L'axonométrie orthogonale avec TikZ

Résumé. Nous montrons dans ce petit texte comment calculer les coordonnées de la projection orthogonale d'un point à partir des coordonnées de ce point. Nous commençons par quelques rappels théoriques, généraux puis de plus en plus précis, pour expliquer comment mener les caculs. Nous arrivons ainsi à des formules tout à fait pratiques, et nous montrons comment les mettre en œuvre lorsque LaTeX est utilisé avec le module de dessin Tikz — mais les aficionados de PSTricks n'auront pas de mal à adapter la technique.

Axonométrie, non, ce n'est pas un 417e juron du capitaine Haddock [1]. Ce terme de dessin technique désigne, de manière générale, une perspective parallèle, par opposition à la perspective centrale (ou conique). Cette dernière, utilisée dans les beaux-arts depuis la renaissance, est plus fidèle à la manière dont notre cerveau interprète ce que voient nos yeux (voir la figure 3). La perspective parallèle, au contraire, parait souvent conventionnelle, à cause des déformations qu'elle introduit. Mais elle rend bien des services en dessin industriel. Selon que la direction de projection est ou non orthogonale au plan sur lequel on projette, l'axonométrie est dite *orthogonale* ou *oblique* ; la plus employée des axonométries obliques est la *perspective cavalière* (voir la figure 1). Nous nous intéresserons ici à l'axonométrie orthogonale [2] (voir la figure 2).

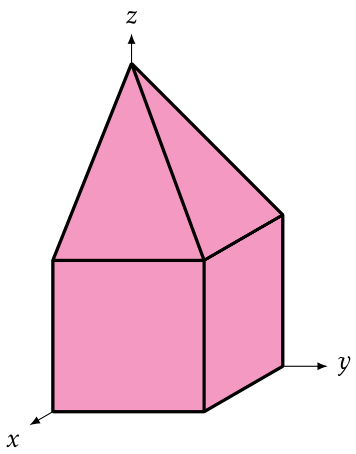


FIGURE 1 – Perspective cavalière

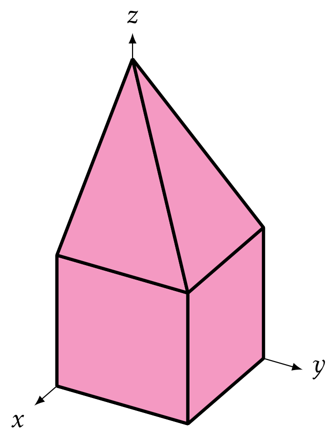


FIGURE 2 – Axonométrie orthogonale

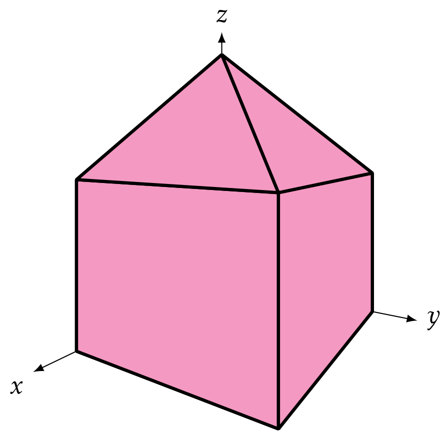


FIGURE 3 – Perspective centrale

Pour le mathématicien qui souhaite produire des vues en perspective, l'avantage de la projection parallèle sur la projection centrale, c'est qu'il s'agit d'une application affine, et même d'une application linéaire si nous projetons sur un plan qui passe par le point choisi pour origine de l'espace ; sa description en termes de coordonnées est donc beaucoup plus simple : il suffit de quelques petits calculs matriciels. Évidemment, le géomètre pur et dur préférera la géométrie projective et le travail en coordonnées homogènes ; mais il faut admettre que les calculs sont plus compliqués.

1 Espaces vectoriels — Applications linéaires

Rappelons quelques notions d'algèbre linéaire dont nous aurons besoin pour conduire nos calculs, en nous limitant, parce que nous n'aurons besoin de rien d'autre, au cas où les scalaires, les nombres donc, sont les réels.

