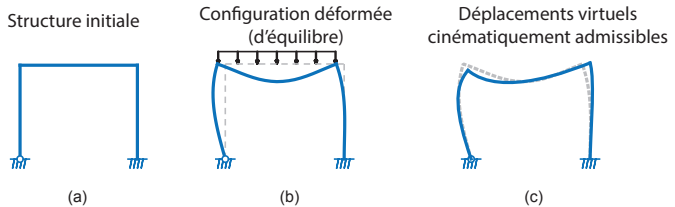
Rotations

Cross

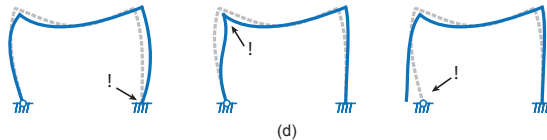
Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



Déplacements virtuels cinématiquement NON admissibles





Travail virtuel des Forces Extérieures $\delta\mathcal{W}$

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

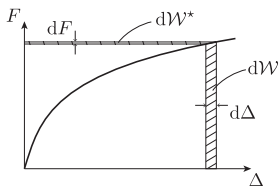
Lignes d'influence

Analyse plastique

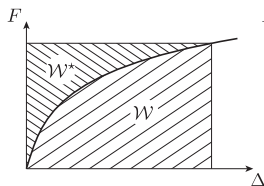
Câbles

Préciser la notion de :

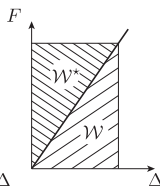
- travail des forces extérieures $\mathcal{W}(\Delta)$ (total, durant le chargement depuis l'état initial jusqu'à l'état courant)
- travail complémentaire des forces extérieures $\mathcal{W}^*(F)$ (total, durant le chargement depuis l'état initial jusqu'à l'état courant)
- **travail virtuel des forces extérieures $\delta\mathcal{W}(\Delta)$** (incrément, autour de la configuration « Δ »)
- travail complémentaire virtuel des forces extérieures $\delta\mathcal{W}^*(F)$ (incrément, autour de la configuration « F »)



(a)



(b)



(c)



Calcul de $\delta\mathcal{W}$: partir d'une configuration d'équilibre et donner un incrément de déplacement cinématiquement admissible ($\rightarrow$ virtuel)

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

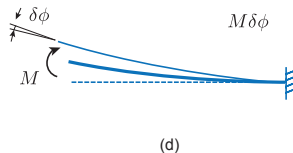
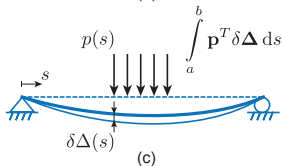
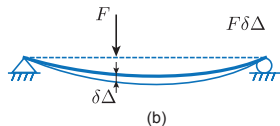
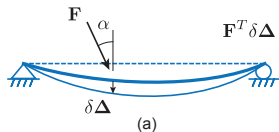
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



$$\delta\mathcal{W} = \sum_i \mathbf{F}_i^T \delta\Delta_i + \sum_i \int_{a_i}^{b_i} \mathbf{p}_i^T \delta\Delta_i ds + \sum_i M_i \delta\phi_i$$



Exemple d'application (considérer $F = pL = \frac{M}{L}$). Champ virtuel :
 $\delta v(s) = \delta_0 \sin \frac{\pi s}{L}$.

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

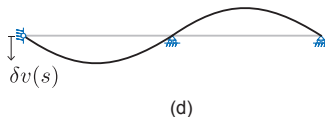
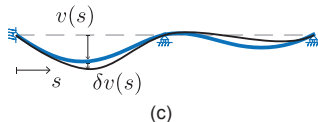
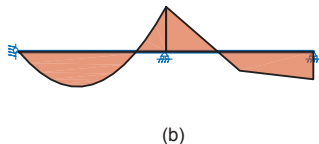
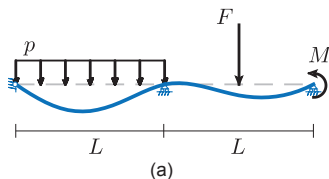
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



$$\delta \mathcal{W} = -F \delta_0 + \frac{2}{\pi} \delta_0 pL - \pi \delta_0 \frac{M}{L} = \left(\frac{2}{\pi} - 1 - \pi \right) F \delta_0 \simeq -3.5 F \delta_0.$$



Application : Calcul des réactions d'appui de poutres isostatiques

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Le principe des travaux virtuels s'applique aux corps indéformables.

Quelle peut être l'application de ce théorème dans le cadre de l'analyse des structures ? (qui souvent sont déformables, même une structure isostatique)

1. Remarquer qu'une structure hypostatique (mécanisme) est une structure indéformable, au sens de la déformation ε .
2. Une structure isostatique peut être transformée en une structure hypostatique en réalisant une *coupure simple*.
3. Le principe des travaux virtuels peut donc être utilisé dans le cadre d'une structure isostatique coupurée une fois, et donc transformée en un mécanisme.

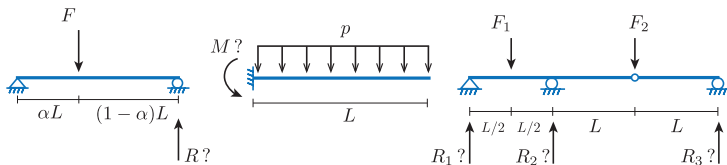
→ utilité pour déterminer des réactions d'appui ou des efforts intérieurs



Calcul des réactions d'appui de poutres/structures isostatiques. Méthode :

- libérer la réaction inconnue ; la structure devient un mécanisme (comme la bille)
- positionner le mécanisme dans la configuration initiale puis
- exprimer la réaction inconnue pour que la structure soit en équilibre dans cette configuration

Exemples





Equivalence entre le P.T.V. et l'équilibre d'un corps

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Les structures étudiées ne possèdent rarement qu'un seul degré de liberté !

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

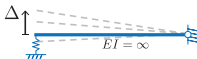
Une structure à N degrés de liberté est en équilibre $\Rightarrow$

Le principe de travaux virtuels est vérifié pour un champ de déformation quelconque, cinématiquement admissible

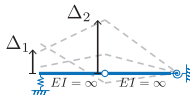
Une structure à N degrés de liberté est en équilibre $\Leftrightarrow$

Le principe de travaux virtuels est vérifié pour N champs de déformation orthogonaux, cinématiquement admissibles

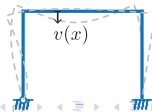
1 DDL

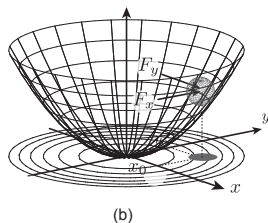
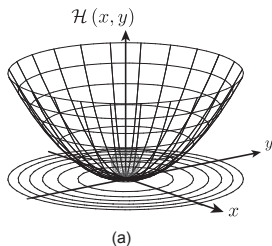


2 DDL



∞ - DDL





Ecrire deux fois le principe des travaux virtuels pour exprimer deux équations d'équilibre (deux inconnues) :

$$\begin{cases} \partial_x \mathcal{H} = 0 \\ \partial_y \mathcal{H} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W x_0 (R^2 - x_0^2 - y_0^2)^{-1/2} = F_x \\ W y_0 (R^2 - x_0^2 - y_0^2)^{-1/2} = F_y \end{cases}$$



Contents

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



Transposition aux Corps Déformables

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Même principe quand la structure est déformable. Il suffit d'ajouter l'**énergie potentielle de déformation** du corps dans $\mathcal{H}$:

Structure indéformable : $\mathcal{H} = -\mathcal{W}$

Structure déformable $\mathcal{H} = \mathcal{U} - \mathcal{W}$

Au lieu de $\delta\mathcal{H} = -\delta\mathcal{W} = 0$, on obtient $\delta\mathcal{H} = \delta\mathcal{U} - \delta\mathcal{W} = 0$, c'est-à-dire

$$\delta\mathcal{U} = \delta\mathcal{W}$$

(→ théorème des déplacements virtuels, voir plus loin).
Préciser d'abord comment calculer $\delta\mathcal{U}$



Energie potentielle de déformation $\mathcal{U}$

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Soit les tenseurs des contraintes et des déformations dans un solide déformable :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Si $\boldsymbol{\sigma}$ satisfait les équations
d'équilibre de volume et surface

$$\begin{cases} \partial_j \sigma_{ij} + F_i = 0 \\ \nu_j \sigma_{ij} = T_i \end{cases}$$

→ champ de contraintes
statiquement admissible

Si $\boldsymbol{\varepsilon}$ satisfait les conditions de
continuité interne (St Venant) et
les conditions limites

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \\ u_i = \bar{u}_i \end{cases}$$

→ champ de déformations
cinématiquement admissible

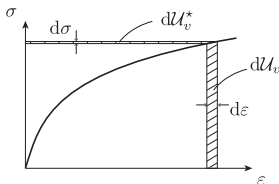


Densité d'énergie potentielle de déformation :

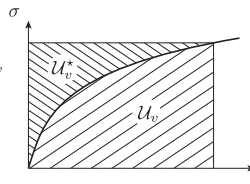
$$\mathcal{U}_v = \int_{\text{état initial}}^{\text{état courant}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

Densité d'énergie potentielle complémentaire de déformation :

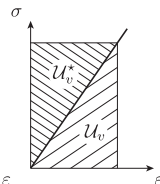
$$\mathcal{U}_v^* = \int_{\text{état initial}}^{\text{état courant}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}$$



(a)



(b)



(c)



Barre de treillis

Calcul de l'énergie interne de déformation

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} EA L \varepsilon^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{U}^* = \frac{AL}{2E} \sigma^2$$

$$\mathcal{U}(u) = \frac{1}{2} \frac{EA}{L} u^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{U}^*(N) = \frac{1}{2} \frac{L}{EA} N^2$$

NB : Eviter autant que possible d'utiliser σ , ε (les contraintes, c'est pour la MSD...) En calcul des structures, utiliser plutôt des grandeurs généralisées : force (N) et déplacement (u).

Travail virtuel des forces intérieures (énergie de déformation virtuelle)

$$\delta \mathcal{U} = \frac{EA}{L} u \delta u = N \delta u \quad \text{et} \quad \delta \mathcal{U}^* = \frac{L}{EA} N \delta N = u \delta N$$



Poutre

Travail virtuel des forces intérieures (énergie de déformation virtuelle)

$$\delta \mathcal{U} = \int_0^L M \delta \chi ds + \int_0^L N \delta u' ds + \int_0^L T \delta v'_\gamma ds$$

Matériau élastique : deux versions, cinématique et statique :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{U} &= \int_0^L EI \chi \delta \chi ds + \int_0^L EA u' \delta u' ds + \int_0^L G \bar{A} v'_\gamma \delta v'_\gamma ds \\ &= \int_0^L M \frac{\delta M}{EI} ds + \int_0^L N \frac{\delta N}{EA} ds + \int_0^L T \frac{\delta T}{G \bar{A}} ds \end{aligned}$$

Travail virtuel complémentaire des forces intérieures

$$\delta \mathcal{U}^* = \int_0^L EI \frac{d\delta \phi}{ds} d\phi + \int_0^L EA \frac{d\delta u}{ds} du + \int_0^L G \bar{A} \frac{d\delta v}{ds} dv$$



Théorème des Déplacements Virtuels

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Théorème des déplacements virtuels. *Pour tout corps déformable en équilibre, le travail virtuel de déformation est égal au travail virtuel des forces extérieures, pour tout champ de déplacement cinématiquement admissible, $\delta\mathcal{W} = \delta\mathcal{U}$ et donc :*

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i^T \delta \Delta_i + \sum_i \int_{a_i}^{b_i} \mathbf{p}_i^T \delta \Delta_i ds + \sum_i M_i \delta \phi_i \\ = \int_0^L EI \chi \delta \chi ds + \int_0^L EA u' \delta u' ds + \int_0^L G \bar{A} v_\gamma' \delta v_\gamma' ds \end{aligned}$$

- permet de traduire **l'équilibre** d'un corps déformable
- domaine d'applicabilité très large : ne dépend pas de la nature du corps, tant qu'il reste continu, s'applique aussi bien aux solides à comportement élastique linéaire qu'élasto-plastique, même pour les fluides ou les matériaux visco-élastiques (NB : la version ci-dessus n'est cependant valable que pour un matériau élastique linéaire)
- base du calcul plastique des structures



Théorème du Déplacement Unité

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Théorème du déplacement unité. *Théorème du déplacements unité. Soit une structure déformée sous l'action de forces données et/ou de déplacements imposés. Et soit à déterminer la force P qui, appliquée en un point donné A de la structure et dans une direction donnée d , assure l'équilibre de la structure (c'est-à-dire la réaction P).*

Choisissons pour la structure un champ de déplacements virtuels cinématiquement admissible tel que : (i) le point A se déplace d'une quantité unitaire dans la direction d , tout en faisant en sorte que (ii) les points d'application des autres forces appliquées subissent un déplacement virtuel nul. Dans ces conditions, le travail virtuel des forces extérieures se réduit à $\delta W = P \cdot 1$ et le théorème des déplacements virtuels se réduit à

$$P = \int_0^L EI v'' v_1'' ds + \int_0^L EA u' u_1' ds + \int_0^L G \bar{A} v_\gamma' v_{\gamma,1}' ds$$

- NB : on remplace δv par v_1 et δu par u_1 pour montrer que les champs virtuels sont associés à une valeur unitaire à l'endroit où la force P est appliquée.



- on doit connaître l'état déformé réel de la structure sous l'effet des charges extérieures.
- Choisir le champ le plus avantageux. NB s'il n'est pas possible d'annuler tous les déplacements virtuels, on tente d'en annuler un maximum
- Application pour calculer un moment d'encastrement



Exemple : Calculer la réaction à l'appui de droite

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

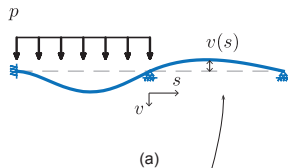
Rotations

Cross

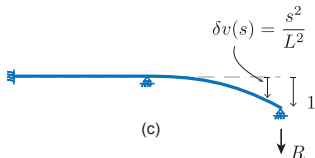
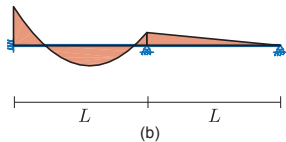
Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



$$v''(s) = \frac{pL^2}{28EI} \left(1 - \frac{s}{L}\right)$$



$$R = \int_0^L EI v'' v_1'' ds = \frac{pL^2}{28EI} \int_0^L EI \left(1 - \frac{s}{L}\right) \frac{2}{L^2} ds = \frac{pL}{28}$$



Variantes :

1. essayer $v_1(s) = \frac{s^n}{L^n}$ avec $n > 1$

→ le choix du champ de déplacement unitaire est arbitraire

2. essayer $v_1(s) = \frac{s}{L}$ (cinématiquement NON admissible)

→ le théorème ne fonctionne pas !



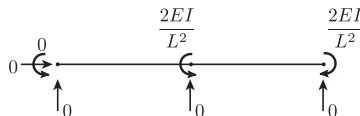
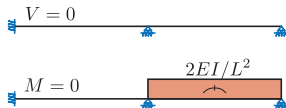
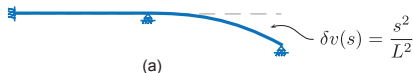
Théorème des Forces Virtuelles

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Equivalence entre champ de déplacements virtuels et champ de forces virtuelles (càd statiquement admissibles)

Déplacements virtuels



Forces virtuelles



- Pourquoi utiliser un champ de déplacement plutôt qu'un champ de sollicitations, ou vice versa (surtout s'ils sont équivalents) ?

[$EIv'''' = p$, avec une charge uniformément répartie (constante), on génère une déformée quartique (degré 4) → beaucoup plus simple de générer les déformations « complexes » avec quelques forces, plutôt qu'avec des expressions analytiques compliquées]

- Comment générer (facilement) un champ de sollicitations statiquement admissibles ?

[→ rendre la structure isostatique ou (plus) faiblement hyperstatique et calculer les réactions d'appuis]

[→ ça ne fonctionne pas évidemment si on rend la structure hypostatique ; impossible de trouver un équilibre statique]

Rappel :

Champ de sollicitations statiquement admissibles : ensemble de forces qui permettent d'assurer l'équilibre d'une structure.



Théorème des forces virtuelles. *Théorème des forces virtuelles. Pour tout corps déformable en équilibre, le travail virtuel complémentaire interne est égal au travail virtuel complémentaire développé par les forces extérieures pour tout système de forces virtuelles statiquement admissibles, $\delta\mathcal{W}^* = \delta\mathcal{U}^*$ et donc :*

$$\sum_i \delta \mathbf{F}_i^T \Delta_i + \sum_i \int_{a_i}^{b_i} \delta \mathbf{p}_i^T \Delta_i ds + \sum_i \delta M_i \phi_i$$
$$= \int_0^L M \frac{\delta M}{EI} ds + \int_0^L N \frac{\delta N}{EA} ds + \int_0^L T \frac{\delta T}{G\bar{A}} ds$$

- utilisé pour écrire des équations de **compatibilité**
- domaine d'applicabilité très large : ne dépend pas de la nature du corps, tant qu'il reste continu, s'applique aussi bien aux solides à comportement élastique linéaire qu'élasto-plastique, même pour les fluides ou les matériaux visco-élastiques.
- base du calcul plastique des structures (méthode statique)



Théorème de la Force Unité

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Théorème de la force unité. Soit une structure déformée sous l'action de forces données et/ou de déplacements imposés. Il y correspond une distribution d'efforts intérieurs M, N, T . Et soit à déterminer le déplacement d d'un point donné A de la structure dans une direction donnée.

Soumettons la structure à une seule force virtuelle de valeur $\delta F = 1$ appliquée en A et dans la direction voulue. Si on prend cette force unitaire comme seule force virtuelle, le travail virtuel complémentaire des forces extérieures se réduit à $\delta \mathcal{W}^* = 1 \cdot d$ et le théorème des forces virtuelles se réduit

$$d = \int_0^s M \frac{\delta M}{EI} ds + \int_0^s N \frac{\delta N}{EA} ds + \int_0^s T \frac{\delta T}{GA} ds$$

où M, N et T représentent les efforts dans la structure sous l'effet des sollicitations extérieures et les $\delta M, \delta N$ et δT sont les efforts internes sous l'effet de la force virtuelle unitaire.



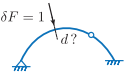
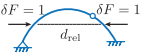
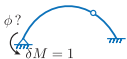
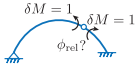
Variantes

Déplacement : appliquer une force unitaire

Déplacement relatif : appliquer un couple de forces unitaires

Rotation : appliquer un moment unitaire

Rotation relative : appliquer un couple de moments unitaires

Déplacement	Dépl. relatif	Rotation	Rot. relative
			



Exemple : Calculer (i) le déplacement vertical au milieu de la travée de gauche, (ii) la rotation au droit de l'appui de droite.

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

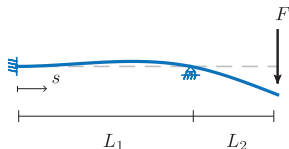
Rotations

Cross

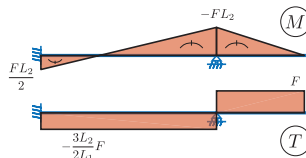
Lignes d'influence

Analyse plastique

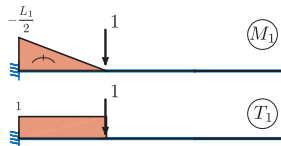
Câbles



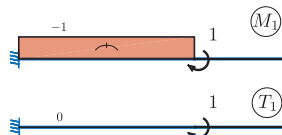
(a)



(b)



(c)



(d)



Structures I, 2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

$\int_0^L m(s)M(s)ds$				
	$M m L$	$\frac{1}{2} M m L$	$\frac{1}{2} M m L$	$\frac{1}{2} (M_1 + M_2) m L$
	$\frac{1}{2} M m L$	$\frac{1}{3} M m L$	$\frac{1}{6} M m L$	$\frac{1}{6} (2M_1 + M_2) m L$
	$\frac{1}{2} M m L$	$\frac{1}{6} M m L$	$\frac{1}{3} M m L$	$\frac{1}{6} (M_1 + 2M_2) m L$
	$\frac{1}{2} M (m_1 + m_2) L$	$\frac{1}{6} M (2m_1 + m_2) L$	$\frac{1}{6} M (m_1 + 2m_2) L$	$\frac{1}{6} [m_1 (2M_1 + M_2) + m_2 (M_1 + 2M_2)] L$
	$\frac{1}{2} M m L$	$\frac{1}{6} (2 - \alpha) M m L$	$\frac{1}{6} (1 + \alpha) M m L$	$\frac{1}{6} [(2 - \alpha) M_1 + (1 + \alpha) M_2] m L$
	$\frac{1}{3} M m L$	$\frac{1}{4} M m L$	$\frac{1}{12} M m L$	$\frac{1}{12} (3M_1 + M_2) m L$
	$\frac{1}{3} M m L$	$\frac{1}{12} M m L$	$\frac{1}{4} M m L$	$\frac{1}{12} (M_1 + 3M_2) m L$
	$\frac{1}{6} M (m_1 + 4m_2 + m_3) L$	$\frac{1}{6} M (m_1 + 2m_2) L$	$\frac{1}{6} M (2m_2 + m_3) L$	$\frac{1}{6} [m_1 M_1 + m_3 M_2 + 2m_2 (M_1 + M_2)] L$



Théorème de Réciprocité

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Les théorèmes de réciprocité sont valables pour les structures isostatiques ou hyperstatiques à comportement élastique linéaire. Ils sont attribués aux travaux de Betti (1872), Maxwell (1864), Lord Rayleigh (1873–1875), Castigliano (1872) et Helmholtz (1886). On se limite dans ce cours à utiliser les théorèmes de Betti et de Maxwell.

Théorème de réciprocité des travaux (théorème de Betti). *Dans une structure élastique, le travail développé par une sollicitation P_1 dans le champ de déplacement causé par un autre état de sollicitation P_2 est égal au travail développé par l'état de sollicitation P_2 dans le champ de déplacement de P_1 . Sous forme scalaire, il s'écrit*

$$P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}$$

Démonstration

Rappel du théorème des déplacements virtuels

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i^T \delta \Delta_i + \sum_i \int_{a_i}^{b_i} \mathbf{p}_i^T \delta \Delta_i ds + \sum_i M_i \delta \phi_i \\ = \int_0^L EI \chi \delta \chi ds + \int_0^L EA u' \delta u' ds + \int_0^L G \bar{A} v_\gamma' \delta v_\gamma' ds \end{aligned}$$



1. On applique le théorème des déplacements virtuels pour exprimer l'équilibre de la structure sous l'état de sollicitation P_1 , en choisissant comme champ de déplacement virtuel le champ de déformation sous l'effet de P_2 (il est donc cinématiquement admissible). Donc $\chi \rightarrow \chi_1$, $\delta\chi \rightarrow \chi_2$, (etc.) et

$$\delta\mathcal{U}_2 = \delta\mathcal{W}_{12}$$

où $\delta\mathcal{U}_2 = \int_0^L EI \chi_1 \chi_2 ds + \int_0^L EA u'_1 u'_2 ds + \int_0^L G \bar{A} v'_{\gamma,1} v'_{\gamma,2} ds$
et $\delta\mathcal{W}_{12} = \sum_i \mathbf{F}_{1,i}^T \mathbf{\Delta}_{2,i} + \sum_i M_{1,i} \phi_{2,i}$.

2. On applique le théorème des déplacements virtuels pour exprimer l'équilibre de la structure sous l'état de sollicitation P_2 , en choisissant comme champ de déplacement virtuel le champ de déformation sous l'effet de P_1 (il est donc cinématiquement admissible). Donc $\chi \rightarrow \chi_2$, $\delta\chi \rightarrow \chi_1$, (etc.) et

$$\delta\mathcal{U}_1 = \delta\mathcal{W}_{21}$$

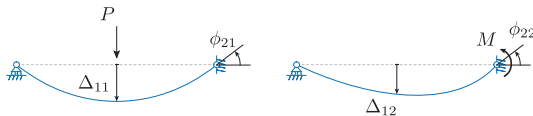
où $\delta\mathcal{U}_1 = \int_0^L EI \chi_2 \chi_1 ds + \int_0^L EA u'_2 u'_1 ds + \int_0^L G \bar{A} v'_{\gamma,2} v'_{\gamma,1} ds = \delta\mathcal{U}_2$
et $\delta\mathcal{W}_{21} = \sum_i \mathbf{F}_{2,i}^T \mathbf{\Delta}_{1,i} + \sum_i M_{2,i} \phi_{1,i}$.



