

UNIVERSITÉ DE LIÈGE
INSTITUT DU GÉNIE CIVIL
BIBLIOTHÈQUES

XIV 1677

Nouvelle Etude

SUR LE

Calcul économique du Béton armé

(FLEXION COMPOSÉE)

PAR

F. CAMPUS

Ingénieur des Constructions civiles et électricien

Directeur technique adjoint des Travaux publics du Territoire de la Sarre

Extrait de la *Revue Universelle des Mines*, n° du 1^{er} novembre 1925,
5^{me} série, tome VIII, n° 3

LIÈGE
IMPRIMERIE H. VAILLANT-CARMANNE
Place Saint-Michel, 4

—
1925

NOUVELLE ÉTUDE SUR LE CALCUL ÉCONOMIQUE DU BÉTON ARMÉ

(Flexion composée)

par F. CAMPUS,

Ingénieur des Constructions civiles et électricien
Directeur technique adjoint des Travaux publics du Territoire de la Sarre

INTRODUCTION

§ 1. **Généralités.** — Je me réfère pour les généralités à l'étude de l'économie dans la flexion plane simple des pièces usuelles en béton armé, parue dans les fascicules du 1^{er} et du 15 décembre 1924 de la *R. U. M.* Le nouveau mémoire traite principalement des cas de flexion plane composée. Les résultats sont analogues à ceux du travail précédent, dont ils constituent en somme la généralisation.

Les valeurs de β , coefficient dont il faut affecter le prix brut du béton pour tenir compte des coffrages, enduits ou toutes autres dépenses proportionnelles à la surface extérieure des pièces, se déterminent comme dans la flexion plane simple. Pour le coefficient α par lequel il faut multiplier la section maximum d'armature pour obtenir le volume moyen de métal par unité de longueur, il est plus difficile de donner des valeurs guides dans les cas de flexion composée que dans les cas de flexion simple. Les dispositions des armatures et les cas de sollicitation sont beaucoup plus divers.

Lorsque les effets des efforts normaux sont peu importants par rapport à ceux de la flexion (poutres à béquilles, certains arcs), les dispositions des armatures sont analogues à celles des pièces simplement fléchies ; les valeurs de α sont donc similaires. Dans ces cas, l'étude économique conduit à des conclusions très semblables à celles qui ont été formulées pour la flexion simple ; aussi peuvent-elles être considérées parfois comme suffisamment exactes.

Les cas les plus intéressants pour notre étude sont ceux dans lesquels les effets normaux, généralement des compressions, l'emportent. Il en est ainsi notamment pour les supports, colonnes, certains arcs, les éléments de poutres évidées, etc. Les armatures peuvent recevoir dans ces pièces les dispositions les plus diverses, adéquates au but constructif. Il n'est donc guère possible d'indiquer des valeurs moyennes de α . Les calculateurs les fixeront d'après leurs expériences, habitudes, règlements, bref, d'après les dispositifs réellement employés. Cette latitude du choix de α a l'avantage d'adapter l'application des

formules à chaque cas concret, comme je le faisais observer dans l'étude relative à la flexion plane simple.

Les pièces soumises à la flexion composée reçoivent presque toujours une armature double, souvent symétrique. Cette pratique est nécessaire lorsque les tensions élastiques sont susceptibles de changer de sens, ce qui est fréquent. Mais lorsque cette éventualité n'existe pas, l'armature double n'est pas toujours justifiée au point de vue économique. Il est donc utile d'élucider la question des sens possibles des fatigues par une étude soignée de toutes les circonstances de sollicitation. Les pièces soumises à la flexion composée étant fréquemment hyperstatiques, les calculs sont alors très longs, ce qui incite à l'emploi des méthodes ou formules plus ou moins approximatives, dont le degré d'exactitude est malaisément appréciable. Pour compenser la réduction de sécurité qu'entraîne la diminution de précision, on peut être tenté de procéder à un renforcement plus ou moins arbitraire des sections, notamment par l'emploi d'armatures doubles. L'imprécision est ainsi antagoniste de l'économie. Cette observation concorde avec les articles 11 et 12 des Instructions relatives aux ouvrages en béton armé de l'A. B. S.

Malgré l'emploi répandu des armatures doubles, nous étudierons en détail l'économie dans la flexion composée des pièces à armatures simples, tant à cause de l'intérêt intrinsèque de cet examen et de son caractère intuitif, qui facilite la compréhension des cas plus complexes, que parce qu'il plaide en faveur de l'emploi d'armatures simples dans les cas où la seconde armature n'est pas indispensable pour la sécurité. Nous verrons que les pièces dimensionnées d'après les conditions d'économie subissent de moindres fatigues et donc présentent plus de sécurité que celles calculées en observant purement et simplement les limites de fatigue.

Dans l'étude de la flexion plane composée, nous n'envisageons que des pièces calculées d'après les règles de la Circulaire ministérielle française de 1906, c'est-à-dire en ne tenant pas compte des tensions de traction dans le béton. Nous n'examinons pas les pièces sollicitées d'après la loi du trapèze, ni celles dans lesquelles le béton supporte des tensions de traction inférieures à la limite de résistance. On trouvera quelques aperçus sur l'économie dans les cas de compression excentrique répondant à ces conditions de sollicitation dans les *Annales des Travaux publics de Belgique* (1924, fasc. 2 et 3. Calcul organique de pièces fléchies en béton armé).

§ 2. Méthode approximative de calcul des pièces à sections rectangulaires. — A propos de la flexion plane simple, j'ai justifié l'emploi de formules approximatives de calcul dans l'étude de l'économie. Comme il en sera fréquemment fait usage dans la nouvelle étude, il paraît utile de donner en introduction un exposé succinct de la méthode approximative employée.

Nous définirons habituellement la position de l'effort normal résultant extérieur N par sa

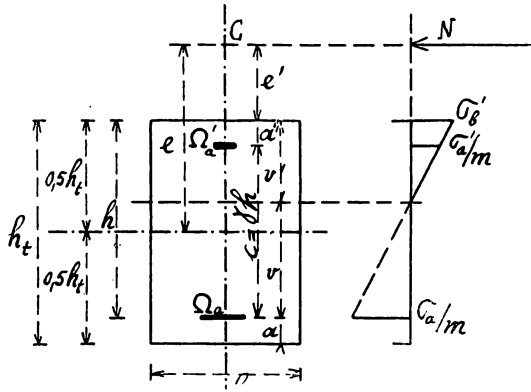


Fig. 1.

distance e à l'axe médian de la section (fig. 1). Comme convention de signes, nous admettons que N et e sont positifs en cas de compression et négatifs en cas de traction. Toutes les autres grandeurs sont positives. Les formules sont algébriques, c'est-à-dire que les signes sont implicites.

En désignant par $c = \gamma h$ la distance de l'armature étendue à la résultante totale des tensions de compression, d'après les notations de la figure 1, les équations d'équilibre des actions intérieures et extérieures s'écrivent :

$$\Omega_a \sigma_a = \frac{bv' \sigma'_b}{2} + \Omega'_a \sigma'_a - N,$$

$$N(e + 0,5 h_t - a - \gamma h) = \Omega_a \sigma_a \gamma h.$$

En posant :

$$\frac{\sigma_a}{m \sigma'_a} = \theta, \quad \frac{\sigma'_a}{m \sigma'_b} = \theta' \text{ (avec } \theta' < 1), \quad \frac{\Omega_a \sigma_a}{\Omega_a} = x,$$

et en observant que :

$$v' = \frac{h}{1 + \theta},$$

les deux équations deviennent après transformation :

$$\frac{m \Omega_a}{b h} \frac{1}{2 \theta (1 + \theta)} - \frac{m N}{b h \sigma_a} = \frac{\lambda - \frac{m N}{b h \sigma_a}}{1 - \frac{\theta'}{\theta} x}, \quad (\text{I})$$

$$N[e - 0,5 a - (\gamma - 0,5) h] = \Omega_a \sigma_a \gamma h; \quad (\text{II})$$

on peut écrire également :

$$\frac{N(e - 0,5 a + 0,5 h)}{bh^2 \sigma'_b} = \frac{\gamma}{2(1 + \theta)} + \theta' \gamma x \frac{m \Omega_a}{bh} \quad (\text{III}).$$

Par combinaison de (I) et de (III), on peut encore établir la formule :

$$\frac{m \Omega_a}{b h} = \lambda \frac{\psi}{1 - \frac{\theta'}{\theta} \alpha \psi} \quad (\text{IV}).$$

Dans ces expressions :

$$\lambda = \frac{1}{2 \theta (1 + \theta)},$$

$$\psi = 1 - \frac{\gamma h}{e - 0,5 a + 0,5 h}.$$

En cas de flexion plane simple, il suffit d'introduire dans ces formules les valeurs $N = 0$, $e = \infty$, et d'écrire : $M = Ne$. Il en résulte que :

$$\frac{m \Omega_a}{b h} = \frac{\lambda}{1 - \frac{\theta'}{\theta} \alpha} \quad (\text{I}'),$$

$$M = \Omega_a \sigma_a \gamma h \quad (\text{II}'),$$

$$\frac{M}{b h^2 \sigma'_b} = \frac{\gamma}{2(1 + \theta)} + \theta' \gamma \alpha \frac{m \Omega_a}{b h} \quad (\text{III}').$$

S'il n'y a qu'une armature étendue, il suffit d'introduire dans toutes ces formules la valeur $\alpha = 0$, ce qui les simplifie beaucoup.

Toutes les formules précédentes sont théoriquement exactes ; elles le sont aussi pratiquement si l'on emploie les valeurs exactes de γ et de θ' , qui sont en règle générale inconnues. Pour obtenir des formules d'application exacte, il faudrait remplacer γ et θ' par leurs expressions algébriques en fonction de θ et des éléments qui fixent la position des armatures. Les équations générales deviennent compliquées.

Elles sont toutefois relativement simples lorsque $\alpha = 0$, c'est-à-dire en cas d'armature simple. Alors, θ' n'est pas à considérer et :

$$\gamma = \frac{2 + 3 \theta}{3(1 + \theta)} = \gamma_0.$$

Le tableau ci-après donne pour une série de valeurs échelonnées de θ , les valeurs numériques de λ et de γ_0 . Il permet, à l'aide des formules précédentes, de faire d'une manière exacte tous les calculs relatifs aux pièces à sections rectangulaires simplement armées.

Une méthode approximative applicable aux pièces doublement armées consiste à admettre que $\gamma = \gamma_0$, ce qui revient à faire l'hypothèse que l'armature comprimée se trouve au tiers supérieur de la zone comprimée du béton, position variable avec la valeur de θ . Il en résulte pour θ' la valeur constante $\frac{2}{3}$ et une simplification des calculs, qui

peuvent s'effectuer à l'aide du tableau, mais les résultats ne sont qu'approximatifs sauf s'il arrive que l'emplacement réel de l'armature comprimée concorde avec l'hypothèse.

Pour les calculs rapides ainsi que pour l'établissement de la plupart des formules d'économie, on simplifie encore davantage l'usage des formules, tant pour les pièces doublement que simplement armées, en admettant que γ est invariable. On lui attribue une valeur moyenne ou une valeur particulière que l'on suppose d'après la valeur de θ (en se servant du tableau), ainsi que d'après la position et l'importance de l'armature comprimée. Pour les pièces doublement armées, il faut aussi donner la valeur de θ' ; en faisant l'hypothèse supplémentaire que l'armature comprimée se trouve au niveau de la résultante totale des tensions de compression, l'on peut écrire :

$$\theta' = 1 - (1 + \theta) (1 - \gamma)$$

Cette expression est variable en fonction de θ . Mais on simplifiera encore en adoptant pour θ' une valeur constante convenable.

Les erreurs que ces simplifications entraînent dans les calculs sont d'importance variable, d'après les éléments mêmes des problèmes. Elles dépendent du choix judicieux de γ et de θ' . Elles sont généralement modérées, parce que les variations de γ sont faibles et que celles de θ' exercent peu d'effets, sauf lorsque l'armature comprimée est très importante (valeur élevée de α).

$\theta = 0,60$	0,80	1,00	1,20	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80
$\lambda = 0,521$	0,347	0,250	0,1894	0,1488	0,1333	0,1202	0,1089	0,0992
$\gamma_0 = 0,0792$	0,815	0,833	0,848	0,861	0,867	0,872	0,877	0,881
$\theta =$	1,90	2,00	2,20	2,40	2,60	2,80	3,00	
$\lambda =$	0,0907	0,0833	0,0710	0,0613	0,0534	0,0470	0,0417	
$\gamma_0 =$	0,885	0,889	0,896	0,902	0,907	0,912	0,917	

Il peut se produire que la position de N soit déterminée par sa distance e' à la face la plus voisine de la pièce. Si h_t est connu d'avance, on peut calculer la valeur de e correspondant à e' et le choix de e ou de e' est sans influence sur les formules et leurs résultats. Il n'en est pas de même si h est l'inconnue, la relation numérique entre e et e' n'est pas connue d'avance et la solution du problème est totalement déterminée par l'élément e ou e' donné.

Lorsque c'est la distance e' qui est donnée, il faut, dans les formules précédentes introduire les expressions :

$$e = e' + 0,5 h_t = e' + 0,5 a + 0,5 h \quad \text{en cas de compression, et :}$$

$e = e' - 0,5 h_t = e' - 0,5a - 0,5 h$ en cas de traction.

Ces substitutions s'entendent avec la convention de signes suivante. En cas de compression, e' se mesure positivement à partir de l'arête la plus comprimée vers l'extérieur, négativement en sens inverse. En cas de traction, e' se mesure négativement à partir de l'arête la plus étendue vers l'extérieur, positivement en sens inverse.

CHAPITRE I

FLEXION PLANE COMPOSÉE DES PIÈCES A SECTIONS RECTANGULAIRES SIMPLEMENT ARMÉES

Première section : Pièces parallélépipédiques de largeur donnée

§ 3. — La largeur b de la section est donnée, le problème consiste à déterminer la hauteur la plus économique de la pièce. D'après les notations employées (voir fig. 2), le prix d'un élément de longueur Δl de la pièce a comme expression :

$$\Delta \pi = \Delta l [bh_t \beta B + \alpha \Omega_a (78 A - B)] + c^te, \quad (1)$$

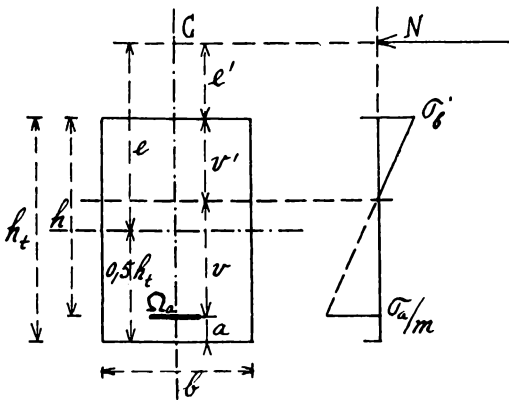


Fig. 2.

formule dans laquelle :
B représente le prix du m^3 de béton mis en œuvre ;

β est un coefficient de majoration destiné à tenir compte du coffrage, de l'enduit ou de tout autre travail superficiel du béton ; par exemple, dans le cas envisagé, si C est le prix par m^2 d'une paroi simple du coffrage latéral, β est égal à $1 + \frac{2C}{bB}$. (Le cof-

frage horizontal n'intervient pas dans la partie variable du prix, puisqu'il est le même pour toutes les pièces) ;

A représente le prix de 100 kgs d'armatures mises en œuvre ;

α est un coefficient de majoration applicable à la section théorique maximum Ω_a de l'armature étendue.

La formule peut s'écrire :

$$\Delta \pi = \Delta l [b(h+a) \beta B + \alpha \Omega_a (78 A - B)] + c^te$$

L'épaisseur de recouvrement a est le plus souvent une donnée du

problème et peut en tous cas être considérée, sans erreur appréciable, comme constante. Il est donc permis d'écrire enfin :

$$\Delta\pi = \Delta l [bh \beta B + \alpha \Omega_a (78 A - B)] + c^{\text{te}} \quad (1')$$

La condition du minimum de cette fonction s'obtient en égalant sa dérivée à zéro et s'écrit :

$$b \beta B + \alpha (78 A - B) \frac{d \Omega_a}{dh} = 0 \quad (2)$$

Trois hypothèses sont possibles, à savoir :

$$\sigma_a = R_a, \quad \sigma'_b < R'_b;$$

$$\sigma_a = R_a, \quad \sigma'_b = R'_b;$$

$$\sigma_a < R_a, \quad \sigma'_b = R'_b.$$

La seconde ne correspond qu'exceptionnellement à un minimum théorique, mais réalise un optimum pratique lorsque le minimum est incompatible avec les conditions de sécurité.

§ 4. **Cas du minimum correspondant à $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b < R'_b$.** — D'après le § 2 :

$$N [e - 0,5 a - (\gamma - 0,5) h] = \Omega_a R_a \gamma h,$$

d'où :

$$\Omega_a = \frac{N}{\gamma R_a} \left[\frac{e - 0,5 a}{h} - \gamma + 0,5 \right]$$

Nous supposons, par approximation, que γ est invariable. Alors

$$\frac{d \Omega_a}{dh} = - \frac{N}{\gamma R_a} \frac{e - 0,5 a}{h^2}.$$

La condition (2) du minimum devient :

$$b \beta B - \alpha (78 A - B) \frac{N}{\gamma R_a} \frac{e - 0,5 a}{h^2} = 0, \quad (3)$$

d'où :

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78 A - B} = \frac{m N (e - 0,5 a)}{\gamma b h^2 R_a} = \frac{m \Omega_a}{bh} + \frac{m N (\gamma - 0,5)}{\gamma b h R_a} \quad (3')$$

Lorsque l'influence de l'effort normal devient négligeable par rapport à celle du moment fléchissant, la condition (3') devient :

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78 A - B} = \frac{m \Omega_a}{bh} = \frac{1}{2 \theta (1 + \theta)}$$

formule établie pour la flexion plane simple dans une étude antérieure. C'est l'équation de la courbe \mathfrak{NCR}_a représentée sur la figure 2 de cette étude (*R. U. M.* du 1^{er} décembre 1924).