Un *espace vectoriel* est un ensemble non vide dont les éléments, bien évidemment appelés *vecteurs*, quelle que soit par ailleurs leur nature intrinsèque, peuvent être multipliés par des réels et additionnés

1. Cf. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Vocabulaire_du_capitaine_Haddock` (consulté le 31/03/2018).
2. Les cours de dessin technique distinguent axonométries *isométrique* et *dimétrique* ; il est important de signaler ici que cet usage de l'adjectif *isométrique* n'a rien à voir avec son acception mathématique ; une axonométrie isométrique n'est évidemment pas une isométrie, puisqu'elle n'est même pas injective. En fait, une axonométrie est dite *isométrique*, dans ce langage-là, lorsque le plan sur lequel on projette fait le même angle avec les trois axes de référence de l'espace ; les projections de ces trois axes feront alors des angles de 120° sur l'épure, et les facteurs de réduction des longueurs seront les mêmes dans leurs trois directions — d'où l'adjectif *isométrique*.

entre eux ; en itérant et en combinant ces deux opérations, nous formons des *combinaisons linéaires* de vecteurs ; par exemple, si u, v et w sont trois vecteurs,

$$2u + 3v - w$$

en est une combinaison linéaire ; nous avons déjà ici utilisé un petit raccourci d'écriture : nous aurions en effet dû noter $2u + 3v + (-1)w$. Dans une description axiomatique bien léchée de la structure d'espace vectoriel, nous devrions maintenant énumérer les axiomes auxquels ces opérations doivent satisfaire. Contentons-nous ici de dire que ces axiomes et leurs conséquences valident toutes les règles de calcul auxquelles chacun s'attend. Notamment, l'espace vectoriel contient un élément particulier, le vecteur nul o, égal à $0u$ quel que soit le vecteur u ; il joue le rôle de neutre pour l'addition des vecteurs.

La notion de combinaison linéaire est donc la clé de voute de la notion d'espace vectoriel. Étant donné un espace vectoriel, un sous-espace vectoriel en sera une partie « bonne » en ce sens que les combinaisons linéaires ne s'en échappent pas : si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont des vecteurs dans cette partie, quels que soient les coefficients réels $r_1, r_2, \ldots, r_n$, la combinaison linéaire $r_1u_1 + r_2u_2 + \cdots + r_nu_n$ est encore dans la partie. En particulier, le vecteur nul, qui est combinaison linéaire de n'importe quoi, appartient à tout sous-espace vectoriel.

Dans le même esprit, les « bonnes » applications d'un espace vectoriel dans un autre, celles qui seront appelées *applications linéaires*, sont celles qui préservent les combinaisons linéaires : f est linéaire si, pour tous vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et réels $r_1, r_2, \ldots, r_n$,

$$f(r_1u_1 + r_2u_2 + \cdots + r_nu_n) = r_1f(u_1) + r_2f(u_2) + \cdots + r_nf(u_n).$$

Encore une fois, ceci entraine en particulier que l'image du vecteur nul de l'espace de départ doit être le vecteur nul de l'espace d'arrivée.

Une partie d'un espace vectoriel en est une *base* si tout vecteur de l'espace s'écrit, de manière unique, comme combinaison linéaire de vecteurs de la partie. Un espace vectoriel qui admet une base finie est dit *de dimension finie* ; dans un tel cas, toutes les bases ont le même nombre d'éléments, et ce nombre commun est appelé la *dimension* de l'espace.

2 Calcul des coordonnées

Nous travaillons ici dans un espace vectoriel V de dimension finie. Si $b = (b_1, \ldots, b_n)$ en est une base, un vecteur u admet une décomposition unique

$$u = u_1b_1 + \cdots + u_nb_n,$$

où les u_k sont des réels. Rangeons ces coefficients $u_1, \ldots, u_n$ dans un vecteur colonne que nous notons ${}_bu$: la *colonne des coordonnées de u dans b* ; puisque la base b est aussi la matrice ligne $(b_1, \ldots, b_n)$, nous avons

$$u = u_1b_1 + \cdots + u_nb_n = b_1u_1 + \cdots + b_nu_n = \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = b \cdot {}_bu.$$

Soit ensuite W un second espace vectoriel et $f : V \to W$ une application linéaire. Supposons V équipé de la base b ci-dessus et W d'une base $c = (c_1, \ldots, c_m)$.