Puisque $\delta\mathcal{U}_1 = \delta\mathcal{U}_2$, $\delta\mathcal{W}_{12} = \delta\mathcal{W}_{21}$ et

$$\sum_i \mathbf{F}_{1,i}^T \Delta_{2,i} + \sum_i M_{1,i} \phi_{2,i} = \sum_i \mathbf{F}_{2,i}^T \Delta_{1,i} + \sum_i M_{2,i} \phi_{1,i}.$$

Exemples



$$\Delta_{11} = \frac{PL^3}{48EI}, \phi_{21} = \frac{PL^2}{16EI} \quad \text{et} \quad \Delta_{12} = \frac{ML^2}{16EI}, \phi_{22} = \frac{ML}{3EI}$$

$$P\Delta_{12} = \frac{P ML^2}{16EI} = M\phi_{21}$$



Théorème de réciprocité des déplacements sous charges unités (théorème de Maxwell). *Soit une structure élastique soumise à deux chargements différents, composés d'une seule sollicitation chacun : une force (ou moment) $P_1 = 1$ et une force (ou moment $P_2 = 1$). Le déplacement conjugué à la sollicitation P_1 sous l'effet de la sollicitation unitaire en P_2 est égal au déplacement conjugué à la sollicitation P_2 sous l'effet de la sollicitation unitaire en P_1 :*

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

Démonstration

(immédiate, cas particulier du théorème de Betti)

NB : notation « standardisée »



Exercices

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Corps Indéformables

Corps Déformables

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

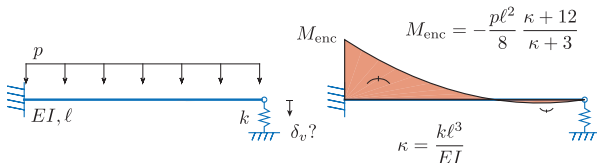
Analyse plastique

Câbles

Soit une poutre de raideur en flexion EI , de longueur ℓ , encastrée à une de ses extrémités et appuyée sur un appui à ressort de raideur k à l'autre extrémité.

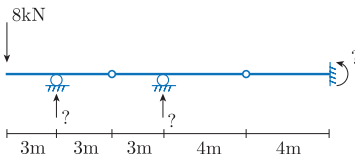
Cette poutre est soumise à une charge uniformément répartie p sur toute sa longueur. Sachant que le moment d'encastrement est donné par

$M_{\text{enc}} = -\frac{p\ell^2}{8} \frac{\kappa+12}{\kappa+3}$ où $\kappa = \frac{k\ell^3}{EI}$, déterminez (i) le diagramme des moments dans la poutre (il est esquissé sur la droite du croquis ci-dessous), (ii) le déplacement vertical de l'appui de droite, qui correspond également au tassement de l'appui.

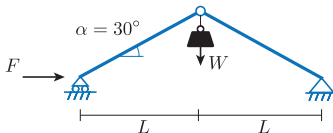




En utilisant le théorème des travaux virtuels, déterminez les réactions d'appuis et moments d'encastrement des structures isostatiques représentées à la Figure ci-dessous.



Les deux barres articulées de la structure ci-dessous supportent une charge W à leur jonction, modélisée comme une rotule. Déterminez la force F à appliquer pour que les barres soient en équilibre avec un angle $\alpha = 30^\circ$.





Chapitre III : Méthode des Forces

Acquis d'apprentissage :

- identifier les différents types d'hyperstaticité
- connaître les différentes façons de rendre une structure isostatique
- couper, écrire les équations de compatibilité, résoudre une structure par la méthode des forces



Hyperstaticité

Structures I,
2023-2024

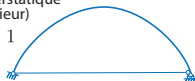
V. Denoël

Détermination du degré d'hyperstaticité h

Isostatique
 $h = 0$



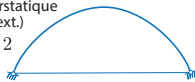
Hyperstatique
(intérieur)
 $h = 1$



Hyperstatique
(extérieur)
 $h = 1$



Hyperstatique
(int.+ext.)
 $h = 2$



Interne : avec des coupes **dans** la structure, on peut la rendre isostatique (quel que soit son chargement)

Externe : avec des suppressions de composantes des réactions aux appuis, on peut la rendre isostatique (quel que soit son chargement)



Degré d'hyperstaticité h : nombre de *coupures* (internes ou externes) à réaliser pour rendre la structure isostatique.

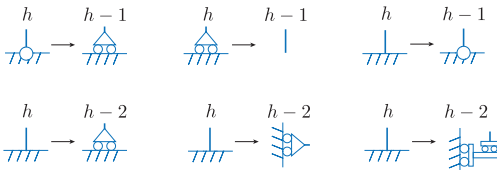
A une coupure simple correspond une inconnue hyperstatique (effort ou moment) et vice versa.

→ choix d'inconnues hyperstatiques que l'on va *extérioriser*. On en choisit h de façon à rendre la structure isostatique (pour les expérimentés : un peu moins que h , p.ex. $h - 1$ ou $h - 2$ de façon à rendre la structure moins hyperstatique).

Il y a plusieurs façons de rendre la structure isostatique, c'est-à-dire plusieurs choix d'inconnues hyperstatiques (→ choisir les plus simples, voir p.ex. méthode de Clapeyron).



Levée d'hyperstaticité externe (appuis)



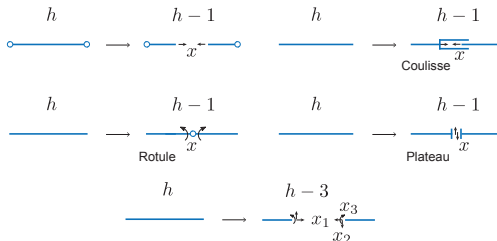
On extériorise :

- une ou deux composante(s) d'une réaction (verticale, horizontale ou même inclinée)
- le moment d'encastrement

Chaque coupure donne un effort ou moment. En fonction du type d'appui (rouleau, simple, encastrement), on extériorise une à trois inconnues. Réactions extériorisées = inconnues hyperstatiques



Levée d'hyperstaticité interne



On extériorise :

- une ou deux composante(s) de l'effort interne (effort axial ou tranchant)
- le moment de flexion

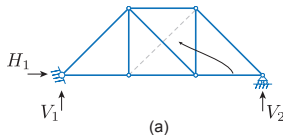
Chaque coupure donne deux efforts ou moments. En fonction du type d'élément (barre ou poutre), on extériorise jusqu'à une ou trois inconnues. Efforts internes extériorisés = inconnues hyperstatiques



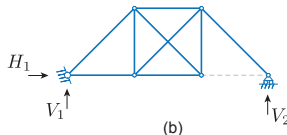
Eviter d'utiliser des formules toutes faites !

$$h = b + r - 2n$$

b = nombre de barres, r = nombre de composantes de réactions,
 n = nombre de noeuds.



(a)



(b)

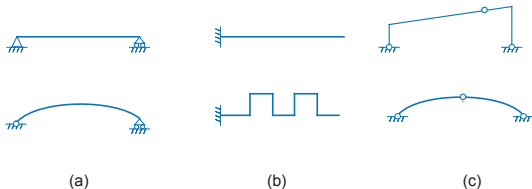
En fait, $h = 0$ dans les deux cas. Globalement, les deux structures ont un degré d'hyperstaticité nul.

(a) isostatique, (b) mécanisme car une partie est hypostatique, l'autre est hyperstatique. Le mécanisme l'emporte, donc hypostatique.

Mais la formule donne le même résultat !



Tenter de se ramener à une des 3 structures isostatiques de base : (a) poutre simple, (ii) poutre encastrée-libre (cantilever), (iii) arc à 3 rotules.



Rem. 1 : Il ne faut pas nécessairement utiliser autant d'inconnues hyperstatiques internes (resp. externes) que le degré d'hyperstatictié interne (resp. externe).
Rem. 2 : d'ailleurs pas toujours évident de faire la différence entre intérieur et extérieur



Hyperstaticité : Exemples

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

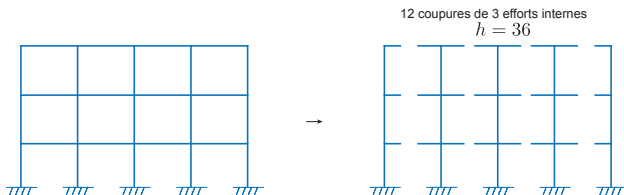
Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Un portique à plusieurs travées et plusieurs étages, et à noeuds rigides est fortement hyperstatique.

On rencontre ces noeuds rigides dans les structures en béton et, parfois, dans les structures métalliques (plus coûteux de réaliser des assemblages avec transmission parfaite des moments).

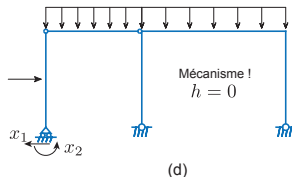
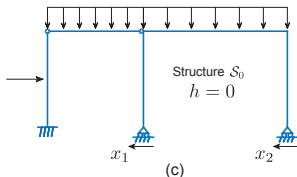
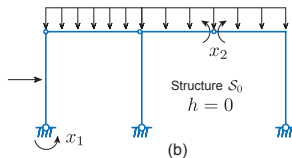
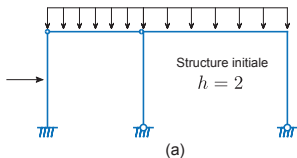


Transformation de la structure en 5 poutres cantilever.



Le choix d'une *structure isostatique de référence* n'est pas unique.

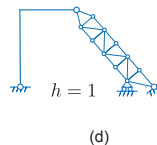
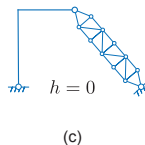
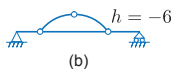
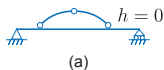
! il est important que la structure coupurée soit isostatique (et pas partiellement hyper- et hypo-statique).





Composition de systèmes porteurs simples :

- une structure isostatique sur une structure isostatique est isostatique
- le remplacement d'une partie de structure rotulée-rotulée par une autre structure isostatique reste isostatique (remplacement par un treillis).





Exemple d'une structure 4 fois hyperstatique ($h = 4$) Intérieurement une fois, extérieurement trois fois... (par exemple)

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

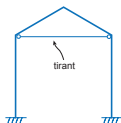
Rotations

Cross

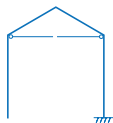
Lignes d'influence

Analyse plastique

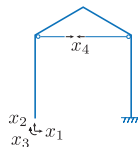
Câbles



(a)



(b)

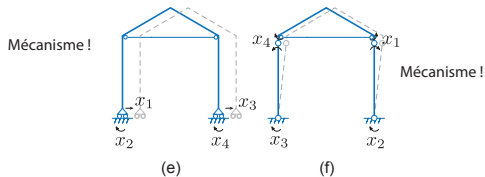
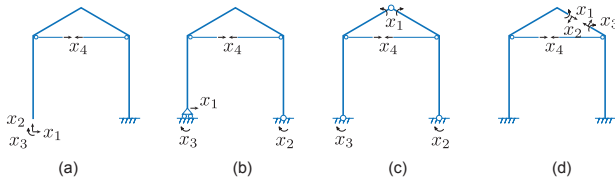


(c)



Autres possibilités : (a) poutre cantilever, (b) poutre simple, (c) arc à 3 rotules, (d) double cantilever

Attention à ne pas transformer la structure en mécanisme.





Alors, hyperstatique intérieurement ou extérieurement ?

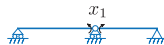
C'est une question de point de vue... utiliser la coupure la plus avantageuse
(cf. Clapeyron)



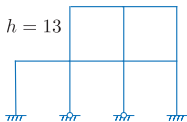
(a)



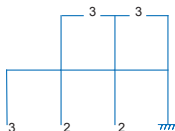
(b)



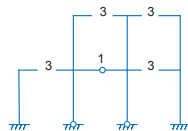
(c)



(a)



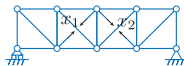
(b)



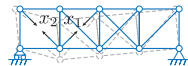
(c)



(a)



(b)



Mécanisme !

(c)



Méthode des Forces : Exemple introductif

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Exemple 1 : analyse du treillis à 3 barres suivant

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

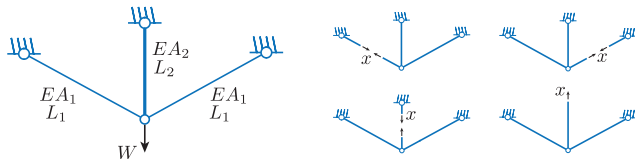
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles





Exemple 2 : analyse de la poutre sur trois appuis sous charge uniformément répartie

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

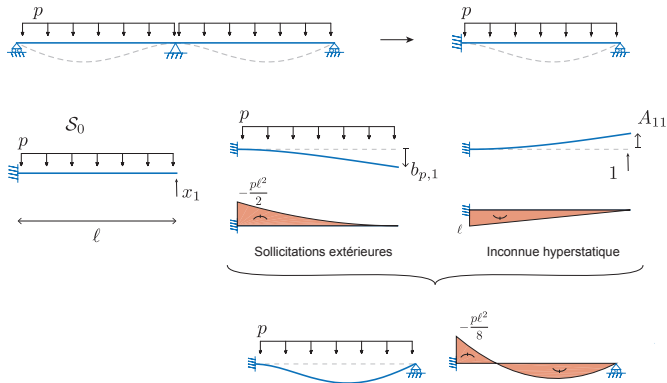
Rotations

Cross

Lignes d'influence

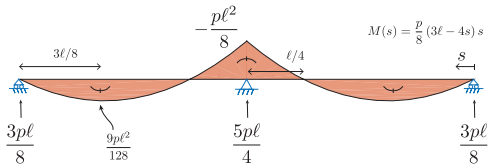
Analyse plastique

Câbles





La poutre continue sur trois appuis soumise à charge uniformément répartie



- le moment maximum en valeur absolue se trouve sur l'appui central et vaut $-\frac{p\ell^2}{8}$;
- le moment maximum positif en travée vaut $\frac{9p\ell^2}{128}$ (soit environ 56% de $\frac{p\ell^2}{8}$) et se trouve à une distance $3\ell/8$ de l'appui d'extrémité ;
- le moment à mi-travée (à une distance $\ell/2$ de l'appui d'extrémité) vaut $\frac{p\ell^2}{16}$; il est 12% plus petit que le moment maximum en travée (environ 88% de $\frac{9p\ell^2}{128}$) ;
- le moment s'annule à une distance $\ell/4$ de l'appui central.



Formulation Générale

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

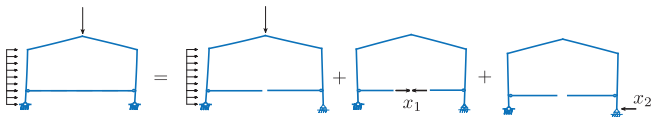
Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Principe de la méthode :

Soit une structure $\mathcal{S}$, h fois hyperstatique, soumise à l'action de forces extérieures. Elle a le même comportement qu'une structure $\mathcal{S}_0$ isostatique, soumise à l'action des mêmes forces extérieures et de forces, moments ou paires de forces ou moments, notés $X_1, X_2, \dots, X_h$ dont l'amplitude est telle que les déplacements conjugués aux coupures soient nuls.



Exemple pour $h = 2$. (illustration par l'absurde). Puisque la structure est à comportement linéaire, la solution est unique. Si X_1 et X_2 ne correspondaient pas vraiment aux efforts dans la structure réelle, on obtiendrait un allongement ou raccourcissement du tirant et/ou un déplacement de l'appui à rouleau.



Méthodologie :

1. Identifier le degré d'hyperstaticité h
2. Choisir h inconnues hyperstatiques (et donc le système isostatique de référence $\mathcal{S}_0$)
3. Calculer tous les coefficients de flexibilité A_{ij} et $b_{p,i}$
4. Ecrire les équations de compatibilité $\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}_p = 0$
5. Résoudre pour obtenir les valeurs des inconnues hyperstatiques $\mathbf{x}$
6. Déformée et diagrammes d'efforts internes obtenus par recombinaison



1. Identifier le degré d'hyperstaticité h

Ajouter l'hyperstaticité interne et l'hyperstaticité externe. Tenter de revenir à des combinaisons des trois systèmes porteurs de base (poutre encastrée-libre, poutre sur deux appuis, arc à trois rotules)

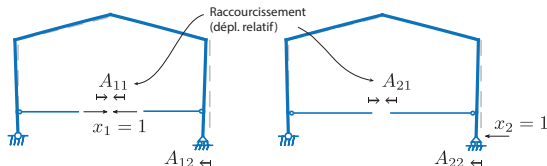
2. Choisir h inconnues hyperstatiques (et donc le système isostatique de référence S_0)

Attention, choisir de façon à s'économiser ! Les bons plans : (i) ajouter des rotules dans les poutres, à des endroits stratégiques, (ii) couper les tirants/barres qui contribuent à l'hyperstaticité interne.

Déplacement généralisé	Force conjuguée
Déplacement	Force
Dépl. relatif	Couple de forces
Rotation	Moment
Rotation relative	Couple de moments



3.a Calculer tous les coefficients de flexibilité A_{ij}



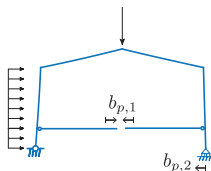
A_{ij} est le déplacement généralisé à la coupure j sous l'effet d'une valeur unitaire de l'inconnue hyperstatique associée à la coupure i . Utiliser le théorème de la force unité (dans la structure S_0 !)

$$d = \int_0^L M \frac{M_1}{EI} ds + \int_0^L N \frac{N_1}{EA} ds \quad \rightarrow \quad A_{ij} = \int_0^L \frac{M_i M_j}{EI} ds + \int_0^L \frac{N_i N_j}{EA} ds$$

Conventions : compter positivement les déplacements (généralisés) dans le sens de définition des inconnues hyperstatiques.



3.b Calculer tous les coefficients de flexibilité $b_{p,i}$



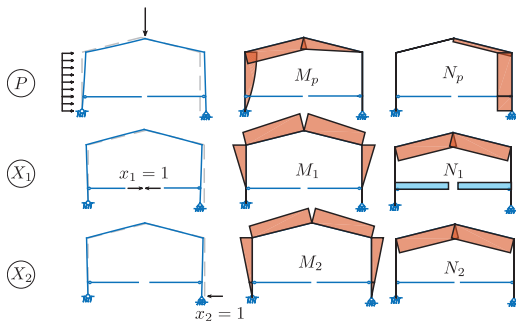
Raccourcissement
(dépl. relatif)

NB: $b_{p,1} < 0$ $b_{p,2} < 0$

$b_{p,i}$ est le déplacement généralisé à la coupure i sous l'effet des sollicitations extérieures. Utiliser le théorème de la force unité (dans la structure S_0 !)

$$d = \int_0^L M \frac{M_1}{EI} ds + \int_0^L N \frac{N_1}{EA} ds \quad \rightarrow \quad b_{p,i} = \int_0^L \frac{M_i M_p}{EI} ds + \int_0^L \frac{N_i N_p}{EA} ds$$

Conventions : compter positivement les déplacements (généralisés) dans le sens de définition des inconnues hyperstatiques.



	(M_1, N_1)	(M_2, N_2)	(M_p, N_p)
(M_1, N_1)	A_{11}	A_{12}	$b_{p,1}$
(M_2, N_2)	A_{21}	A_{22}	$b_{p,2}$

$A_{ii} > 0$ (toujours!), A_{ij} et $b_{p,i}$ peuvent être positifs ou négatifs (selon les conventions choisies).



4. Ecrire les équations de compatibilité

A_{ij} est le déplacement généralisé à la coupure j sous l'effet d'une valeur **unitaire** de l'inconnue hyperstatique associée à la coupure i .

Donc $\sum_{i=1}^h x_i A_{ij}$ est le déplacement généralisé à la coupure j sous l'effet des h inconnues hyperstatiques dont les intensités sont $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_h\}$. Cette somme est la j^{eme} composante du vecteur $\mathbf{A} \mathbf{x}$ (dimensions $h \times 1$).

$b_{p,j}$ est le déplacement généralisé à la coupure j sous l'effet des sollicitations extérieures.

Donc le déplacement total généralisé à la coupure j sous l'effet des h inconnues hyperstatiques et des charges extérieures (dans la structure S_0) est $(\mathbf{A} \mathbf{x})_j + b_{p,j}$. Ce déplacement est nul puisque la structure est en réalité continue à la coupure. Notation vectorielle :

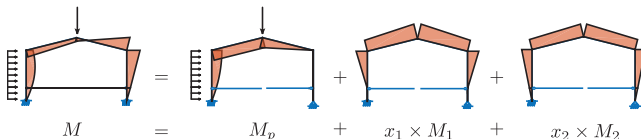
$$\text{Equation(s) de compatibilité : } \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}_p = 0$$



5. Résoudre pour obtenir les valeurs des inconnues hyperstatiques x
Système d'équations de dimensions $h \times h$. (Souvent à $h = 1, 2$ ou 3)

6. Déformée et diagrammes d'efforts internes obtenus par recombinaison
Puisque les inconnues hyperstatiques sont maintenant connues, on peut recombinaison les réponses sous chacune des charges. Par exemple, le diagramme des moments :

$$M = M_p + \sum_{i=1}^h X_i M_i$$



(idem pour les autres éléments de réduction, pour les réactions d'appui et pour les déplacements).



Utilisation de la symétrie

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

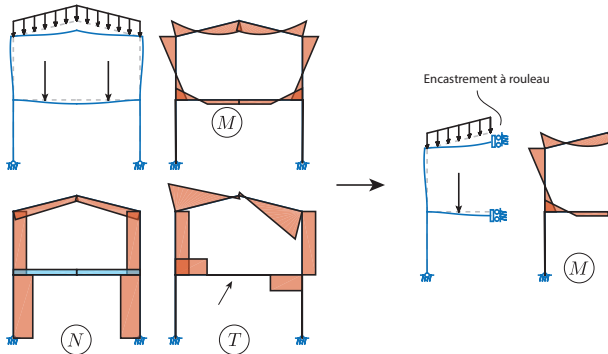
Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Structure symétrique chargée symétriquement. Pour une barre qui traverse l'axe de symétrie perpendiculairement :

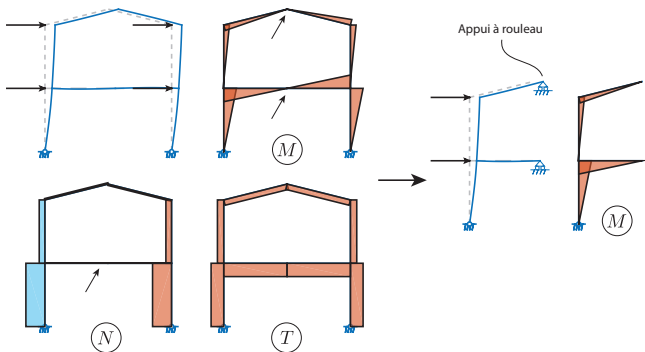
- pas de déplacement perpendiculaire à l'axe de symétrie
- pas d'effort tranchant, $T = 0$





Structure symétrique chargée anti-symétriquement. Pour une barre qui traverse l'axe de symétrie perpendiculairement :

- pas de moment de flexion, $M = 0$
- pas d'effort axial, $N = 0$





Méthode de Clapeyron

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

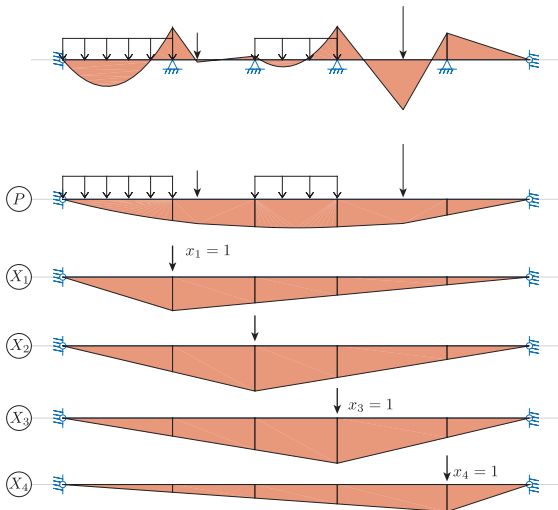
Rotations

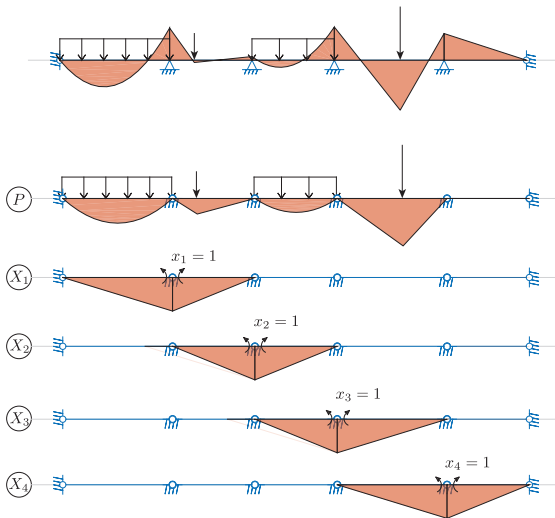
Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles







Méthode des trois moments (dite de Clapeyron) : utiliser les moments sur appuis comme inconnues hyperstatiques.

$$A_{i-1,i} = \frac{\ell_i}{6EI_i} \quad ; \quad A_{i,i} = \frac{\ell_i}{3EI_i} + \frac{\ell_{i+1}}{3EI_{i+1}}; \quad A_{i,i+1} = \frac{\ell_{i+1}}{6EI_{i+1}}$$

$$b_{p,i} = \frac{\ell_i}{EI_i} S_G^i + \frac{\ell_{i+1}}{EI_{i+1}} S_D^{i+1}$$

où S_G^i et S_D^{i+1} sont établis en fonction des sollicitations sur les travées, à partir des Tables de Mohr.