Lorsque l'influence de l'effort normal n'est pas négligeable, en remarquant que, d'après le § 2 :

$$\frac{m \Omega_a}{bh} = \frac{1}{2\theta(1+\theta)} - \frac{mN}{bh R_a},$$

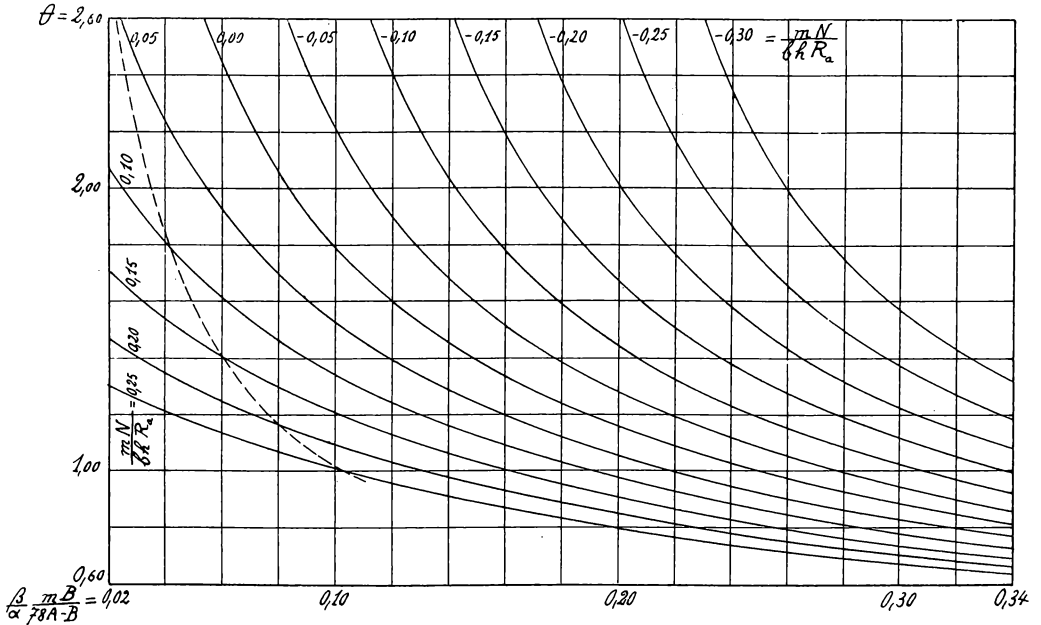


Fig. 3.

la formule (3') peut se transformer comme suit :

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = \frac{1}{2\theta(1+\theta)} - \frac{mN}{bh R_a} \frac{0,5}{\gamma} \quad (4)$$

D'après cette équation, nous pourrions nous servir de la courbe $\mathcal{O}R_a$ établie pour la flexion simple et que nous venons de rappeler, seulement le point X représentatif du cas étudié doit avoir pour abscisse :

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} + \frac{mN}{bh R_a} \frac{0,5}{\gamma} \text{ au lieu de } \frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B}.$$

Le point X serait donc situé, par rapport à celui qui correspond à la flexion simple, plus à droite en cas de compression et plus à gauche en cas de traction. L'écart augmente dans les deux hypothèses avec la valeur de l'effort normal.

Plutôt que de se servir de cette manière de la courbe $\mathcal{O}R_a$ relative à la flexion simple, il est préférable de représenter l'équation (4) avec des abscisses $\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B}$ et des ordonnées θ par une famille de courbes

cotées en valeurs échelonnées de $\frac{mN}{bh R_a}$. C'est l'abaque cartésien de la figure 3 ci-après ; les valeurs de $\frac{mN}{bh R_a}$ varient de — 0,30 (traction) à + 0,25 (compression). La courbe cotée 0 n'est autre que la courbe $\mathcal{M}R_a$ relative à la flexion plane simple. Le tracé a été fait en adoptant pour γ la valeur moyenne 0,85 dans l'intervalle de variation de θ de 0, 60 à 2,60.

Dans les cas de compression excentrique, pour être utiles, les points des courbes doivent satisfaire à la condition $\Omega_a > 0$; la limite des parties utiles des courbes est donc donnée par l'équation : $\Omega_a = 0$, ou :

$$\frac{mN}{bh R_a} = \frac{1}{2\theta(1+\theta)}$$

Cette équation permet de tracer, d'après les ordonnées θ , une courbe dont les secondes coordonnées sont les valeurs de $\frac{mN}{bh R_a}$ cotées sur les courbes de la famille et qui en limite les parties utiles. Elle est tracée en trait interrompu sur la figure 3.

Le graphique s'emploie de la manière suivante. On y repère le point X d'abscisse $\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78 A - B}$ et d'ordonnée $\rho = \frac{R_a}{mR'_b}$. On calcule la valeur de h (par exemple par la méthode approximative du §2) dans l'hypothèse $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$, et la valeur correspondante de $\frac{mN}{bh R_a}$. Pour qu'il y ait un minimum théorique admissible pour $\sigma_a = R_a$, il faut que le point X soit situé en dessous et à gauche de la courbe cotée $\frac{mN}{bh R_a}$. Si cette condition est satisfaite, il faut prolonger l'ordonnée de X jusqu'à son intersection Y avec la courbe en question. L'ordonnée de ce point donne une première approximation de la valeur de θ correspondant au minimum. Il est certain que $\sigma'_b = \frac{R_a}{m\theta} < R'_b$, puisque $R'_b = \frac{R_a}{m\rho}$ et que $\theta > \rho$.

On procède ensuite éventuellement à une seconde approximation en calculant une nouvelle valeur de h d'après celle trouvée pour θ . On pourra s'en tenir là généralement, car les courbes ne sont-elles-mêmes qu'approximatives et les variations de prix sont faibles aux environs du minimum. Un opérateur habitué à l'emploi du graphique appréciera d'emblée une valeur satisfaisante de θ .

Si le point X est au-dessus et à gauche de la courbe cotée d'après la première valeur de $\frac{mN}{bh R_a}$, il n'y a pas de minimum correspondant à $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b < R'_b$. Il semble qu'il pourrait y avoir doute, à cause

de la valeur approximative de h , lorsque le point X est très voisin de la courbe (1). La valeur économique de h devrait en effet être plus grande que celle considérée en première approximation. Mais l'influence ne peut être sensible et la conclusion précédente reste pratiquement vraie.

Comme indication générale, on déduit de cette étude que le cas de minimum théorique étudié paraît possible pour les pièces soumises à de fortes tractions et peu fléchies, et est improbable pour les pièces comprimées excentriquement, puisque nous avons constaté dans l'étude antérieure qu'il est déjà improbable pour la flexion simple. Toutefois, cette dernière constatation résulte d'exemples concrets étudiés en adoptant certaines conditions particulières de sécurité et de prix (2). Ces conclusions ne sont donc pas absolues.

La condition du minimum, telle qu'elle est exprimée par la formule (3), peut se mettre sous la forme :

$$h_{ec} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \frac{78 A - B}{B} \frac{N(e - 0,5 a)}{\gamma b R_a}}, \quad (5)$$

qui permet de calculer directement la hauteur économique. Il faut que cette hauteur soit supérieure à la valeur h_s calculée en supposant $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$. Dans les applications, on utilisera de préférence cette formule plutôt que le graphique de la figure 3, destiné surtout à mettre en évidence l'influence des divers facteurs.

Si la hauteur h_{ec} calculée est trop élevée vu l'espace disponible, l'économie commande d'adopter la plus grande hauteur permise.

Si la position de l'effort normal extérieur résultant N est fixée par sa distance e' à la face la plus voisine, la condition du minimum sous la formule (4) devient en cas de compression excentrique :

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78 A - B} = \frac{1}{2\theta(1 + \theta)} - \frac{mN}{bhR_a} \frac{1}{\gamma} \quad (4'),$$

et en cas de traction excentrique :

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78 A - B} = \frac{1}{2\theta(1 + \theta)} \quad (4'')$$

formules différentes toutes deux de la formule (4).

L'équation (4') peut se représenter par l'abaque cartésien de la figure 3 ; il suffit d'affecter les courbes de cotes moitié moindres. Il en résulte que la courbe limitant la partie utile du graphique se déplace.

(1) Cette remarque ne s'applique qu'à la compression excentrique.

(2) Dans la flexion composée, il s'agit généralement de pièces de largeur limitée, pour lesquelles $\beta > 1$. Or, pour la flexion simple, tous les exemples concrets étudiés avaient trait à des dalles, pour lesquelles $\beta = 1$. Mais, ainsi qu'on s'en assure aisément, la constatation qui en résulte est vraie à fortiori lorsque $\beta > 1$.

Quant à l'équation (4''), elle est représentée par la seule courbe cotée 0, c'est-à-dire la courbe \mathcal{NR}_a de la flexion simple. Cette formule (4''), indépendante de N et la courbe unique qui y correspond, peuvent être utilisées également pour la compression excentrique; il suffit de mesurer e' positivement vers l'intérieur à partir de l'arête la plus étendue (c'est-à-dire la face la plus éloignée de N), N restant positif.

On déduit de ces courbes que la probabilité de réalisation du minimum théorique est réduite en toute hypothèse lorsque la position de N est déterminée par sa distance e' à la face la plus voisine par rapport aux cas où elle est fixée par e .

On s'en rend compte également en transformant la formule (5), qui devient en cas de compression :

$$h_{ec} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \frac{78 A - B}{B} \frac{Ne'}{\gamma b R_a}} \quad (5')$$

et en cas de traction :

$$h_{ec} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \frac{78 A - B}{B} \frac{N(e' - a)}{\gamma b R_a}} \quad (5'')$$

Comme e' est toujours plus petit que e , la valeur de h_{ec} donnée par les formules (5') et (5'') est plus petite que celle de la formule (5). La probabilité que $h_{ec} > h_s$ est diminuée d'autant. Cette constatation ne peut surprendre, car lorsque h augmente, l'excentricité vraie de l'effort normal par rapport au centre de gravité de la section active diminue si e est constant, et augmente au contraire si e' est constant.

§ 5. Cas du minimum correspondant à $\sigma'_b = R'_b$ et $\sigma_a < R_a$.

D'après le § 2 : $\Omega_a \sigma_a \gamma h = m \Omega_a R'_b \theta \gamma h = N [e - 0,5 a - (\gamma - 0,5) h]$, d'où :

$$\theta \Omega_a = \frac{N}{\gamma m R'_b} \left[\frac{e - 0,5 a}{h} - \gamma + 0,5 \right].$$

En admettant que γ soit constant, la dérivée de cette égalité est :

$$\theta \frac{d \Omega_a}{dh} + \Omega_a \frac{d \theta}{dh} = \frac{-N}{\gamma m R'_b} \frac{e - 0,5 a}{h^2}.$$

D'autre part :

$$\frac{m \Omega_a}{bh} = \frac{1}{2 \theta (1 + \theta)} - \frac{mN}{bh R_a} = \frac{1}{2 \theta (1 + \theta)} - \frac{N}{bh R'_b \theta}.$$

La dérivée de l'égalité des deux membres extrêmes s'écrit :

$$\frac{m}{b} \left(\frac{1}{h} \frac{d \Omega_a}{dh} - \frac{\Omega_a}{h^2} \right) = - \left[\frac{1 + 2 \theta}{2 \theta^2 (1 + \theta)^2} - \frac{N}{bh R'_b \theta^2} \right] \frac{d \theta}{dh} + \frac{N}{bh^2 R'_b \theta},$$

équation qui, après transformation, s'écrit :

$$\frac{d\theta}{dh} = \frac{\theta}{h} \frac{1}{\frac{2\theta(1+\theta)}{m\Omega_a} - \frac{m}{b} \frac{d\Omega_a}{dh}} - \frac{1}{\frac{m\Omega_a}{bh} + \frac{1}{2(1+\theta)^2}}$$

En introduisant cette expression de $\frac{d\theta}{dh}$ dans la première dérivée, on obtient, après réduction au même dénominateur :

$$\left[\frac{m\Omega_a}{bh} + \frac{1}{2(1+\theta)^2} \right] \theta \frac{d\Omega_a}{dh} + \Omega_a \frac{\theta}{h} \left[\frac{1}{2\theta(1+\theta)} - \frac{m}{b} \frac{d\Omega_a}{dh} \right] = \\ = \frac{-N(e-0,5a)}{m\gamma R'_b h^2} \left[\frac{m\Omega_a}{bh} + \frac{1}{2(1+\theta)^2} \right],$$

d'où

$$\frac{d\Omega_a}{dh} \frac{\theta}{2(1+\theta)^2} = -\frac{\Omega_a}{h} \frac{1}{2(1+\theta)} - \\ - \left[\frac{\Omega_a \theta}{h} + \frac{N(\gamma-0,5)}{m\gamma h R'_b} \right] \left[\frac{1+2\theta}{2\theta(1+\theta)^2} - \frac{N}{bh R'_b \theta} \right].$$

Après de multiples transformations, cette équation donne finalement :

$$\frac{m}{b} \frac{d\Omega_a}{dh} = -\frac{1}{2\theta(1+\theta)} \frac{2+3\theta}{\theta} + \\ + \frac{N}{bh R'_b \theta} \left\{ \frac{2(1+\theta)}{\theta} + \frac{1}{\gamma} \left[\frac{1+2\theta}{2\theta} - \frac{N(1+\theta)^2}{bh R'_b \theta} \right] \right\}.$$

Or, d'après l'équation (2), la condition du minimum est :

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A-B} = -\frac{m}{b} \frac{d\Omega_a}{dh},$$

ce qui conduit à la formule :

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A-B} = \frac{1}{2\theta(1+\theta)} \frac{2+3\theta}{\theta} - \\ - \frac{N}{bh R'_b \theta} \left\{ \frac{2(1+\theta)}{\theta} + \frac{1}{\gamma} \left[\frac{1+2\theta}{2\theta} - \frac{N(1+\theta)^2}{bh R'_b \theta} \right] \right\},$$

ou

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A-B} = \frac{1}{2\theta(1+\theta)} \frac{2+3\theta}{\theta} - \\ - \frac{N}{bh R'_b} \left[\frac{2(1+\theta)}{\theta^2} + \frac{1+2\theta}{2\gamma\theta^2} - \frac{N}{bh R'_b} \frac{(1+\theta)^2}{\gamma\theta^2} \right] \quad (6)$$

Dans le cas de la flexion plane, comme $N = 0$, la formule devient :

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = \frac{1}{2\theta(1 + \theta)} \frac{2 + 3\theta}{\theta},$$

formule établie directement dans l'étude de l'économie des pièces simplement fléchies (*R. U. M.*, 1^{er} décembre 1924). La courbe $\mathcal{N}R'_b$ de la figure 2 de l'étude prérappelée appartient donc à la famille de courbes représentée dans la figure 4 ci-après et dont la formule (6) constitue l'équation générale. Comme pour la figure 3, nous avons adopté pour γ la valeur 0,85. Les courbes sont cotées en valeurs de $\frac{N}{bh R'_b}$, la courbe $\mathcal{N}R'_b$ correspondant à la flexion plane simple est cotée 0. Comme dans la figure 3, les parties utiles du graphique sont limitées par une courbe

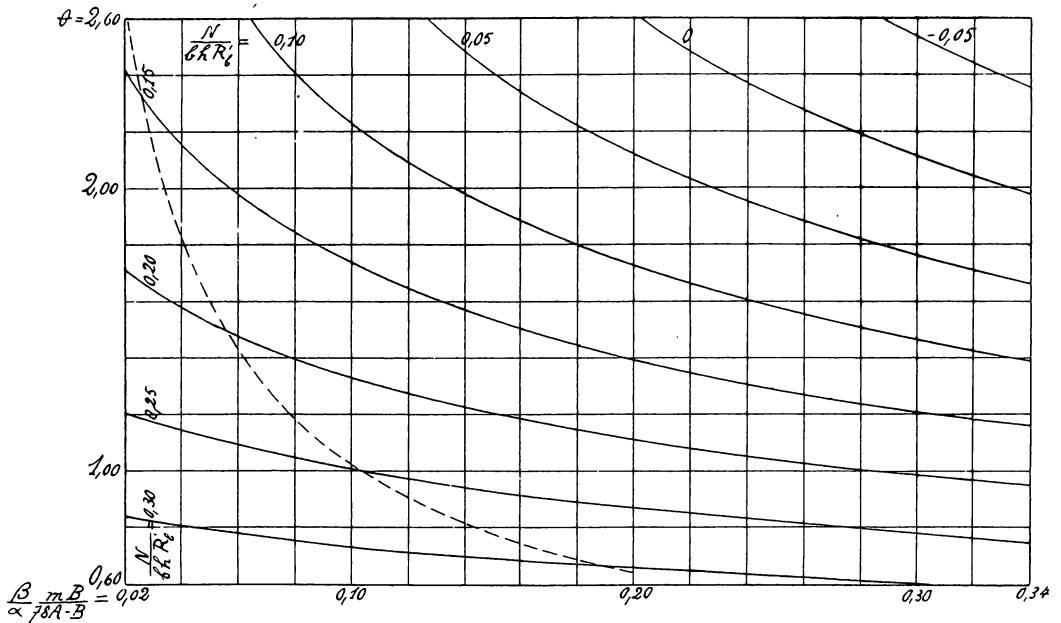


Fig. 4.

correspondant à $\Omega_a = 0$, qui est tracée en trait interrompu.

Dans le cas présent, il n'est pas commode d'établir une formule simple de h_{ec} , analogue à la formule (5) du § précédent. La formule (6) et sa représentation graphique de la figure 4 constituent les seuls moyens pratiques d'investigation.

L'étude d'un cas concret s'effectue comme suit. On repère sur le graphique le point X d'abscisse $\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B}$ et d'ordonnée $\rho = \frac{R_a}{m R'_b}$. On calcule (par exemple par la méthode du § 2) la valeur h_s de h cor-

respondant à $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$ et la valeur correspondante de $\frac{N}{bh R'_b}$. Pour que le minimum soit admissible, il faut que le point X se trouve au-dessus et à droite de la courbe de la figure 4 correspondant à la valeur $\frac{N}{bh R'_b}$. Si cette condition est réalisée, le point Y où l'ordonnée de X coupe cette courbe, détermine une valeur approximative de θ correspondant au minimum. Il en résulte que $\sigma_a = m \theta R'_b < R_a$. A ce taux de travail σ_a conjugué avec R'_b correspond une hauteur $h < h_s$. On procède éventuellement à une seconde approximation avec la nouvelle valeur de $\frac{N}{bh R'_b}$ et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne une valeur satisfaisante de θ correspondant au minimum.

Les exemples traités plus loin montreront que ces opérations ne sont pas compliquées ni fastidieuses. La formule (6) n'est d'ailleurs qu'approximative et il n'y a pas utilité à procéder à de nombreux essais. Dans le cas où le minimum a lieu pour une valeur de σ_a très différente de R_a , le premier essai donne souvent une solution satisfaisante, puisque le prix de la pièce varie très peu aux environs du minimum. L'emploi habituel du graphique procure une certaine habileté à trouver d'emblée une valeur satisfaisante de θ .