La matrice

$${}_c(f)_b := \begin{pmatrix} {}_cf(b_1) & \cdots & {}_cf(b_n) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{m \times n},$$

formée des colonnes de coordonnées dans c des images par f des vecteurs de b, est appelée *matrice de f, relative aux bases b et c*. Son nombre de lignes est la dimension de l'espace d'arrivée et son nombre de colonnes est la dimension de l'espace de départ.

Elle permet, connaissant la colonne des coordonnées dans b d'un vecteur u de V, de calculer la colonne des coordonnées dans c de son image par f :

$${}_cf(u) = {}_c(f)_b \cdot {}_bu.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
{}_cf(u) &= {}_cf(u_1b_1 + \cdots + u_nb_n) \\
&= {}_c(u_1f(b_1) + \cdots + u_nf(b_n)) \\
&= u_1\,{}_cf(b_1) + \cdots + u_n\,{}_cf(b_n) \\
&= \begin{pmatrix} {}_cf(b_1) & \cdots & {}_cf(b_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \\
&= {}_c(f)_b \cdot {}_bu.
\end{aligned}$$

3 L'espace d'EUCLIDE comme espace vectoriel

L'espace de la géométrie à la EUCLIDE n'est pas un espace vectoriel. Cela saute aux yeux si nous pensons que cet espace est homogène en ses points : tous jouent le même rôle ; alors que dans un espace vectoriel, il y a un élément privilégié : le vecteur nul. Un espace « presque vectoriel », en ce sens qu'il ne lui manque qu'un point « nul », est un *espace affine*. Mais nous ne développerons pas cela ici.

Cependant, nous pouvons définir dans l'espace d'EUCLIDE [3] les *vecteurs libres*, qui constituent un espace vectoriel de dimension 3 ; nous le noterons E_3. Ces vecteurs « concrets » (qui sont donc un exemple des vecteurs « abstraits » décrits dans les deux sections précédentes), nous les noterons par des lettres surmontées d'une flèche : $\vec{u}$ par exemple. Si un point est choisi et déclaré « origine », nous pouvons reporter les vecteurs à partir de ce point, ce qui établit une bijection entre l'ensemble des points et l'ensemble des vecteurs libres. Ci-dessous, nous nous permettrons donc de regarder les points comme des vecteurs, l'origine choisie, que nous noterons O, correspondant alors au vecteur nul $\vec{o}$.

L'espace tout entier est évidemment un sous-espace vectoriel de lui-même, ainsi que le singleton $\{O\}$; ces deux sous-espaces sont dits *triviaux* ; les autres sous-espaces vectoriels de E_3 sont les droites et les plans passant par O [4].

Dans la suite, il ne sera pas suffisant de regarder E_3 comme espace vectoriel ; en effet, nous aurons besoin de mesures de longueurs et d'angles. Il nous faudra donc l'équiper de sa structure euclidienne, déterminée par un produit scalaire ; nous noterons $\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle$ le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Une fois le produit scalaire disponible, nous l'utilisons pour définir la norme, la perpendicularité, les angles...