Chacune des équations de compatibilité prend la forme

$$\frac{\ell_i}{6EI_i} M_{i-1} + \frac{1}{3} \left(\frac{\ell_i}{EI_i} + \frac{\ell_{i+1}}{EI_{i+1}} \right) M_i + \frac{\ell_{i+1}}{6EI_{i+1}} M_{i+1} = -\frac{\ell_i S_G^i}{EI_i} - \frac{\ell_{i+1} S_D^{i+1}}{EI_{i+1}}.$$

Pour une poutre à inertie constante et travées de portées égales, cette expression se simplifie en

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = -6 (S_G^i + S_D^{i+1}).$$



Formulaire Poutres Hyperstatiques

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

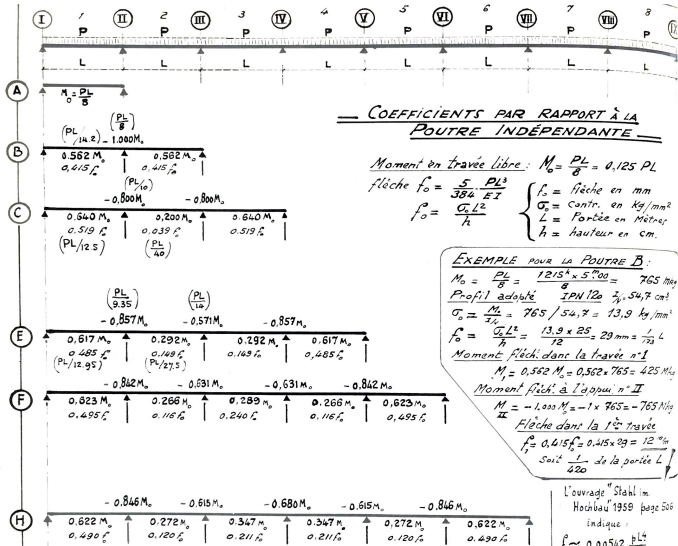
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



L'ouvrage "Stahl im Hochbau" 1959 page 506 indique: $f_0 \approx 0,0542 \frac{PL^4}{EI}$



Chapitre IV : Méthode des Déplacements

Acquis d'apprentissage :

- écrire l'équilibre d'une structure par ses noeuds
- différencier indétermination statique et cinématique
- bloquer les DDL, écrire les équations d'équilibre aux noeuds, résoudre une structure par la méthode des déplacements



Théorème des Déplacements Virtuels

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Théorème des déplacements virtuels. *Pour tout corps déformable en équilibre, le travail virtuel de déformation est égal au travail virtuel des forces extérieures, pour tout champ de déplacement cinématiquement admissible, $\delta\mathcal{W} = \delta\mathcal{U}$ et donc :*

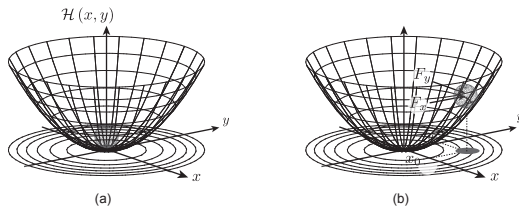
$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i^T \delta \Delta_i + \sum_i \int_{a_i}^{b_i} \mathbf{p}_i^T \delta \Delta_i ds + \sum_i M_i \delta \phi_i \\ = \int_0^L EI \chi \delta \chi ds + \int_0^L EA u' \delta u' ds + \int_0^L G \bar{A} v'_\gamma \delta v'_\gamma ds \end{aligned}$$

- permet de traduire **l'équilibre** d'un corps déformable
- domaine d'applicabilité très large : ne dépend pas de la nature du corps, tant qu'il reste continu, s'applique aussi bien aux solides à comportement élastique linéaire qu'élasto-plastique, même pour les fluides ou les matériaux visco-élastiques (NB : la version ci-dessus n'est cependant valable que pour un matériau élastique linéaire)
- base du calcul plastique des structures



Deux options d'application du théorème :

1. écrire le théorème pour N champs de déplacement bien choisis (pour exprimer l'équilibre d'une structure à N ddl)
2. écrire le théorème pour un champ de déplacements bien choisi (→ théorème du déplacement unité)



$$\mathcal{H}(x, y) = WR - W(R^2 - x^2 - y^2)^{1/2} - F_x x - F_y y$$

$$\begin{cases} \partial_x \mathcal{H} = 0 \\ \partial_y \mathcal{H} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Wx_0 (R^2 - x_0^2 - y_0^2)^{-1/2} = F_x \\ Wy_0 (R^2 - x_0^2 - y_0^2)^{-1/2} = F_y \end{cases}$$

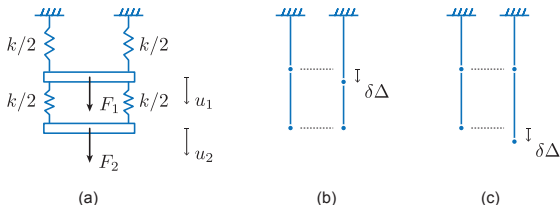


Exemples Introductifs

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Exemple 1 : « structure » discrète à deux degrés de liberté

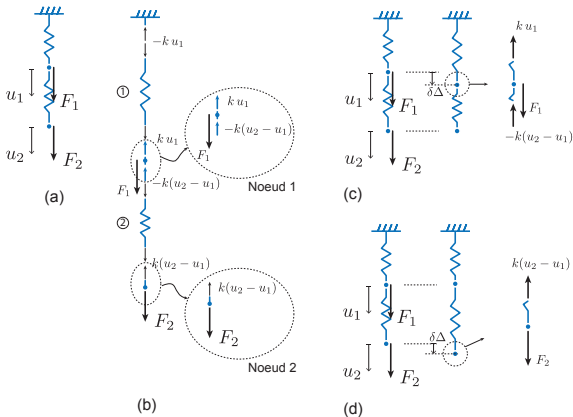


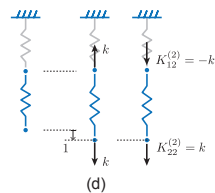
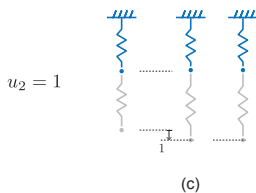
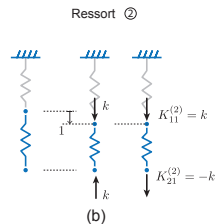
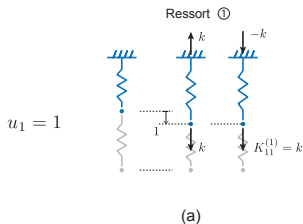
NB : Importance du choix des déplacements virtuels ! (en choisissant « bien », c'est-à-dire **un DDL à la fois**, chaque équation on aboutit à l'équilibre de chaque *noeud* dans la direction de chaque ddl)

$$k u_1 + k(u_1 - u_2) = F_1 \quad ; \quad k(u_2 - u_1) = F_2$$



Vérification de l'équilibre à l'aide d'un schéma rendu libre





$$\begin{aligned} \left[K_{11}^{(1)} + K_{11}^{(2)} \right] u_1 + K_{21}^{(1)} u_2 &= F_1 & \rightarrow & \quad 2k u_1 - k u_2 = F_1 \\ K_{12}^{(2)} u_1 + K_{22}^{(2)} u_2 &= F_2 & \rightarrow & \quad -k u_1 + k u_2 = F_2 \end{aligned}$$



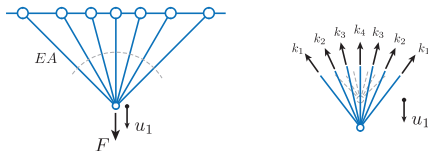
En **déplaçant chaque degré de liberté d'une unité** et en maintenant **tous les autres degrés de liberté fixés**, on peut écrire l'équation d'équilibre associée à ce degré de liberté $\partial\mathcal{H}/\partial u_i$.

Une autre façon de voir les choses : en déplaçant chaque DDL d'une unité et en maintenant les autres fixés,

1. on peut calculer les forces dans les éléments sous l'effet de déplacements imposés aux noeuds,
2. obtenir les efforts associés sur tous les noeuds (i.e. le noeud déplacé mais aussi tous les autres),
3. écrire que tous les noeuds doivent être en équilibre.



Exemple 2 : treillis (5 fois !) hyperstatique, analysé avec une seule inconnue cinématique u_1



$$\left[K_{11}^{(1)} + \dots + K_{11}^{(7)} \right] u_1 = F$$

Différence entre :

- degré d'indétermination statique = hyperstaticité ($h = 5$),
- degré d'indétermination cinématique ($m = 1$).

NB : la raideur appelle l'effort.



Exemple 3 : Structure continue (infinité de degrés de liberté, *a priori* $\leadsto$ fini + information complémentaire)

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

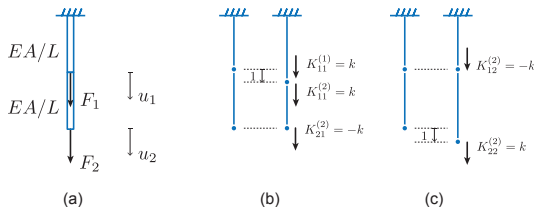
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



Est-ce possible de condenser l'information sur le déplacement des deux barres à la connaissance des déplacements de deux des points ?
 [oui, puisque $EA u''(x) = p_x(x) = 0, \forall x \notin \{0, L, 2L\}$]



Exemple 4 : Structures continues (infinité de degrés de liberté, *a priori* $\leadsto$ fini + information complémentaire)

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

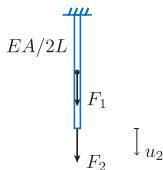
Rotations

Cross

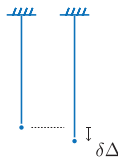
Lignes d'influence

Analyse plastique

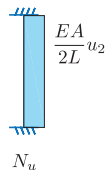
Câbles



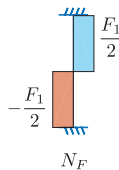
(a)



(b)



(c)



(d)

Est-ce possible de n'utiliser qu'un seul degré de liberté et non pas deux (malgré la charge appliquée en travée) ? [oui]



$$\delta\mathcal{U} = \delta\mathcal{W} \quad \rightarrow \quad \int_0^{2L} N(s) \delta u'(s) ds = \frac{\delta\Delta}{2} F_1 + \delta\Delta F_2$$

$$\int_0^{2L} (N_u + N_F) \frac{\delta\Delta}{2L} ds = \frac{\delta\Delta}{2} F_1 + \delta\Delta F_2 \quad \rightarrow \quad \frac{EA}{2L} u_2 = \frac{F_1}{2} + F_2$$

→ un seul degré de liberté pour une structure avec des sollicitations à deux « noeuds »

Plus généralement, possibilité de ne pas utiliser des noeuds à chaque force concentrée (heureusement car on doit pouvoir traiter des charges uniformément réparties).

Dans ce cas, il est importante de traiter l'effet des forces entre noeuds de façon appropriée.



En résumé :

- nécessité de définir un autre système de conventions, plus systématique
- identifier des noeuds puis des degrés de liberté
- écrire les équations d'équilibre à chaque noeud et pour chaque direction (ou rotation) associée aux différents degrés de liberté
- ces équations sont obtenues
 - en ajoutant les contributions de chaque élément (barre, poutre) à la raideur d'un noeud (ddl)
 - en ajoutant les contributions des sollicitations appliquées entre les noeuds
- calculer les déplacements (et/ou rotations) puis les efforts internes



Concepts Généraux

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Définitions

Noeud : « Séparation entre deux parties de structure dont le comportement est bien compris de façon analytique. »

[A chacun de régler lui-même son propre degré de complexité, mais ...]

...généralement : partie rectiligne de structure dont les propriétés géométriques et mécaniques sont constantes et soumise à des sollicitations simples (force ou moment concentré, sollicitation répartie).

Degré de liberté : déplacement ou rotation en un noeud. Coordonnée utilisée pour représenter la configuration déformée d'une structure. En 2D, un DDL = déplacement selon e_x ou e_y ou bien une rotation (autour de e_z) : u_x , u_y ou φ .

Attention : ne pas confondre les DDL et les noeuds !

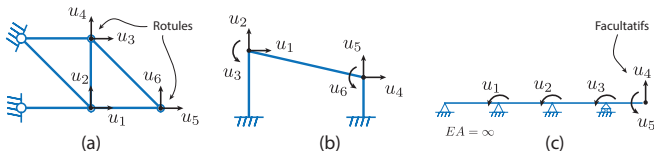


Nombre maximum de DDL par noeud :

Ossature plane, composée de poutres : 3 degrés de liberté par noeud (deux déplacements, une rotation)

Ossature plane, composée de barres (treillis) : 2 degrés de liberté par noeud (deux déplacements)

Ossature 3-D, composée de poutres : 6 degrés de liberté par noeud



(a) Treillis à 6 DDL, (b) Portique à 6 DDL, (c) poutre à 3 ou 5 DDL



La structure cinématique de référence $\mathcal{C}_0$ est la structure obtenue en bloquant tous les degrés de liberté choisis.

Degré d'indétermination cinématique m = nombre de blocages nécessaires pour rendre la structure cinématiquement déterminée
Chaque blocage supprime un degré de liberté : soit u_x , soit u_y , soit φ .

Charges extérieures : P_i sollicitation conjuguée au degré de liberté i (force si d_i est un déplacement, moment si d_i est une rotation).



Coefficient de rigidité (ou de raideur) K_{ij} : réaction produite au degré de liberté i , lorsqu'on impose uniquement un déplacement unitaire du degré de liberté j , tous les autres degrés de liberté restant bloqués (égaux à 0).

Coefficient de sollicitation $k_{p,i}$: réaction produite au degré de liberté i , par les forces extérieures appliquées entre noeuds et lorsque tous les degrés de liberté sont bloqués (donc calculé dans la structure cinématique de référence).

Dans la structure cinématique de référence $\mathcal{C}_0$, à chaque blocage, il existe une série de réactions :

- $K_{ij} u_j$ pour chaque u_j , $j = 1, \dots, m$ (toujours inconnu à ce stade)
- $k_{p,i}$ pour les forces extérieures entre noeuds.



Ces forces aux blocages doivent équilibrer les forces extérieures (s'il y en a) appliquées sur le noeud et associées à ce degré de liberté. Donc

$$\sum_{j=1}^m K_{ij} u_j + k_{p,i} = p_i$$

$$\mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{k}_p = \mathbf{p}$$



Méthodologie

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

1. Déterminer le degré d'indétermination cinématique m
2. Identifier et numéroter les degrés de liberté à bloquer pour obtenir la **structure cinématique de référence $\mathcal{C}_0$** . Un degré de liberté est associé à un noeud ; au maximum, 3 ddl par noeuds, en plan ; les éléments (barres et poutres) qui partagent les mêmes noeuds partagent les mêmes degrés de liberté
3. Imposer un déplacement unitaire à chaque degré de liberté pour obtenir la matrice de raideur de la structure $\mathbf{K}$ et le vecteur des charges équivalentes $\mathbf{k}_p$; collecter les forces et moments aux noeuds dans le vecteurs de charges nodales $\mathbf{p}$.
4. **Ecrire les équations d'équilibre des noeuds $\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{k}_p = \mathbf{p}$** , et les résoudre pour obtenir les déplacements/rotations des ddl, $\mathbf{u}$
5. Calculer les efforts internes à partir des **relations entre efforts internes et déplacements/rotations aux bornes d'un élément**



Détails : Choix des Noeuds et DDL

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

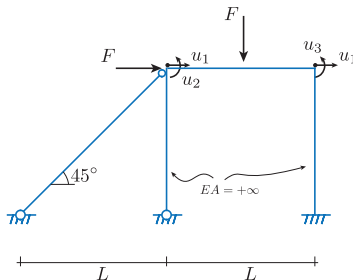
- A priori, utiliser autant de noeuds que de sections où doivent être déterminés des efforts ou déplacements,
- Dans un calcul à la main, choisir les noeuds et DDL avec parcimonie (typiquement 1 à 4 degrés de liberté) ; a posteriori, se limiter à l'essentiel,
- Si ce n'est pas possible, utiliser une méthode par éléments finis
- Les matrices de raideur sont disponibles (dans la version de base) pour 3 types d'éléments → ne pas bloquer des degrés de liberté inutilement



Principe de parcimonie

$EA = \infty$ sur les poteaux, donc la traverse ne se déplace pas verticalement
 $EA = \infty$ sur la traverse, donc ses deux extrémités se déplacent de la même quantité u_1

→ deux noeuds ($n = 2$), trois DDLs ($m = 3$)





Détails : Efforts aux Extrémités des Eléments

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

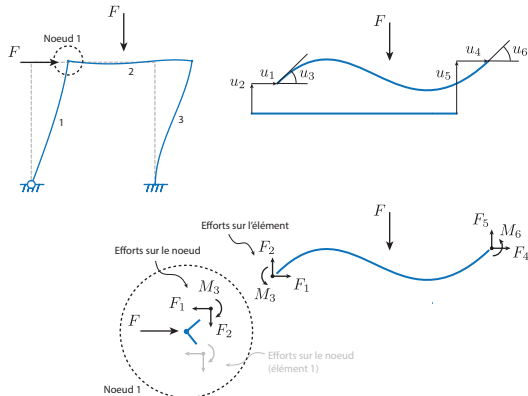
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



Les efforts aux extrémités de l'élément $\{F_{1,2,4,5}, M_{3,6}\}$ sont le résultat (i) des déplacements $u_1, \dots, u_6$ et (ii) des sollicitations sur l'élément.



Equations constitutives de la poutre

$$EI v'''' = p_y \quad ; \quad EA u'' = p_x$$

avec les conditions limites

$$u(0) = u_1; v(0) = u_2, v'(0) = u_3, u(L) = u_4; v(L) = u_5, v'(L) = u_6.$$

Equation différentielle linéaire $\rightarrow$ solution = solution homogène + solution particulière

(choisir les coefficients d'intégration de la solution homogène pour qu'elle satisfasse les conditions limites ; trouver la solution particulière qui correspond aux conditions limites égales à zéro).

1. solution homogène ($u(s)$ linéaire, $v(s)$ cubique) :

$$u(s) = u_1 h_1(s) + u_4 h_4(s)$$

$$v(s) = u_2 h_2(s) + u_3 h_3(s) + u_5 h_5(s) + u_6 h_6(s)$$



$$\text{où } h_1 = 1 - \frac{s}{L}, \quad h_2 = 1 - 3 \left(\frac{s}{L}\right)^2 + 2 \left(\frac{s}{L}\right)^3, \quad h_3 = L \left[\frac{s}{L} - 2 \left(\frac{s}{L}\right)^2 + \left(\frac{s}{L}\right)^3 \right], \\ h_4 = \frac{s}{L}, \quad h_5 = 3 \left(\frac{s}{L}\right)^2 - 2 \left(\frac{s}{L}\right)^3, \quad h_6 = L \left[- \left(\frac{s}{L}\right)^2 + \left(\frac{s}{L}\right)^3 \right]$$

Efforts internes :

- par les définitions de la résistance des Matériaux : $N = EA u'$,
 $M = EI v''$, $T = EI v'''$ (! avec le $v(x)$ positif vers le haut)
- en utilisant le théorème du déplacement unité

On note (relation entre efforts internes et déplacements/rotations aux bornes d'un élément)

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ M_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ M_6 \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}$$

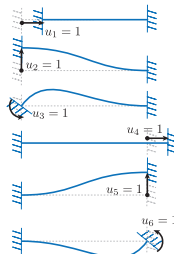


Exemple, poutre encastrée-encastrée : développer le calcul de

$$K_{11} = \frac{EA}{L}, K_{14} = -\frac{EA}{L}, K_{23} = 6\frac{EI}{L^2}, K_{33} = 4\frac{EI}{L^2}, K_{36} = 2\frac{EI}{L}.$$



$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 & -12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} & 0 & 12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} \end{pmatrix}$$

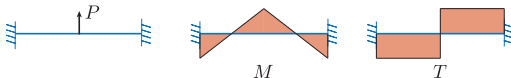


NB : les matrices de raideurs sont symétriques en vertu du théorème de Betti-Maxwell



2. solution particulière (variable selon chargement)

La solution homogène satisfait les conditions limites ; donc la solution particulière est calculée en bloquant les degrés de liberté (poutre encastrée-encastrée, si on considère 3 DDL par noeud)



Relation (complète) entre efforts internes et déplacements/rotations aux bornes d'un élément

$$\mathbf{k}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}P \\ -\frac{1}{8}PL \\ 0 \\ -\frac{1}{2}P \\ \frac{1}{8}PL \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ M_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ M_6 \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} + \mathbf{k}_p$$



Détails : Equation d'Equilibre (Assemblage)

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

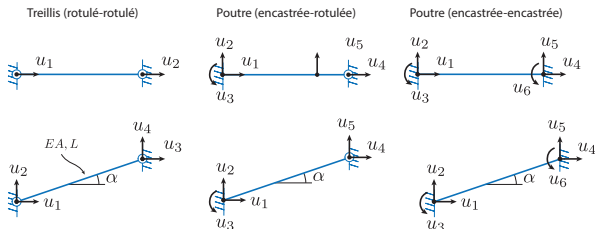
Analyse plastique

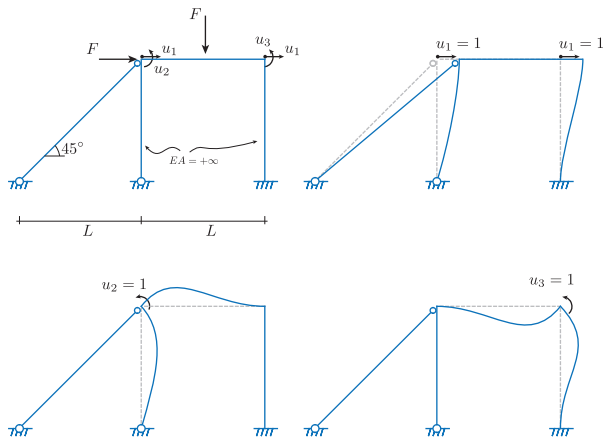
Câbles

Etablir la matrice $\mathbf{K}$ et le vecteur $\mathbf{k}_p$ par « assemblage » :

- Imposer un déplacement unitaire à chaque degré de liberté (un à la fois!)
- Calculer les forces (réactions) ainsi nécessaires pour maintenir chaque DDL en place ; ce sont les éléments de la matrice de raideur $\mathbf{K}$ (obtenus à partir des matrices de raideurs des éléments, voir Tables).
- Calculer les forces (réactions) ainsi nécessaires pour maintenir chaque DDL en place sous l'effet des charges entre noeuds ; ce sont les éléments du vecteur des sollicitations $\mathbf{k}_p$ (obtenus à partir des vecteurs des sollicitations des éléments, voir Tables).

Éléments disponibles dans ce cours :

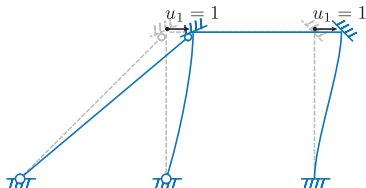






Lorsqu'on applique un déplacement unitaire à un degré de liberté, on regarde toutes les barres qui se déforment.

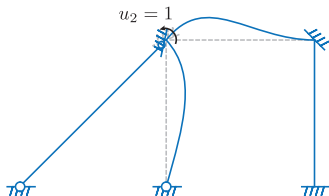
Si les DDL i et j appartiennent à des noeuds qui ne sont pas reliés par une barre ou poutre, alors $K_{ij} = 0$ (aucune barre ni poutre ne contribue à cette raideur et donc à cet élément de la matrice $\mathbf{K}$)



$$K_{11} = \frac{15EI}{L^3} + \frac{EA}{2\sqrt{2}L}$$

$$K_{12} = \frac{3EI}{L^2}$$

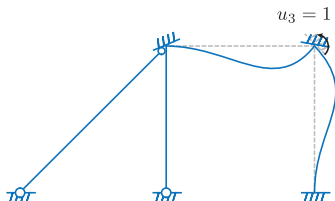
$$K_{13} = \frac{6EI}{L^2}$$



$$K_{21} = \frac{3EI}{L^2}$$

$$K_{22} = \frac{3EI}{L} + \frac{4EI}{L} = \frac{7EI}{L}$$

$$K_{33} = \frac{2EI}{L}$$



$$\begin{aligned} K_{31} &= \frac{6EI}{L^2} \\ K_{32} &= \frac{2EI}{L} \\ K_{33} &= \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} = \frac{8EI}{L} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{15EI}{L^3} + \frac{EA}{2\sqrt{2}L} & \frac{3EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{3EI}{L^2} & \frac{7EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{FL}{8} \\ -\frac{FL}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Résolution : Déplacements et Efforts Intérieurs

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

1. Calculer les déplacements et rotations relatifs aux degrés de liberté en résolvant

$$\mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{k}_p = \mathbf{F}$$

2. Calculer les efforts internes

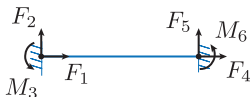
Revisiter un par un les éléments pour déterminer les efforts internes en considérant :

- maintenant que les déplacements aux bornes de l'élément sont connus (→ utiliser la matrice de raideur de l'élément),
- et considérant à nouveau l'effet des charges entre noeuds (→ utiliser le vecteur des sollicitations $\mathbf{k}_p$ de l'élément).