On conclut de la disposition des courbes que le cas de minimum envisagé est particulièrement possible pour les valeurs positives élevées de $\frac{N}{bh R'_b}$, donc pour les pièces fortement comprimées et peu fléchies. Dans l'étude de la flexion simple, nous avons constaté que ce cas de minimum est improbable $\left(\frac{N}{bh R'_b} = 0\right)$. Il l'est donc encore davantage pour les valeurs négatives de $\frac{N}{bh R'_b}$, c'est-à-dire lorsque la sollicitation consiste en des tractions excentriques.

Si la position de l'effort normal N est fixée par sa distance e' à la face la plus voisine, la condition du minimum s'écrit en cas de compression :

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = \frac{1}{2\theta(1 + \theta)} \frac{2 + 3\theta}{\theta} - \frac{N}{bh R'_b} \left\{ \frac{2(1 + \theta)}{\theta^2} + \frac{2}{\gamma} \left[\frac{1 + 2\theta}{2\theta^2} - \frac{N}{bh R'_b} \frac{(1 + \theta)^2}{\theta^2} \right] \right\} \quad (6')$$

et en cas de traction :

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = \frac{1}{2\theta(1 + \theta)} \frac{2 + 3\theta}{\theta} - \frac{N}{bh R'_b} \frac{2(1 + \theta)}{\theta^2} \quad (6'')$$

Ces équations, différentes de l'équation (6), peuvent aussi être repré-

sentées par des graphiques analogues à la figure 4, mais différents. Ils ont toutefois tous la courbe cotée 0 commune; c'est la courbe $\mathcal{O}R'_b$ de la flexion plane simple. Les abaques des formules (6') et (6'') ne sont pas figurés. Les courbes diffèrent de celles de la figure 4 de telle sorte que les écarts à partir de la courbe cotée 0, pour une même valeur de $\frac{N}{bh R'_b}$, sont plus grands en cas de compression, plus petits en cas de traction. On en déduit la conclusion inverse de celle du § précédent que la probabilité du minimum théorique est plus grande lorsque la position de N est fixée par e' que lorsqu'elle est définie par e .

§ 6. **Cas de l'optimum correspondant à $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$.** — Les courbes des figures 3 et 4 ont été représentées séparément parce que les deux familles s'entremêlent et qu'une figure unique serait embrouillée. Mais pour un cas concret représenté dans un graphique commun par un point X d'abscisse $\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B}$ et d'ordonnée $\rho = \frac{R_a}{m R'_b}$, il existe une certaine courbe $\frac{mN}{bh R'_a}$ de la première famille et une courbe $\frac{N}{bh R'_b}$ de la seconde qui élucident complètement le problème de l'économie du cas en question. Ces courbes divisent le graphique en trois zones, analogues à celles que nous avons étudiées dans la flexion plane simple.

Si le point X est situé dans la zone inférieure, le minimum mathématique pour $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b < R'_b$ est réalisé. Avec des conditions de sécurité et de prix analogues à celles que nous adoptons pour nos applications, ce cas ne peut guère se présenter que pour des pièces soumises à de fortes tractions peu excentriques.

Si le point X est dans la zone supérieure, le minimum mathématique correspondant à $\sigma'_b = R'_b$, $\sigma_a < R_a$ est réalisé. La possibilité de ce cas se présente surtout pour la compression excentrique et d'autant plus que l'effet de flexion est moins prononcé.

Enfin, si le point X est dans la zone moyenne, le minimum mathématique est incompatible avec les conditions de sécurité et donc irréalisable. Le résultat optimum s'obtient en adoptant $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$. C'est le cas le plus probable pour les pièces sollicitées principalement par flexion.

Nous n'étudierons pas, comme pour la flexion simple, l'influence du poids propre, parce qu'il est, en règle générale, impossible de le prédéterminer et que ses effets diminuent d'importance lorsque l'effet de l'effort normal croît par rapport à celui de la flexion.

§ 7. **Applications.** — Les exemples ci-après ont simplement pour but de montrer l'application des formules ou graphiques des paragraphes 4 et 5 et n'ont aucun caractère documentaire. Les valeurs de A, B, C et α ,

doivent être judicieusement évaluées dans chaque cas, d'après les circonstances locales et les dispositifs réels de construction. Pour simplifier les calculs, nous adopterons généralement les valeurs rondes :

$$B = 100, \quad A = 80, \quad C = 10.$$

Nous considérerons des poutres à coffrages latéraux, non des dalles.

$$\text{Donc :} \quad \beta = 1 + \frac{2C}{bB} > 1.$$

Pour α , nous adopterons la valeur 1,28, qui se décompose comme suit :

Section théorique maximum	1,00
Supplément pour la constitution de l'armature en barres	0,05
Crochets et ancrages	0,10
Etriers	0,13

Pour les dalles, il faudrait éventuellement ajouter des barres de répartition, qui peuvent augmenter la valeur de α d'une quantité atteignant jusque 0,20. Nous n'envisageons pas de supplément pour les barres obliques par suite de l'atténuation des effets de flexion. Il est d'ailleurs peu important et peut être éventuellement compris dans le supplément largement évalué pour les crochets et ancrages.

a) Soient : $b = 40$ cm., $a = 5$ cm., $N = 10.000$ kgs, $e = 250$ cm., $R_a = 1200$ kgs/cm²; $R'_b = 50$ kg/cm² et $m = 15$ (bétons nos 2 ou 4 du règlement de l'A. B. S.).

$$\text{Donc :} \quad \beta = 1 + \frac{20}{0,40 \times 100} = 1,50,$$

$$\text{et :} \quad \frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = \frac{1,50}{1,28} \times \frac{15 \times 100}{78 \times 80 - 100} = 0,286.$$

$$\text{D'autre part :} \quad \rho = \frac{R_a}{mR'_b} = 1,60.$$

Les coordonnées du point X sont ainsi déterminées :

D'après un calcul exact, pour $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$ on trouve :

$$h_s = 98,8 \text{ cm.} \quad \text{et} \quad \Omega_a = 21,3 \text{ cm}^2.$$

D'après la formule (5), pour $\sigma_a = R_a$:

$$h_{ec} = \sqrt{\frac{1,28}{1,50} \times \frac{6140}{100} \times \frac{10.000(250 - 2,5)}{0,85 \times 40 \times 1200}} = 56,5 \text{ cm.}$$

Donc $h_{ec} < h_s$, le minimum pour $\sigma_a = R_a$ est inadmissible. D'ailleurs, par première approximation :

$$\frac{m N}{bh R_a} = \frac{15 \times 10.000}{40 \times 98,8 \times 1200} = 0,0316.$$

Sur la figure 3, le point X est situé très haut au-dessus de la courbe qui correspond à la cote 0,0316, donc le minimum pour $\sigma_a = R_a$ est inadmissible.

D'autre part :

$$\frac{N}{bh R'_b} = \frac{10.000}{40 \times 98,8 \times 50} = 0,0506.$$

Sur la figure 4, le point X est situé un peu en dessous de la courbe qui correspond à la cote 0,0506, donc le minimum pour $\sigma'_b = R'_b$ est inadmissible également. La solution optimum correspond donc à

$\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$. Remarquons que $\frac{e}{h_s} = 2,53$, ce qui montre que l'in-

fluence de la flexion est modérée. Elle suffit cependant pour que son caractère l'emporte dans l'étude économique. Et, en effet, les courbes correspondantes sont très voisines de celles relatives à la flexion simple (cotées 0). On en déduit qu'en cas de prédominance caractérisée de la flexion, les graphiques relatifs à la flexion simple peuvent convenir, comme le faisaient supposer les exposés des § 4 et 5. Une légère augmentation de β ou de B ou une réduction de A peuvent faire passer le point X au-dessus de la courbe donnant le minimum pour $\sigma'_b = R'_b$. Nous sommes donc près de la limite. Mais comme les variations de prix ne pourraient être considérables, leurs conséquences effectives ne seraient guère appréciables.

b) Soient $b = 40$ cm., $a = 5$ cm., $N = 20.000$ kgs, $e = 150$ cm., $R_a = 1000$ kg/cm², $R'_b = 40$ kg/cm² et $m = 10$. (Règlement des Ponts-et-Chaussées de Belgique).

Donc :

$$\rho = 2,50 \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{\alpha} \frac{m B}{78 A - B} = 0,191.$$

Les ordonnées du point X sont ainsi définies. Il est évidemment superflu de faire l'essai du minimum pour $\sigma_a = R_a$. Examinons l'hypothèse $\sigma'_b = R'_b$. D'après un calcul exact, pour $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$, on trouve :

$$h_s = 145,8 \text{ cm.}, \quad \Omega_a = 13,45 \text{ cm}^2,$$

$$\text{et :} \quad \frac{N}{bh R'_b} = \frac{20\,000}{40 \times 145,8 \times 40} = 0,0858.$$

Sur la figure 4, le point X se trouve au-dessus de la courbe cotée 0,0858, donc le minimum est admissible. Le point Y de cette courbe ayant même abscisse que X a pour ordonnée $\theta = 1,87$ environ, qui correspond au minimum. Comme cette valeur n'est qu'approximative, nous choisissons $\theta = 1,90$, d'où $\sigma_a = 760 < R_a$.

Un calcul exact donne : $h = 132,5$ cm, $\Omega_a = 21,75$ cm².

Dans l'hypothèse $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$ le prix par mètre courant est :

$$1,50 \times 100 \times 0,40 \times 1,458 + 1,28 \times 6140 \times 0,001345 = 87,50 + 10,55 = 98,05 \text{ fr.} + \text{cte.}$$

Dans l'hypothèse $\sigma_a = 760 < R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$, le prix est :

$$60 \times 1,325 + 7860 \times 0,002175 = 79,50 + 17,10 = 96,60 \text{ fr.} + \text{cte.}$$

La différence sur la partie variable (qui constitue presque la totalité du prix) est de 1,45 fr., soit près de 1,5%. Mais on bénéficie, de plus, d'une réduction d'encombrement supérieure à 9%, l'armature est augmentée de plus de 61% et la fatigue du métal réduite de 24%. L'économie est donc accompagnée d'un accroissement de sécurité et d'une diminution d'encombrement.

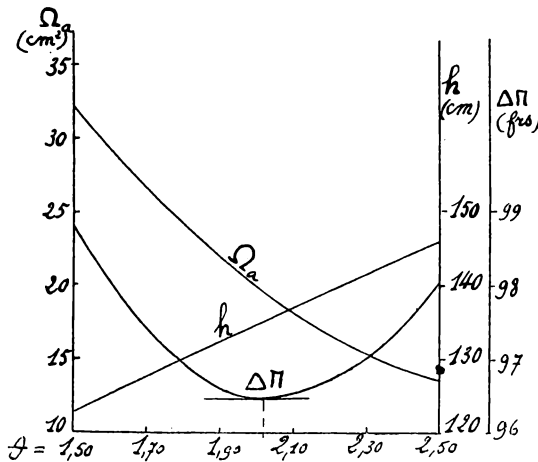


Fig. 5.

Il est intéressant de montrer la variation continue des divers éléments de la question lorsque $\sigma'_b = R'_b$. C'est l'objet du tableau et de la figure 5 ci-contre. Ils permettent de vérifier la remarque déjà faite que la figure 4 ne donne pas le minimum exact. La valeur de θ correspondant au minimum paraît voisine de 2,02 au lieu de 1,87. Mais la différence de prix est d'environ 0,15 fr. seule-

ment. La solution approximative présente par contre les avantages d'un moindre encombrement et d'une plus grande sécurité.

θ	σ_a kg/cm ²	h cm	Ω_a cm ²	prix frs	En % de la section maximum		
					Prix	encombrement	fatigue de l'acier
2,50	1000	145,8	13,45	98,05	100	100	100
2,30	920	141,4	15,5	97,00	98,9	97	92
2,10	840	137	18,25	96,55	98,6	94	84
1,90	760	132,5	21,75	96,60	98,6	91	76
1,70	680	127,5	26,7	97,45	99,4	87,5	68
1,50	600	122,7	32,1	98,80	100,7	84,3	60

Les résultats obtenus dépendent essentiellement des coefficients adoptés, notamment des conditions de sécurité qui, dans l'exemple ci-dessus, sont celles de l'Administration des Ponts et Chaussées de Belgique, dont le caractère est assez particulier.

Concluons donc encore qu'il ne faut pas attribuer à l'étude économique un caractère absolu, mais s'en servir comme d'un guide qui laisse à l'opérateur la latitude de choisir, dans des limites assez larges, la solution la plus convenable tout en satisfaisant au souci de l'économie. L'avantage de la méthode par rapport à celle qui consiste en tous cas à se rapprocher le plus possible des taux de travail de sécurité est évident.

c) Soient $b = 30$ cm., $a = 4$ cm. ; $N = 15.000$ kgs, $e = 30$ cm., $R_a = 1200$ kg/cm², $R'_b = 50$ kg/cm² et $m = 15$ (bétons n^{os} 2 ou 4 du règlement de l'A. B. S.).

Donc :

$$\rho = 160, \beta = 1 + \frac{20}{0,30 \times 100} = 1,67,$$

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = \frac{1,67}{1,28} \times \frac{1500}{6140} = 0,318.$$

Les coordonnées du point X sont déterminées.

Pour $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$, on calcule : $h = 58,7$ cm. et $\Omega_a = 1,62$ cm²

Le prix de la partie variable est par mètre courant :

$$1,67 \times 0,30 \times 100 \times 0,587 + 1,28 \times 6140 \times 0,000162 = \\ = 29,35 + 1,27 = 30,62 \text{ fr.}$$

D'après ces dimensions :

$$\frac{N}{bhR'_b} = \frac{15.000}{30 \times 58,7 \times 50} = 0,17.$$

Le point X est situé sur la figure 4 au-dessus de la courbe cotée 0,17. Son ordonnée coupe cette courbe en un point Y pour lequel $\theta = 1,10$. C'est la valeur approximative de θ donnant le minimum, il y correspond : $\sigma_a = 825$ kg/cm² < R_a .

Comme la courbe n'est qu'approximative, nous adopterons la valeur $\theta = 1,20$, pour laquelle $\sigma_a = 900 < R_a$. D'après cette valeur et $\sigma'_b = R'_b$, on calcule : $h = 52,3$ cm. $\Omega_a = 3,51$ cm².

Le prix par mètre courant est :

$$\Delta \pi = 50 \times 0,532 + 7860 \times 0,000351 = 29,36 \text{ fr.}$$

La différence de prix est 1,26 fr., soit plus de 4%. L'encombrement est réduit de 9,4%, la fatigue du métal diminuée de 25%.

Pour $\theta = 1,00$, d'où $\sigma_a = 750$ kg/cm², on trouve :

$$h = 50,6 \text{ cm.} \quad \Omega_a = 5,31 \text{ cm}^2 \quad \text{et} \quad \Delta \pi = 29,48.$$

Pour $\theta = 1,10$, d'où $\sigma_a = 825 \text{ kg/cm}^2$:

$$h = 52 \text{ cm.} \quad \Omega_a = 4,26 \text{ cm}^2 \quad \text{et} \quad \Delta \pi = 29,35 \text{ fr.s}$$

La valeur de θ déterminée par le graphique 4 donne donc dans ce cas le minimum d'une manière très satisfaisante et présente encore par rapport à $\theta = 1,20$ des avantages au point de vue de l'encombrement et de la sécurité. L'intérêt de l'application est surtout de montrer qu'avec des conditions de sécurité normales, telles que celles de l'A. B. S. le minimum théorique pour $\sigma'_b = R'_b$ est réalisable lorsque la compression l'emporte franchement sur la flexion, ce qui se reconnaît par le rapport $\frac{e}{h_s}$ qui vaut 0,51.

d) L'examen des cas de traction excentrique montre que, dans les conditions de prix envisagées et avec des conditions de sécurité telles que celle de l'A. B. S. ainsi que des valeurs de β supérieures à 1, le minimum correspondant à $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b < R'_b$ n'est guère réalisable. La solution optimum est presque toujours $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$. On se trouve cependant souvent près de la limite et des modifications assez importantes des prix unitaires, augmentation, pour l'acier ou réduction pour le béton, peuvent rendre le minimum possible. (Dans des régions éloignées des centres métallurgiques, le prix des barres d'armature peut être beaucoup plus élevé que ce que nous avons envisagé).

Soient : $b = 40 \text{ cm.}$, $a = 4 \text{ cm.}$, $N = -20.000 \text{ kgs}$, $e = -20 \text{ cm.}$, $R'_b = 50 \text{ kg/cm}^2$, $R_a = 1200 \text{ kg/cm}^2$ et $m = 15$.

Donc :

$$\rho = 1,60, \beta = 1,50 \text{ et}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{m B}{78 A-B} = 0,286.$$

Pour $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$, on trouve $h_s = 24,3 \text{ cm}$, $\Omega_a = 24,4 \text{ cm}^2$. D'après la formule (5), pour $\sigma_a = R_a$:

$$h_{ec} = \sqrt{\frac{1,28}{1,50} \times \frac{6140}{100} \times \frac{20.000 (20 + 2)}{0,85 \times 40 \times 1200}} = 23,8 \text{ cm.}$$

Donc $h_{ec} < h_s$, le minimum théorique n'est pas admissible. On ferait la même constatation à l'aide des courbes de la figure 3, pour la valeur :

$$\frac{m N}{bh R_a} = \frac{-15 \times 20.000}{40 \times 24,3 \times 1200} = -0,254.$$

Le point X se trouve légèrement au-dessus de la courbe cotée $-0,254$. Malgré l'influence nettement prépondérante de la traction, le minimum n'est pas réalisable, on est tout près de la limite.

2^e Section : Pièces parallélépipédiques de hauteur donnée

§ 8. — Cas du minimum correspondant à $\sigma'_b = R'_b$ et $\sigma_a < R_a$. — Remarquons tout d'abord que puisque la hauteur est donnée, il est indifférent de déterminer la position de N par e ou e' .

Des trois hypothèses à envisager pour les valeurs relatives de σ_a et de σ'_b par rapport à R_a et R'_b , l'une d'elles, $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b < R'_b$, n'est pas à retenir. En effet, comme la hauteur est fixe, si $\sigma_a = R_a$, la section Ω_a varie très peu lorsque σ'_b varie et on peut la considérer comme constante. Une réduction de σ'_b entraîne par contre une augmentation de b , donc du volume et du prix. Donc toute solution $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b < R'_b$ est plus coûteuse que la solution $\sigma_a = R_a$, $\sigma'_b = R'_b$, puisqu'à poids égal d'armature, elle exige plus de béton. L'hypothèse $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b < R'_b$ est donc incompatible avec un minimum de prix.

Par conséquent, la solution $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$ donne un résultat optimum dans tous les cas où le minimum théorique correspondant à $\sigma'_b = R'_b$ et $\sigma_a < R_a$ est inadmissible.