Dans un espace vectoriel euclidien, les bases véritablement « utiles » sont les bases *orthonormées* : leurs vecteurs sont normés et orthogonaux deux à deux ; en d'autres termes, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ est orthonormée si, pour tous i et j entre 1 et n,

$$\left\langle b_i \mid b_j \right\rangle = \delta_{ij},$$

où δ_{ij} est le *symbole de KRONECKER* :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j, \\ 1 \text{ si } i = j. \end{cases}$$

Dans une telle base,

- Si les coordonnées de u sont $(u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}}$ [5] et celles de v, $(v_1, \ldots, v_n)^{\mathrm{t}}$, alors

$$\langle u \mid v \rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n \,;$$

- Les coordonnées d'un vecteur sont simplement ses produits scalaires avec les différents vecteurs de la base. Un effet, si b est orthonormée et si $u = u_1 b_1 + \cdots + u_n b_n$, alors

$$\begin{aligned} \langle u \mid b_i \rangle = \langle u_1 b_1 + \cdots + u_i b_i + \cdots + u_n b_n \mid b_i \rangle = u_1 \langle b_1 \mid b_i \rangle + \cdots + u_i \langle b_i \mid b_i \rangle + \cdots + u_n \langle b_n \mid b_i \rangle = \\ = u_1 \cdot 0 + \cdots + u_i \cdot 1 + \cdots + u_n \cdot 0 = u_i. \end{aligned}$$

Dans E_3 [6], un autre sous-produit du produit scalaire (et du choix d'une orientation de l'espace) est le *produit vectoriel* : alors que le produit scalaire de deux vecteurs est un réel, leur produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur. Plus précisément :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles (en particulier si l'un est nul ou l'autre), $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur nul ;
- Sinon, c'est le vecteur dont la direction est perpendiculaire au plan déterminé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dont le sens est tel que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ appartient à l'orientation choisie (ce qui se concrétise dans l'espace « physique » par la « règle du tirebouchon ») et dont la norme est $\|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$ (voir la figure 4).

Si la base b est orthonormée et *directe* (ceci signifiant qu'elle appartient à la classe de bases qui détermine l'orientation ; ou encore que $\vec{b}_3 = \vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2$; alors, également, $\vec{b}_1 = \vec{b}_2 \wedge \vec{b}_3$ et $\vec{b}_2 = \vec{b}_3 \wedge \vec{b}_1$) :

$${}_b(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

lorsque

$${}_b\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad {}_b\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

3. Comme dans tout espace affine.
4. Les droites et les plans ne passant pas par l'origine sont des sous-espaces affines, mais pas des sous-espaces vectoriels.
5. La notation M^{t} désigne la *transposée* de la matrice M, obtenue en transformant les lignes en colonnes et inversement ; ici, $(u_1, \ldots, u_n)$ est une ligne, donc sa transposée est une colonne. Nous utilisons cette écriture pour éviter le gaspillage d'espace vertical.
6. La dimension 3 est ici essentielle.

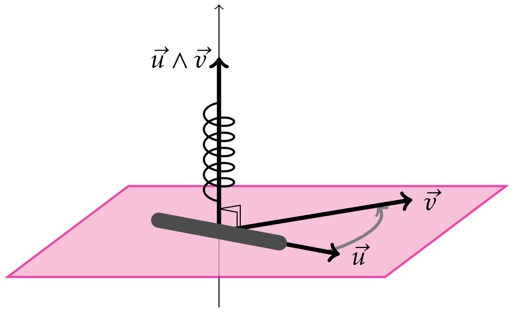


FIGURE 4 – Définition du produit vectoriel

4 Projection orthogonale sur un plan

Nous supposons maintenant fixée une base orthonormée directe $b = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$.

Soit π le plan sur lequel nous projetons et $p : E_3 \to \pi$ la projection orthogonale. Le plan π doit passer par l'origine O, sans quoi la projection ne serait pas une application linéaire. Il est déterminé par la longitude $\alpha \in]-\pi;\pi]$ et la latitude $\beta \in]-\pi/2;\pi/2[$ d'un vecteur normal (voir la figure 5)

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

(ce vecteur est normé) ; nous pouvons en outre supposer que la latitude β est positive, car si $\vec{n}$ est normal à π, $-\vec{n}$ l'est également. Connaissant un vecteur normal à notre plan π et sachant que celui-ci passe par l'origine, nous connaissons une équation du plan :

$$\pi \equiv X\cos\alpha\cos\beta + Y\sin\alpha\cos\beta + Z\sin\beta = 0,$$

où $(X, Y, Z)^{\mathrm{t}}$ sont les coordonnées du « point courant », c'est-à-dire d'un point quelconque du plan.