→ équivalent à utiliser le théorème des deux moments.



Attention aux conventions :



Méthode des déplacements



Résistance des matériaux

- Le résultat d'une analyse (à la main) devrait idéalement utiliser les conventions de la RdM.
- c'est rarement le cas quand on utilise un logiciel de calcul (la fibre de référence n'est pas dessinée)



Chapitre V : Méthode des Rotations

Acquis d'apprentissage :

- différencier les structures à noeuds fixes des structures à noeuds mobiles
- comprendre la signification d'un équilibre de noeud en rotation



Simplifications de la Méthode des Rotations

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

La méthode des déplacements est une méthode systématique

→ version rigoureuse : implémentation par ordinateur

→ version simplifiée : calcul manuel (tenter de limiter le nombre de degrés de liberté)

1. Négliger les déformations d'effort tranchant (presque toujours)
2. Négliger les déformations d'effort axial dans les éléments fléchis.

Dans une poutre,

$$\kappa = \frac{EA L^2}{EI} = \left(\frac{L}{i}\right)^2 \gg 1$$

Donc $\frac{1}{EA} \int \dots \ll \frac{1}{EI} \int \dots$

→ Méthode des rotations



Domaine d'application : poutres continues, ossatures planes à maille rectangulaire (Vierendeel)

! Ne pas appliquer si N joue un rôle important : arcs, treillis, structures à mailles triangulaires, tirants, ...



Noeuds Fixes - Noeuds Mobiles

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

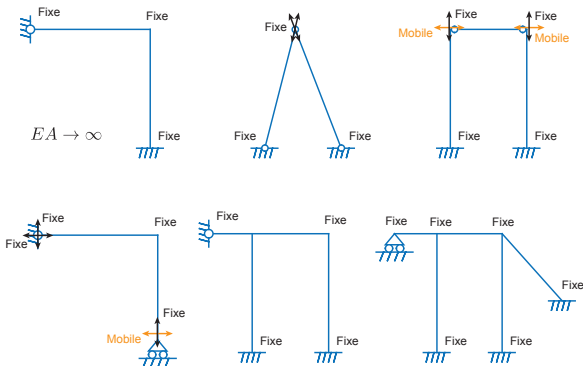
Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Principe : tout noeud relié par l'intermédiaire de deux barres sécantes à deux autres noeuds eux-mêmes bloqués dans la direction des barres est un noeud fixe.

Corollaire : tout noeud relié à deux autres noeuds fixes par l'intermédiaire de barres sécantes est également fixe.





Distinction en **structures à noeuds fixes** et **structures à noeuds mobiles** en translation

Noeuds fixes : tous les noeuds sont fixes

Noeuds mobiles : $\exists$ au moins un noeud qui se déplace.

On utilise des contreventements dans une structure pour la rendre à noeuds fixes. Une structure à noeuds fixes possède souvent une charge critique plus élevée (apprécié en construction métallique). Ce n'est pas parce qu'on met un contreventement qu'il est efficace. Condition d'efficacité :

$$(EA/L)_{\text{contrev.}} \gg (EI/L^3)_{\text{poutres/colonnes}}$$

Méthode des rotations pour structures à **noeuds fixes** en translation : dans une structure à noeuds fixes, les translations peuvent être négligées. **Les seules inconnues sont donc des rotations** (la méthode n'est donc pas applicable aux treillis !)



Degré de mobilité d'une structure = nombre de blocages simples à ajouter à une structure qui est à nœuds mobiles pour la rendre fixe.

Mobilité = concept en translation → indépendant des degrés de liberté en rotation

Procédure : mettre une rotule à chaque nœud puis voir le nombre de barres liant la structure à la fondation qu'il faut ajouter pour la rendre fixe. Le nombre de barre à ajouter correspond au degré de mobilité.



Influence du chargement sur la classification

Cas particulier : si une structure à noeuds fixe n'est sollicitée que par des efforts sur les noeuds, on doit considérer qu'elle est à noeuds mobile.
[sinon $\delta\mathcal{W} = 0 \Rightarrow \delta\mathcal{U} = 0$, et donc pas de déformation]



Il est nécessaire de prendre en compte les déformations d'effort axial pour une structure à noeuds fixes sollicitée en ses noeuds uniquement.



Exemples de structures à noeuds mobiles et fixes

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

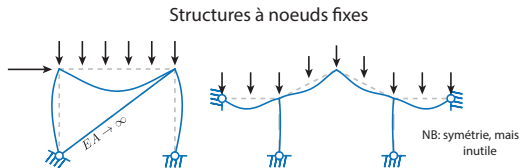
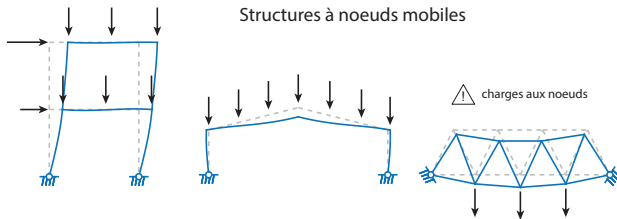
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

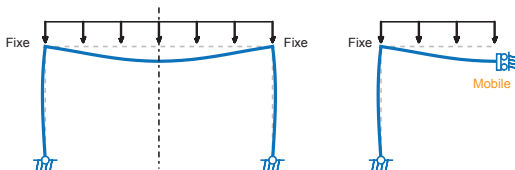




Symétrie

Une structure symétrique chargée symétriquement est souvent à nœuds fixes (car il ne peut pas y avoir de déplacement horizontal sur l'axe de symétrie). Faire attention cependant si elle possède des nœuds sur l'axe de symétrie (ils peuvent se déplacer selon l'axe).

Si on n'étudie que la moitié de la structure, on doit introduire un nœud sur l'axe de symétrie et la structure peut devenir à nœuds mobiles.





Méthode des Rotations

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

La méthode se décline en deux versions selon que la structure est à noeuds fixes ou mobiles.

Structures à noeuds fixes

Degrés de liberté = rotation des noeuds

Equations d'équilibre = en rotation

Structures à noeuds mobiles

Degrés de liberté = rotations des noeuds + les déplacements transversaux (transformés en rotations de corde ψ)

Equations d'équilibre = en translation et en rotation



Structures à Noeuds fixes

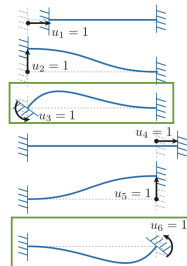
Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Dégénérescence des matrices de raideur (déplacements nuls)
Exemple pour l'élément encastré-encastré :



$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 & 12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 & 12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} \end{pmatrix}$$





Matrices de raideur pour les deux éléments utiles



$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{K} = 3 \frac{EI}{L}$$

$$\begin{pmatrix} M_3 \\ M_6 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_3 \\ m_6 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = 3 \frac{EI}{L} \phi_A + m_3$$



Pour les structures à noeuds fixes, les contributions de chaque élément aux coefficients K_{ii} et K_{ij} sont positives. Tous les éléments de $\mathbf{K}$ sont donc positifs.

Soit un noeud où aboutissement n_1 barres bi-encastrées et n_2 barres appuyées à l'autre extrémité; soit u_i la rotation inconnue en ce noeud et u_j la rotation inconnue en un autre noeud, alors

$$k_{ii} = \sum_{n=1}^{n_1} \left(\frac{4EI}{L} \right)_n + \sum_{n=1}^{n_2} \left(\frac{3EI}{L} \right)_n \quad ; \quad k_{ij} = 2 \frac{EI}{L} \text{ ou } 0$$

Plusieurs termes dans k_{ii} car $n_1 + n_2$ barres aboutissent au noeud considéré. **Un seul terme** dans k_{ij} car les ddl i et j sont nécessairement associés à deux noeuds différents, reliés par une seule barre. Dans la $i^{\text{ième}}$ équation, le nombre de k_{ij} non nuls est donc au plus égal au nombre de barres $n_1 + n_2$ aboutissant au noeud considéré et donc $\sum_{j=1, j \neq i}^n k_{ij} < k_{ii}$. La matrice de raideur est donc définie strictement positive.



Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Vecteur des charges extérieures : ne contient que des moments d'encastrement

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



Exemple

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

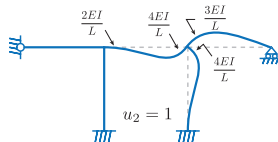
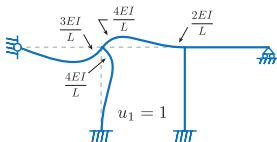
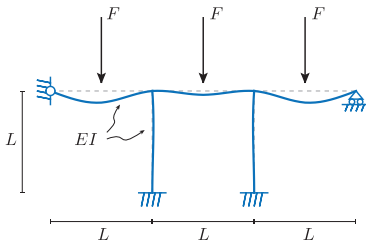
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



$$k_{11} = k_{22} = 11 \frac{EI}{L} \quad ; \quad k_{12} = 2 \frac{EI}{L}$$



Structures I, 2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

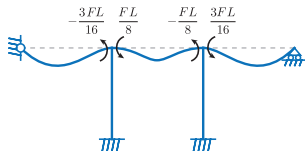
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



$$k_{p,1} = -\frac{FL}{16}$$

$$k_{p,2} = \frac{FL}{16}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{11EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{11EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{FL}{16} \\ \frac{FL}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

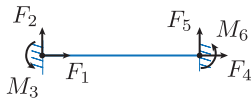
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{FL^2}{144EI} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Détermination des efforts intérieurs, utiliser les relations entre efforts internes et déplacements/rotations aux bornes d'un élément

$$\begin{pmatrix} M_3 \\ M_6 \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \mathbf{k}_p$$

(comme dans la méthode des déplacements) pour déterminer les **moments de flexion**. Attention aux conventions :



Méthode des déplacements



Résistance des matériaux



$M(s) = M_A \left(1 - \frac{s}{L}\right) + M_B \frac{s}{L} + m(s)$, où $m(s)$ est le moment isostatique (deux moments)

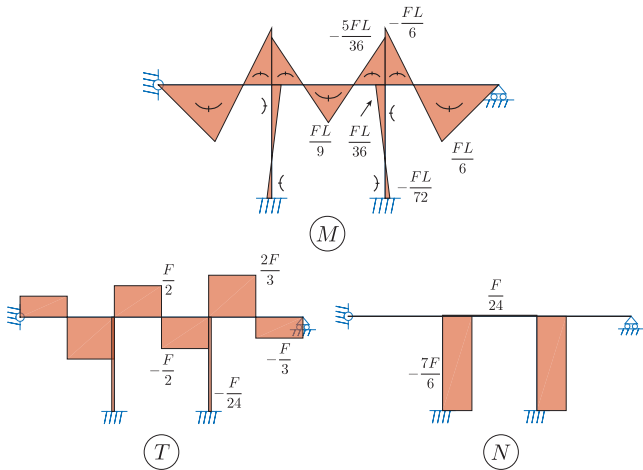
Dériver pour obtenir les **efforts tranchants**

$T(s) = (M_A + M_B)/L + t(s)$, où $t(s)$ est l'effort tranchant isostatique

Ecrire l'équilibre des noeuds (encore) pour déterminer les **efforts axiaux**.

$\sum F_X = 0$, $\sum F_Y = 0$. NB : c'est ici qu'apparaissent les forces aux noeuds.

S'il y a N noeuds, on sait déterminer $2N$ efforts normaux $\rightarrow$ s'il y a plus que $2N$ barres où existent des efforts axiaux à déterminer, on ne sait pas les déterminer tous. On dit que la structure est *hyperstatique à l'effort normal*. L'indétermination vient du fait qu'on a négligé les déformations à l'effort axial (NB : ce genre de structure est déconseillée en vue de sa sensibilité aux effets thermiques et aux déplacements imposés).





Structures à Noeuds Mobiles

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Structures à noeuds mobiles et mailles rectangulaires

Structures à noeuds mobiles et barres inclinées

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



Chapitre VI : Méthode de Cross

Acquis d'apprentissage :

- Interprétation de la méthode des rotations, et de façon plus générale des méthodes cinématiques
- Assimiler les règles de répartition et de transmission



Méthode de Cross

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

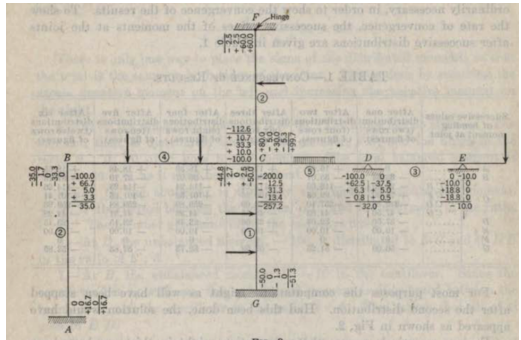
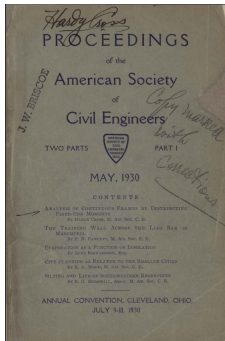
Méthode des rotations :

- + Nombre limité de degrés de liberté (uniquement de rotation)
- Nécessité de former la matrice de raideur et de l'inverser
- Fournit d'abord les rotations aux noeuds ; les efforts internes ne sont obtenus qu'après post-traitement

Objectifs de la méthode de Cross :

- ne pas construire la matrice de raideur complète et ainsi éviter de devoir inverser une (grande?) matrice
- calculer les efforts internes directement

Cross = méthode manuelle pour appliquer la méthode des rotations (ici, dans les structures à nœuds fixes).



Cross, H. (1932). Analysis of continuous frames by distributing fixed-end moments. American Society of Civil Engineers Transactions.



Résolution par la Méthode de Relaxation Partielle

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Soit à résoudre

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire, trouver $\mathbf{u}$ de façon à annuler le résidu

$$\mathcal{R}[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Partir de $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{0}$ et trouver un schéma itératif qui améliore l'estimation de la solution à chaque itération.

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{u}^{(k)}.$$

Dans une méthode de relaxation partielle, on choisit $\Delta \mathbf{u}^{(k)}$ de façon à ne mettre à jour qu'une seule composante à la fois. La valeur itérée est obtenue en annulant la composante correspondante du résidu.



Exemple :

Mettre à jour u_1 , sans toucher à u_2 : $u_1^{(1)} = u_1^{(0)} + \Delta u_1^{(1)}$, $\Delta u_2^{(1)} = 0$.

Déterminer $\Delta u_1^{(1)}$ de façon à annuler la première composante du résidu ($\rightarrow$ meilleure estimation de u_1)

$$p_1 - \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(0)} + \Delta u_1^{(1)} \\ u_2^{(0)} + 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \Delta u_1^{(1)} = \frac{p_1}{k_{11}} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{k_{12}}{k_{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(0)} \\ u_2^{(0)} \end{pmatrix} = \frac{p_1}{k_{11}}.$$

Le nouveau résidu est

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(1)} = \mathcal{R}[\mathbf{u}^{(1)}] &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(0)} + \Delta u_1^{(1)} \\ u_2^{(0)} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{r}^{(0)} - \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \Delta \mathbf{u}^{(1)} \end{aligned}$$



n'est pas encore nul (seule sa première composante est nulle).

Seconde itération

Objectif : mettre à jour u_2 , $u_2^{(2)} = u_2^{(1)} + \Delta u_2^{(2)}$ sans toucher à u_1 ,
 $\Delta u_1^{(2)} = 0$.

Déterminer $\Delta u_2^{(2)}$ de façon à annuler la seconde composante du résidu ($\rightarrow$ meilleure estimation de u_2)

NB : plus rien n'assure que la première composante du résidu (annulée lors de la première opération) soit toujours égale à zéro $\rightarrow$ itérer

Séquence de déblocage : 1, 2, 1, 2, 1, 2, ... (jusqu'à ce qu'une norme du résidu soit plus petite qu'une valeur choisie)



Généralisation à n degrés de liberté

Soit à résoudre $\mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{k}_p = \mathbf{p}$, ce qui revient à annuler le résidu

$$\mathcal{R}[\mathbf{u}] = \mathbf{p} - \mathbf{k}_p - \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (1)$$

Résidu = déséquilibre entre moments sollicitants extérieurs et moments de flexion intérieurs en chaque noeud.

- Soit la base des vecteurs unitaires orthonormée $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, \dots, n$) telle que la $j^{\text{ème}}$ composante de $\mathbf{e}_i$ soit égale à δ_{ij} .
- Soit la *séquence de déblocage* $\{n_1, \dots, n_k, \dots\}$ telle que le degré de liberté n_k ($1 \leq n_k \leq n$) soit débloquent à l'itération k .



Le processus itératif consiste à partir d'une estimation $\mathbf{u}^{(0)} \equiv \mathbf{0}$ et, pour $k \geq 1$, à construire la séquence

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{u}^{(k)}. \quad (2)$$

A chaque itération, les moments hors équilibre sont également calculés

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(k)} &= \mathcal{R}[\mathbf{u}^{(k)}] = \mathbf{p} - \mathbf{k}_p - \mathbf{K} \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{p} - \mathbf{k}_p - \mathbf{K} \mathbf{u}^{(k-1)} - \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}^{(k)} \\ &= \mathbf{r}^{(k-1)} - \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}^{(k)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Cette expression montre que les déséquilibres des moments à chaque noeud forment également une série

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{r}^{(k)}$$

dont l'incrément est $\Delta \mathbf{r}^{(k)} = -\mathbf{K} \Delta \mathbf{u}^{(k)}$.



A l'itération k , on choisit

$$\Delta \mathbf{u}^{(k)} = \delta u^{(k)} \mathbf{e}_{n_k}$$

où $\delta u^{(k)}$ est tel que la composante n_k du résidu soit nulle :

$$\mathbf{e}_{n_k}^T \mathbf{r}^{(k)} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_{n_k}^T \mathbf{r}^{(k-1)} - \delta u^{(k)} \mathbf{e}_{n_k}^T \mathbf{K} \mathbf{e}_{n_k} = 0 \quad (4)$$

et donc

$$\delta u^{(k)} = \frac{\mathbf{e}_{n_k}^T \mathbf{r}^{(k-1)}}{\mathbf{e}_{n_k}^T \mathbf{K} \mathbf{e}_{n_k}}$$

L'incrément de rotation à donner au noeud n_k dépend donc du déséquilibre de moment présent à ce noeud, $\mathbf{e}_{n_k}^T \mathbf{r}^{(k-1)}$, à cette itération.

Lorsque l'incrément de rotation au noeud n_k est calculé, le résidu peut ensuite être mis à jour, $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{r}^{(k)}$, où

$$\Delta \mathbf{r}^{(k)} = -\delta u^{(k)} \mathbf{K} \mathbf{e}_{n_k}$$

→ séquences $\Delta \mathbf{u}^{(k)}$ et $\mathbf{r}^{(k)}$ à partir de la solution initiale $\mathbf{u}^{(0)} \equiv \mathbf{0}$ (et donc $\mathbf{r}^{(0)} \equiv \mathbf{p}$).



Interprétation physique de la méthode :

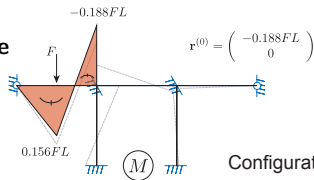
Partant d'une situation initiale où toutes les rotations sont nulles (et les noeuds sont bloqués), la méthode itérative consiste :

- à imposer la rotation nécessaire en un premier noeud, de façon à adapter les moments de flexion aux extrémités des éléments aboutissant en ce noeud et faire en sorte qu'ils équilibrent le moment appliqué à ce noeud.
- ce faisant, le déséquilibre des moments est annulé à ce noeud, mais modifié aux autres noeuds.
- un autre noeud est ensuite considéré et la rotation de ce noeud est adaptée de façon à ce que l'équilibre des moments y soit respecté.

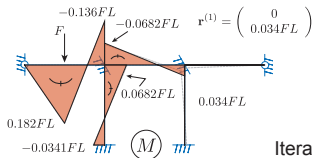
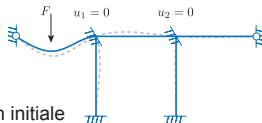
Le processus est répété et le déséquilibre des moments initial $\mathbf{r}^{(0)} \equiv \mathbf{p}$, correspondant à une situation où tous les noeuds sont bloqués en rotation, est progressivement corrigé à l'aide de contributions $-\delta u^{(k)} \mathbf{K} \mathbf{e}_{n_k}$, jusqu'à ce que les équations d'équilibre soient satisfaites à chaque noeud.



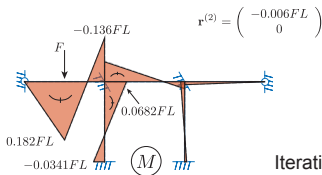
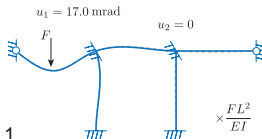
Exemple



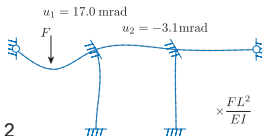
Configuration initiale



Iteration 1



Iteration 2





Format de la Matrice de Raideur

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

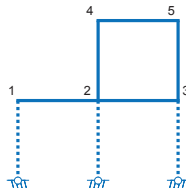
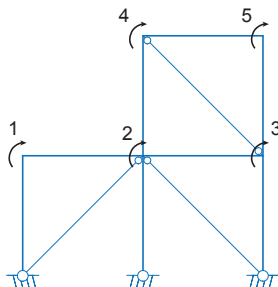
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



..... Barre encastrée-rotulée (3-0)
 — Barre encastrée-encastrée (4-2)

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} 3+4 \\ 2 \\ \times \\ \times \\ \times \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3+3 \times 4 \\ 2 \\ 2 \\ \times \end{matrix} & \begin{matrix} \times \\ 2 \\ 3+2 \times 4 \\ \times \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} \times \\ 2 \\ \times \\ 2 \times 4 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} \times \\ \times \\ \times \\ 2 \times 4 \\ 2 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$\left. \begin{matrix} 3+4 \\ 3+3 \times 4 \\ 3+2 \times 4 \\ 2 \times 4 \end{matrix} \right\}$ éléments diagonaux (connectés à des barres encastrées-encastrées et rotulées-rotulées)
 2 éléments non diagonaux (couplage)
 $\times$ noeuds non connectés



Méthode de Cross

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Même principe, mais éviter de comptabiliser les rotations au cours des itérations et se focaliser directement sur les efforts internes.

Méthodologie

1. Calculer les rigidités en rotation des barres
2. Calculer des rapports scalaires entre elles
3. Calculer les moments attaquant (établissement des $\mathbf{k}_p$)
4. Résoudre par itérations successives les rotations/moments aux nœuds.

Pour appliquer Cross, 2 règles principales :

1. la règle de transmission d'un moment appliqué à une extrémité d'une barre vers l'autre extrémité,
2. la règle de répartition d'un moment nodal entre les barres aboutissant à ce nœud.



Règle de Répartition

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Répartition d'un *moment attaquant* entre les barres aboutissant à ce nœud (résulte d'un incrément de rotation au nœud).

Soit un nœud où aboutissement n_1 barres bi-encastrées et n_2 barres appuyées à l'autre extrémité

Soit la rotation $\Delta\phi_i$ imposée à un nœud. La somme des moments internes dans les barres aboutissant au nœud vaut

$$M = k_{ii} \Delta\phi_i \quad \text{où} \quad k_{ii} = \sum_e k_{ii}^{(e)} = \sum_{n=1}^{n_1} \left(\frac{4EI}{L} \right)_n + \sum_{n=1}^{n_2} \left(\frac{3EI}{L} \right)_n$$

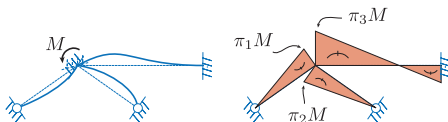
Le moment dans une barre est $M^{(e)} = k_{ii}^{(e)} \Delta\phi_i$. La somme des moments dans toutes les barres vaut donc M . Les moments dans les barres s'écrivent $M^{(e)} = \pi_e M$ avec $\sum \pi_e = 1$ où

$$\pi_e = \frac{k_{ii}^{(e)}}{k_{ii}} = \frac{k_{ii}^{(e)}}{\sum_e k_{ii}^{(e)}}$$



En imposant une rotation à un noeud, on diminue le moment hors-équilibre (à chaque itération, on l'annule). Le résidu annulé lors de cette opération est appelé « moment attaquant ». Attention, ce n'est pas un moment appliqué !

La répartition du moment attaquant se fait donc au prorata des raideurs (par noeud, il y a un $\pi^{(e)}$ par poutre aboutissant au noeud ; la somme vaut 1 en chaque noeud).



Répartition : Basée sur les éléments diagonaux de $\mathbf{K}$, pour chaque élément $k_{ii}^{(e)}$.