La condition de ce minimum se détermine comme suit :

Le prix d'un élément de longueur Δl de la pièce est :

$$\Delta \pi = \Delta l [bh_t \beta B + (78 A - B) \alpha \Omega_a] + c^{te} \quad (1)$$

formule dans laquelle : $\beta = 1 + \frac{C}{h_t B}$.

Quoique a soit connu d'avance, comme b est variable, il n'est pas permis de considérer $ba\beta B$ comme constant. Nous aurons recours au rapport $\delta = \frac{h-a}{h}$ (voir figure 2), qui permet d'écrire :

$$h_t = (2 - \delta) h.$$

$$\text{En posant :} \quad \beta' = (2 - \delta) \beta,$$

la formule (1) peut s'écrire :

$$\Delta \pi = \Delta l [bh \beta' B + \alpha (78 A - B) \Omega_a] + c^{te} \quad (1'')$$

La condition du minimum, en adoptant b comme variable indépendante, est :

$$h \beta' B + \alpha (78 A - B) \frac{d \Omega_a}{d b} = 0 \quad (2')$$

$$\text{Or :} \quad \Omega_a = \frac{N}{m \gamma h \theta R'_b} (e - 0,5 a + 0,5 h - \gamma h),$$

donc, en admettant par approximation que γ soit invariable :

$$\frac{d \Omega_a}{d b} = - \frac{N (e - 0,5 a + 0,5 h - \gamma h)}{m \gamma h R'_b \theta^2} \frac{d \theta}{d b} = - \frac{\Omega_a}{\theta} \frac{d \theta}{d b}.$$

Mais, d'après le § 2 :

$$\frac{N(e - 0,5a + 0,5h)}{bh^2 R'_b} = \frac{\gamma}{2(1 + \theta)},$$

d'où :

$$\theta = \frac{\gamma bh^2 R'_b}{2N(e - 0,5a + 0,5h)} - 1,$$

et :

$$\frac{d\theta}{db} = \frac{\gamma h^2 R'_b}{2N(e - 0,5a + 0,5h)} = \frac{1 + \theta}{b}.$$

Donc, la condition du minimum s'écrit enfin :

$$\frac{\beta'}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = \frac{m\Omega_a}{bh} \frac{1 + \theta}{\theta} \quad (7)$$

Comme :

$$\frac{m\Omega_a}{bh} = \frac{1}{2\theta(1 + \theta)} - \frac{N}{bh\theta R'_b},$$

la formule (7) devient :

$$\frac{\beta'}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = \frac{1}{2\theta^2} - \frac{N}{bh R'_b} \frac{1 + \theta}{\theta^2} \quad (8)$$

L'équation (8) peut se représenter graphiquement par une famille de courbes, tracées sur la figure 6 d'après les valeurs de $\frac{\beta'}{\alpha} \frac{mB}{78A - B}$ portées en abscisses et les valeurs de θ portées en ordonnées. Elles sont cotées en valeur de $\frac{N}{bh R'_b}$ et elles sont indépendantes de la valeur de γ .

Dans les cas de compression excentrique, il faut que $\Omega_a > 0$. Les courbes à cotes positives ont donc leurs parties utiles limitées par la condition : $\Omega_a = 0$ ou :

$$\frac{N}{bh R'_b} = \frac{1}{2(1 + \theta)},$$

équation d'une courbe dont la partie utile est en dehors des limites de la figure 6.

Ce graphique s'utilise comme ceux des figures 3 et 4. Le point X caractéristique du cas étudié est défini par ses coordonnées ρ et $\frac{\beta'}{\alpha} \frac{mB}{78A - B}$. On suppose la valeur de $\frac{N}{bh R'_b}$ comme dans la section précédente. Si le point X se trouve au-dessus et à droite de la courbe dont la cote est égale à cette valeur, le minimum mathématique est admissible ; il est défini par l'ordonnée θ du point Y de cette courbe

ayant même abscisse que X. Comme $\theta < \rho$, il en résulte que $\sigma_a = m \theta R'_b < R_a$.

Si $N = 0$, ce qui est le cas de la flexion plane simple, la formule (7) reste inchangée, mais la formule (8) devient :

$$\frac{\beta'}{\alpha} \frac{mB}{78A-B} = \frac{1}{2\theta^2}, \quad (8')$$

c'est l'équation de la courbe cotée 0 de la figure 6.

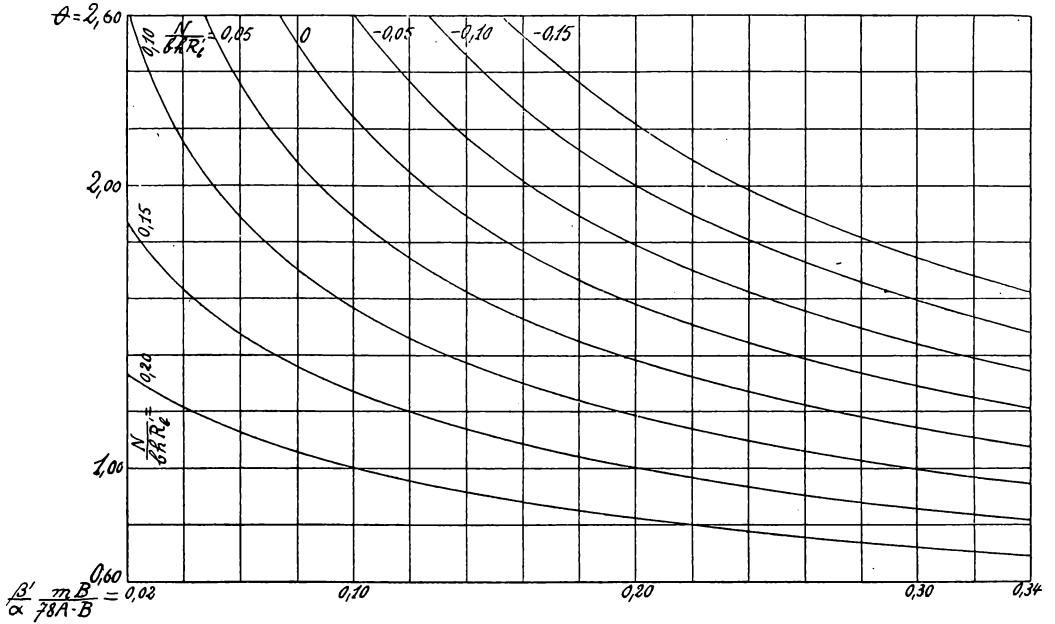


Fig. 6.

Dans l'étude relative à l'économie des pièces en béton armé soumises à la flexion plane simple (*R. U. M.*, 1^{er} décembre 1924, § 4), j'écrivais : « Si la hauteur est imposée par des sujétions quelconques, la formule (1) indique qu'il n'existe pas de minimum mathématique, mais que $\Delta \pi$ est d'autant plus petit que b est plus réduit. On prendra donc pour b la plus petite valeur qui satisfasse aux quatre conditions :

$$\sigma_a \leq R_a, \sigma'_b \leq R'_b, \sigma''_b \leq R''_b,$$

et $b >$ espace nécessaire pour permettre la répartition convenable des barres ».

La formule (8') prouve que la conclusion de la première phrase est injustifiée, elle n'est basée que sur l'examen du cas $\sigma_a = R_a$. La seconde

phrase est compatible avec les résultats trouvés ci-dessus. Le minimum correspond en effet à $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$ (optimum pratique) ou à $\sigma'_b = R'_b$ et $\sigma_a < R_a$ (minimum théorique). Il est nécessaire que les pièces ainsi calculées satisfassent en outre aux conditions $\sigma''_b < R''_b$ et $b >$ espace nécessaire pour la répartition convenable des barres.

Si la valeur de b du minimum est trop petite pour satisfaire à ces conditions supplémentaires, il faudra l'augmenter de la quantité strictement nécessaire. Cette augmentation agira sur σ_a et σ'_b dans le sens d'une réduction, de telle sorte que les conditions $\sigma_a \leq R_a$ et $\sigma'_b \leq R'_b$ restent observées.

Le cas de minimum théorique décelé par la formule (8') est intéressant. Il signifie que dans certains cas de flexion plane simple, la hauteur h étant donnée, on peut obtenir une pièce plus économique que celle calculée pour $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_a$ en réduisant la largeur de la pièce et en augmentant la section de l'armature, de telle manière que $\sigma'_b = R'_b$ et $\sigma_a < R_a$. J'ignore si cette propriété a été déjà énoncée, je ne l'ai rencontrée dans aucun ouvrage et je crois qu'elle diffère de l'opinion générale, qui avait favorisé mon erreur antérieure.

§ 9. Influence du poids propre dans le cas de la flexion simple. —

Dans la flexion simple, il est facile et utile de tenir compte, par prédétermination, des effets du poids propre. Appelons encore, comme dans l'étude antérieure, M' le moment fléchissant dû à toutes les actions autres que la partie variable du poids propre et M le moment total. Ces deux grandeurs sont liées par la relation :

$$M = M' + K bh,$$

K étant une fonction des dimensions longitudinales et des conditions d'appui de la pièce.

L'équation du minimum est :

$$\frac{\beta'}{\alpha} \frac{B}{78 A - B} = - \frac{1}{h} \frac{d \Omega_a}{d b}.$$

Or :

$$\Omega_a = \frac{M}{m \gamma h R'_b \theta} = \frac{M' + K bh}{m \gamma h R'_b \theta}.$$

Donc :

$$\frac{d \Omega_a}{d b} = - \frac{M' + K bh}{m \gamma h R'_b \theta^2} \frac{d \theta}{d b} + \frac{K h}{m \gamma h R'_b \theta} = - \frac{\Omega_a d \theta}{\theta d b} + \frac{K}{m \gamma R'_b \theta}$$

Comme dans le § précédent :

$$0 = \frac{\gamma bh^2 R'_b}{2 M} - 1 = \frac{\gamma bh^2 R'_b}{2 (M' + K bh)} - 1,$$

d'où :

$$\frac{d\theta}{db} = \frac{1 + \theta}{b} \frac{M'}{M}$$

Donc :

$$\frac{d\Omega_a}{db} = -\frac{\Omega_a}{\theta} \frac{1 + \theta}{b} \frac{M'}{M} + \frac{K}{m\gamma R'_b \theta}$$

et :

$$\beta' \frac{mB}{\alpha 78A - B} = \frac{m\Omega_a}{bh} \frac{1 + \theta}{\theta} \frac{M'}{M} - \frac{mK}{m\gamma R'_b \theta h}$$

Après transformation, cette expression se réduit à :

$$\beta' \frac{mB}{\alpha 78A - B} = \frac{m\Omega_a}{bh} \left(\frac{1 + \theta}{\theta} - \frac{Kbh}{M} \frac{1 + 2\theta}{\theta} \right) \quad (7')$$

ou :

$$\beta' \frac{mB}{\alpha 78A - B} = \frac{1}{2\theta^2} - \frac{Kbh}{M} \frac{1 + 2\theta}{2(1 + \theta)\theta^2} \quad (8'')$$

L'équation (8''), généralisation de la formule (8'), représente une famille de courbes tracées sur la figure 7 avec les coordonnées habituelles. Elles sont cotées en valeurs décroissantes de $\frac{M'}{M} = 1 - \frac{Kbh}{M}$ variant de 1,00 à 0,50. La courbe cotée 1,00, qui représente l'équation (8') est la même que la courbe cotée $\frac{N}{bh R'_b} = \bar{0}$ de la figure 6. La courbe de minimum afférente à un cas concret se trouve d'autant plus en bas et à gauche du graphique que l'influence du poids propre est plus grande, la probabilité du minimum théorique en est accrue.

§ 10. **Applications.** — a) *Flexion plane simple.* Soient : $h_t = 36$ cm., $h = 33$ cm., $M' = 125.000$ kgcm la portée de la pièce est de 4 mètres. Nous supposons comme précédemment : $A = 80$, $B = 100$, $C = 10$.

Enfin, admettons : $R_a = 1200$, $R'_b = 50$ et $m = 15$ (bétons nos 2 ou 4 de l'A. B. S.). Donc : $\rho = 1,60$, $\delta = 0,91$, $2 - \delta = 1,09$,

$$\beta = 1 + \frac{C}{h_t B} = 1 + \frac{10}{0,36 \times 100} = 1,278,$$

$$\beta' = 1,09 \times 1,278 = 1,393.$$

(1) L'équation (7') présente une grande analogie avec la formule (9) de la *R. U. M.* du 1^{er} décembre 1924, p. 254, établie pour le problème correspondant dans le cas où b est donné, au lieu de h .

Supposons que $\alpha = 1,27$ (voir *R. U. M.* du 1^{er} décembre 1924, page 259). Il en résulte que :

$$\frac{\beta'}{\alpha} \frac{mB}{78A-B} = \frac{1,393}{1,27} \times \frac{1500}{6140} = 0,268.$$

Les coordonnées du point X sont ainsi déterminées.

Dans le cas étudié, $\frac{M'}{M}$ est voisin de 0,80. Le point X se trouve au-dessus de la courbe cotée 0,80 sur la figure 7, le minimum théorique est donc réalisable. Il est défini par le point Y de cette courbe ayant même abscisse que X, son ordonnée est $\theta = 1,14$. A cette valeur correspond $\sigma_a = 855 < R_a$. Comme les courbes ne sont qu'approximatives, il est à présumer que le minimum réel correspond à une valeur de θ un peu supérieure à 1,14, mais inférieure à 1,60. Le calcul avec prédé-

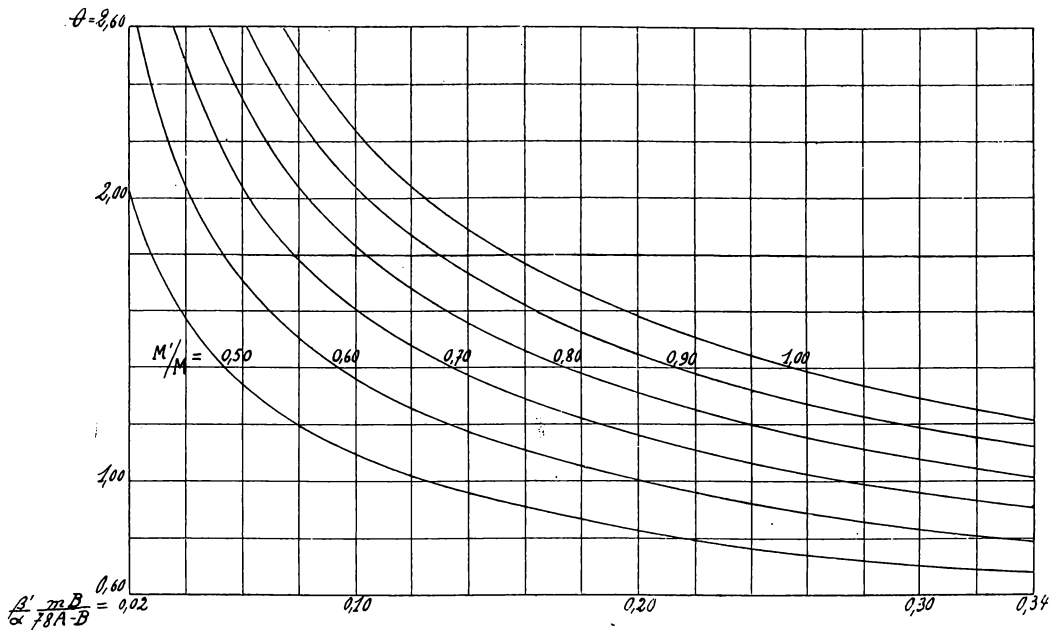


Fig. 7.

termination du poids propre donne les résultats suivants :

$$\theta = 1,60, \sigma_a = 1200 = R_a, b = 16,85 \text{ cm.}, \Omega_a = 4,45 \text{ cm}^2, \Delta \pi = 11,22 \text{ fr.} + c^{te}$$

$$\theta = 1,40, \sigma_a = 1050 < R_a, b = 15,55 \text{ cm.}, \Omega_a = 5,09 \text{ cm}^2, \Delta \pi = 11,11 \text{ fr.} + c^{te}$$

$$\theta = 1,20, \sigma_a = 900 < R_a, b = 14,25 \text{ cm.}, \Omega_a = 5,93 \text{ cm}^2, \Delta \pi = 11,17 \text{ fr.} + c^{te}$$

Les différences de prix sont insignifiantes, mais il est à remarquer que, pour $\theta = 1,20$, l'encombrement est réduit de 15,4%, et pour $\theta = 1,40$ de 7,7% ; la fatigue de l'armature est réduite de 25% ou de 12,5%.

En se référant au Règlement des Ponts et Chaussées, on constate des avantages plus considérables. Considérons : $R_a = 1000$, $R'_b = 40$, $m = 10$. Il en résulte que : $\rho = 2,50$ et :

$$\beta' \frac{mB}{78A-B} = \frac{1,393}{1,27} \times \frac{1000}{6140} = 0,1785.$$

Il faut adopter cette fois $\frac{M'}{M} = 0,70$. Le point X se trouve au-dessus de la courbe cotée 0,70 de la figure 7, le minimum est défini par le point Y de cette courbe d'ordonnée $\theta = 1,22$ ou environ 1,20. Il en résulte que $\sigma_a = 480 < R_a$.

Le calcul avec prédétermination du poids propre donne :

$$\theta = 2,50, \sigma_a = 1000 = R_a, b = 32 \text{ cm.}, \Omega_a = 6,05 \text{ cm}^2, \Delta\pi = 19,42 \text{ fr.} + c^{\text{te}}$$

$$\theta = 1,60, \sigma_a = 640 < R_a, b = 22,35 \text{ cm.}, \Omega_a = 8,85 \text{ cm}^2, \Delta\pi = 17,17 \text{ fr.} + c^{\text{te}}$$

$$\theta = 1,40, \sigma_a = 560 < R_a, b = 20,5 \text{ cm.}, \Omega_a = 10,07 \text{ cm}^2, \Delta\pi = 17,29 \text{ fr.} + c^{\text{te}}$$

Le minimum exact est donc voisin de $\theta = 1,50$. Mais en adoptant $\theta = 1,40$, on réalise une économie de 2,13 fr. par mètre courant par rapport à $\sigma_a = R_a$, c'est-à-dire de 11%, en même temps l'encombrement est diminué de plus de 35% et la fatigue du métal est réduite de 44%.

Même en adoptant $\theta = 1,80$, pour laquelle valeur : $\sigma_a = 720 < R_a$, $b = 24 \text{ cm.}$, $\Omega_a = 7,98 \text{ cm}^2$ et $\Delta\pi = 17,44 + c^{\text{te}}$, on obtient encore une économie de 1,98 fr. par mètre courant (10%) en réduisant l'encombrement de 23,7% et la fatigue du métal de 28%.