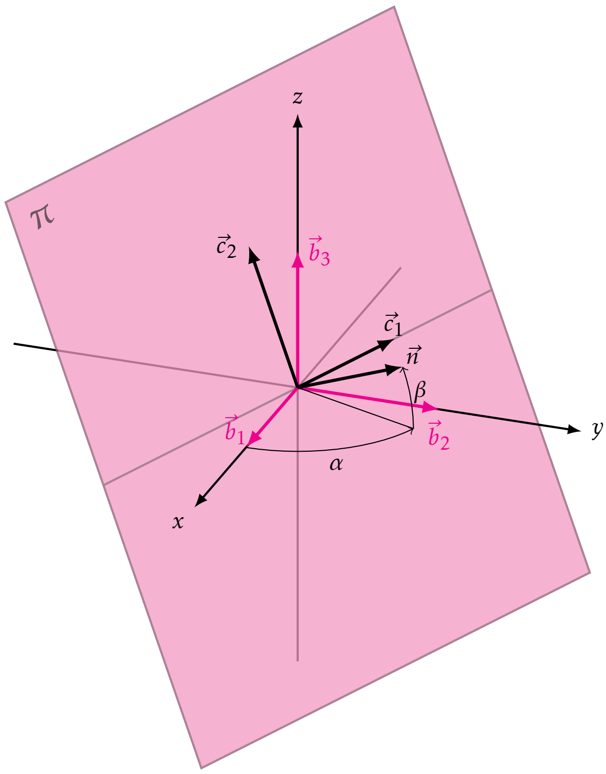


FIGURE 5 – Positionnement du plan sur lequel on projette

Nous utiliserons dans π la base orthonormée $c = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ pour laquelle $\vec{c}_2$ est parallèle à la projection de $\vec{b}_3$ (et de même sens), de manière que les droites verticales soient représentées sur l'épure par des droites verticales, avec le haut en haut. Nous calculerons $\vec{c}_1$ et $\vec{c}_2$ ultérieurement.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x, y, z)^{\mathrm{t}}$, la projection $p(\vec{u})$ peut s'écrire $p(\vec{u}) = \vec{u} + r\vec{n}$, où r est à déterminer de manière que $p(\vec{u})$ appartienne à π ; les coordonnées de $p(\vec{u})$ sont donc

$$\begin{pmatrix} x + r\cos\alpha\cos\beta \\ y + r\sin\alpha\cos\beta \\ z + r\sin\beta \end{pmatrix},$$

et la condition d'appartenance s'écrit :

$$\cos\alpha\cos\beta(x + r\cos\alpha\cos\beta) + \sin\alpha\cos\beta(y + r\sin\alpha\cos\beta) + \sin\beta(z + r\sin\beta) = 0,$$

d'où $r = -(x\cos\alpha\cos\beta + y\sin\alpha\cos\beta + z\sin\beta)$. Dès lors, les coordonnées de $p(\vec{u})$ dans la base b sont

$$\begin{pmatrix} x(1-\cos^2\alpha\cos^2\beta) - y\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta - z\cos\alpha\sin\beta\cos\beta \\ -x\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta + y(1-\sin^2\alpha\cos^2\beta) - z\sin\alpha\sin\beta\cos\beta \\ -x\cos\alpha\sin\beta\cos\beta - y\sin\alpha\sin\beta\cos\beta + z\cos^2\beta \end{pmatrix}.$$