Règle de Transmission

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

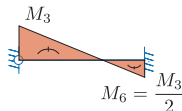
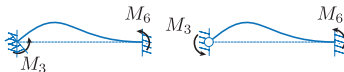
Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Transmission d'un moment à une extrémité d'une barre vers l'autre extrémité (résulte d'un incrément de rotation à la première extrémité)


$$\begin{pmatrix} M_3 \\ M_6 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_3 \\ m_6 \end{pmatrix}$$
$$M_3 = 3 \frac{EI}{L} \phi_A + m_3$$



Transmission : Basée sur les éléments hors diagonale de $\mathbf{K}$, pour chaque élément $k_{ij}^{(e)} = 2 \frac{EI}{L}$ ou 0

Barre encastée-encastée : transmission de la moitié du moment

Barre encastée-libre : pas de transmission ($M_6 = 0$)



Méthodologie

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Méthodologie

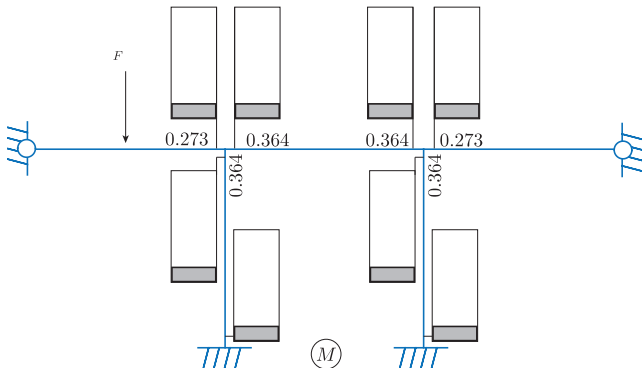
1. Calculer les rigidités en rotation des barres
2. Calculer des coefficients de répartition π_e à chacun des noeuds
3. Calculer les valeurs de k_p pour chacune des barres chargées ; combiner aux moments appliqués aux noeuds
4. Calculer les moments attaquants (déséquilibre de moment à chaque noeud = résidus)
5. Débloquer le noeud le plus déséquilibré. Deux opérations, deux règles :
 - 5.1 **répartir** le moment attaquant entre les barres aboutissant à ce noeud,
 - 5.2 **transmettre** les moments ainsi répartis aux autres extrémités des barres.
6. Boucler sur les pas 4-5 jusqu'à convergence.



Exemple d'Application et mise en oeuvre

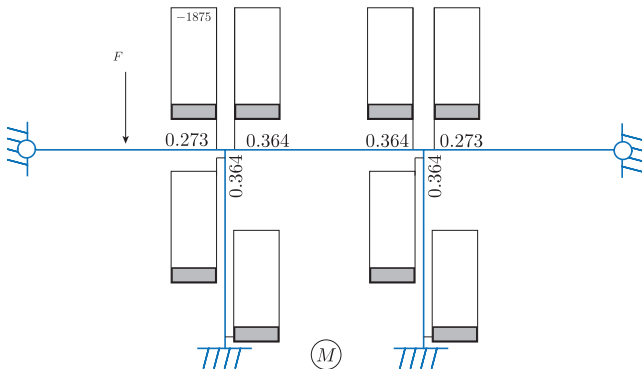
Structures I,
2023-2024
V. Denoël

1. Indiquer les coefficients de répartition sur les barres, près des noeuds
2. Préparer les boîtes pour recevoir les résultats successifs des itérations



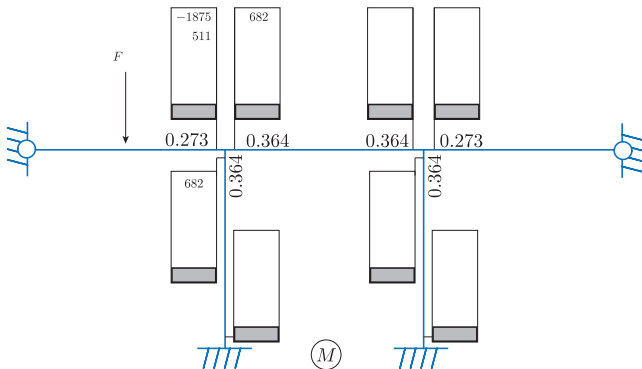


3. Calculer les moments attaquant dus aux charges extérieures (sur noeuds & éléments). Commencer avec un ordre de grandeur de 1000 pour le moment attaquant le plus grand, ici on a choisi $FL = 10^4 \text{ Nm}$.





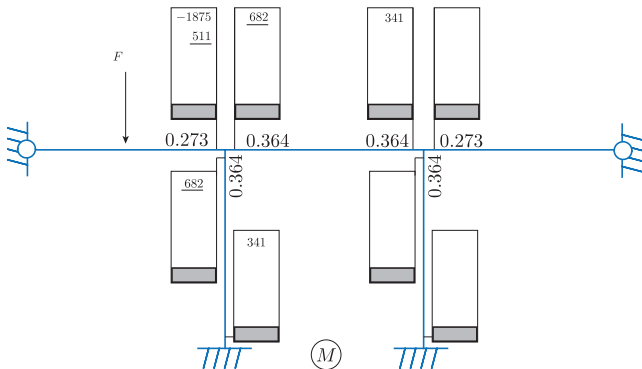
4. Commencer avec le noeud le plus déséquilibré. Répartir.





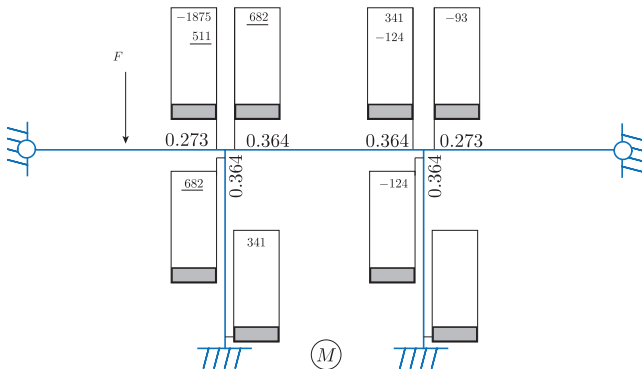
5. Transmettre.

Souligner les moments répartis quand ils sont transmis (la somme globalisée des moments au-dessus des lignes s'annule)





6. Continuer avec le noeud le plus déséquilibré. Répartir





... puis transmettre (souligner)

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

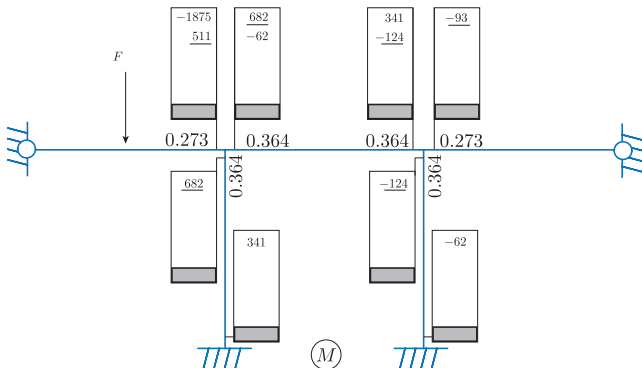
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles





7. Continuer ainsi jusqu'à convergence

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

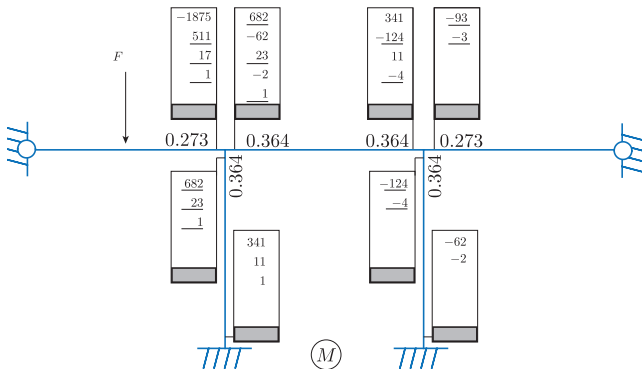
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles





8. Additionner tous les incréments à chaque noeud pour calculer le moment de flexion en chaque noeud.

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

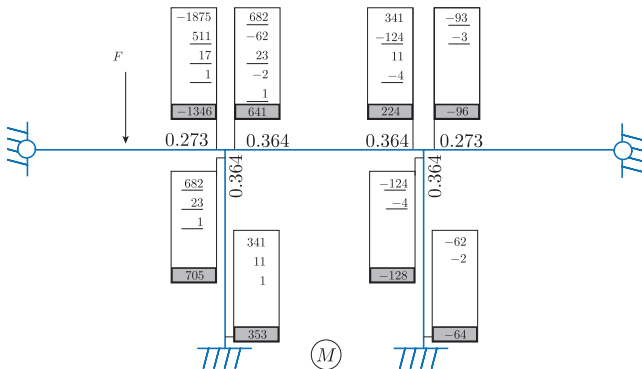
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

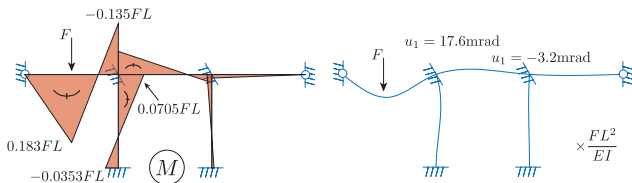
Câbles





9. Dresser le diagramme des moments.

Remettre à l'échelle (diviser par 10000, multiplier par FL) .





Calcul des Rotations aux Noeuds

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Configuration initiale = noeuds bloqués (donc pas de rotation)

A chaque itération (distribution + transmission), correspond un incrément de rotation à un noeud. Les rotations aux noeuds sont calculées **en ajoutant tous les incréments**. Le calcul se fait :

- globalement sur le noeud, en utilisant le moment attaquant à chaque itération (changé de signe !) et la raideur totale (option 1)
- barre par barre, en utilisant le moment distribué à chaque barre (option 2)

L'option 2 est préférée car elle permet une vérification simple du calcul.



Exemple (on choisit $FL = 10^4 \text{ Nm}$ et $EI/L = 10^4 \text{ N/m}$)

Option 1, noeud gauche - Raideur du noeud : $\frac{11EI}{L} = 11 \cdot 10^4 \text{ N/m}$

Itération 1 : Moment attaquant : $-1875 \text{ Nm} \rightarrow \Delta\phi_1 = 17.0 \text{ mrad}$

Itération 2 : Moment attaquant : 0 (déblocage de l'autre noeud)

Itération 3 : Moment attaquant : $-62 \text{ Nm} \rightarrow \Delta\phi_1 = 0.564 \text{ mrad}$

Itération 4 : Moment attaquant : 0 (déblocage de l'autre noeud)

Itération 5 : Moment attaquant : $-2 \text{ Nm} \rightarrow \Delta\phi_1 = 0.018 \text{ mrad}$

...

Au total : $\frac{(1875+62+2)}{11 \cdot 10^4} = 17.6 \text{ mrad}$.



Exemple (on choisit $FL = 10^4 \text{ Nm}$ et $EI/L = 10^4 \text{ N/m}$)

Option 2, noeud gauche - Barre de gauche, raideur du noeud :

$$\frac{3EI}{L} = 3 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

Itération 1 : Moment attaquant : 511 Nm $\rightarrow \Delta\phi_1 = 17.0 \text{ mrad}$

Itération 2 : Moment attaquant : 0 (déblocage de l'autre noeud)

Itération 3 : Moment attaquant : 17 Nm $\rightarrow \Delta\phi_1 = 0.567 \text{ mrad}$

...

Plus rapidement :

$$\text{Barre de gauche : } \phi_1 = \frac{(511+17+1)L}{3EI} = 17.6 \text{ mrad}$$

$$\text{Barre de droite : } \phi_1 = \frac{(682+23+1)L}{4EI} = 17.6 \text{ mrad}$$

Barre du dessous (idem)

Mêmes rotations pour toutes les barres arrivant à un noeud $\rightarrow$ OK !



Vérifications

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

1. A chaque noeud, la somme des moments au noeud doit équilibrer les moments sollicitants

2. La rotation d'un noeud est la même pour toutes les barres qui arrivent au noeud



Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Chapitre VII : Lignes d'Influence

Acquis d'apprentissage :

- Trouver des configurations de chargement extrême
- Chargement complet, chargement en damier



Introduction

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

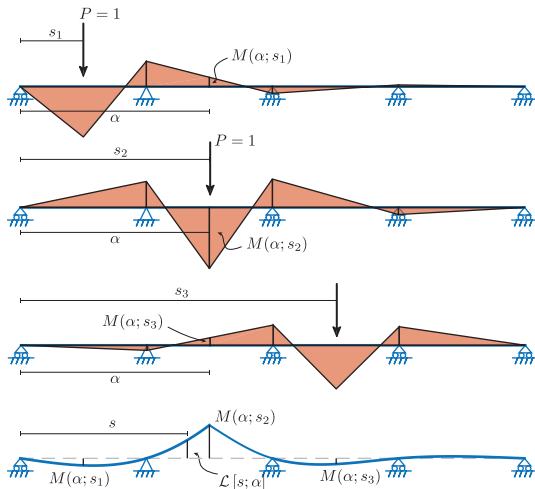
Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

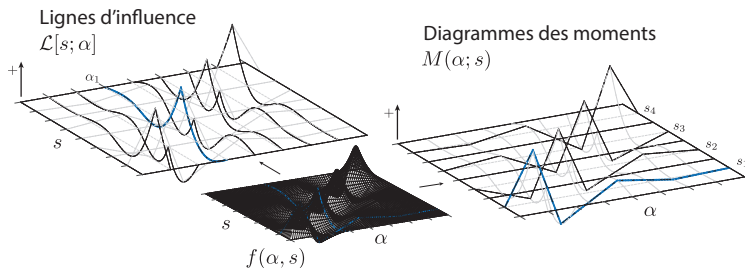
Position la plus défavorable d'une charge mobile ? De charges variables ?





Soit $f(\alpha, s)$ la valeur du moment de flexion dans la poutre à l'abscisse α lorsqu'elle est sollicitée par une charge localisée à l'abscisse s

- Diagramme des moments (d'un effet) : $M(\alpha; s)$
- Ligne d'influence du moment (d'un effet) : $\mathcal{L}[s; \alpha]$





Conventions

Ligne d'influence : on dessine la ligne avec les valeurs positives vers le haut (souvent contraire à un diagramme de moment)

Utilité

- Trouver la position la plus défavorable d'une *charge concentrée* (et déterminer la valeur de l'effet pour cette charge concentrée).
- Trouver les zones à charger par une *charge distribuée* pour avoir l'effet maximum (et déterminer la valeur de l'effet pour ces charges distribuées).

Mise à l'échelle

$\mathcal{L}[s; \alpha]$ est la valeur de l'effet cherché (p.ex. moment de flexion) sous l'effet d'une charge *unitaire* appliquée à la section s .

- Si la charge appliquée est P , l'effet (la valeur du moment) vaut $P \mathcal{L}[s; \alpha]$

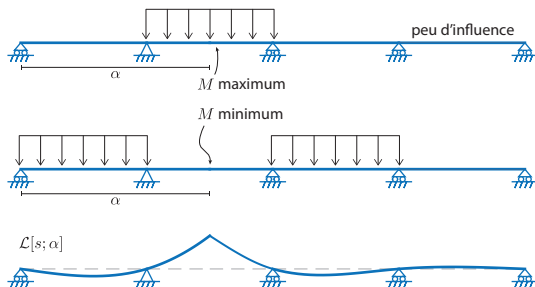


- Si la charge est une charge distribuée q sur l'intervalle $[a, b]$, l'effet (la valeur du moment) vaut $\int_a^b q \mathcal{L}[s; \alpha] ds$

Au total :

$$\text{Effet}[\alpha] = \sum_i P_i \mathcal{L}[s_i; \alpha] + \int_a^b q \mathcal{L}[s; \alpha] ds$$

Exemple :



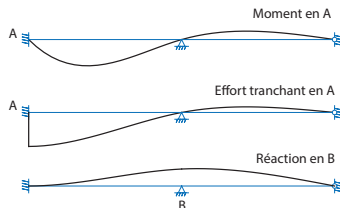
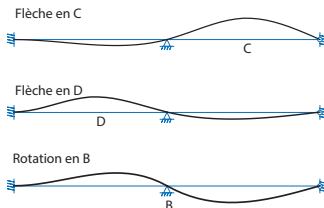


Détermination des lignes d'influences

- en répétant l'analyse un grand nombre de fois (→ possibilité de déterminer plusieurs lignes d'influence d'un coup)
- directement, à l'aide du théorème de Land (Robert Land, Dresden, 1888, sur base des travaux de Müller-Breslau)

Deux types de lignes d'influence

- effets géométriques (déplacements, rotations)
- effets mécaniques (efforts internes, réactions)





Effets Géométriques

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

La ligne d'influence d'un effet géométrique s'obtient en appliquant une force unitaire conjuguée à l'effet recherché. La déformée de la structure ainsi obtenue donne la ligne d'influence recherchée.

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

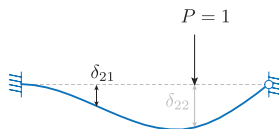
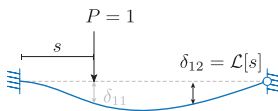
Analyse plastique

Câbles

- Ligne d'influence d'un déplacement : appliquer une force dans la direction du déplacement recherché
- Ligne d'influence d'une rotation : appliquer un moment

Démonstration

Immédiate à partir du théorème de Maxwell, $\mathcal{L}(s) = \delta_{21}$





Effets Mécaniques

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Théorème de Land : *la ligne d'influence d'un effet mécanique s'obtient en coupurant la structure selon l'effet recherché et en imposant un déplacement unitaire des lèvres de la coupure. La déformée de la structure ainsi obtenue donne la ligne d'influence recherchée.*

- Ligne d'influence d'une réaction : relâcher la réaction et imposer *un déplacement unitaire* au niveau de et dans le sens de la réaction
- Ligne d'influence d'un moment d'encastrement : relâcher la réaction et imposer *une rotation unitaire*
- Ligne d'influence d'un effort tranchant : relâcher l'effort interne et imposer *un déplacement relatif unitaire* au niveau de la coupure
- Ligne d'influence d'un moment de flexion : relâcher le moment de flexion et imposer *une rotation relative unitaire* aux lèvres de la coupure



Démonstration

Soit $\mathcal{S}_0$ la structure dans laquelle il faut calculer la ligne d'influence et soit h son degré d'hyperstaticité.

Soit $\mathcal{S}_{-1}$ la structure coupurée obtenue à partir de $\mathcal{S}_0$ et dans laquelle une coupure simple relative à l'effet mécanique recherché a été pratiquée. Son degré d'hyperstaticité est donc $h - 1$.

Raisonnement similaire à la méthode des forces, équation de compatibilité dans la structure $\mathcal{S}_{-1}$: le déplacement conjugué à l'effet mécanique étudié doit s'annuler sous l'effet combiné de la sollicitation unitaire $P = 1$ à l'abscisse s ($\delta_{12} \equiv \delta_{12}$) et de la valeur de l'effet mécanique extériorisé ($\mathcal{L}(s) \delta_{11}$) :

$$\mathcal{L}(s) \delta_{11} + \delta_{12} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}(s) = \frac{-\delta_{12}}{\delta_{11}}$$

où δ_{11} est le déplacement (dans $\mathcal{S}_{-1}$) conjugué à l'effet recherché, sous l'effet d'une valeur *unitaire* de l'effet recherché,
et δ_{12} est le déplacement (dans $\mathcal{S}_{-1}$) conjugué à l'effet recherché, sous l'effet de la sollicitation *unitaire* $P = 1$.



Or, par le théorème de Maxwell, dans la structure S_{-1} ,

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

où δ_{21} est le déplacement (dans S_{-1}) du point d'action de la force unitaire P , lorsqu'une sollicitation *unitaire* conjuguée à l'effet recherché est appliquée ;

Donc

$$\mathcal{L}(s) = \frac{-\delta_{21}}{\delta_{11}}.$$

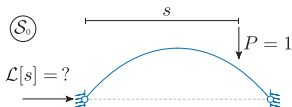
NB : δ_{21} et δ_{11} sont obtenus sous l'effet d'une sollicitation *unitaire* conjuguée à l'effet recherché. C'est donc le seul chargement à considérer.



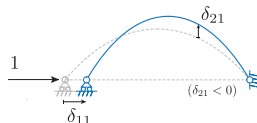
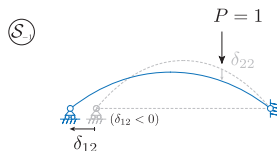
En pratique :

- imposer un déplacement ou une rotation unitaire aux lèvres de la coupure (réaction d'appui : déplacement, moment d'encastrement : rotation, effort tranchant ou axial : déplacement relatif, moment de flexion : rotation relative) $\rightarrow \delta_{11} = 1$,
- la déformée ainsi obtenue est la ligne d'influence (au signe près).

Exemple



δ_{11} et δ_{12} sont comptés positivement vers la droite
 δ_{21} et δ_{22} sont comptés positivement vers le bas





Cas Particulier : Structures Isostatiques

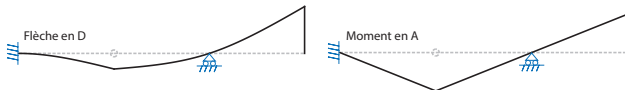
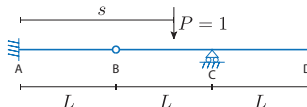
Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Si la structure S_0 est isostatique, la structure S_{-1} est un mécanisme à un degré de liberté. On a donc la propriété importante suivante.

La ligne d'influence d'un effet mécanique dans une structure isostatique est composée de lignes droites. Attention, ce n'est pas vrai pour un effet géométrique !

Exemple





Dérivées de la Fonction $f(\alpha, s)$

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

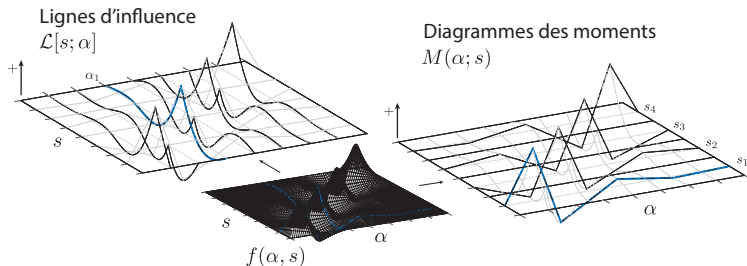
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles





Dérivée selon α

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \lim_{d\alpha \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + d\alpha, s) - f(\alpha, s)}{d\alpha}$$

La dérivée de la fonction $f(\alpha, s)$ dans la direction de α représente la ligne d'influence de l'effet dérivé.

Ceci est plus conceptuel qu'autre chose car généralement on se limite à exprimer $\mathcal{L}_x(s)$ et pas $\mathcal{L}_x(s; \alpha)$.

Exemples :

$$\mathcal{L}_M(s; \alpha) = -EI \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \mathcal{L}_v(s; \alpha) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_T(s; \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{L}_M(s; \alpha).$$



Dérivée selon s

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{f(\alpha, s + ds) - f(\alpha, s)}{ds}$$

La dérivée de la fonction $f(\alpha, s)$ dans la direction de s représente la ligne d'influence sous un moment mobile plutôt qu'une force unitaire mobile. Compte tenu que l'on se limite souvent à exprimer $\mathcal{L}_x(s)$ et pas $\mathcal{L}_x(s; \alpha)$, cela a plus de sens de dériver $\mathcal{L}_x(s)$ par rapport à s .

Maintenant, quel intérêt à vouloir calculer une ligne d'influence sous un moment mobile ?



Lignes d'influence pour mise en charge indirecte

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



Exemple

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Soit la structure représentée à la figure ci-dessous. Déterminez la position la plus défavorable de la charge P menant aux valeurs les plus grandes et les plus petites de l'effort tranchant et du moment dans la section A .
Considérez le cas d'une charge uniformément répartie, ou bien de deux charges ponctuelles distantes de 2m (les deux essieux d'une voiture).



Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Chapitre VIII : Analyse Plastique

Acquis d'apprentissage :

- analyse plastique de portiques plans
- redistribution des sollicitations en section
- redistribution des sollicitations entre sections



Introduction

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

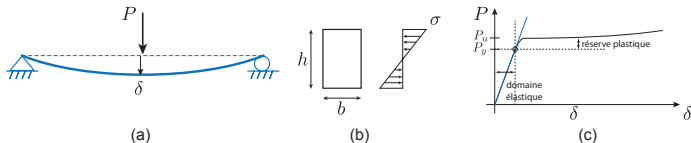
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



$$\text{Dimensionnement élastique : } \sigma = \frac{M}{W_{\text{el}}} = \frac{PL}{4W_{\text{el}}} \rightarrow P_y = \frac{4W_{\text{el}}f_y}{L}.$$

La structure n'a pas encore atteint la ruine lorsque $P = P_y$

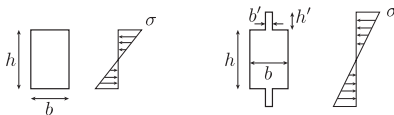
- Réserve de résistance en section (certaines fibres peuvent encore plastifier)
- Réserve de résistance entre sections (due à l'hyperstaticité)



Limitations du dimensionnement élastique

1. P_y ne donne pas d'information sur P_u (charge ultime) $\rightarrow$ vraie réserve de résistance (sécurité) inconnue si on s'arrête à une analyse élastique

2. Paradoxe de l'ajout de matière



Si on se limite à un calcul (analyse+vérification) élastique, il est possible qu'un ajout de matière amène à une charge de ruine, alors évaluée par la limite d'élasticité, plus faible. Si $b' \ll h'$,

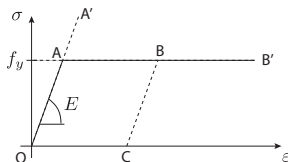
$$I_{\text{avant}} < I_{\text{après}}, h_{\text{avant}} \ll h_{\text{après}} \rightarrow W_{\text{avant}} = \frac{I_{\text{avant}}}{h_{\text{avant}}/2} \gg \frac{I_{\text{après}}}{h_{\text{après}}/2} = W_{\text{après}}$$

Donc $P_{y,\text{avant}} > P_{y,\text{après}} (!?)$.