Tous ces résultats tiennent compte du poids propre, dont l'influence sur la sollicitation et donc sur les dimensions et l'économie, est notable. L'exemple montre également que les minima sont tout relatifs et que les conditions de sécurité exercent un effet sensible sur les prix.

b) *Flexion plane composée, compression excentrique.* — Soient : $h_t = 100$, $h = 95$, $N = 40.000$, $e = 95$, ainsi que $A = 80$ et $C = 10$. Supposons qu'il s'agisse de béton de ciment fondu pour lequel :

$$B = 170, \quad R'_b = 100 \quad \text{et} \quad m = 6.$$

Enfin, admettons $R_a = 1200$.

$$\text{Donc : } \rho = 2,00, \quad \delta = 0,95, \quad 2 - \delta = 1,05.$$

$$\beta = 1 + \frac{10}{170} = 1,059,$$

$$\beta = 1,05 \times 1,059 = 1,111.$$

Comme $\alpha = 1,28$ (voir § 7) :

$$\frac{\beta'}{\alpha} \frac{mB}{78 A - B} = \frac{1,111}{1,28} \times \frac{1020}{6070} = 0,1455.$$

Les coordonnées du point X sont ainsi définies.

Pour $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$, on trouve d'après un calcul exact :

$$b = 42 \text{ cm.}, \quad \Omega_a = 21,9 \text{ cm}^2, \quad \Delta\pi = 92,60 \text{ fr.} + \text{c}^{\text{te}}$$

Il en résulte que :

$$\frac{N}{bh R'_b} = \frac{40.000}{42 \times 95 \times 100} = 0,10.$$

Le point X est situé au dessus de la courbe cotée 0,10 sur la figure 6, le minimum théorique est donc possible. Il est défini par le point Y de cette courbe, dont l'ordonnée est $\theta = 1,35$. Il en résulte que $\sigma_a = 810 < R_a$. Par le calcul exact on trouve :

$$\theta = 1,50, \quad \sigma_a = 900 < R_a, \quad b = 35/9 \text{ cm}, \quad \Omega_a = 31,2 \text{ cm}^2, \quad \Delta\pi = 89 \text{ fr.} + \text{c}^{\text{te}}$$

$$\theta = 1,40, \quad \sigma_a = 840 < R_a, \quad b = 34,7 \text{ cm.}, \quad \Omega_a = 34,1 \text{ cm}^2, \quad \Delta\pi = 89 \text{ fr.} + \text{c}^{\text{te}}.$$

Le minimum exact est donc compris entre $\theta = 1,40$ et $\theta = 1,50$. Pour la première de ces valeurs, l'économie s'élève à 3,60 fr., soit 3,9%. La fatigue du métal est réduite de 30% et l'encombrement de 17,3%. Ces avantages peuvent paraître modérés eu égard à la prépondérance marquée des effets de la compression $\left(\frac{e}{h} = 1,00\right)$. Cela provient des valeurs élevées de h_t et de δ , qui font que β' est relativement faible et peu différent de 1,00.

c) *Flexion plane composée, traction excentrique.* — Reprenons les bétons 2 ou 4 de l'A. B. S. et soient :

$$h_t = 50, \quad h = 45, \quad \delta = 0,89, \quad N = -10.000, \quad e = -135, \quad \alpha = 1,28.$$

Nous savons que $\rho = 1,60$. D'autre part :

$$\beta = 1 + \frac{C}{h_t B} = 1 + \frac{10}{50} = 1,20,$$

$$\beta' = 1,11 \times 1,20 = 1,332,$$

$$\frac{\beta'}{\alpha} \frac{mB}{78 A - B} = \frac{1,332}{1,28} \times \frac{1500}{6140} = 0,255.$$

Les coordonnées du point X sont ainsi définies.

Pour $\sigma_a = R_a$, $\sigma'_b = R'_b$, on calcule : $b = 67,4$ cm. Il en résulte que :

$$\frac{N}{bh R'_b} = - \frac{10.000}{45 \times 67,4 \times 50} = - 0,066.$$

Sur la figure 6, le point X est situé très légèrement en dessous, presque sur la courbe cotée $- 0,066$. Le minimum théorique est donc pratiquement réalisé pour $\theta = \rho$. L'influence de la traction n'est pas insignifiante puisque $\frac{e}{h} = - 3$. Une augmentation de β ou de B, une réduction de α , de A ou de R'_b rendraient le minimum possible pour $\theta < \rho$, surtout si l'influence de la traction s'atténuait. On est toutefois près de la limite.

d) *Observations générales.* — Les quelques exemples précédents suffisent à montrer tout l'intérêt du minimum théorique pour $\sigma'_b = R'_b$, $\sigma_a < R_a$ lorsque h est donné d'avance. Il se caractérise par sa grande probabilité, même lorsque les conditions de sécurité sont peu favorables à un cas de minimum de ce genre (telles que celles du règlement de l'A. B. S.), et même lorsque la nature de la sollicitation est peu favorable, telle que la flexion simple et même de légères tractions très excentriques.

Dans les circonstances les plus propices, l'économie réalisée peut être appréciable. Mais même lorsqu'elle est faible, la solution du minimum procure les avantages d'une réduction de l'encombrement et du poids, et d'une diminution de la fatigue du métal, donc d'une augmentation de la sécurité.

Ces résultats diffèrent beaucoup, par leur probabilité et leur ampleur de ceux que l'on obtient pour le cas correspondant de minimum lorsque b est donné au lieu de h .

§ 11. **Pièce parallépipédique dont aucune dimension n'est donnée.** — Le problème comporte deux inconnues ; il serait très compliqué à étudier mathématiquement sous cette forme. Il y aurait aussi peu d'utilité à le faire, car il faut tenir compte des limites pratiques des dimensions. Généralement, il n'est pas permis de dépasser une certaine hauteur et, d'autre part, on ne peut descendre en dessous d'une certaine largeur parce que, notamment, il ne serait plus possible de disposer les barres d'armature.

La méthode la plus recommandable consiste à apprécier convenablement cette limite inférieure de b et de l'adopter, de calculer ensuite la valeur de h réalisant un minimum théorique ou un optimum pratique ; cette valeur est généralement acceptable. Il faut vérifier ensuite si $\sigma''_b < R'_b$ et si la largeur permet bien de disposer les barres d'armature ; au besoin, il faut rectifier la valeur choisie pour b .

Si l'on parlait du choix de la hauteur, il faudrait d'abord calculer la largeur b correspondant au minimum. Il se peut qu'elle soit inadmis-

sible. Mais qu'elle le soit ou non, la solution adoptée ne constitue généralement pas un minimum satisfaisant, car, pour la largeur b adoptée, il se peut qu'il existe une hauteur différente de celle choisie à priori qui donne lieu à un nouveau minimum. On serait ainsi amené, par opérations successives, à se rapprocher d'un minimum minimorum, dans la recherche duquel on serait arrêté lorsque b aurait atteint sa limite inférieure ou h sa limite supérieure. Comme celle-ci est moins rigide en règle générale que la limite inférieure de b , on arrive d'emblée à un résultat satisfaisant en commençant par supputer, comme il est recommandé ci-dessus, la valeur la plus petite admissible pour b , au besoin en s'aidant de calculs rapides.

CHAPITRE II

FLEXION PLANE COMPOSÉE DES PIÈCES

A SECTIONS RECTANGULAIRES DOUBLEMENT ARMÉES

1^{re} Section : Pièces parallépipédiques de largeur donnée

§ 12. **Cas du minimum correspondant à $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b < R'_b$.** — Le nouveau chapitre est dans sa majeure partie la généralisation du précédent. La section de l'armature comprimée étant Ω'_a , nous désignerons par α le rapport $\frac{\Omega'_a}{\Omega_a}$. Lorsque α est donné d'avance, les formules de prix du chapitre précédent ne sont modifiées que par la substitution à α d'un facteur α' tel que :

$$\alpha' = \alpha (1 + k\alpha),$$

k étant inférieur ou égal à 1.

Nous établirons d'après cela des formules et des graphiques analogues à ceux du chapitre précédent. Les conclusions générales et les résultats pratiques se modifieront cependant par suite de l'augmentation de la valeur de α' par rapport à α . Il en résulte que la probabilité des minima correspondant à $\sigma_a = R_a$ augmentera au détriment de celle des minima correspondant à $\sigma'_b = R'_b$. Ce déplacement sera d'autant plus accentué que α sera plus grand. Le minimum correspondant à $\sigma'_b = R'_b$ ne sera plus guère possible que si α est petit, β élevé et que si l'influence de l'effort normal de compression, ou du poids propre dans le cas de la flexion simple, est très grande. Inversement, les valeurs élevées de α favoriseront les minima correspondant à $\sigma_a = R_a$.

Dans le cas du présent paragraphe, la formule (1') du prix (voir § 3), devient donc :

$$\Delta\pi = \Delta l [bh \beta B + \alpha' (78 A - B) \Omega_a] + c^{\text{te}} \quad (1''')$$

D'après le § 2 :

$$\Omega_a = \frac{N}{\gamma h R_a} [e - 0,5 a - (\gamma - 0,5) h].$$

La condition du minimum de la fonction (1''') est :

$$b\beta B + \alpha' (78 A - B) \frac{d\Omega_a}{dh} = 0 \quad (2'')$$

En admettant comme précédemment l'invariabilité de γ , on a :

$$\frac{d\Omega_a}{dh} = \frac{N(e - 0,5 a)}{\gamma h^2 R_a},$$

ce qui fait que la condition du minimum devient :

$$h^2 b \beta B - \alpha' (78 A - B) \frac{N(e - 0,5 a)}{\gamma R_a},$$

d'où :

$$h_{ec} = \sqrt{\frac{\alpha' 78 A - B}{\beta} \frac{N(e - 0,5 a)}{\gamma b R_a}} \quad (9)$$

Cette formule est l'analogue de la formule (5) du § 4, elle n'en diffère que par la substitution de α' à α .

Si la position de l'effort normal est déterminée par sa distance e' , à la face la plus voisine, la formule devient en cas de compression :

$$h_{ec} = \sqrt{\frac{\alpha' 78 A - B}{\beta} \frac{Ne'}{\gamma b R_a}} \quad (9'),$$

en cas de traction:

$$h_{ec} = \sqrt{\frac{\alpha' 78 A - B}{\beta} \frac{N(e' - a)}{\gamma b R_a}} \quad (9'')$$

formules analogues à (5') et (5'').

En toute hypothèse, pour que le minimum soit admissible, il faut que $\sigma'_b < R'_b$, donc que $h_{ec} > h_s$, h_s étant la hauteur correspondant à $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$.

Comme application, reprenons l'exemple a) du § 7, défini par :
 $b = 40$ cm., $a = 5$ cm., $N = 10.000$ kgs, $e = 250$ cm., $R = 1200$ kg/cm²,
 $R'_b = 50$ kg/cm², $m = 15$ (bétons nos 2 ou 4 de l'A. B. S.). Dans le cas de l'armature simple, nous avons trouvé que la solution optimum correspond à $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$ et donne :

$$h = 98,8 \text{ cm.} \quad \Omega_a = 21,3 \text{ cm}^2, \quad \Delta\pi = 76 \text{ fr.} + \text{c}^{\text{te.}}$$

(Les hypothèses de prix sont celles du § 7, c'est-à-dire : $B = 100$, $A = 80$, $C = 10$, d'où $\beta = 1,50$; d'autre part, $\alpha = 1,28$),

Supposons que la pièce doive être armée symétriquement, d'où $\alpha = 1$. Pour $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$, on trouve par le calcul exact :

$$h_s = 70,4 \text{ cm. ; } \Omega_a = 29,1 \text{ cm}^2 \text{ et } \Delta\pi = 88,90 \text{ fr.} + c^{10}$$

en admettant $\alpha' = \alpha (1 + \alpha)$.

D'après la formule (9) :

$$h_{ec} = \sqrt{\frac{2,56 \ 6140 \ 10.000 (250 - 2,5)}{1,50 \ 100 \ 0,85 \times 40 \times 1200}} = 79,6 \text{ cm.}$$

Donc : $h_{ec} > h_s$, le minimum théorique est admissible.

Pour un calcul exact, on trouve que si $h = 79,6 \text{ cm}$ et $\sigma_a = R_a$:

$$\theta = 1,77, \sigma'_b = 45,2 \text{ kg/cm}^2 < R'_b, \Omega_a = 25,2 \text{ cm}^2 \text{ et } \Delta\pi = 87,40 + c^{10}$$

L'économie réalisée est de 1,50 fr. par mètre courant, donc faible (environ 1,70%). Le minimum trouvé ci-dessus n'est qu'approximatif, la valeur exacte de θ doit être un peu supérieure à 1,77, toutefois, l'économie supplémentaire ne peut être que minime, pour les raisons connues. L'augmentation de prix par rapport à la pièce simplement armée reste en tous cas élevée.

Nous pouvons conclure que le minimum théorique correspondant à $\sigma_a = R_a$ en cas d'armature double est très probable pour les pièces soumises à la flexion plane simple ou à la traction excentrique et d'autant plus que la valeur de α est plus élevée. Il est possible également en cas de compression excentrique modérée si la valeur de α n'est pas trop faible. Dans tous les cas, si le minimum théorique n'est pas réalisable, à cause de l'insuffisance de α ou de l'importance de la compression, la solution $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$ est généralement la plus favorable. Si la hauteur disponible permet d'avoir recours à l'armature simple et qu'aucune autre circonstance n'exige une double armature, la première solution est plus économique que la seconde.

§ 13. **Cas du minimum correspondant à $\sigma'_b = R'_b$, $\sigma_a > R_a$.** — Ce paragraphe est l'analogie du § 5. Le prix est donné comme dans le paragraphe précédent par la formule (1'''), la condition du minimum par l'équation (2'').

Comme :

$$\Omega_a = \frac{N}{\gamma \theta h m R'_b} [e - 0,5 a - (\gamma - 0,5) h],$$

en admettant l'invariabilité de γ , on peut écrire :

$$\frac{d\Omega_a}{dh} = \frac{-N}{\gamma \theta m R'_b} \frac{e - 0,5 a}{h^2} - \frac{N[e - 0,5 a - h(\gamma - 0,5)]}{\gamma h m R'_b \theta^2} \frac{d\theta}{dh}.$$

Or :

$$\Omega_a \sigma_a = \frac{bv'}{2} R'_b + \theta' \times \Omega_a m R'_b - N$$

et :

$$v' = \frac{h}{1 + \theta} \text{ (voir § 2 et fig. 1).}$$

Par combinaison, on peut écrire :

$$\frac{bh}{2(1 + \theta)} R'_b + \theta' \times \Omega_a m R'_b - N = \frac{N}{\gamma h} [e - 0,5 a (\gamma - 0,5) h],$$

d'où, en admettant l'invariabilité de θ' :

$$\theta = \frac{bh R'_b}{\frac{2N}{\gamma h} (e - 0,5 a + 0,5 h) - 2\theta' \times \Omega_a m R'_b} - 1,$$

et :

$$\frac{d\theta}{dh} = \frac{\left[\frac{2N}{\gamma h} (e - 0,5 a + 0,5 h) - 2\theta' \times \Omega_a m R'_b \right] b R'_b +}{\left[\frac{2N}{\gamma h} (e - 0,5 a + 0,5 h) - 2\theta' \times \Omega_a m R'_b \right]^2} +$$

$$+ \frac{bh R'_b \left[\frac{2N}{\gamma h^2} (e - 0,5 a) + 2\theta' \times m R'_b \frac{d\Omega_a}{dh} \right]}{\left[\frac{2N}{\gamma h} (e - 0,5 a + 0,5 h) - 2\theta' \times \Omega_a m R'_b \right]^2}$$

$$\frac{d\theta}{dh} = \frac{(1 + \theta)^2}{bh^2 R'_b} \left[\frac{bh R'_b}{1 + \theta} + \frac{2N}{\gamma h} (e - 0,5 a) + 2\theta' \times m R'_b h \frac{d\Omega_a}{dh} \right].$$

Introduisons cette expression dans la formule de $\frac{d\Omega_a}{dh}$, elle devient :

$$\frac{d\Omega_a}{dh} = \frac{-N}{\gamma h^2 \theta m R'_b} \left\{ (e - 0,5 a) + [e - 0,5 a - h(\gamma - 0,5)] \frac{1 + \theta}{\theta} + \right.$$

$$+ \frac{2(1 + \theta)^2 N (e - 0,5 a) [e - 0,5 a - h(\gamma - 0,5)]}{\gamma bh^2 \theta R'_b} +$$

$$\left. + \frac{2\theta' \times m [e - 0,5 a (\gamma - 0,5) h] (1 + \theta)^2 \frac{d\Omega_a}{dh}}{b\theta} \right\}$$

Après de multiples transformations, cette expression devient finalement :

$$\frac{d \Omega_a}{dh} = \frac{-\frac{\Omega_a}{h} \left[\frac{1+2\theta}{\theta} + 2 \frac{(1+\theta)^2 N (e-0,5 a)}{\theta \gamma b h^2 R'_b} \right] - \frac{N (\gamma-0,5)}{\gamma m h R'_b \theta}}{1 + 2 \theta' \alpha \frac{m \Omega_a (1+\theta)^2}{b h \theta}}$$

En introduisant cette expression dans la formule (2'') du minimum, on obtient :

$$\frac{\beta}{\alpha' 78 A - B} \frac{m B}{b h} = \frac{\frac{m \Omega_a}{b h} \left[\frac{1+2\theta}{\theta} + \frac{2(1+\theta)^2 N (e-0,5 a)}{\theta \gamma b h^2 R'_b} \right] + \frac{N (\gamma-0,5)}{\gamma b h R'_b \theta}}{1 + 2 \theta' \alpha \frac{m \Omega_a (1+\theta)^2}{b h \theta}} \quad (10)$$

Cette formule est l'analogie de la formule (6) du § 5. Pour une valeur donnée de α , le second membre n'est fonction que des variables θ et $\frac{N}{b h R'_b}$. Il est donc possible, pour toute valeur de α , de tracer un graphique analogue à celui de la figure 4 et dont l'usage serait identique. Il faut un abaque pour chaque valeur de α , celui de la figure 4 correspond à $\alpha = 0$.

Les applications du § 7 ont montré que, même lorsque $\alpha = 0$, le minimum théorique n'est réalisable que si N est très élevé et $\frac{e}{h}$ très réduit. Il semble bien que, même avec les hypothèses les plus favorables, le minimum est improbable pour des valeurs élevées de α , voisines de 1, qui sont les plus fréquentes. Seuls les abaques relatifs à des valeurs faibles de α , voisines de 0,25, présenteraient quelque intérêt et encore seraient-ils d'un usage très restreint. Pour ces raisons, il a paru inutile de les faire figurer.