En particulier, lorsque $\vec{u} = \vec{b}_3$, nous avons $x = y = 0$ et $z = 1$, donc les coordonnées de $p(\vec{b}_3)$ sont

$$\begin{pmatrix} -\cos\alpha\sin\beta\cos\beta \\ -\sin\alpha\sin\beta\cos\beta \\ \cos^2\beta \end{pmatrix},$$

et sa norme est

$$\sqrt{(-\cos\alpha\sin\beta\cos\beta)^2 + (-\sin\alpha\sin\beta\cos\beta)^2 + (\cos^2\beta)^2} = \cos\beta\,;$$

donc, $\vec{c}_2$, qui est le vecteur normé parallèle à $p(\vec{b}_3)$ et de même sens que lui, vaut $\dfrac{1}{\left\|p(\vec{b}_3)\right\|}p(\vec{b}_3)$ et a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} -\cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Ensuite, puisque $\vec{c}_1$ doit être orthogonal et à $\vec{c}_2$ et à $\vec{n}$, nous prenons $\vec{c}_1 = \vec{c}_2 \wedge \vec{n}$ (un autre choix aurait été possible : $\vec{n} \wedge \vec{c}_2$), dont les coordonnées sont

$$\begin{pmatrix} -\sin\alpha\sin\beta\cdot\sin\beta - \cos\beta\cdot\sin\alpha\cos\beta \\ \cos\beta\cdot\cos\alpha\cos\beta - (-\cos\alpha\sin\beta)\cdot\sin\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta\cdot\sin\alpha\cos\beta - (-\sin\alpha\sin\beta)\cdot\cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux composantes de $p(\vec{u})$ dans la base $c = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ sont donc

$$\begin{aligned} \langle p(\vec{u}) \mid \vec{c}_1 \rangle &= (x(1-\cos^2\alpha\cos^2\beta) - y\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta - z\cos\alpha\sin\beta\cos\beta)\cdot(-\sin\alpha) + \\ &\quad + (-x\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta + y(1-\sin^2\alpha\cos^2\beta) - z\sin\alpha\sin\beta\cos\beta)\cdot\cos\alpha + \\ &\quad + (-x\cos\alpha\sin\beta\cos\beta - y\sin\alpha\sin\beta\cos\beta + z\cos^2\beta)\cdot 0 \\ &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle p(\vec{u}) \mid \vec{c}_2 \rangle &= (x(1-\cos^2\alpha\cos^2\beta) - y\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta - z\cos\alpha\sin\beta\cos\beta)\cdot(-\cos\alpha\sin\beta) + \\ &\quad + (-x\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta + y(1-\sin^2\alpha\cos^2\beta) - z\sin\alpha\sin\beta\cos\beta)\cdot(-\sin\alpha\sin\beta) + \\ &\quad + (-x\cos\alpha\sin\beta\cos\beta - y\sin\alpha\sin\beta\cos\beta + z\cos^2\beta)\cdot\cos\beta \\ &= -x\cos\alpha\sin\beta - y\sin\alpha\sin\beta + z\cos\beta. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$_cp(\vec{u}) = \begin{pmatrix} -x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ -x\cos\alpha\sin\beta - y\sin\alpha\sin\beta + z\cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

ce qui montre que

$$_c(p)_b = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

est la matrice de la projection p, relativement aux bases b de E_3 et c de π.

5 Et en pra...Ti*k*Z

Les trois colonnes de la dernière matrice sont les colonnes de coordonnées dans la base c de π, des projections des trois vecteurs de la base b ; autrement dit, ce sont les positions, sur l'épure, des projections des vecteurs unitaires des trois axes de coordonnées spatiales. Par conséquent, Ti*k*Z se chargera de positionner correctement sur l'épure les points que nous aurons défini par leurs coordonnées tridimensionnelles si nous indiquons parmi les arguments optionnels de l'environnement `tikzpicture` (ou de la commande `\tikz`) :

$$\text{x=\{(}-\sin\alpha\ \text{cm,}-\cos\alpha\sin\beta\ \text{cm)\},y=\{(}\cos\alpha\ \text{cm,}-\sin\alpha\sin\beta\ \text{cm)\},z=\{(0 cm,}\cos\beta\ \text{cm)\}}$$

(veiller à utiliser, chaque fois, le double encadrement : parenthèses & accolades, et à ne pas omettre les unités de longueur). Ces trois options définissent les positions, sur l'épure, des projections des trois vecteurs de base. Comme nous le verrons dans l'exemple ci-dessous, il est possible de redimensionner la figure globalement, sans redéfinir ces trois vecteurs.