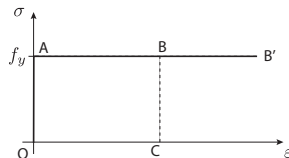


Idéalisation du comportement du matériau

Élastique-parfaitement plastique



Rigide-parfaitement plastique



- Loi (indéfiniment) élastique linéaire : un seul paramètre E
- Loi élastique-parfaitement plastique : deux paramètres E et f_y
- Loi rigide-parfaitement plastique : un seul paramètre f_y

Loi élasto-plastique : introduction d'une forme de non-linéarité matérielle (le principe de superposition n'est plus applicable!)



Concepts Fondamentaux

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

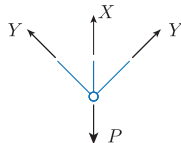
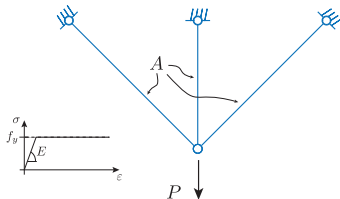
Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Treillis composé de trois barres à comportement élasto-plastique (E, f_y)



Efforts dans les barres : X et Y

Equation d'équilibre vertical au noeud :

$$X + 2Y \frac{\sqrt{2}}{2} = P$$

(doit être vérifié **entre toute circonstance**, élasticité ou plasticité)



1. Comportement élastique

Le treillis est hyperstatique une fois. Analyse par la méthode des forces ($h = 1$)

Le degré d'indétermination du treillis est unitaire. Analyse par la méthode des déplacements ($m = 1$)

$$X = \frac{2P}{2 + \sqrt{2}} \quad ; \quad Y = \frac{P}{2 + \sqrt{2}} \quad ; \quad \delta = \frac{P\ell}{EA} \frac{2}{2 + \sqrt{2}}$$

Effort maximal dans la barre verticale (sa raideur est plus grande)

Fin du régime élastique : $X = N_p = Af_y \rightarrow P = P_e = \frac{2+\sqrt{2}}{2} Af_y$
En termes de contraintes : $\sigma = f_y$ dans la barre verticale et $\sigma = f_y/2$ dans les deux barres inclinées (car $Y = X/2$).

Dans un design élastique, impossible de dépasser cette charge appliquée sur la structure. Que se passe-t-il si P dépasse P_e ?



2. Comportement plastique de la barre verticale

Si $P > P_e$, on atteint la limite d'élasticité dans la barre verticale. Quid après ? (surtout pas $\sigma > f_y$, ceci est impossible, plutôt :)

$$\varepsilon > \varepsilon_y, \text{ et surtout } \sigma = f_y.$$

Après qu'elle ait plastifié, $\sigma = f_y$ dans la barre verticale $\rightarrow X = A f_y$
(=constant dans ce régime)

Dans les barres inclinées : $\sigma = E \varepsilon$ (toujours dans le régime élastique)

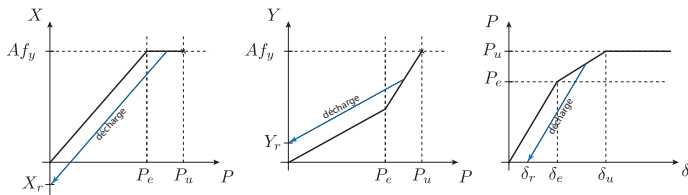
Par équilibre :

$$Y = \frac{P - A f_y}{\sqrt{2}}$$

(les barres inclinées portent le solde de la sollicitation, $P - A f_y$).

Fin du régime plastique :

$$Y = \frac{P_u - A f_y}{\sqrt{2}} = A f_y \quad \rightarrow \quad P_u = (1 + \sqrt{2}) A f_y = \sqrt{2} P_e$$



- charge ultime > charge élastique ($P_u = \sqrt{2}P_e$)
- **redistribution entre sections** (ou entre éléments dans ce cas précis), d'autant plus importante que les barres n'ayant pas encore plastifié au moment de l'apparition de la première plastification présentent une raideur et une réserve de résistance appréciables. Donc inexistante dans une structure isostatique en treillis.
- déplacement « ultime » > déplacement élastique ($\delta_u = 2\delta_e$)
- configuration auto-équilibrée en cas de déchargement
- la charge ultime est statiquement déterminée et donc calculable directement. Pas besoin de l'histoire complète du chargement



Principes généraux (structures en treillis)

- Hypothèse de chargement proportionnel, à l'aide du multiplicateur de charge λ
- Mise en charge jusqu'à la plastification successive de différentes barres
- les barres plastifient lorsqu'elles atteignent leur valeur de l'effort normal plastique N_{pl}
- la plastification d'une barre revient à réduire d'une unité le degré d'hyperstaticité
- pour un treillis h fois hyperstatique, un mécanisme est formé après l'apparition de la $(h + 1)^{\text{ème}}$ barre plastifiée (au moins)



Comportement en Section (Section rectangulaire)

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

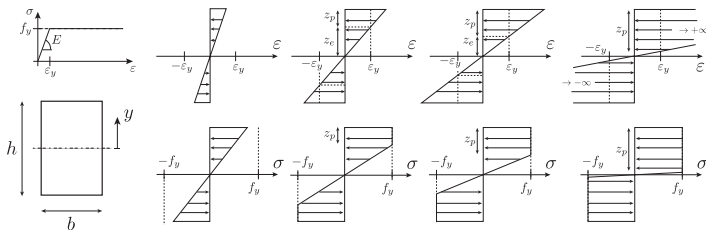
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



Hypothèse de Bernoulli : les sections planes restent planes et perpendiculaires à l'axe neutre. Donc

$$\varepsilon(y) = \chi y$$

où χ est la courbure (inverse du rayon de courbure).

Lorsque χ va de 0 à $+\infty$, on passe successivement par différents régimes :

élastique, élasto-plastique, plastique.



Pour une section symétrique autour de son axe de flexion (p.ex. rectangulaire, double té) et composée d'un matériau à comportement symétrique entre traction et compression, l'axe neutre se trouve à mi-hauteur du profilé. Donc le moment de flexion et l'effort axial

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} b \sigma y dy \quad ; \quad N = \int_{-h/2}^{h/2} b \sigma dy$$

sont calculés avec une coordonnée y mesurée par rapport à l'axe neutre (= axe de symétrie).

Par « compensation », on voit que $N = 0$ si l'axe neutre de flexion se trouve sur l'axe de symétrie.

Une section droite fléchie autour de son axe de symétrie est en flexion pure ssi l'axe de neutre de flexion coïncide avec l'axe de symétrie.



Régime élastique : $0 \leq \chi \leq \chi_y$

$$\sigma(y) = E \varepsilon(y) = E \chi y$$

pour $y \in [-\frac{h}{2}, +\frac{h}{2}]$ et $\sigma \leq f_y$, donc $\chi \leq \chi_y = \frac{2\varepsilon_y}{h}$ (notion de **courbure élastique**).

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} b \sigma y dy = Eb\chi \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{+h/2} = E \frac{bh^3}{12} \chi = EI\chi$$

Fin du régime lorsque $\chi = \chi_y$, i.e. $M = M_{el} = EI\chi_y = W_{el}f_y$.

Dans le régime élastique, le moment de flexion est proportionnel à la courbure



Régime élasto-plastique : $\chi_y \leq \chi \leq +\infty$

$$\sigma(y) = \begin{cases} E \varepsilon(y) = E \chi y & \text{si } |y| \leq z_e \\ f_y & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} b \sigma y dy = \frac{2}{3} E b \chi z_e^3 + b f_y \left(\frac{h^2}{4} - z_e^2 \right) = \frac{b h^2}{4} f_y \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 \right)$$

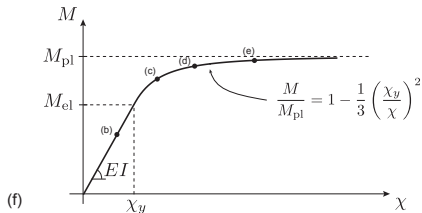
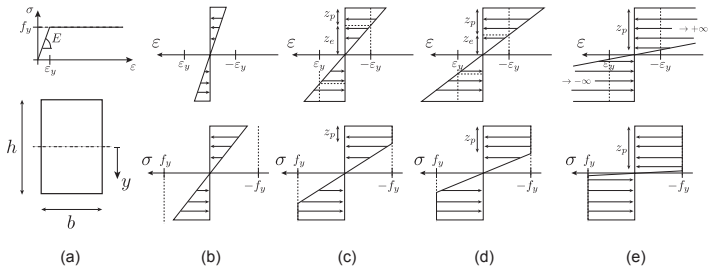
où $z_e = \frac{\varepsilon_y}{\chi} = \frac{h}{2} \frac{\chi_y}{\chi}$ est la hauteur de la zone restant élastique.

Fin du régime lorsque $\chi = +\infty$, i.e.

$$M = M_{pl} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} M = \frac{b h^2}{4} f_y := W_{pl} f_y.$$

On atteint alors la plastification complète de la section (état tout à fait théorique car certaines fibres ont une déformation $\varepsilon > \varepsilon_u$, donc rupture ; de toute façon, il y a de l'écroutissage avant ce stade).

Le moment plastique M_{pl} est obtenu par simple équilibre ; pas besoin de reproduire l'histoire complète du chargement (concept statique).





Comportement en Section (Flexion Pure)

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

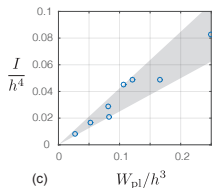
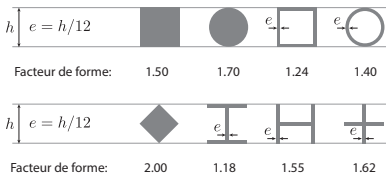
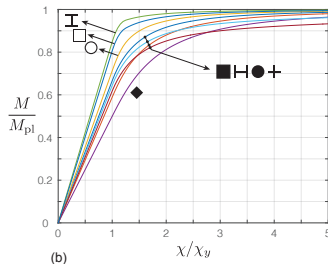
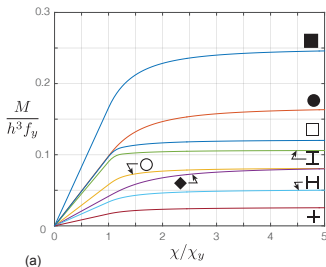
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles





Autres sections. Exemple de calcul de la loi $M - \chi$ (numériquement)

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

```
% Créer une matrice (crossSection) remplie de 1 et 0 indiquant s'il y a de la matière ou non.
n = 501; % nb de pt d'intégration
b = 100; % largeur de la section droite (mm)
h = 400; % hauteur de la section droite (mm)
[xx,yy] = meshgrid(linspace(-b/2,b/2,n),linspace(-h/2,h/2,n)); % mesh
dx = b / (n-1);
dy = h / (n-1);
crossSection = (abs(yy)>0.4*h) | (abs(xx)<0.05*b); % exemple de section en double té

chi = (0:0.001:0.03)/h; % courbures imposées (mm-1)
M = nan(size(chi)); % initialisation du moment de flexion

E = 210000; % Module de Young (N/mm2)
fy = 355; % Limite d'élasticité (N/mm2)
epsu = fy/E;

for k=1:length(chi)
    eps = chi(k) * yy .* crossSection;
    sig = E * eps.*(abs(eps)<=epsu) + fy * (abs(eps)>epsu) .* sign(eps);
    dM = sig.*yy * dx*dy;
    M(k)= sum(dM(:));
end

subplot(121), pcolor(xx,yy,double(crossSection)), shading interp
subplot(122), plot(1000*chi,M*1e-6), xlabel ('courbure (1/m)'), ylabel ('Moment (kN.m)')
```



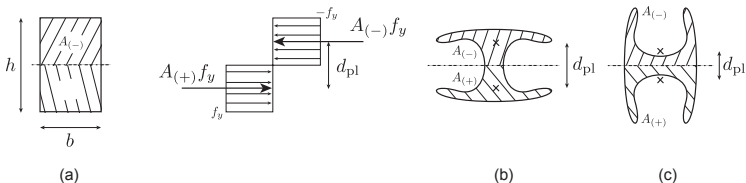
- Le facteur de forme $\varphi = M_{pl}/M_{el}$ vaut 1.5 pour une section rectangulaire, est proche de 1.5 pour une section en doublé d'axe faible, est proche de 1.15 pour une section en double té d'axe fort.
- Les profilés trapus et bien remplis (rectangle, cercle, losange) ont un facteur de forme plus grand, i.e. une transition plus lente de M_{el} à M_{pl} .
- Le profilé en croix a un moment plastique moitié de celui du double té autour de son axe faible
- Le tube carré et le profilé en té autour de son axe fort ont des comportements sensiblement les mêmes
- La courbe $W_{el} - W_{pl}$ montre une forte corrélation ; elle résulte de l'utilisation plus ou moins optimale de la matière

De façon générale, pour n'importe quelle section droite :

- le moment élastique M_{el} reste accessible lorsqu'on connaît le module de flexion élastique W_{el} ,
- le moment plastique M_{pl} reste accessible par simple équilibre ; on en déduit le module de flexion plastique W_{pl} .



Section symétrique autour de son axe de flexion



$$M_{pl} = \frac{A}{2} d_{pl} f_y := W_{pl} f_y$$

Le moment plastique M_{pl} reste accessible par simple équilibre, exprimé en fonction de la section droite A et du bras de levier d_{pl} entre les centres de gravité des deux demi-parties.

Le facteur de forme φ traduit la notion de redistribution en section (à ne pas confondre avec la redistribution entre sections)



Exercices. Calculez le moment plastique (i) d'une section circulaire pleine de diamètre ϕ , (ii) d'une section en losange de diagonales h (limite d'élasticité f_y). Validez vos réponses en les comparant aux résultats donnés dans le diagramme ci-dessus.

(i) La surface d'un demi-disque de diamètre ϕ vaut $\frac{1}{2}\pi\phi^2/4$. La position du centre de gravité d'un demi-disque de diamètre ϕ se trouve à une distance $2\phi/3\pi$ du centre (supposé connu, sinon, à calculer à partir d'une simple intégrale – voir calcul de la position du centre de gravité d'une section droite).

La résultante des contraintes de traction et compression sur chacune des demi-sections vaut $R = \frac{1}{2}\pi\frac{\phi^2}{4}f_y$. Le bras de levier entre ces deux force vaut $d_{pl} = 2 \cdot 2\phi/3\pi = 4\phi/3\pi$. Par conséquent, le moment de flexion plastique vaut

$$M_{pl} = \frac{1}{2}\pi\frac{\phi^2}{4}\frac{4\phi}{3\pi}f_y = \frac{\phi^3}{6}f_y \quad \rightarrow \quad W_{pl} = \frac{\phi^3}{6}.$$

(ii) La surface d'un demi-losange vaut $\frac{1}{4}h^2$. La position du centre de gravité d'un demi-losange (c'est-à-dire un triangle) se trouve à une distance $h/6$ de l'axe neutre. La résultante des contraintes de traction et compression sur chacune des demi-sections vaut $R = \frac{1}{2}h^2f_y$. Le bras de levier entre ces deux force vaut $d_{pl} = 2 \cdot h/6 = h/3$. Par conséquent, le moment de flexion plastique vaut

$$M_{pl} = \frac{1}{4}h^2\frac{h}{3}f_y = \frac{h^3}{12}f_y \quad \rightarrow \quad W_{pl} = \frac{h^3}{12}.$$

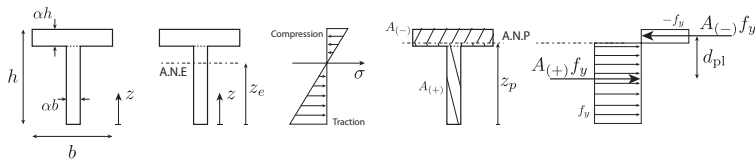


Comportement en Section (Flexion Pure)

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

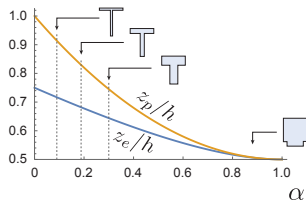
Section non-symétrique autour de son axe de flexion



L'axe neutre élastique ($\chi \rightarrow 0$) passe par le centre de gravité de la section droite

L'axe neutre plastique ($\chi \rightarrow +\infty$) divise la section droite en deux sections d'aires égales

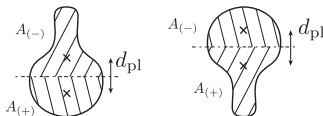
Lorsque χ varie de 0 à $+\infty$, l'axe neutre se déplace de l'A.N.E. à l'A.N.P.



$$z_e = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2}{A_1 + A_2} \rightarrow \frac{z_e}{h} = \frac{3 - 3\alpha + \alpha^2}{2(2 - \alpha)}$$

$$A_{(+)} = A_{(-)} \rightarrow \frac{z_p}{h} = 1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{2}$$

Lorsque $\alpha \rightarrow 1$, le profilé devient symétrique et la différence entre les deux axes neutres (élastique et plastique) disparaît.



Mêmes moments plastiques en flexion positive ou négative

$$M_{pl}^+ = M_{pl}^- = \frac{A}{2} d_{pl} f_y,$$

car loi $\sigma - \varepsilon$ symétrique en traction compression.



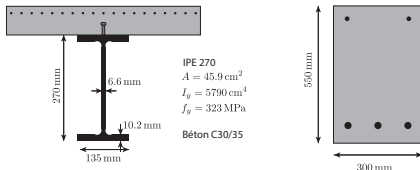
Comportement en Section (Flexion Pure)

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Section faite d'un matériau à comportement non-symétrique en traction-compression (béton/mixte)

(voir cours spécifiques au béton armé et aux structures mixtes)





Comportement en Section (Effet de N)

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

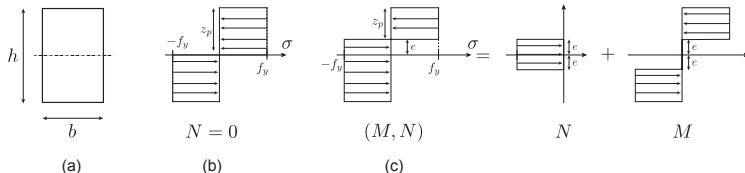
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



Paramètre e : distance par rapport à l'axe neutre plastique (comptée positivement au-dessus de l'axe de symétrie). Il règle la répartition entre moment de flexion ($e = 0$) et effort axial ($e = \pm h/2$).

A la limite, lorsque $\chi \rightarrow +\infty$,

$$A_{(+)} = \left(\frac{h}{2} - e \right) b \quad \text{et} \quad A_{(-)} = \left(\frac{h}{2} + e \right) b.$$

Le diagramme des contraintes peut être décomposé en deux zones, l'une ne donne que de l'effort axial, l'autre que du moment.



On peut calculer

$$N = \int_0^b \int_{-\frac{h}{2}}^e (-f_y) dx dy + \int_0^b \int_e^{\frac{h}{2}} (+f_y) dx dy = A_{(-)}(-f_y) + A_{(+)}f_y$$

$$= (A_{(+)} - A_{(-)}) f_y = 2ebf_y = \frac{2e}{h} b h f_y = \frac{2e}{h} N_{pl}$$

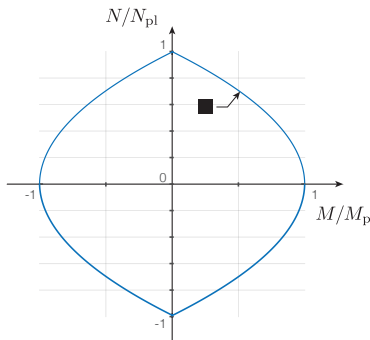
$$M = \int_0^b \int_{-\frac{h}{2}}^e y \cdot (-f_y) dx dy + \int_0^b \int_e^{\frac{h}{2}} y \cdot (+f_y) dx dy$$

$$= (A_{(+)}y_{(+)} - A_{(-)}y_{(-)}) f_y = \left(1 - 4\frac{e^2}{h^2}\right) \frac{bh^2}{4} f_y = \left(1 - 4\frac{e^2}{h^2}\right) M_{pl}$$

Donc la zone centrale de hauteur $2e$ peut être vue comme contribuant à l'effort axial, alors que les zones extrêmes sont vues comme contribuant au moment.



En éliminant le paramètre e , on trouve la **courbe d'interaction** $M - N$.
Pour la section droite rectangulaire :

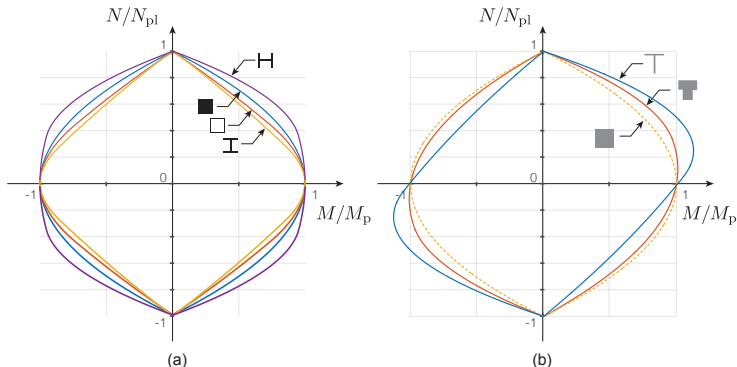


$$\frac{M}{M_{pl}} = 1 - \left(\frac{N}{N_{pl}} \right)^2$$

Cette loi d'interaction indique la façon dont est réduit le moment plastique d'une section droite lorsqu'il est également soumis à des efforts axiaux. Et vice versa.



Autres sections : utiliser une approche numérique (cf. code Matlab)



Courbes d'interaction $M - N$ pour sections (a) symétriques et (b) asymétriques

Si asymétrique, important de préciser par rapport à quel axe le moment de flexion est calculé !



Etendue Spatiale de la Plasticité

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

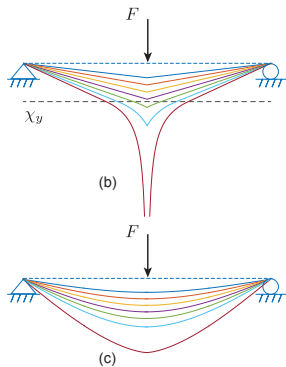
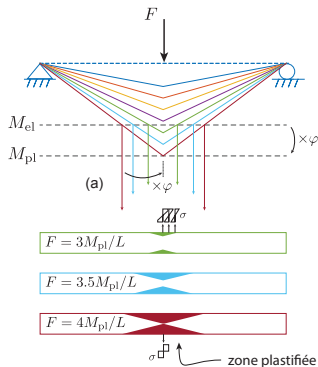
Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

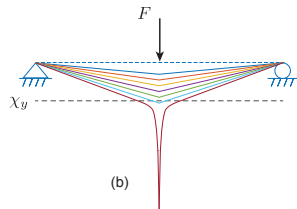
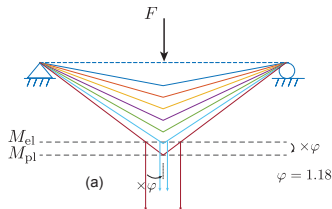
Câbles

Poutre isostatique sur deux appuis de section rectangulaire, $\varphi = 1.5$
isostatique $\rightarrow$ diagramme des moments connus (a)
section rectangulaire $\rightarrow$ diagramme de la courbure connu (b)
petits déplacements, petites rotations, $\chi = v''(s) \rightarrow$ déformation connue (c)





Poutre de double (axe fort) isostatique, $\varphi = 1.18$
 isostatique $\rightarrow$ diagramme des moments connus (a)
 section rectangulaire $\rightarrow$ diagramme de la courbure connu (b)
 petits déplacements, petites rotations, $\chi = v''(s) \rightarrow$ déformation connue (c)

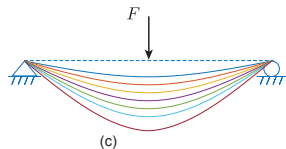


$$F = 3M_{pl}/L \quad (\text{toujours élastique})$$

$$F = 3.5M_{pl}/L$$

$$F = 4M_{pl}/L$$

zone plastifiée





Notion de rotule plastique

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

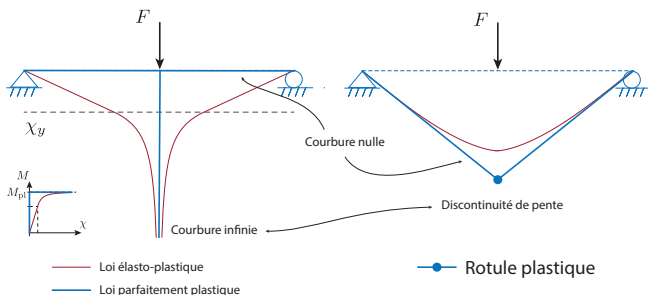
Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Idéalisation du comportement de la poutre



- La longueur de la zone élasto-plastique reste toujours assez limitée (surtout si $\varphi \simeq 1$)
- Hypothèse : courbure de la zone élastique négligeable

Rotule plastique = « Articulation à frottement » entre tronçons rigides articulés



Une rotule plastique est comme une articulation à frottement (loi de Coulomb, dont le fonctionnement est régi par une loi de complémentarité du style $(0 \geq |M| - M_{pl}) \perp \Delta\phi$).