On peut traiter comme suit, sans disposer de graphique, tout cas qui paraîtrait intéressant, par exemple une forte compression peu excentrique combinée avec une faible valeur de α . On calcule la valeur du second membre de la formule (10) en faisant $\theta = \rho$. Pour que le minimum soit admissible, il faut que ce résultat soit inférieur à la valeur réelle de $\frac{\beta}{\alpha' 78 A - B} \frac{m B}{b h}$. Si cette condition est réalisée, d'après la différence constatée, on suppose la valeur de θ donnant le minimum. L'essentiel est de déceler la possibilité du minimum, on choisit ensuite la solution qui paraît la plus convenable, en s'aidant au besoin de calculs expéditifs.

En cas de flexion simple, $N = 0$ et $e = \infty$, la formule (10) devient :

$$\frac{\beta}{\alpha' 78 A - B} \frac{m B}{b h} = \frac{m \Omega_a \frac{1+2\theta}{\theta} + 2(1+\theta)^2 \frac{m \Omega_a}{b h}}{1 + 2 \theta' \alpha \frac{m \Omega_a (1+\theta)^2}{b h \theta}} \quad (10')$$

car :

$$N(e - 0,5a) = M \quad \text{et} \quad \frac{M}{\gamma b h^2 R'_b \theta} = \frac{m \Omega_a}{b h}.$$

On pourrait établir cette formule directement comme la formule (10).

Nous avons vu dans l'étude antérieure qu'elle ne présente aucun intérêt pratique, c'est pourquoi nous l'avons omise. Elle ne tient pas compte des effets du poids propre.

Si la pièce est à armature simple, $\alpha = 0$ et la formule (10) devient :

$$\frac{\beta}{\alpha'} \frac{mB}{78 A - B} = \frac{m \Omega_a}{b h} \left[\frac{1 + 2\theta}{\theta} + \frac{2(1 + \theta)^2 N(e - 0,5a)}{\gamma b h^2 R'_b \theta} \right] + \frac{N(\gamma - 0,5)}{\gamma b h \theta R'_b}$$

En remplaçant :

$$\frac{N(e - 0,5a)}{\gamma b h^2 R'_b} \quad \text{par} \quad \frac{m \Omega_a}{b h} \theta + \frac{N(\gamma - 0,5)}{\gamma b h R'_b}$$

et en substituant à $\frac{m \Omega_a}{b h}$ son expression $\frac{1}{2\theta(1 + \theta)} - \frac{N}{b h R'_b \theta}$, on retrouve la formule (6) du § 5.

Enfin, en faisant $\alpha = 0$ et $\alpha' = \alpha$ dans la formule (10'), ce qui correspond à la flexion plane simple d'une pièce à armature simple, on retrouve identiquement la formule (5) de l'étude antérieure (*R. U. M.* 1^{er} décembre 1924, page 251).

Dans le cas où la position de l'effet normal N est définie par sa distance e' à la face la plus voisine, la formule (10) s'écrit, en cas de compression :

$$\frac{\beta}{\alpha'} \frac{mB}{78 A - B} = \frac{\frac{m \Omega_a}{b h} \left[\frac{1 + 2\theta}{\theta} + \frac{2(1 + \theta)^2 N e'}{\gamma b h^2 R'_b \theta} \right] - \frac{N(1 - \gamma)}{\gamma b h R'_b \theta}}{1 + 2\theta \times \frac{m \Omega_a (1 + \theta)^2}{b h \theta}}, \quad (10'')$$

en cas de traction :

$$\frac{\beta}{\alpha'} \frac{mB}{78 A - B} = \frac{\frac{m \Omega_a}{b h} \left[\frac{1 + 2\theta}{\theta} + \frac{2(1 + \theta)^2 N(e' - a)}{\gamma b h^2 R'_b \theta} \right] + \frac{N}{b h \theta R'_b}}{1 + 2\theta \times \frac{m \Omega_a (1 + \theta)^2}{b h \theta}} \quad (10''')$$

formules analogues aux formules (6') et (6'') du § 5 ; les observations faites au sujet de l'équation (10) s'y appliquent également.

§ 14. **Cas de l'optimum correspondant à $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$.** — D'après ce que nous avons vu dans les deux paragraphes précédents, lorsque le minimum théorique pour $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b < R'_b$ n'est pas

admissible, c'est en règle générale à $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$ que correspond la solution optimum. Ce n'est que dans des cas exceptionnels que l'on devra s'assurer de la manière indiquée au paragraphe précédent si le minimum théorique pour $\sigma'_b = R'_b$ et $\sigma_a < R_a$ n'est pas réalisable.

2^e Section : Pièces parallépipédiques de hauteur donnée

§15. Cas du minimum correspondant à $\sigma'_b = R'_b$ et $\sigma_a < R_a$. Ce paragraphe est l'analogie du § 8, dont il est la généralisation. Pour la même raison que dans la section précédente, l'augmentation de α' par rapport à α , la probabilité du minimum théorique est réduite. Comme toutefois sa fréquence est grande pour les pièces à armatures simples, le problème conserve plus d'intérêt en cas d'armature double que celui du § 13.

Les observations préliminaires du § 8 sont applicables au cas présent. La solution $\sigma'_a = R_a$, $\sigma'_b < R'_b$ ne peut être économique. Si le minimum correspondant à $\sigma'_b = R'_b$, $\sigma_a < R_a$ n'est pas réalisable, la solution optimum correspond à $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$.

La formule du prix s'obtient en substituant α' à α dans la formule (1'')

$$\Delta \pi = \Delta l [bh \beta' B + \alpha' (78 A - B) \Omega_a] + c^{10}. \quad (1^{iv})$$

La condition du minimum est :

$$h \beta' B + \alpha' (78 A - B) \frac{d \Omega_a}{b d} = 0 \quad (2''')$$

$$\text{Or : } \quad \Omega_a = \frac{N}{\gamma h \theta m R'_b} \left[e - 0,5 a - h (\gamma - 0,5) \right],$$

d'où, en admettant l'invariabilité de γ :

$$\frac{d \Omega_a}{d b} = \frac{-N [e - 0,5 a - h (\gamma - 0,5)]}{\gamma h \theta^2 m R'_b} \frac{d \theta}{d b} = - \frac{\Omega_a}{\theta} \frac{d \theta}{d b}.$$

$$\text{Or : } \quad \theta = \frac{b h R'_b}{\frac{2 N}{\gamma h} (e - 0,5 a + 0,5 h) - 2 \theta' \times \Omega_a m R'_b} - 1.$$

d'où, en admettant l'invariabilité de θ' :

$$\begin{aligned} \frac{d \theta}{d b} = & \frac{h R'_b}{\frac{2 N}{\gamma h} (e - 0,5 a + 0,5 h) - 2 \theta' \times \Omega_a m R'_b} \\ & + \frac{2 b h R'_b \theta' \times m R'_b \frac{d \Omega_a}{d b}}{\left[\frac{2 N}{\gamma h} (e - 0,5 a + 0,5 h) - 2 \theta' \times \Omega_a m R'_b \right]^2} \end{aligned}$$

ou, après réduction :

$$\frac{d\theta}{db} = \frac{1+\theta}{b} \left[1 + \frac{2(1+\theta)}{bh} \theta' \times m b \frac{d\Omega_a}{db} \right].$$

En introduisant cette expression dans la formule de $\frac{d\Omega_a}{db}$, on obtient :

$$\frac{d\Omega_a}{db} \left[1 + 2\theta' \times \frac{m\Omega_a}{bh} \frac{(1+\theta)^2}{\theta} \right] = -\frac{\Omega_a}{b} \frac{1+\theta}{\theta}.$$

d'où :

$$\frac{d\Omega_a}{db} = \frac{-\frac{\Omega_a}{b} \frac{1+\theta}{\theta}}{1 + 2\theta' \times \frac{m\Omega_a}{bh} \frac{(1+\theta)^2}{\theta}}$$

La condition du minimum peut donc s'écrire :

$$\frac{\beta'}{\alpha'} \frac{mB}{78A-B} = \frac{\frac{m\Omega_a}{bh} \frac{1+\theta}{\theta}}{1 + 2\theta' \times \frac{m\Omega_a}{bh} \frac{(1+\theta)^2}{\theta}} \quad (11)$$

Cette formule est la généralisation de la formule (7) du § 8, on la retrouve en faisant $x = 0$ et $\alpha = \alpha'$. Elle convient pour la flexion simple comme pour la flexion composée.

Nous savons, d'après le § 2, que :

$$\frac{m\Omega_a}{bh} = \frac{1}{2\theta(1+\theta)} - \frac{N}{bh\theta R'_b} \frac{1}{1 - \frac{\theta'}{\theta} x}$$

En introduisant cette expression dans la formule (11), on obtient comme résultat final :

$$\frac{\beta'}{\alpha'} \frac{mB}{78A-B} = \frac{\frac{1}{2\theta^2} - \frac{N}{bhR'_b} \frac{1+\theta}{\theta^2}}{1 + \frac{\theta'}{\theta^2} x \left[1 - \frac{2N}{bhR'_b} (1+\theta)^2 \right]} \quad (12)$$

Cette formule est la généralisation de la formule (8), que l'on retrouve en faisant $x = 0$ et $\alpha' = \alpha$.

Pour la flexion simple, $N = 0$ et la formule devient :

$$\frac{\beta'}{\alpha'} \frac{mB}{78A - B} = \frac{1}{1 + \frac{\theta'}{\theta^2} x} \quad (12')$$

c'est la généralisation de la formule (8'), que l'on retrouve en faisant $x = 0$ et $\alpha' = \alpha$.

Cette formule ne tient pas compte de l'influence du poids propre. Si l'on veut en tenir compte et que l'on pose :

$$M = M' + Kbh,$$

M , M' et K ayant les mêmes significations que dans le § 9, on obtient :

$$\frac{\beta'}{\alpha'} \frac{mB}{78A - B} = \frac{1}{1 + \frac{\theta'}{\theta^2} x} \frac{Kbh}{M} \frac{1 + 2\theta - \theta'x}{2\theta(1 + \theta)(\theta - \theta'x)} \quad (12'')$$

Cette formule est la généralisation de la formule (8'') ; on la retrouve en faisant $x = 0$ et $\alpha = \alpha'$.

La formule analogue à la formule (7') tenant compte de l'effet du poids propre, s'écrit :

$$\frac{\beta'}{\alpha'} \frac{mB}{78A - B} = \frac{m\Omega_a}{bh} \left(1 - \frac{\theta'}{\theta} x\right) \frac{\left[\frac{1 + \theta}{\theta} - \frac{Kbh}{M} \frac{1 + 2\theta - \theta'x}{\theta - \theta'x}\right]}{1 + \frac{\theta'}{\theta^2} x} \quad (11')$$

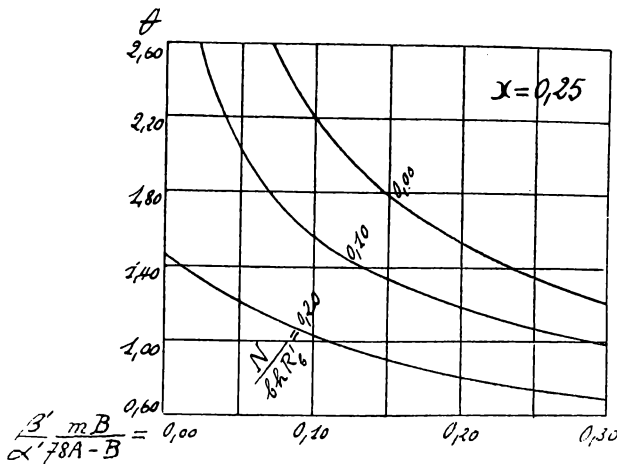


Fig. 8.

Les formules (12) et (12'') peuvent être représentées par des graphiques analogues respectivement à ceux des figures 6 et 7 pour une valeur donnée de x . Pour permettre l'étude de tous les cas pratiques, il faut plusieurs abaques établis pour des valeurs convenablement échelonnées de x . A titre d'exemple, j'ai représenté sommairement dans les figures 8 et 9 les graphiques représentant la formule (12) pour $x = 0,25$

figures 8 et 9 les graphiques représentant la formule (12) pour $x = 0,25$

et $\alpha = 1$. Ils ont été établis en adoptant $\gamma = 0,85$ et $\theta' = \frac{2}{3}$, ce qui correspond à l'hypothèse que l'armature comprimée se trouve au niveau de la résultante des tensions de compression du béton. Ces abaques sont donc très approximatifs ; ils présentent dans leurs parties utiles peu de différence avec la figure 6. Les résultats diffèrent surtout par suite de la diminution de $\frac{\beta'}{\alpha'} \frac{m B}{78 A - B}$ à mesure que α augmente.

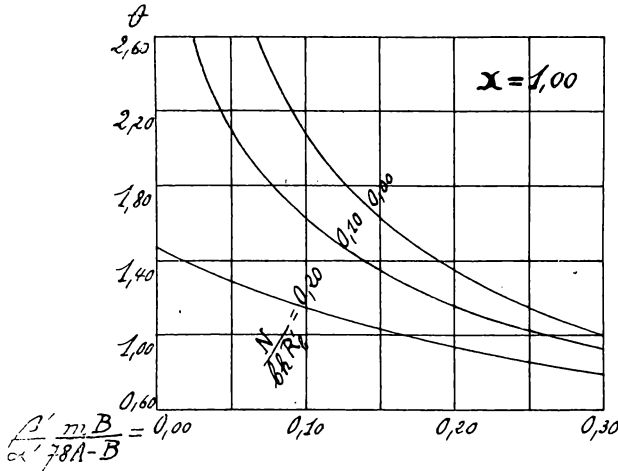


Fig. 9.

Pour donner une idée comparative de l'influence de l'armature comprimée, considérons l'exemple suivant, qui pourrait se rapporter à un pilier comprimé excentriquement, par exemple par une charge agissant sur un encorbellement. Soient : $h_1 = 54$ cm., $h = 50$ cm., $a = a' = 4$ cm., d'où $\delta = 0,92$, $N = 20.000$ kgs, $e = 50$ cm.. Nous supposons $R_a = 1200$

kg/cm², $R'_b = 50$ kg/cm², $m = 15$ (bétons n° 2 ou 4 de l'A. B. S.). Nous conservons pour A, B, C et α les valeurs précédemment adoptées.

Donc :

$$\rho = 1,60, \beta = 1 + \frac{10}{54} = 1,185.$$

$$\beta' = 1,08 \times 1,185 = 1,28,$$

et :

$$\frac{\beta'}{\alpha'} \frac{m B}{78 A - B} = \frac{1,28 \cdot 1500}{\alpha' \cdot 6140} = \frac{0,244}{1 + \alpha}$$

en admettant $\alpha' = 1,28 (1 + \alpha)$.

Par le calcul exact, on trouve les résultats suivants, pour $\rho = 1,60$:

α	b	Ω_a	$\Delta \pi$	$\frac{N}{bh R'_b}$	$\frac{\beta'}{\alpha'} \frac{m B}{78 A - B}$
0	69,6	11,15	49,76 + c ^{te}	0,115	0,244
0,25	66	11,15	51,56 + c ^{te}	0,12	0,195
1,00	55,5	11,10	52,45 + c ^{te}	0,143	0,122

En se reportant aux figures 6, 8 et 9, on trouve que le point X est dans chaque cas situé au-dessus de la courbe $\frac{N}{b h R'_b}$ correspondante et que les trois minima sont donc réalisables, les valeurs approximatives correspondantes de θ sont respectivement :

$$\theta = 1,04 \quad , \quad 1,12 \quad \text{et} \quad 1,32$$

Donc, à mesure que α , augmente, le minimum se rapproche de $\theta = \rho$, plus encore que ne l'indiquent les valeurs ci-dessus, qui ne sont qu'approximatives et inférieures aux valeurs donnant les minima réels. Pour $\alpha = 1$, le minimum exact doit être très voisin de $\theta = \rho$, l'économie réalisable doit être insignifiante.

Bien que les différences de prix soient modérées, c'est la pièce simplement armée qui est la plus économique. C'est elle qui donne le minimum minimorum. Sa largeur pour $\theta = \rho$ est plus grande que celle de la pièce à armatures symétriques ($\alpha = 1$). Mais les applications du § 10 montrent qu'avec la valeur de θ correspondant au minimum (dans le cas présent 1,04 environ), on peut réduire cette largeur dans de notables proportions. En adoptant cette solution, on obtient une pièce à armature simple, travaillant au taux réduit de 780 kg/cm², de dimensions très voisines de la pièce symétriquement armée, mais beaucoup plus économique et présentant une plus grande sécurité. C'est la justification de la remarque exprimée en introduction à ce mémoire, que l'étude économique de la flexion du béton armé plaide en faveur de l'armature simple dans tous les cas où une seconde armature n'est pas rendue nécessaire par des raisons déterminées.

Des graphiques analogues à ceux de la figure 7 représentent la formule (12'') pour diverses valeurs de α permettraient d'étudier, en tenant compte du poids propre, l'économie des pièces à armatures doubles simplement fléchies. Il n'a pas paru utile de les reproduire, le problème présente moins d'intérêt. On peut d'ailleurs s'aider au moyen des courbes cotées 0 des figures 8 et 9, qui sont celles de la flexion simple lorsque $\frac{M'}{M} = 1,00$, c'est-à-dire lorsque l'on ne tient pas compte du poids propre. Elles permettent de se faire une opinion suffisante dans l'examen des cas concrets.

Reprenons l'exemple a) du § 10 en supposant $\alpha = 1$. Avec les conditions de sécurité de l'A. B. S., on trouve :

$$\rho = 1,60 \quad , \quad \frac{\beta'}{\alpha'} \frac{m B}{78 A - B} = 0,134.$$

Le point X est situé sur la figure 9 assez sensiblement en dessous de la courbe cotée 0 (correspondant à $\frac{M'}{M} = 1$). Comme $\frac{M'}{M} = 0,80$, on se rend compte que le point X doit se trouver très près de la courbe

qui serait cotée $\frac{M'}{M} = 0,80$, de sorte que le minimum pratique correspond sensiblement à $\theta = \rho$.

Avec les conditions de l'Administration des Ponts et Chaussées :

$$\rho = 2,50, \frac{\beta'}{\alpha'} \frac{mB}{78A - B} = 0,0892.$$

Le point X se trouve au-dessus de la courbe cotée 0 (ou $\frac{M'}{M} = 1$), il est à fortiori au-dessus de celle qui correspondrait à la cote 0,70. On peut apprécier que le minimum est réalisé aux environs de $\theta = 2,00$.