Par exemple, dans la figure 2, la projection se fait selon le vecteur unitaire $\vec{n}$ dont la longitude et la latitude sont toutes deux de 30°, sur le plan perpendiculaire. La matrice de cette projection est

$$\begin{pmatrix} -\sin 30° & \cos 30° & 0 \\ -\cos 30°\sin 30° & -\sin 30°\sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -0{,}500 & 0{,}866 & 0{,}000 \\ -0{,}433 & -0{,}250 & 0{,}866 \end{pmatrix}.$$

Le code complet de cette figure est le suivant [7] :

```
\begin{tikzpicture}
[x={(-0.500cm,-0.433cm)},y={(0.866cm,-0.250cm)},z={(0cm,0.866cm)},
scale=2,very thick,join=bevel,fill=magenta!50]
\coordinate(oo)at(0,0,0);
\coordinate(xx)at(1,0,0);
\coordinate(yy)at(0,1,0);
\coordinate(pp)at(1,1,0);
\coordinate(hh)at(0,0,2);
\coordinate(xh)at(1,0,1);
\coordinate(yh)at(0,1,1);
\coordinate(ph)at(1,1,1);
\draw[-latex,thin,fill=black](oo)--(1.3,0,0)node[below left]{$x$};
\draw[-latex,thin,fill=black](oo)--(0,1.3,0)node[right]{$y$};
\draw[-latex,thin,fill=black](oo)--(0,0,2.2)node[above]{$z$};
\filldraw(oo)--(xx)--(pp)--(yy)--cycle;
\filldraw(oo)--(xx)--(xh)--(hh)--cycle;
\filldraw(oo)--(hh)--(yh)--(yy)--cycle;
\filldraw(xx)--(pp)--(ph)--(xh)--cycle;
\filldraw(yy)--(yh)--(ph)--(pp)--cycle;
\filldraw(xh)--(ph)--(hh)--cycle;
\filldraw(yh)--(hh)--(ph)--cycle;
\end{tikzpicture}
```

Tous les points sont définis par leurs coordonnées tridimensionnelles et Ti*k*Z se charge, comme un grand, de calculer leurs projections. Par contre, Ti*k*Z ne gère pas du tout le vu et le caché ; afin que la figure soit correcte de ce point de vue, l'utilisateur doit lui-même veiller à faire construire les différents éléments de la figure de l'arrière vers l'avant. Ceci, heureusement, n'empêche pas de modifier *a posteriori* le « point de vue », c'est-à-dire la direction de projection, tant que l'on reste, ici par exemple, dans le premier octant ($0 \le \alpha \le \pi/2$, $0 \le \beta \le \pi/2$).

Par exemple, si nous décidons d'employer l'axonométrie « isométrique », comme sur la figure 6, nous utilisons le vecteur $\vec{n}$ qui fait le même angle ($\theta = \arccos(1/\sqrt{3})$, soit environ 55°) avec les trois axes de coordonnées ; donc ici $\alpha = \pi/4$ et $\beta = \pi/2 - \theta = \arcsin(1/\sqrt{3})$, et la matrice de la projection devient

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{6}/6 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -0{,}707 & 0{,}707 & 0{,}000 \\ -0{,}408 & -0{,}408 & 0{,}816 \end{pmatrix}.$$

La seule modification à apporter au code ci-dessus est le remplacement de la deuxième ligne par

```
[x={(-0.707cm,-0.408cm)},y={(0.707cm,-0.408cm)},z={(0cm,0.816cm)},.
```

7. Une très brève introduction à Ti*k*Z se trouve dans les deux articles suivants : Pascal DUPONT, LaTeX, un peu, beaucoup — 12. TikZ (1), *Losanges* **33** (2016), 59–64 ; Pascal DUPONT, LaTeX, un peu, beaucoup — 13. TikZ (2), *Losanges* **34** (2016), 55–60.