Dans une rotule plastique :

- soit le moment est inférieur au moment plastique $|M| < M_{pl}$ et la rotation relative $\Delta\phi$ est nulle (car $\chi = 0$),
- soit le moment plastique est constant et égal à $\pm M_{pl}$ et la raideur est égale à zéro (on est sur le plateau)

La déformabilité disparaît, donc EI disparaît.

Lorsque $|M| = M_{pl}$ (sur le plateau), une rotule plastique peut être assimilée à une rotule mécanique assortie d'une paire de moments concentrés égaux à M_{pl}





La loi d'écoulement plastique permet *d'associer* des moments aux rotations

$$\begin{cases} \theta_j > 0 & \text{si } M_j = M_{\text{pl}} \\ \theta_j = 0 & \text{si } -M_{\text{pl}} < M_j < M_{\text{pl}} \\ \theta_j < 0 & \text{si } M_j = -M_{\text{pl}} \end{cases} \quad \begin{cases} M_j = M_{\text{pl}} & \text{si } \theta_j > 0 \\ -M_{\text{pl}} < M_j < M_{\text{pl}} & \text{si } \theta_j = 0 \\ M_j = -M_{\text{pl}} & \text{si } \theta_j < 0 \end{cases}$$

Notations :

NB : on note θ_j plutôt que $\Delta\phi_j$ la rotation de la rotule j (allègement).

NB : adapter légèrement les notations si $M_{\text{pl}}^{(+)} \neq M_{\text{pl}}^{(-)}$



Analyse de structures simples

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

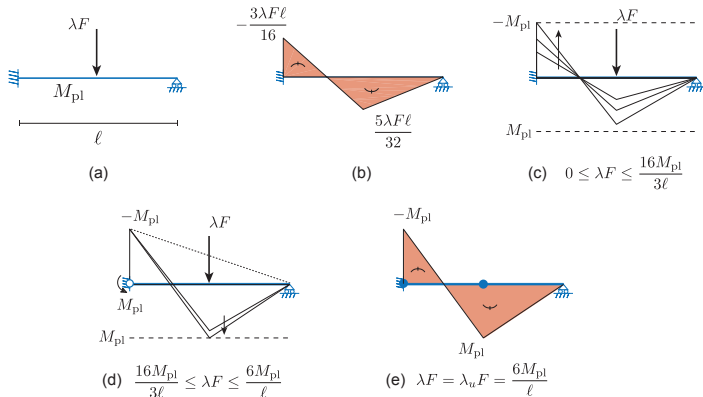
Câbles

Principes généraux (structures formées de barres)

- Hypothèse de chargement proportionnel, à l'aide du multiplicateur de charge λ
- Mise en charge jusqu'à formation de rotules plastiques successives
- les rotules se forment dans les sections où le moment atteint un maximum local :
 - point d'application d'une sollicitation
 - extrémités des barres
 - en pleine barre, en cas de charge répartie
- l'apparition d'une rotule dans une barre revient à réduire d'une unité le degré d'hyperstaticité
- pour une structure h fois hyperstatique, un mécanisme est formé après l'apparition de la $(h + 1)^{\text{ème}}$ rotule (au moins)
- le multiplicateur ultime (ou limite) correspond à la formation de ce mécanisme



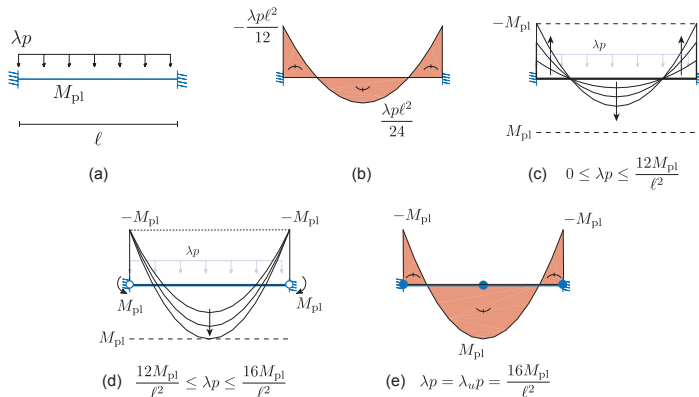
Exemple 1



Apparition d'une première rotule quand $\lambda F = \frac{16M_{pl}}{3\ell}$, comportement élasto-plastique pour $\frac{16M_{pl}}{3\ell} \leq \lambda F \leq \frac{6M_{pl}}{\ell}$, ruine $\lambda_u F = \frac{6M_{pl}}{\ell}$.



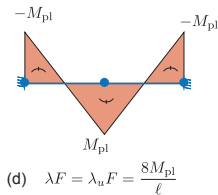
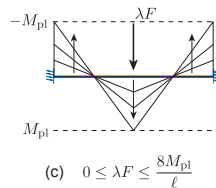
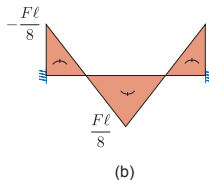
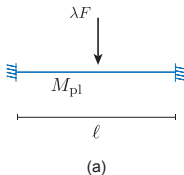
Exemple 2



Apparition de deux rotules quand $\lambda p = \frac{12M_{pl}}{\ell^2}$, comportement élasto-plastique pour $\frac{12M_{pl}}{\ell^2} \leq \lambda p \leq \frac{16M_{pl}}{\ell^2}$, ruine $\lambda_u p = \frac{16M_{pl}}{\ell^2}$.



Exemple 3



Apparition de trois rotules quand $\lambda F = \frac{8M_{pl}}{\ell}$. Ruine immédiate.



Au total, les bénéfices de la plasticité sont :

- adaptation en section représentée par le facteur de forme $\varphi = M_{pl}/M_{el}$ (toujours possible pour les sections de Classe 1 ou de Classe 2 en métal, toujours possible pour les sections en béton et mixtes)
- adaptation entre sections, représentée par le λ_u/λ_e , possible dans la mesure où toutes les rotules plastiques ne se produisent pas en même temps

Pour les cas examinés, si on suppose des profilés de type IPE ($\varphi = 1.15$) le bénéfice est,

- exemple 1 : $1.15 \times 6/\frac{16}{3} = 1.30$,
- exemple 2 : $1.15 \times 16/12 = 1.53$,
- exemple 3 : $1.15 \times 1 = 1.15$,

soit respectivement {30%, 53%, 15%} par rapport à ce que permet un dimensionnement strictement élastique.



Le bénéfice de la plasticité peut donc être très variable. Il est faible pour les structures conçues comme étant d'égale résistance (ou sensiblement). Par exemple, dans le cas de portiques en profilés reconstitués soudés où la forme est choisie pour que la plasticité apparaisse presque partout en même temps

Le principe de superposition n'est pas applicable globalement puisque le système statique se modifie au fur et à mesure que les rotules apparaissent → considérer séparément chaque situation de risque (combinaison d'actions). Cet inconvénient est compensé par la simplicité de l'analyse limite plastique.

Il n'est pas nécessaire de reproduire l'histoire complète du chargement, c'est-à-dire la séquence d'apparition des différentes rotules plastiques, pour calculer le multiplicateur ultime. C'est la notion d'**analyse limite plastique**.



Nombre de rotules à former pour arriver à la ruine

Règle générale : Pour une structure hyperstatique h fois, il suffit d'avoir $h + 1$ rotules plastiques pour mener à la ruine.

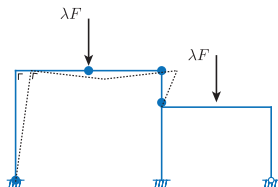
Ce n'est pas une condition nécessaire et suffisante.

Exception 1. Ruine partielle

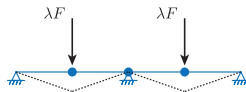
La ruine est atteinte par un mécanisme local : une sous-structure reste hyperstatique ($h_1 > 0$) pendant qu'une autre s'est transformée en mécanisme ($h_2 \leq -1$), de sorte que la structure reste globalement iso- ou hyperstatique. On a pourtant bien atteint la ruine.

Exception 2. Ruine plus que complète

Si plusieurs rotules se forment en même temps que la dernière rotule, il peut y avoir plus de $h + 1$ rotules formées au moment de la ruine. C'est souvent le cas de structures symétriques chargées symétriquement ou asymétriquement.



Ruine partielle



Ruine plus que complète

Exemple de ruine partielle ($h = 5$, mais 4 rotules suffisent pour mener à la ruine)

Exemple de ruine plus que complète ($h = 1$, mais 3 rotules apparaissent lors de l'atteinte de la ruine)

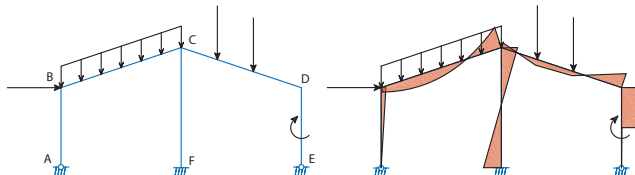


Où apparaissent les rotules plastiques ?

Section critique : section où le moment de flexion prend une valeur maximale localement

Il y a trois types de **sections critiques** :

- aux extrémités de barres
- aux points d'application des charges concentrées et moments concentrés
- quelque part le long d'un élément soumis à une charge uniformément répartie





Analyse Limite Plastique

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Hypothèse de la méthode d'analyse

- toute barre est caractérisée par le moment plastique de sa section transversale (et ce paramètre uniquement, pas de EI)
- le matériau a une ductilité suffisante pour permettre la formation des rotules plastiques
- la section droite des barres permet une rotation de cette rotule jusqu'à l'apparition du mécanisme complet (d'où limitation aux sections de classe 1 et 2 en structures métalliques)
- la valeur de M_{pl} n'est pas affectée par N ou T
- aucune instabilité prématurée (membrure, ossature) → besoin d'une vérification a posteriori
- chargement radial, à l'aide du multiplicateur λ
- déplacements suffisamment faibles pour ne pas modifier le mode d'action des forces appliquées
- assemblages capables de transmettre le moment résistant de la barre; sinon, utiliser localement un moment résistant réduit



Les théorèmes de l'analyse limite plastique

Théorème des déplacements virtuels

$$\delta \mathcal{U} = \delta \mathcal{W}$$



Théorème cinématique

estimation par excès
du multiplicateur limite

$$\lambda_+ \geq \lambda_{\text{réel}}$$

Théorème des forces virtuelles

$$\delta \mathcal{U}^* = \delta \mathcal{W}^*$$



Théorème statique

estimation par défaut
du multiplicateur limite

$$\lambda_- \leq \lambda_{\text{réel}}$$

Théorème d'unicité

Valeur exacte du multiplicateur limite



Théorème des Déplacements Virtuels

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Théorème des déplacements virtuels. *Pour tout corps déformable en équilibre, le travail virtuel de déformation est égal au travail virtuel des forces extérieures, pour tout champ de déplacement cinématiquement admissible, $\delta\mathcal{W} = \delta\mathcal{U}$ et donc :*

$$\begin{aligned} \sum_i \lambda \mathbf{F}_i^T \delta \mathbf{\Delta}_i + \sum_i \int_{a_i}^{b_i} \lambda \mathbf{p}_i^T \delta \mathbf{\Delta}_i ds + \sum_i \lambda M_i \delta \phi_i \\ = \int_0^L M \delta \chi ds + \int_0^L N \delta u' ds + \int_0^L T \delta v'_\gamma ds \end{aligned}$$

NB : notations pièges : M_i =moment appliqué, $M_{pl,j}$ =moment interne) ; pour éviter ce problème, on suppose momentanément qu'il n'y a pas de moment appliqué sur la structure.



Théorème Cinématique

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Théorème cinématique. Théorème de la borne supérieure. Soit un mécanisme de ruine cinématiquement admissible, caractérisé par les champs $\{\delta\Delta_i, \delta\phi_i\}$ et $\delta\theta_j$. Soit les moments $\bar{M}_j$ associés aux rotations $\delta\theta_j$. Le multiplicateur λ_+ calculé à partir de

$$\sum_i \lambda_+ \mathbf{F}_i^T \delta\Delta_i + \sum_i \int_{a_i}^{b_i} \lambda_+ \mathbf{p}_i^T \delta\Delta_i ds = \sum_{j=1}^m \bar{M}_j \delta\theta_j \quad (5)$$

fournit une estimation par excès du multiplicateur ultime réel :

$$\lambda_+ \geq \lambda_{\text{réel}}$$

⚠ les charges extérieures $\{\lambda_+ \mathbf{F}_i, \lambda_+ \mathbf{p}_i, \lambda_+ M_i\}$ **ne sont pas** en équilibre avec les moments $\{\bar{M}_j\}$ dans les rotules plastiques, obtenus par association aux rotations $\delta\theta_j$ (sauf pour le mécanisme réel). Par contre, les champs $\{\delta\Delta_i, \delta\phi_i\}$ et $\delta\theta_j$ sont reliés par les conditions cinématiques du champ virtuel choisi.



Rappel de la règle d'association

$$\begin{cases} \bar{M}_j = M_{\text{pl}} & \text{si } \theta_j > 0 \\ -M_{\text{pl}} < \bar{M}_j < M_{\text{pl}} & \text{si } \theta_j = 0 \\ \bar{M}_j = -M_{\text{pl}} & \text{si } \theta_j < 0 \end{cases}$$

Démonstration

Etape 1. l'égalité est satisfaite pour le mécanisme réel.

Soit le mécanisme réel, avec les champs $\delta \Delta_{\text{réel},i}$ et $\delta \theta_{\text{réel},j}$. L'équilibre est satisfait. On peut donc écrire le théorème des déplacements virtuels. Dans $\delta \mathcal{U}$, les seules déformations sont des rotations dans les rotules plastiques.

Donc

$$\delta \mathcal{U} = \int_0^L M \delta \chi ds = \sum_{j=1}^m M_{\text{pl},j} \delta \theta_{\text{réel},j}$$

Puisque, dans le mécanisme réel les moments plastiques sont associés aux rotations par la loi d'écoulement, $M_{\text{pl},j} = \bar{M}_j$.

Donc $\lambda_+ = \lambda_{\text{réel}}$.



Etape 2. lorsque $\{\delta\Delta_i, \delta\theta_j\} \neq \{\delta\Delta_{\text{réel},i}, \delta\theta_{\text{réel},j}\}$

On peut toujours écrire le théorème des déplacements virtuels pour le système en train de s'effondrer, dans le vrai mécanisme, mais surtout tel que les efforts extérieurs $\{\lambda_{\text{réel}}\mathbf{F}_i, \lambda_{\text{réel}}\mathbf{p}_i, \lambda_{\text{réel}}M_i\}$ soient en équilibre avec les moments intérieurs. Considérons le champ virtuel $\{\delta\Delta_i, \delta\theta_j\}$ quelconque, cinématiquement admissible, a priori différent du mode de ruine. Puisque les sollicitations réelles sont en équilibre avec les moments plastiques (thm dépl. virtuels),

$$\sum_i \lambda_{\text{réel}} \mathbf{F}_i^T \delta\Delta_i + \sum_i \int_{a_i}^{b_i} \lambda_{\text{réel}} \mathbf{p}_i^T \delta\Delta_i \, ds = \sum_{j=1}^m M_{\text{pl},j} \delta\theta_j$$

Dans cette relation, les moments $M_{\text{pl},j}$ sont les moments plastiques réels (en équilibre avec les sollicitations) et non pas les moments $\bar{M}_j$ associés aux rotations $\delta\theta_j$. Ils ne sont associés aux rotations $\delta\theta_j$ que si $\delta\theta_j = \delta\theta_{\text{réel},j}$. Donc

$$\lambda_{\text{réel}} = \frac{\sum_{j=1}^m M_{\text{pl},j} \delta\theta_j}{\sum_i \mathbf{F}_i^T \delta\Delta_i + \sum_i \int_{a_i}^{b_i} \mathbf{p}_i^T \delta\Delta_i \, ds}.$$



On a défini

$$\lambda_+ = \frac{\sum_{j=1}^m \bar{M}_j \delta \theta_j}{\sum_i \mathbf{F}_i^T \delta \mathbf{\Delta}_i + \sum_i \int_{a_i}^{b_i} \mathbf{p}_i^T \delta \mathbf{\Delta}_i ds}$$

Donc

$$\frac{\lambda_+}{\lambda_{\text{réel}}} = \frac{\sum_{j=1}^m \bar{M}_j \delta \theta_j}{\sum_{j=1}^m M_{\text{pl},j} \delta \theta_j}$$

La somme peut être limitée aux j tels que $\delta \theta_j \neq 0$.

Les $\bar{M}_j$ sont associés aux $\delta \theta_j$. Les $\bar{M}_j \delta \theta_j$ sont donc tous des nombres positifs.

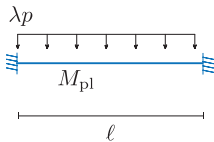
Pas les $M_{\text{pl},j}$. Les $M_{\text{pl},j} \delta \theta_j$ sont donc tantôt positifs, tantôt négatifs. Le quotient est donc ≥ 1 .

Donc $|\lambda_+| \geq \lambda_{\text{réel}}$.

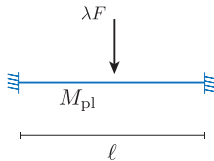
(le cas $\lambda_+ = -\lambda_{\text{réel}}$ correspond à un mécanisme choisi qui est le mécanisme réel changé de signe).



Exemples :



(a)



(b)



Procédure d'application du théorème cinématique.

1. choisir un mécanisme ; i.e. choisir un ensemble de rotules correspondant à un mécanisme
2. déterminer la rotation $\delta\theta_j$ dans chaque rotule, $j = 1, \dots, m$
3. déterminer le moment plastique $M_{pl,j}$ dans chaque rotule avec son signe
4. déterminer les déplacements des points d'application des sollicitations (et rotations des points d'application des moments)
5. calculer le travail virtuel correspondant à la dissipation plastique dans les rotules $\delta\mathcal{U}$
6. calculer le travail virtuel des forces extérieures $\delta\mathcal{W}$
7. calculer le multiplicateur λ_+

Etant donné que la valeur obtenue est une estimation par excès du multiplicateur réel, on est tenté de recommencer l'opération avec d'autres choix de mécanismes jusqu'à ce que la valeur obtenue pour λ_+ soit la plus petite possible.



Option 1 : Approche systématique

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

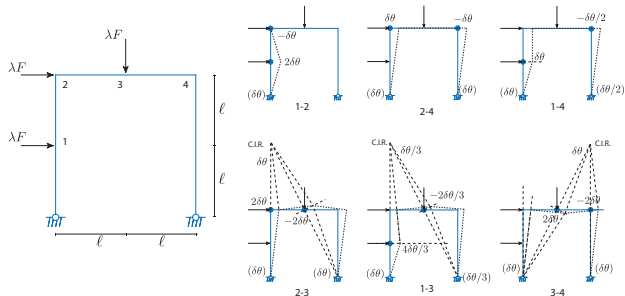
Câbles

Tester tous les mécanismes ...

1. calculer le degré d'hyperstaticité $h \rightarrow$ nombre de rotules à former
 $m = h + 1$ (cas général)
2. déterminer le nombre n de sections critiques où les rotules peuvent se développer
3. lister toutes les combinaisons $C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
4. calculer le multiplicateur λ_+ associé à chaque combinaison
5. garder le minimum et vérifier que le diagramme des moments est bien statiquement et plastiquement admissible (licite)

A utiliser si le nombre de combinaisons est faible à modéré, c'est-à-dire, soit m petit soit $n - m$ petit.

Exemple, $h = 1$, $m = 2$, $n = 4$, nombre de combinaisons : 6



	1	2	3	4	$\delta \mathcal{W}$	$\delta \mathcal{U}$	$\lambda_+ F \ell / M_{pl}$
1	$2\delta\theta$	$-\delta\theta$			$\lambda_+ F \ell \delta\theta$	$3M_{pl} \delta\theta$	3
2		$\delta\theta$		$-\delta\theta$	$3\lambda_+ F \ell \delta\theta$	$2M_{pl} \delta\theta$	2/3
3	$\delta\theta$			$-\delta\theta/2$	$2\lambda_+ F \ell \delta\theta$	$\frac{3}{2} M_{pl} \delta\theta$	3/4
4		$2\delta\theta$	$-2\delta\theta$		$2\lambda_+ F \ell \delta\theta$	$4M_{pl} \delta\theta$	2
5	$2\delta\theta$		$-\delta\theta$		$2\lambda_+ F \ell \delta\theta$	$3M_{pl} \delta\theta$	3/2
6			$\delta\theta$	$-\delta\theta$	$2\lambda_+ F \ell \delta\theta$	$2M_{pl} \delta\theta$	1



Centre instantané de rotation

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

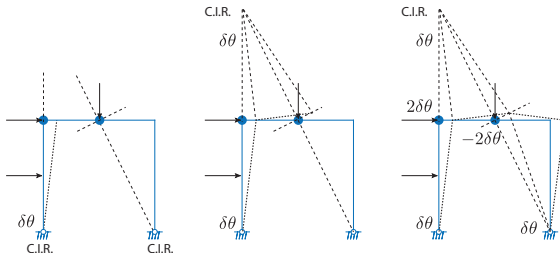
Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Chaque pièce rigide tourne autour d'un centre instantané de rotation.

1. En cas de faible rotation, le déplacement de chaque point d'un corps rigide est perpendiculaire à l'axe le reliant au centre instantané de rotation
2. On peut trouver la position du centre instantané de rotation d'un corps rigide si on connaît les déplacements de deux des points appartenant à ce corps
3. Deux corps articulés autour d'un point commun (une rotule) sont tels que ce point doit se déplacer perpendiculairement aux deux axes le reliant aux centres instantanés de rotation des deux corps voisins. Il se trouve donc sur la droite joignant les deux centres instantanés de rotation.





Option 2 : combinaison de mécanismes élémentaires

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

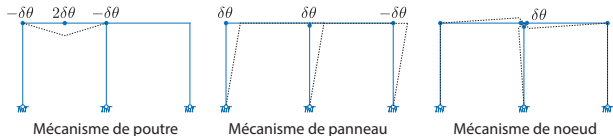
Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Tous les mécanismes peuvent s'obtenir par combinaison de **mécanismes élémentaires** : (i) mécanisme de poutre, (ii) mécanisme de panneau, (iii) mécanisme de noeud



Autorisé car les déplacements sont petits. On peut donc ajouter les champs cinématiquement admissible (une somme de deux champs cinématiquement admissible reste cinématiquement admissible).

- Dans le théorème des déplacement virtuels : le travail des forces extérieures $\delta\mathcal{W}$ est additif. Le travail des forces intérieures $\delta\mathcal{U}$ est additif.
- Dans le théorème cinématique : le membre de gauche « $\delta\mathcal{W}$ » est additif. Le membre de droite « $\delta\mathcal{U}$ » ne l'est pas ! (car obtenu par la règle d'association)



S'il y a n sections critiques dans une structure en portique h fois hyperstatique, il y a $n - h$ mécanismes élémentaires.

Méthode plus directe car elle permet, parfois, d'éviter de devoir utiliser la notion de centre instantané de rotation. Par contre moins systématique.

Méthodologie

1. calculer le degré d'hyperstaticité $h \rightarrow$ nombre de rotules à former
 $m = h + 1$ (cas général)
2. déterminer le nombre n de sections critiques où les rotules peuvent se développer
3. déterminer les $n - h$ mécanismes élémentaires, calculer les multiplicateurs λ_+ correspondant
4. combiner deux ou plusieurs mécanismes et obtenir (directement) le nouveau multiplicateur
5. garder le minimum et vérifier que le diagramme des moments est bien statiquement et plastiquement admissible (licite)



Dans l'exemple de la page 233, $h = 1$, $n = 4$, il y a 3 mécanismes élémentaires (deux de type poutre et un de type panneau). On les note #1, #2, #3. Tous les autres mécanismes peuvent être obtenus par combinaison.

mécan.	1	2	3	4	$\delta\mathcal{W}$	$\delta\mathcal{U}$	$\lambda_+ F\ell/M_{pl}$
#1	$2\delta\theta$	$-\delta\theta$			$\lambda_+ F\ell\delta\theta$	$3M_{pl} \delta\theta$	3
#2		$\delta\theta$		$-\delta\theta$	$3\lambda_+ F\ell\delta\theta$	$2M_{pl} \delta\theta$	2/3
#3		$-\delta\theta$	$2\delta\theta$	$-\delta\theta$	$\lambda_+ F\ell\delta\theta$	$4M_{pl} \delta\theta$	4
#2+#3			$2\delta\theta$	$-2\delta\theta$	$4\lambda_+ F\ell\delta\theta$	$4M_{pl} \delta\theta$	1
#2-#3≡#4		$2\delta\theta$	$-2\delta\theta$		$2\lambda_+ F\ell\delta\theta$	$4M_{pl} \delta\theta$	2
2.#1+#4	$4\delta\theta$		$-2\delta\theta$		$4\lambda_+ F\ell\delta\theta$	$6M_{pl} \delta\theta$	3/2

Les rotations sont obtenues par combinaison linéaire

Dans la colonne $\delta\mathcal{W}$, le travail des forces appliquées est obtenu par combinaison linéaire

Dans la colonne $\delta\mathcal{U}$, la dissipation est obtenue à partir du mécanisme (colonnes 1 à 4) et de la règle d'association (somme des valeurs absolues $\bar{M}_j \delta\theta_j$).