Cette application, quoique sommaire, suffit pour montrer que le cas du minimum correspondant à $\sigma'_b = R'_b$ et $\sigma_a < R_a$ garde une certaine probabilité pour la flexion simple des pièces doublement armées, même lorsque α atteint la valeur limite 1,00. Pour des faibles valeurs de α , le minimum se réalise fréquemment ; le graphique de la figure 7 peut donner dans ce cas des indications utiles.

Si l'on ne dispose d'aucun graphique, on peut se servir des formules (12) ou (12'') de la manière indiquée pour la formule (10) au § 13. Il faut veiller notamment à apprécier opportunément la valeur de θ' , surtout lorsqu'il s'agit de sections de faible étendue fortement armées en compression, ce qui se présente fréquemment pour les colonnes. Dans de telles circonstances, on ne peut se fier beaucoup à un abaque tel que celui de la figure 9, parce qu'il est établi pour une valeur fixe de θ' , telle que $\frac{2}{3}$. Lorsque α est très élevé, l'hypothèse de l'invariabilité de θ' peut fausser sérieusement les résultats, comme le montre l'étude de la section 3 ci-après.

§ 16. Pièce parallépipédique dont aucune dimension n'est imposée. — Toutes les recommandations du § 11 peuvent être conservées avec, dans l'application, les tempéraments qui résultent de l'étude détaillée des paragraphes précédents.

3° Section : Pièces parallépipédiques comprimées de section imposée

§ 17. Recherche du minimum de l'armature totale. — Lorsque les dimensions extérieures de la pièce sont complètement données à l'avance, le problème de l'économie ne peut plus consister que dans le calcul du minimum de l'armature totale, indépendamment des prix unitaires, mais en observant les conditions de sécurité :

$$\sigma_a \leq R_a \quad \text{et} \quad \sigma'_b \leq R'_b.$$

Il faut tout d'abord rechercher si une armature simple n'est pas suffisante. Dans l'affirmative, il n'existe pas de minimum théorique, la solution optimum correspond à $\sigma_a = R_a$, il faut que $\sigma'_b \leq R'_b$.

Si $\sigma'_b > R'_b$, c'est l'indice qu'il faut une armature de compression. L'armature totale est alors susceptible d'un minimum, ainsi que nous l'établissons ci-après.

En faisant l'hypothèse que l'armature comprimée se trouve au niveau de la résultante des tensions du béton (donc au tiers supérieur de la zone comprimée), on peut établir la formule du minimum :

$$\frac{\theta}{1 + \theta} = \sqrt{\frac{2N(e - 0,167h - 0,5a)}{bh^2 R'_b}} \quad (13)$$

présentée par M. M. Mayer dans son ouvrage : « Die Wirtschaftlichkeit als Konstruktionsprinzip im Eisenbetonbau » (Berlin, 1913, page 68).

J'ai discuté cette formule dans le n° 62 du « Constructeur de ciment armé » (Paris, novembre 1924). Elle donne des résultats satisfaisants pour les sections d'assez grandes dimensions, modérément armées en compression et pour lesquelles le moment fléchissant n'est pas négligeable par rapport à l'effort normal. Par contre, lorsque les pièces sont de dimensions restreintes, mais fortement armées, ce qui se réalise surtout dans les colonnes, les valeurs de θ calculées par cette formule peuvent différer considérablement de celles qui correspondent aux minima réels. Cette divergence doit provenir de ce que l'emplacement assigné à l'armature comprimée par l'hypothèse de M. Mayer est variable avec la valeur de θ et peut différer sensiblement de l'emplacement réel fixe. Comme $\sigma'_a = \frac{2}{3} mR'_b$ est invariable, les variations de Ω'_a sont peu importantes, l'économie se réalise surtout en réduisant Ω_a , par augmentation de σ_a , c'est-à-dire de θ . La formule favorise donc les valeurs élevées de θ (1). La valeur fictive variable de

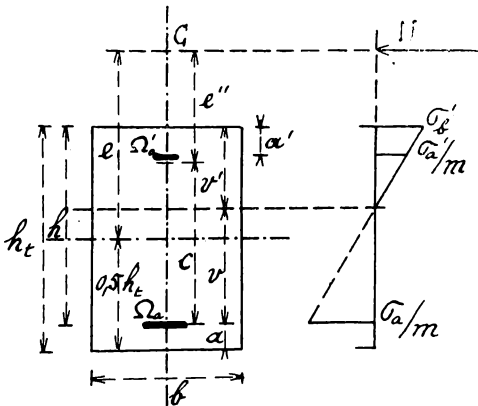


Fig. 10.

a' , égale à $\frac{h}{3(1 + \theta)}$ peut être ainsi notablement inférieure à la valeur réelle de a' , surtout si la hauteur de la section est faible. Au contraire, si l'on observe que a' est constant, on constate un intérêt à réduire θ , parce que σ'_a augmente et que Ω'_a diminue sensiblement. Ces observations concordent avec la remarque finale du § 15.

J'ai proposé une nouvelle formule approximative qui

(1) D'autant plus qu'il en résulte une diminution de l'excentricité réelle de N.

visé à diminuer cette cause d'erreur et donne des résultats satisfaisants dans les cas pour lesquels la formule (13) est impropre.

Désignons comme précédemment par c la distance de l'armature étendue à la résultante totale des tensions de compression et par e'' la distance de cette résultante à l'effort normal N (voir figure 10). Nous avons donc :

$$e'' = e + 0,5 h - 0,5 a - c.$$

En exprimant les équilibres de rotation autour du centre d'action de la résultante totale des tensions de compression et de l'armature étendue, on obtient :

$$\Omega_a = \frac{N(c + e'')}{c \sigma_a} - \frac{N}{\sigma_a} = \frac{1}{\theta} \left[\frac{N(c + e'')}{cm \sigma'_b} - \frac{N}{m \sigma'_b} \right],$$

$$\Omega'_a = \frac{N(c + e'')}{c \sigma'_a} - \frac{bv'}{2} \frac{\sigma'_b}{\sigma'_a}.$$

Or :

$$\sigma'_a = m \sigma'_b \frac{v' - a'}{v'} = \theta' m \sigma'_b.$$

D'où :

$$\Omega'_a = \frac{N(c + e'')}{\theta' cm \sigma'_b} - \frac{bv'}{2} \frac{1}{m \theta'}.$$

En posant :

$$\delta' = \frac{h - a'}{h}, \text{ on a : } \theta' = 1 - (1 - \delta')(1 + \theta).$$

Enfin, comme :

$$v' = \frac{h}{1 + \theta},$$

on peut écrire enfin :

$$\Omega'_a = \left[\frac{N(c + e'')}{cm \sigma'_b} - \frac{bh}{m} \frac{1}{2(1 + \theta)} \right] \frac{1}{1 - (1 - \delta')(1 + \theta)}.$$

La condition du minimum de $\Omega_a + \Omega'_a$ est :

$$\frac{d\Omega_a}{d\theta} + \frac{d\Omega'_a}{d\theta} = 0;$$

elle s'écrit, en admettant l'invariabilité de c :

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{1}{\theta^2} \left[\frac{N(c + e'')}{cm \sigma'_b} - \frac{N}{m \sigma'_b} \right] + \left[\frac{N(c + e'')}{cm \sigma'_b} - \frac{bh}{m} \frac{1}{2(1 + \theta)} \right] \frac{1 - \delta'}{[1 - (1 - \delta')(1 + \theta)]^2} \\ & + \frac{1}{1 - (1 - \delta')(1 + \theta)} \frac{bh}{2m} \frac{1}{(1 + \theta)^2} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Après simplification et transformation, cette équation peut finalement s'écrire sous la forme :

$$\xi = \frac{\theta}{1 + \theta} = \sqrt{\frac{2 N f}{b h c \sigma'_b}} \quad (14)$$

D'où :

$$\theta = \frac{\xi}{1 - \xi} \quad (15)$$

Dans ces formules :

$$f = \frac{e'' [(\delta' - \xi)^2 - (1 - \delta')\xi^2] - c(1 - \delta')\xi^2}{(1 - \xi)(2\delta' - 1 - \xi)} = re'' - sc \quad (16)$$

en posant :

$$r = \frac{(\delta' - \xi)^2 - (1 - \delta')\xi^2}{(1 - \xi)(2\delta' - 1 - \xi)},$$

$$s = \frac{(1 - \delta')\xi^2}{(1 - \xi)(2\delta' - 1 - \xi)}.$$

Le tableau ci-après donne les valeurs numériques de r et de s pour diverses valeurs échelonnées de ξ et de δ' .

	$\xi = 0,25$	$0,30$	$0,35$	$0,40$	$0,45$	$0,50$	$0,55$	$0,575$	$0,60$	$0,625$
$\delta' = 1,00$	$r = 1,00$	$1,00$	$1,00$	$1,00$	$1,00$	$1,00$	$1,00$	$1,00$	$1,00$	$1,00$
	$s = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\delta' = 0,90$	$r = 1,009$	$1,003$	$0,9923$	$0,975$	$0,9467$	$0,900$	$0,820$	$0,759$	$0,675$	$0,557$
	$s = 0,0152$	$0,0257$	$0,0419$	$0,0667$	$0,1052$	$0,1667$	$0,2689$	$0,3458$	$0,45$	$0,5952$
$\delta' = 0,80$	$r = 1,1048$	$1,1048$	$1,0953$	$1,0667$	$0,9939$	$0,800$	$0,889$			
	$s = 0,0476$	$0,0857$	$0,1508$	$0,2667$	$0,4909$	$1,000$	$2,6889$			

Pour faciliter les interpolations, la figure 11 donne la courbe de variation de θ en fonction de ξ , elle contient également une droite inclinée à 45° sur les axes coordonnés représentant ξ .

Pour le calcul, il était commode d'écrire la formule (14) sous la forme :

$$\xi = \sqrt{\frac{2 N}{b h R'_b}} \sqrt{\frac{f}{c}}.$$

Le premier radical se calcule d'après les données du problème, le second s'évalue à l'aide du tableau, comme il est indiqué dans les applications ci-après.

Si $\delta' > 0,95$, ce qui est le cas général des pièces de grandes dimensions transversales, on peut admettre sans erreur sensible que $r = 1$ et $s = 0$, donc : $f = e''$. La formule (14) devient :

$$\xi = \sqrt{\frac{2 N}{b h R'_b}} \sqrt{\frac{e''}{c}},$$

avec :

$$e'' = e + 0,5h - 0,5a - c,$$

et: $c = 0,80 h$ à $0,85 h$, d'après les valeurs de δ' et la valeur présumée de θ .

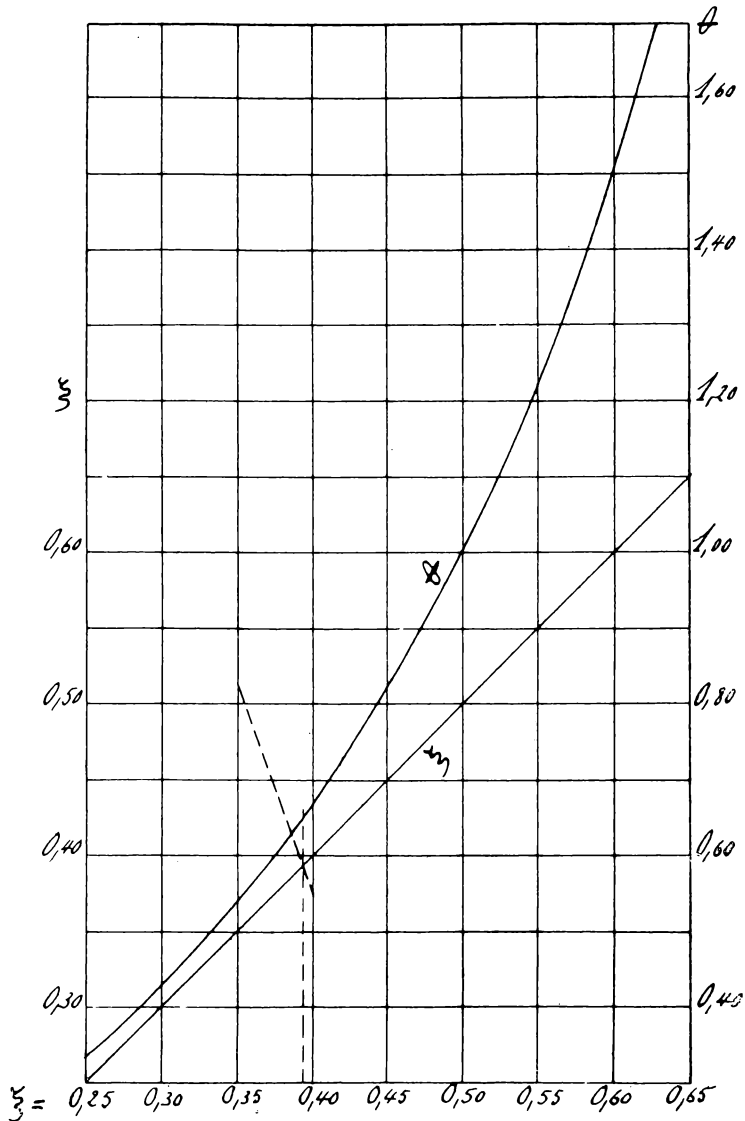


Fig. 11.

Pour des valeurs inférieures de δ' , on évaluera r et s par interpolation. Toutefois, lorsque δ' est voisin de 0,90, on peut admettre par approximation $r = 0,95$ et $s = 0,08$, valeurs moyennes pour l'intervalle de variation de ξ de 0,25 à 0,50. Lorsque δ' est voisin de 0,80, on pourrait de même admettre $r = 1,05$ dans l'intervalle de variation de ξ de 0,25 à 0,45. Pour c , on peut, dans ces cas, admettre la valeur 0,80 h ou légèrement supérieure.

Les formules ci-dessus ne sont approximatives que par suite des hypothèses faites au sujet de c . On a admis son invariabilité ce qui exerce une influence dans la dérivation. Mais le tableau du § 2 montre que les variations de c sont très faibles, même pour les pièces simplement armées ; elles le sont à fortiori pour les pièces doublement armées et d'autant plus que l'armature comprimée est plus importante, ce qui explique que la formule (14) convient surtout pour ce cas. D'autre part, le rapport $\frac{c}{h}$ n'est pas rigoureusement exact. Cependant, les résultats obtenus sont satisfaisants dans les cas définis plus haut.

Les formules (13) et (14) présentent des analogies avec la formule établie à la page 325 de la *Revue Universelle des Mines* du 15 décembre 1924 pour le même problème relatif à la flexion plane simple. Cette formule, numérotée (17), ne peut cependant être déduite des formules (13) et (14) ci-dessus, parce qu'elle est basée sur des hypothèses différentes, à savoir $\theta' = \frac{2}{3}$ et $\gamma =$ constante. On établirait d'après ces hypothèses pour l'objet du présent paragraphe la formule :

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{1 + \theta} &= 2 \sqrt{\frac{N(e - 0,5a + 0,5h - \gamma h)}{3b\gamma h^2 R'_b}} = 2 \sqrt{\frac{N[e' + h(1 - \gamma)]}{3b\gamma h^2 R'_b}} \\ &= \sqrt{\frac{2N}{bh R'_b}} \sqrt{\frac{2e''}{3c}}. \end{aligned} \quad (17)$$

L'emploi de cette formule n'est pas recommandable, comme nous le montrerons dans les applications ci-après (¹).

La raison en est que les hypothèses $\theta' =$ constante et $\gamma =$ constante sont peu compatibles, observation qui correspond à la remarque finale du § 15.

§ 18. **Applications.** — Dans le fascicule cité du « Constructeur de Ciment armé », j'ai traité d'une manière un peu différente les exemples ci-après.

a) Soient : $b = 30$ cm., $h = 24$ cm., $a = a' = 4$ cm., $N = 12.000$ kg.,

(¹) Nous montrerons de même dans l'annexe de la présente étude que la formule (17) du mémoire antérieur rappelée ci-dessus est généralement impropre

$e = 15$ cm., $R_a = 1200$ kg/cm², $R'_b = 50$ kg/cm², $m = 15$. Donc :
 $h = 29$ et $\delta = 0,80$.

La formule (13) de M. Mayer donne :

$$\xi = \sqrt{\frac{24.000 (15 - 3,33 - 2)}{30 \times 400 \times 50}} = 0,623,$$

d'où :

$$\theta = \frac{\xi}{1 - \xi} = \frac{0,623}{0,377} = 1,65$$

et :

$$\sigma_a = 1,65 \times 15 \times 50 = 1237,5 > R_a.$$

Le minimum paraît donc inadmissible, il faudrait adopter $\sigma_a = R_a$.
Pour l'emploi de la formule (14), comme $\delta' = 0,80$, nous adoptons :

$$c = 0,80 h = 16 \text{ cm.}$$

Donc :

$$e'' = e + 0,5 h - 0,5 a - c = 15 + 10 - 2 - 16 = 7 \text{ cm.}$$

D'après le tableau, pour

$\xi = 0,35$	0,40
$r. = 1,0953$	1,0667
$s. = 0,1508$	0,2667
$f = 5,25$	-2,80

d'où, d'après la formule (14) :

$$\xi = \sqrt{0,8} \sqrt{\frac{f}{c}} = 0,513 \quad 0,374$$

Pour trouver la valeur cherchée de ξ , on marque sur la figure 11 les points d'abscisses 0,35 et 0,40 et d'ordonnées 0,513 et 0,374, on les joint par une droite dont on détermine l'intersection avec la droite ξ (à 45°). Les coordonnées de ce point donnent la valeur cherchée de ξ , qui est 0,392. En prolongeant l'ordonnée, on lit sur la courbe de θ la valeur correspondante 0,65 de θ . C'est la valeur qui donne approximativement le minimum ; il y correspond :

$$\sigma_a = 0,66 \times 15 \times 50 = 487,5 < R_a.$$

Le minimum est donc réalisable. Pour cette valeur on trouve, par un calcul exact :

$$\Omega_a + \Omega'_a = 11,1 + 16,3 = 27,4 \text{ cm}^2.$$

Pour la valeur de σ_a donnée par la formule de M. Mayer, on trouve :

$$\Omega_a + \Omega'_a = 3,90 + 31,40 = 35,3 \text{ cm}^2,$$

valeur supérieure de près de 29% à la précédente, donc sensiblement moins exacte.