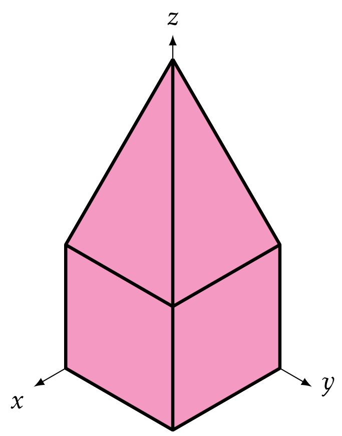


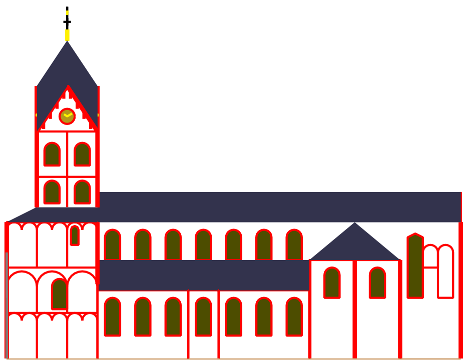
FIGURE 6 – Axonométrie « isométrique »

Une autre limitation est que les chemins ainsi tracés ou remplis ne peuvent contenir que l'opération « `--` » ; des opérations telles que « `circle` », « `rectangle` », &c., sont spécifiques au dessin bidimensionnel ; d'ailleurs, à bien y réfléchir, si nous utilisions cette dernière, dans quel plan devrait se trouver le rectangle ? Ce plan n'est pas déterminé par les deux sommets du rectangle. . .

Si nous nous entêtons à utiliser les opérations « `circle` » ou « `rectangle` » dans une figure en perspective, nous serons déçus : nous obtiendrons un cercle ou un rectangle (à côtés parallèles aux bords du dessin), là où nous espérions obtenir leurs projections : une ellipse ou un parallélogramme.

Malgré leurs limitations, ces méthodes sont simples et élégantes. Malheureusement, elles ne permettent pas de construire des figures en perspective conique ; la figure 3 a été obtenue en calculant préalablement les coordonnées planes de la projection de chacun des sommets du solide.

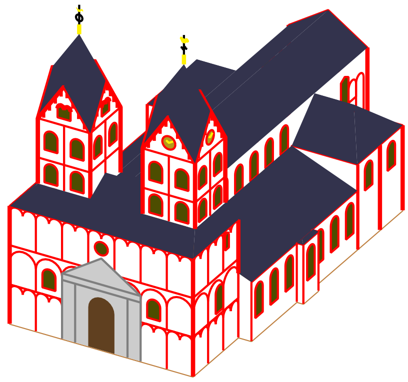
Un petit cadeau pour terminer : six vues de la collégiale Saint-Barthélémy de Liège.



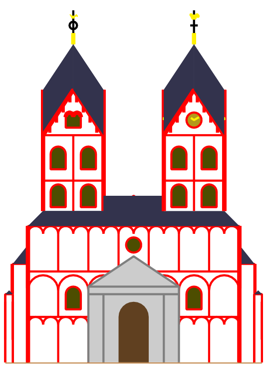
$\alpha = 0°, \quad \beta = 0°$

$\alpha = 0°, \quad \beta = 30°$

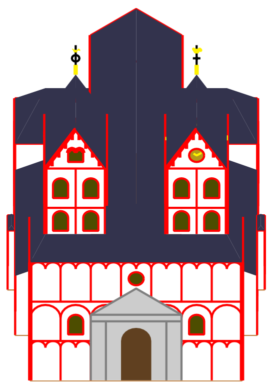
$\alpha = -60°, \quad \beta = 0°$



$\alpha = -60°, \quad \beta = 30°$



$\alpha = -90°, \quad \beta = 0°$



$\alpha = -90°, \quad \beta = 30°$

FIGURE 7 – Six vues de la collégiale Saint-Barthélémy de Liège