NB : on peut passer momentanément par des mécanismes partiels ou plus que complets (exemple : #3).



Vérification du mécanisme trouvé

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

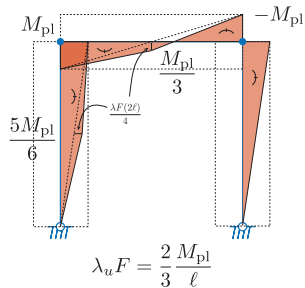
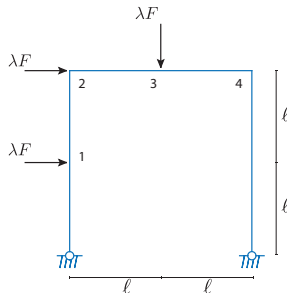
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



Le moment ne dépasse nulle part le moment plastique. OK.



Exemple complet

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

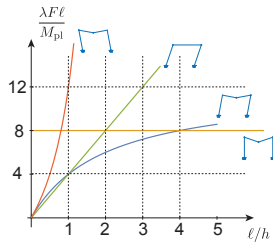
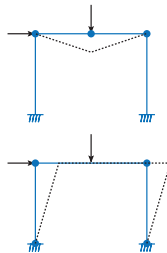
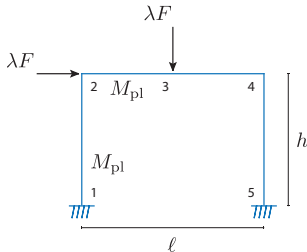
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



- Mécanisme de panneau si $\ell \leq h$
- Mécanisme combiné si $h \leq \ell \leq 4h$
- Mécanisme de panneau si $4h \leq \ell$



Charges réparties

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Voir exercices en classe

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



Effet de l'Effort Axial - Structures avec tirants

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Voir exercices en classe

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



Théorème des Forces Virtuelles

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Théorème des forces virtuelles. *Pour tout corps déformable en équilibre, le travail virtuel complémentaire interne est égal au travail virtuel complémentaire développé par les forces extérieures pour tout système de forces virtuelles statiquement admissibles, $\delta\mathcal{W}^* = \delta\mathcal{U}^*$ et donc :*

$$\sum_i \lambda \delta \mathbf{F}_i^T \Delta_i + \sum_i \int_{a_i}^{b_i} \lambda \delta \mathbf{p}_i^T \Delta_i ds + \sum_i \lambda \delta M_i \phi_i = \int_0^L \lambda M \chi ds$$

NB : notations pièges : $\lambda \delta M_i$ = moment appliqué, $M(s)$ = moment interne) ; pour éviter ce problème, on suppose momentanément qu'il n'y a pas de moment appliqué sur la structure.



Théorème Statique

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Théorème statique. Théorème de la borne inférieure. *Soit une distribution de moments $\bar{M}(s)$ statiquement et plastiquement admissible. Ces efforts intérieurs sont en équilibre avec les charges extérieures caractérisées par le multiplicateur λ_- qui est une estimation par défaut du multiplicateur ultime réel :*

$$\lambda_- \leq \lambda_{\text{réel}}$$

- pas besoin de mécanisme (méthode statique)
- facile à appliquer pour des structures simples (faiblement hyperstatiques)
- note : la solution élastique fournit déjà une borne inférieure
- avantage : sécuritaire
- méthode par essai/erreur souvent nécessaire.



Démonstration

Soit les champs $\Delta_{\text{réel},i}$ et $\theta_{\text{réel},j}$ correspondant au mécanisme réel. L'équilibre est satisfait dans la structure en train de s'effondrer donc

$$\sum_i \lambda_{\text{réel}} \mathbf{F}_i^T \Delta_i + \sum_i \int_{a_i}^{b_i} \lambda_{\text{réel}} \mathbf{p}_i^T \Delta_i \, ds = \sum_{j=1}^m M_{\text{pl},j} \theta_j$$

On peut appliquer le théorème des forces virtuelles en considérant (comme forces virtuelles) la distribution de moments $\bar{M}(s)$ en équilibre avec les charges extérieures multipliées par λ_- . Dans ce cas, il est nécessaire de considérer la déformation réelle de la structure, i.e. le vrai mécanisme de ruine :

$$\sum_i \lambda_- \mathbf{F}_i^T \Delta_i + \sum_i \int_{a_i}^{b_i} \lambda_- \mathbf{p}_i^T \Delta_i \, ds = \sum_{j=1}^m \bar{M}_j \theta_j$$

où $\bar{M}(s) \rightarrow \bar{M}_j$ étant donné que la courbure est nulle partout sauf au droit des rotules plastiques. Donc

$$\frac{\lambda_-}{\lambda_{\text{réel}}} = \frac{\sum_{j=1}^m \bar{M}_j \theta_j}{\sum_{j=1}^m M_{\text{pl},j} \theta_j}$$



La somme peut être limitée aux j tels que $\theta_j \neq 0$.

Les $M_{pl,j}$ sont associés aux $\theta_j \rightarrow M_{pl,j}\theta_j \geq 0, \forall j$.

Pas vrai pour les $\bar{M}_j$. Les $\bar{M}_j\theta_j$ sont donc tantôt positifs, tantôt négatifs.

Le quotient est donc ≤ 1 .

Donc $|\lambda_-| \leq \lambda_{\text{réel}}$.

Pas tellement utilisé pour l'analyse des structures dès qu'il y a un nombre important de degrés de liberté. Par contre souvent évoqué dans le calcul d'assemblages ou d'autres éléments de structures : e.g. « une partie de l'effort est équilibrée par de l'effort axial, une autre par de la flexion ». Bien se souvenir qu'une condition d'application nécessaire est la grande (infinie) ductilité du matériau !



Théorème d'Unicité

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Le multiplicateur de ruine exact est obtenu en combinant les théorèmes cinématique et statique.

Versión 1. Le multiplicateur de ruine réel est celui qui correspond à une distribution de moments statiquement et plastiquement admissibles, telle que le moment plastique soit atteint en un nombre de sections suffisant pour produire un mécanisme de ruine et où la rotation relative de chacune des rotules plastiques a un signe correspondant au moment plastique à cet endroit.

NB : important de la bonne association de signe du moment

Versión 2. Le multiplicateur de ruine réel est celui qui est obtenu en égalant le travail des forces extérieures et l'énergie dissipée dans le mécanisme de ruine cinématiquement admissible et que le diagramme des moments correspondant, obtenu en attribuant aux rotules plastiques le moment correspondant (ainsi que son signe) et en le déterminant par équilibre ailleurs dans la structure, reste plastiquement admissible.



Lemme de Feinberg

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Lemme de Feinberg. *Si on renforce un système de poutres fléchies en augmentant le moment plastique dans au moins une section sans le diminuer nulle part ailleurs, le multiplicateur limite du système renforcé ne peut pas être inférieur à celui du système d'origine.*

La démonstration de ce lemme, attribuée à Feinberg (?) se base sur le théorème statique :

la distribution de moments à la ruine dans les structure originelle est un diagramme statiquement et plastiquement admissible pour la structure renforcée. Le multiplicateur limite de la structure originelle devient alors un multiplicateur statique pour la structure renforcée. Il s'agit donc d'un multiplicateur par défaut. Le multiplicateur de la structure renforcée est donc supérieur.

Second lemme de Feinberg. *Si on affaiblit un système de poutres fléchies en diminuant le moment plastique dans au moins une section sans le changer nulle part ailleurs, le multiplicateur limite du système renforcé ne peut pas être supérieur à celui du système d'origine.*



Chapitre IX : Théorie Statique des Câbles

Acquis d'apprentissage :

- Découverte des systèmes d'auto-contraintes
- Connaître l'équation constitutive des câbles, premier contact avec un comportement non linéaire
- Modéliser des câbles à l'aide de ressorts équivalents



Généralités

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Poutres : éléments de structure possédant une dimension caractéristique plus longue que les autres ; elles sont dimensionnées pour supporter diverses charges appliquées sur toute la longueur de l'élément, souvent à l'aide de leur raideur flexionnelle

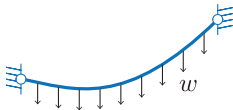
Câbles : éléments de structure élancé dont la raideur flexionnelle est négligeable. Leur mode principal de reprise d'effort est l'effort axial. Ils sont donc incapables d'équilibrer les sollicitations transversales dans leur configuration initiale (rectiligne). → ils résistent aux sollicitations transversales en prenant une configuration déformée.





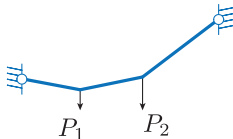
Charges distribuées

- Poids du câble non-négligeable
- Pas de résistance en flexion
- Forme courbe entre appuis



Charges concentrées

- Charges verticales, positionnées sur des lignes verticales
- Poids du câble négligeable
- Pas de résistance en flexion
- Formes rectilignes entre sollicitations



1. Câble inextensible
2. Câble extensible



Les Câbles du Génie Civil

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

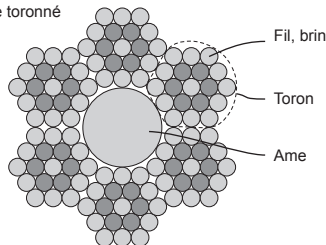
Terminologie

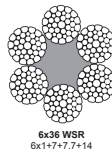
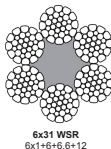
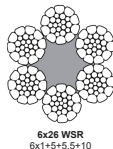
- Fil acier : entité élémentaire
- Toron : réunion de fils d'acier tordus ensemble
- Câble : réunion de plusieurs torons
- Âme : intérieur d'un câble

Matériau :

- Acier : câbles de ponts suspendus, haubanés, suspentes, câble de haubanage, câbles de levage, câbles d'engins de travaux publics ;
- Textile (nylon) : câbles de chantier, de grue, montage provisoire ;

Câble toronné





(a)



(b)

Types de câbles :

Croisé : le plus courant. Les fils sont tressés dans le sens inverse des torons

Lang : Fils tressés dans le même sens que les torons

NB : Les câbles peuvent être croisés à gauche ou à droite

Câble clos - Câble pour ligne de transmission et câble de haubanage/levage



Equations du Câble : Equilibre Local

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

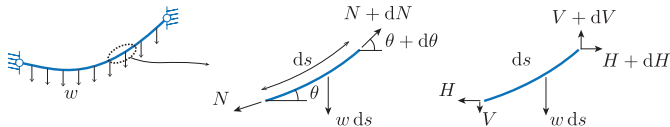
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



NB : besoin de $\theta + d\theta$ en $s + ds$, sinon $N = \text{cst} \rightarrow$ grandes rotations.

Equilibre vertical & équilibre horizontal (équilibre de moment inutile)

$dH = 0 \rightarrow$ Composante horizontale constante, $H = \text{cst}$

$dV = w ds \rightarrow$ Composante verticale linéaire avec s , $V = w s$

Valable quel que soit le chargement (charge distribuée ou charges concentrées)

Corollaire : effort interne minimum au point de tangence horizontale.



Equilibre local :

$$N\theta' = w \cos \theta \quad ; \quad N' = w \sin \theta$$

Equation non linéaire d'un câble :

$$\theta'' \cos \theta + 2\theta'^2 \sin \theta = 0$$

- Equation similaire à l'équation de l'élastique pour une poutre $EI v'''' = p$
- Valable quel que soit le chargement (charge distribuée ou charges concentrées) ; si on connaît la configuration $\theta(s)$ d'un câble, alors on connaît les efforts internes (si w est connu)
- Equation d'ordre 2 $\rightarrow$ 2 conditions limites
- Ne dépend pas de la sollicitation imposée (différence par rapport à la poutre car, aucune équation constitutive n'est nécessaire ici ; les déformations proviennent de la géométrie)
- On a juste supposé $EI = 0$



Equation non linéaire d'un câble :

$$\theta'' \cos \theta + 2\theta'^2 \sin \theta = 0$$

Supposons que l'inclinaison varie peu autour de l'inclinaison de la corde :

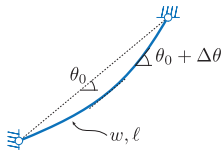
$$\theta(s) = \theta_0 + \Delta\theta(s), \quad \text{où } \Delta\theta \ll 1$$

[Développement en série de l'équation non linéaire, pour $\Delta\theta \ll 1 \dots$]

Equation linéarisée d'un câble :

$$\Delta\theta'' \cos \theta_0 = 0$$

Donc $\Delta\theta' = \text{courbure} = \text{cst}$ (! pas nulle, même si le moment de flexion est nul) $\rightarrow$ forme parabolique.





Equations du Câble : Equilibre Global

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

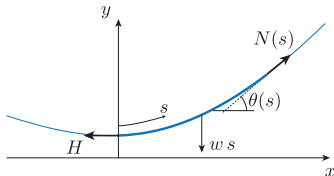
Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

- Hypothèses : pas de charges concentrées (on regarde un tronçon de câble entre charges concentrées, s'il y en a)
- Toujours pas de conditions limites
- Notations : on choisit s depuis le point de tangence horizontale, où l'effort axial vaut H .



On retrouve (naturellement) $N \cos \theta = \text{cst}$ et $V = N \sin \theta = w s$.



Sinon, puisque $H = N \cos \theta$ et $V = N \sin \theta$,

$$\tan \theta = \frac{ws}{H}$$

→ **dans un câble de poids w connu, l'inclinaison est connue dès que l'effort horizontal est connu (donc la géométrie peut être déterminée)**

Le rapport H/w a les dimensions d'une longueur. Il indique le niveau de tension dans le câble, par rapport au poids propre.

Détermination de la géométrie du câble $y(x)$ en configuration déformée ?
Éliminons s (on considère $y'(x) > 0$ uniquement)

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{H} \int_0^s ds = \frac{w}{H} \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Equation différentielle du câble :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{w}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$



Equation différentielle du câble :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{w}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$$

Soit $p = \frac{dy}{dx}$, l'équation s'écrit aussi

$$\frac{dp}{dx} = \frac{w}{H} \sqrt{1 + p^2} \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{w}{H} dx \quad \rightarrow \quad \sinh^{-1} p = \frac{w}{H} x + \text{cst}$$

Compte tenu de $p = 0$ en $x = 0$, on trouve $p = \frac{dy}{dx} = \sinh \frac{wx}{H}$, et donc
(avec la condition limite $y(0) = H/w$)

Equation caténaire :

$$y(x) = \frac{H}{w} \cosh \frac{wx}{H}$$



Equation caténaire :
$$y(x) = \frac{H}{w} \cosh \frac{wx}{H}$$

L'équation caténaire (ou de la chaînette) exprime la forme d'un câble inextensible en grandes rotations, sous l'effet de son poids propre et de la tension horizontale imposée.

- domaine de validité très large
- on n'a d'ailleurs pas eu besoin de donner de conditions limites pour obtenir ce résultat
- par contre, nécessite la connaissance de H
- NB : se souvenir que x est mesuré à partir du minimum de la chaînette



Flèche du Câble à Extrémités de Niveau

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

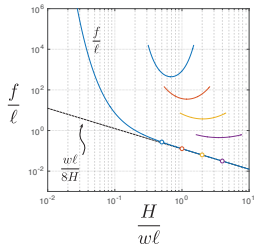
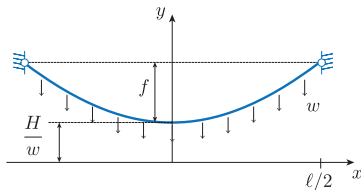
Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Soit ℓ la corde du câble. Si le câble est symétrique,

$$f = y\left(\frac{\ell}{2}\right) - y(0) = \frac{H}{w} \left(\cosh \frac{w\ell}{2H} - 1 \right)$$



La flèche décroît comme $1/H$ lorsque $H \gg w\ell$. Transition rapide vers de grands rapports flèche/portée lorsque $H \lesssim 0.5w\ell$. La pente à l'appui donne la valeur de $w\ell/2H \rightarrow$ moyen simple d'évaluer la tension dans un câble tendu (tension max = $\sqrt{H^2 + (\frac{w\ell}{2})^2}$)



Câble Fortement Tendu (donc à Faible Flèche), $H \gg w\ell$

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Pour que le câble soit fortement tendu, il faut que $H \gg w\ell$ (tension beaucoup plus grande que le poids du câble). Souvent le cas en génie civil ($H/w\ell \simeq 625\text{m}/\ell$), sauf pour les ponts suspendus.

Dans ce cas $\cosh \frac{wx}{H} \simeq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{wx}{H}\right)^2 + \mathcal{O}\left[\left(\frac{wx}{H}\right)^4\right]$, pour $\frac{wx}{H} \ll 1$, et l'équation caténaire devient

$$\text{Equation de la parabole : } y(x) = \frac{H}{w} + \frac{w}{H} \frac{x^2}{2}$$

et la flèche d'un câble à extrémités de niveau

$$f = \frac{w\ell^2}{8H}$$

La flèche est inversement proportionnelle à la tension horizontale.

NB. on reconnaît une formule connue $fH = \frac{w\ell^2}{8}$.



Comportement Axial d'un Cable

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

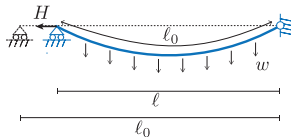
Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles

Différence entre corde et longueur du câble :

- la corde du câble ℓ
- la longueur du câble ℓ_0



$$\ell_0 = \int_{-\ell_0/2}^{\ell_0/2} ds = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{wx}{H}} dx = \frac{2H}{w} \sinh \frac{w\ell}{2H}$$

Câble fortement tendu

$$\ell_0 = \int_{-\ell_0/2}^{\ell_0/2} ds \simeq \int_{-\ell/2}^{\ell/2} 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \ell + \frac{1}{2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left(\frac{w}{H} x\right)^2 dx = \ell + \frac{1}{24} \left(\frac{w\ell}{H}\right)^2 \ell$$



Effet de l'extensibilité du câble

Câble fortement tendu $H \gg w\ell$ et (peu) extensible $EA \gg H$

$$\ell_0 = \int_{-\ell_0/2}^{\ell_0/2} \left(1 - \frac{H}{EA}\right) ds = \left(1 - \frac{H}{EA}\right) \ell + \frac{1}{24} \left(\frac{w\ell}{H}\right)^2 \ell$$

$$\rightarrow \Delta\ell = \ell - \ell_0 = \frac{H}{EA} \ell - \frac{1}{24} \left(\frac{w\ell}{H}\right)^2 \ell$$



$$\Delta \ell = \ell - \ell_0 = \frac{H}{EA} \ell - \frac{1}{24} \left(\frac{w \ell}{H} \right)^2 \ell$$

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

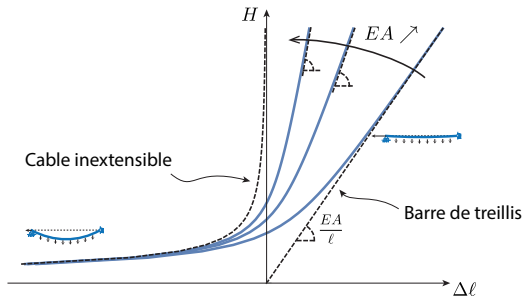
Rotations

Cross

Lignes d'influence

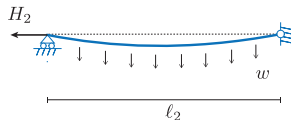
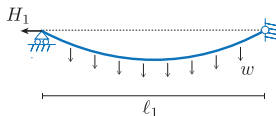
Analyse plastique

Câbles





Passage d'une configuration à une autre



$$\ell_0 = \ell_1 - \frac{H_1 \ell_1}{EA} + \frac{1}{24} \left(\frac{w \ell_1}{H_1} \right)^2 \ell_1 = \ell_2 - \frac{H_2 \ell_2}{EA} + \frac{1}{24} \left(\frac{w \ell_2}{H_2} \right)^2 \ell_2$$

Passage d'une configuration à une configuration infiniment proche
Relation non-linéaire entre H et $\Delta \ell$ (pour augmenter de $\Delta \ell$, il faut un incrément ΔH qui dépend de la valeur de l'effort H déjà présent dans le câble)



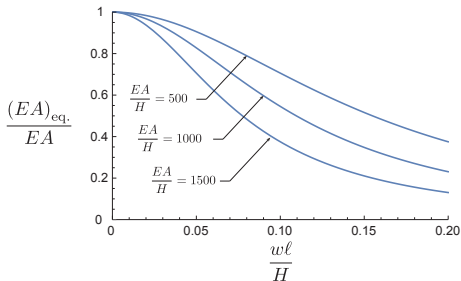
Module d'Elasticité Fictif (Formule de Dischinger)

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Remplacement du câble par une barre de raideur équivalente (barre linéaire, donc valable pour de petites variations autour de la configuration d'équilibre)

$$\frac{d\Delta\ell}{dH} = \frac{\ell}{EA} + \frac{1}{12} \frac{w^2 \ell^3}{H^3} \equiv \frac{\ell}{(EA)_{eq.}} \rightarrow \frac{(EA)_{eq.}}{EA} = \frac{1}{1 + \frac{1}{12} \frac{EA}{H} \left(\frac{w\ell}{H}\right)^2}$$





Conditions pour avoir $(EA)_{\text{eq.}} \simeq EA$. Il n'est pas possible que $H \gg EA$.
Donc $\frac{w\ell}{H}$ doit être d'autant plus petit pour rattraper la grande valeur du rapport EA/H . Point de transition lorsque $\frac{EA}{H} \left(\frac{w\ell}{H}\right)^2 \sim 1$

Exemple : $H/A = 100\text{MPa}$, $E = 160000\text{MPa} \rightarrow \frac{EA}{H} = 1600$; $\frac{w\ell}{H} = \frac{1}{10}$;
 $\frac{(EA)_{\text{eq.}}}{EA} = 0.43$

Effet non négligeable et particulièrement important lorsque les haubans sont détendus (phases de montage de ponts haubanés)





Câbles sous Charges Ponctuelles

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

Rotations

Cross

Lignes d'influence

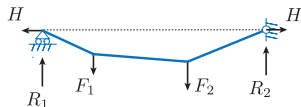
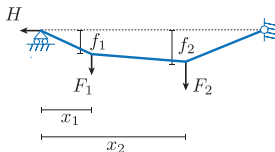
Analyse plastique

Câbles

Hyp. $wl \ll \{F_i\}$

Données : $\{x_i, F_i\}$, $i = 1, \dots, n$ (n charges $\rightarrow n$ noeuds)

Inconnues : flèches aux noeuds + inclinaisons des barres



Méthodologie :

1. Calculer les réactions d'appuis
2. Observer que la composante horizontale de l'effort dans le câble est constante et vaut H , partout
3. Couper dans chaque barre et faire l'équilibre des moments.

Analogie avec la poutre : la forme du câble est la même que celle du diagramme des moments d'une poutre de même portée soumise aux mêmes charges



Test de Recrutement chez Amazon

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Introduction

Théorèmes

Forces

Déplacements

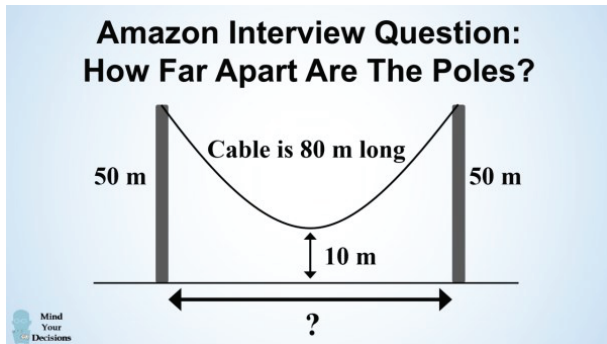
Rotations

Cross

Lignes d'influence

Analyse plastique

Câbles



NB : câble supposé inextensible



Documents de référence

Structures I,
2023-2024

V. Denoël

Appendix

For further reading

-  Igor A. Karnovsky, Olga Lebed • *Advanced Methods of Structural Analysis*, Springer New York
-  Pierino Lestuzzi, Léopold Pflug • *Structures en barres et poutres*, Traité de Génie Civil de l'Ecole Polytechnique fédérale de Lausanne, Presse Polytechnique Universitaires Romandes.
-  H.J. Ernst. Der E-Modul von Seilen unter Brucksichtigung des Durchhangers. Der Bauingenieur 40, n.2, 1965. pp.52-55.