Pour $\sigma_a = 1200 = R_a$, on trouve :

$$\Omega_a + \Omega'_a = 3,96 + 30,50 = 34,46 \text{ cm}^2.$$

La formule (17) donne :

$$\xi = 0,484, \quad \theta = 0,937, \quad \sigma_a = 703 < R_a.$$

Il y correspond :

$$\Omega_a + \Omega'_a = 7,18 + 20,12 = 27,30 \text{ cm}^2,$$

soit presque le même résultat global que par la formule (14), mais avec une moindre sécurité. Le minimum exact doit être intermédiaire entre $\theta = 0,65$ et $\theta = 0,937$; l'économie supplémentaire doit être faible.

b) Soient : $b = 60 \text{ cm.}$, $h_t = 120 \text{ cm.}$, $a = a' = 5 \text{ cm.}$, $N = 50.000$, $e = 100 \text{ cm.}$, $R_a = 1000 \text{ kg/cm}^2$, $R'_b = 40 \text{ kg/cm}^2$ et $m = 15$. Donc $\delta' = 0,96$ et $h = 115 \text{ cm.}$

D'après la formule de M. Mayer :

$$\xi = \sqrt{\frac{2 \times 50.000}{60 \times 115 \times 40}} \sqrt{\frac{78,3}{115}} = 0,497.$$

D'où :

$$\theta = 0,99, \quad \sigma_a = 0,99 \times 600 = 594 \text{ kg/cm}^2 < R_a$$

et :

$$\Omega_a + \Omega'_a = 46,3 + 17,1 = 64,3 \text{ cm}^2.$$

Pour l'emploi de la formule (14), comme $\delta' = 0,96$, nous admettons $r = 1$ et $s = 0$. Choisissons d'autre part $c = 0,83 h = 95,5 \text{ cm.}$

Donc :

$$f = e'' = 100 + 57,5 - 2,5 - 95,5 = 59,5 \text{ cm.},$$

et :

$$\xi = \sqrt{\frac{2 \times 50.000}{60 \times 115 \times 40}} \sqrt{\frac{59,5}{95,5}} = 0,475.$$

Il en résulte que :

$$\theta = 0,905 \quad \sigma_a = 0,905 \times 600 = 543 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\Omega_a + \Omega'_a = 55,05 + 13,15 = 68,20 \text{ cm}^2,$$

valeur supérieure à la précédente de près de 7,5 %.

Les résultats, en somme peu différents, des formules auraient été identiques si l'on avait pour l'application de la formule (14) choisi $c = 0,80 h$ au lieu de $0,83 h$.

La formule (17) donne :

$$\xi = 0,388, \text{ d'où } \theta = 0,635.$$

Ce résultat est manifestement erroné et inacceptable.

Pour $\sigma_a = 1000 = R_a$, on trouve :

$$\Omega^a + \Omega'_a = 24,3 + 41,7 = 66 \text{ cm}^2.$$

L'économie d'armature réalisée pour $\sigma_a = 594 \text{ kg/cm}^2$ est donc minime, mais la sécurité est augmentée. Pour $\sigma_a = 543$, il y a une minime augmentation au lieu d'une économie, mais la sécurité est également augmentée. Ces résultats montrent aussi que la formule de M. Mayer ne donne qu'un minimum approximatif. La solution exacte doit être comprise entre $\theta = 0,99$ et $\theta = \rho = 1,667$. Pour $\theta = 1,20$, on trouve en effet :

$$\Omega_a + \Omega'_a = 37,5 + 25,85 = 63,35 \text{ cm}^2.$$

L'économie d'armature reste faible.

CHAPITRE III

FLEXION PLANE COMPOSÉE DES POUTRES NERVURÉES

§ 19. **Cas du minimum lorsque la hauteur est indéterminée.** — La figure 12 définit les éléments de la section et de la sollicitation. Les dimensions b_o et h_o sont généralement données d'avance. Il est avantageux de choisir pour b la plus petite valeur possible. Cependant, des éléments étrangers à la poutre, tels que les dimensions des colonnes de support, etc., peuvent intervenir dans la fixation de la valeur de b , que nous supposerons provisoirement déterminée.

Envisageons d'abord le cas de l'armature simple. Le prix d'un élément de longueur Δl a pour expression :

$$\Delta\pi = \Delta l [b(h - h_o) \beta B + \alpha \Omega_a (78 A - B)] + c^te \quad (18)$$

La condition du minimum de cette fonction est :

$$\frac{d\Delta\pi}{dh} = \Delta l \left[b \beta B + \alpha (78 A - B) \frac{d\Omega_a}{dh} \right] = 0,$$

d'où :

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{B}{78 A - B} = - \frac{d\Omega_a}{bdh}$$

Recherchons ce que devient cette condition lorsque $\sigma_a = R_a$, le minimum éventuel n'étant admissible que si $\sigma'_b < R'_b$. Nous aurons recours à l'hypothèse simplificatrice fréquemment adoptée :

$$c = h - 0,5 h_c.$$

Dès lors :

$$\Omega_a = \frac{N (e - 0,5 h_t + 0,5 h_o)}{(h - 0,5 h_o) R_a} = \frac{N}{R_a} \left(\frac{e - 0,5 a + 0,25 h_o}{h - 0,5 h_o} - 0,5 \right)$$

d'où :

$$\frac{d\Omega_a}{dh} = - \frac{N}{R_a} \frac{e - 0,5 a + 0,25 h_o}{(h - 0,5 h_o)^2}$$

La condition du minimum s'écrit donc :

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{B}{78 A - B} = \frac{N}{b R_a} \frac{e - 0,5 a + 0,25 h_o}{(h - 0,5 h_o)^2}$$

d'où finalement :

$$h - 0,5 h_o = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \frac{78 A - B}{B} \frac{b_o}{b R_a}} \sqrt{\frac{N (e - 0,5 a + 0,25 h)}{b_o}}$$

Pour que le minimum soit admissible, il faut que $\sigma'_b < R'_b$, c'est-à-dire que la hauteur correspondante doit être supérieure à la hauteur h_s calculée en supposant que $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$.

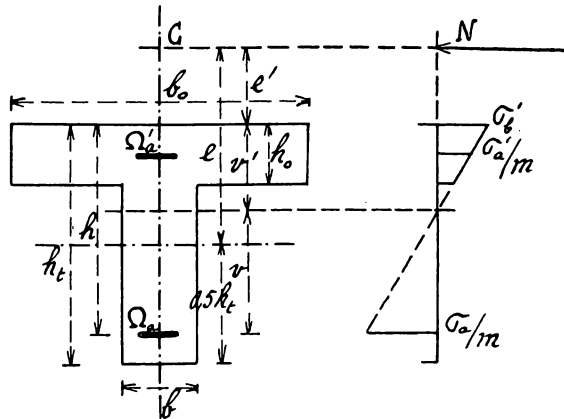


Fig. 12.

La formule (19) est la généralisation de celle qui a été établie pour la flexion simple dans un mémoire antérieur et que l'on retrouve en faisant $N = 0$, $e = \infty$ et $Ne = M$.

Elle est applicable en cas d'armature double ; il suffit de substituer à α un coefficient α' supérieur et convenablement déterminé.

Si la position de l'effort normal N est définie par sa distance e' à la face la plus voisine, la formule devient en cas de compression :

$$h - 0,5 h_o = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \frac{78 A - B}{B} \frac{b_o}{b R_a}} \sqrt{\frac{N (e' + 0,5 h_o)}{b_o}} \quad (19')$$

et en cas de traction :

$$h - 0,5 h_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \frac{78 A - B}{B} \frac{b_0}{b R_a}} \sqrt{\frac{N(e' - a)}{b_0}} \quad (19'')$$

On obtient par ces formules des valeurs de h_{ec} plus petites que par la formule (19).

L'application pratique se fait comme pour la flexion simple ; elle conduit également à la conclusion que l'économie par accroissement de hauteur devient insignifiante lorsque l'on se rapproche de h_{ec} , de manière que l'on peut sans désavantage appréciable adopter des hauteurs quelque peu inférieures. On choisira h dans l'intervalle (h_s, h_{ec}) de la manière la plus opportune dans chaque cas. On vérifiera ensuite si la valeur de b est satisfaisante, si elle ne doit pas être augmentée ou si elle ne peut pas être diminuée et on procédera aux remaniements qui en résulteraient éventuellement.

Si la condition $\sigma'_b = R'_b$ n'est pas satisfaite, on adopte comme solution optimum $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$.

Nous n'étudions pas l'hypothèse $\sigma'_b = R'_b$ et $\sigma_a < R_a$ pour les raisons suivantes.

Lorsque la hauteur diminue, la section Ω_a croît d'une manière très rapide, tant à cause de la diminution de $(h - 0,5 h_0)$ que de celle de σ_a . Cette augmentation ne peut être compensée que par la diminution du volume $b(h - h_0)$ de béton, qui est moins rapide, étant linéaire. Elle est d'ailleurs problématique, car b n'est constant que dans des limites très étroites et lorsque h diminue ; il peut être nécessaire d'augmenter b , tant à cause de l'accroissement de Ω_a qu'à cause des efforts rasants. Dans ce cas et bien que le facteur β diminue légèrement, l'économie de béton est peu probable ou peu appréciable et ne peut compenser l'augmentation de Ω_a . Un minimum est donc peu probable.

Nous avons vu d'ailleurs que le cas du minimum pour $\sigma'_b = R'_b$ est en somme assez exceptionnel pour les poutres à sections rectangulaires ; il est permis d'en inférer qu'il est plutôt improbable pour les poutres nervurées.

Enfin, comme la hauteur h_0 des ailes est constante, lorsque h diminue, la valeur moyenne de la tension de compression dans les ailes diminue, même en tenant compte de la réduction de θ . Il en résulte que h ne peut descendre en dessous d'une certaine valeur sans qu'il n'y ait à craindre que $\sigma'_b > R'_b$. Cette remarque s'identifie en somme avec celle de la page 337 de la *Revue Universelle des Mines* du 15 décembre 1924.

§ 20. **Application.** — Soient : $b_0 = 1,50$ cm., $h_0 = 10$ cm., $N = 30.000$ kgs, $e = 60$ cm., $a = 5$ cm.

Supposons qu'il s'agisse de béton n^o 2 ou 4 de l' A. B. S. pour lequel : $R'_b = 50$ kg/cm², $m = 15$, d'autre part $R_a = 1200$ kg/cm². Nous con-

servons les valeurs $A = 80$, $B = 100$, $C = 10$. Nous pouvons admettre $\alpha = 1,28$ (voir *R. U. M.*, du 15 décembre 1924, page 334).

Choisissons $b = 30$ cm. ; il en résulte que :

$$\beta = 1 + \frac{20}{0,30 \times 100} = 1,667.$$

D'après la formule (19) :

$$h - 0,5 h_0 = \sqrt{\frac{1,28}{1,667} \times \frac{6140}{100} \times \frac{5}{1200}} \sqrt{\frac{30.000 (60 - 2,5 + 2,5)}{150}} = 48,5$$

Donc :

$$h_{ec} = 53,5 \text{ cm.}$$

Pour cette hauteur, on trouve par un calcul exact que si $\sigma_a = 1200 = R_a$,

$$\sigma'_b = 46 < R'_b \text{ et } \Omega_a = 17,8 \text{ cm}^2$$

Le prix par mètre courant de la partie variable est :

$$\begin{aligned} \Delta\pi &= 100 \times 1,667 \times 0,30 \times 0,435 + 1,28 \times 6140 \times 0,00178 = \\ &= 21,75 + 13,90 = 35,65 \text{ fr.} \end{aligned}$$

Pour $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$, on trouve :

$$h_0 = 49,3 \text{ cm.}, \quad \Omega_a = 20,84 \text{ cm}^2, \quad \text{et } \Delta\pi = 36,05 + \text{cte.}$$

La différence de prix est de 0,40 fr. soit plus de 1%. Mais, dans le cas de la hauteur la plus économique, on peut réduire l'armature d'une barre par rapport à celle qu'il faut pour la hauteur h , on peut par suite réduire la largeur b d'environ 5 cm., ce qui ajoute une économie de 2,18 fr. (compte tenu de la valeur modifiée de β), ce qui donne au total près de 7,2% d'économie. D'autre part, à $b = 25$ cm. correspond une nouvelle valeur $h_{ec} = 56,2$ cm. Comme l'économie supplémentaire est faible, on peut se contenter de la valeur calculée en premier lieu.

§ 21. — **Cas de la double armature pour cause d'insuffisance de hauteur.** — Dans l'étude de ce cas pour la flexion plane simple (*R. U. M.* du 15 décembre 1924, page 336), nous avons constaté que lorsque $\sigma'_b > R'_b$ par suite de la hauteur insuffisante, il existe plusieurs moyens d'y obvier, mais qui sont inégalement efficaces.

Le moyen qui consiste à augmenter Ω_a dans la mesure nécessaire pour que $\sigma'_b = R'_b$, tandis que $\sigma_a < R_a$ est peu effectif et ne peut être employé que lorsque l'insuffisance de hauteur est très légère. Une autre manière consiste à augmenter h_0 sans modifier R'_b , il est également peu efficace car l'augmentation de h_0 n'affecte que la zone voisine de l'axe neutre. L'accroissement de la résultante des tensions de compression du béton est donc faible. Comme le bras de levier des

actions intérieures diminue, Ω_a augmente. La solution n'est donc pas économique ; elle est d'un usage exceptionnel.

On peut augmenter R'_b sans modifier h_o , soit par l'emploi d'un béton plus résistant, soit par frettage. Le premier procédé est peu rationnel si la pièce est confectionnée tout entière avec le même béton, car alors le renforcement n'intéresse pas seulement la zone des fortes compressions, mais aussi le voisinage de l'axe neutre peu comprimé et même la zone étendue, négligée dans le calcul. Le frettage est plus rationnel, puisqu'il ne renforce que les ailes, c'est-à-dire la zone comprimée. Cependant, il s'étend aussi dans des régions éloignées du maximum de compression.

Enfin, sans augmenter R'_b , on peut augmenter la zone comprimée réduite par une armature longitudinale comprimée qui se place le plus près possible de la fibre la plus comprimée et présente donc une grande efficacité uniforme.

Comme dans la flexion simple, il existe un minimum de l'armature totale $\Omega_a + \Omega'_a$. Remarquons que, comme la section est complètement définie d'avance, il est indifférent que la position de N soit fixée par e ou e' . Nous conservons l'hypothèse que le centre d'action de la résultante des tensions de compression se trouve à mi-hauteur des ailes. En se référant à la figure 12, on peut écrire :

$$N + \Omega_a \sigma_a = (b_o h_o + m \Omega'_a) \left(1 - \frac{h_o}{2v'}\right) \sigma'_b$$

Posons :

$$\frac{h}{h_o} = \eta, \text{ d'autre part } v' = \frac{h}{1 + \theta}, \text{ d'où :}$$

$$b_o h_o + m \Omega'_a = \frac{m \Omega_a \theta + \frac{N}{\sigma'_b}}{1 - \frac{1 + \theta}{2\eta}}$$

Donc :

$$m \Omega'_a = \frac{m \Omega_a \theta + \frac{N}{\sigma'_b}}{1 - \frac{1 + \theta}{2\eta}} - b_o h_o,$$

et :

$$\Omega_a + \Omega'_a = \Omega_a \frac{(1 + \theta) \left(1 - \frac{1}{2\eta}\right)}{1 - \frac{1 + \theta}{2\eta}} - \frac{b_o h_o}{m} + \frac{N}{m \sigma'_b \left(1 - \frac{1 + \theta}{2\eta}\right)}$$

Or :

$$\Omega_a = \frac{N[e + 0,5(h_t - h_o)]}{(h - 0,5 h_o) \sigma_a} = \frac{N[e + 0,5(h_t - h_o)]}{h \left(1 - \frac{1}{2\eta}\right) \sigma_a}$$

Donc :

$$\Omega_a + \Omega'_a = \frac{N[e + 0,5(h_t - h_o)](1 + \theta)}{h \left(1 - \frac{1 + \theta}{2\eta}\right) \sigma_a} - \frac{boh_o}{m} + \frac{N}{m \sigma'_b \left(1 - \frac{1 + \theta}{2\eta}\right)}$$

Si nous supposons $\sigma_a = R_a$, nous constatons qu'il n'existe pas de minimum pour une valeur finie de θ . Si nous supposons $\sigma'_b = R'_b$, écrivons :

$$\Omega_a + \Omega'_a = \frac{N[e + 0,5(h_t - h_o)](1 + \theta)}{h \theta m \left(1 - \frac{1 + \theta}{2\eta}\right) R'_b} + \frac{N}{m R'_b \left(1 - \frac{1 + \theta}{2\eta}\right)} - \frac{boh_o}{m}$$

Cette fonction admet un minimum, régi par la condition

$$\frac{d(\Omega_a + \Omega'_a)}{d\theta} = 0,$$

qui s'écrit après réduction :

$$\theta^2 \frac{e + 0,5(h_t + 2h - h_o)}{e + 0,5(h_t - h_o)} + 2\theta - (2\eta - 1) = 0 \quad (20)$$

Cette équation du second degré a une racine positive qui est la valeur de θ à laquelle correspond le minimum.

Lorsque la valeur de e est très grande, la sollicitation est voisine de la flexion simple et

$$\frac{e + 0,5(h_t + 2h - h_o)}{e + 0,5(h_t - h_o)}$$

se rapproche de 1, on retrouve ainsi la formule établie pour la flexion simple.

Si e est petit, pour une section donnée,

$$\frac{e + 0,5(h_t + 2h - h_o)}{e + 0,5(h_t - h_o)}$$

est d'autant plus grand que 1, que e est plus petit. Donc, quand l'influence de la compression croît, la valeur optimum de θ diminue.

Pour que le minimum soit admissible, il faut que $\sigma_a < R_a$, d'où $\theta < \rho$.

Supposons, à titre d'exemple, que : $b_o = 150$ cm., $h_o = 10$ cm., $h = 40$ cm., $h_t = 45$ cm., $a = a' = 5$ cm., $N = 30.000$ et $e = 60$ cm. Les facteurs de résistance sont : $R_a = 1200$, $R'_b = 50$ et $m = 15$. donc $\rho = 1,60$.

Pour $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$, on calcule :

$$\Omega_a + \Omega'_a = 29,4 + 28,9 = 58,3 \text{ cm.}$$

La condition du minimum d'après l'équation (20) s'écrit :

$$1,52 \theta^2 + 2\theta - 7 = 0,$$

d'où :

$$\theta = 1,575.$$

Cette valeur est inférieure à ρ mais en est très voisine ; on peut donc admettre la solution calculée ci-dessus comme optimum.

ANNEXE

Minimum de l'armature totale d'une pièce simplement fléchie de section rectangulaire donnée doublement armée

Cette question a été étudiée dans la *Revue Universelle des Mines* du 15 décembre 1924 (pages 324 et suivantes) en supposant que l'armature comprimée se trouve au tiers supérieur de la zone comprimée du béton et que γ soit invariable. Ces hypothèses conduisent à la formule :

$$\xi = \frac{\theta}{1 + \theta} = 2 \sqrt{\frac{M}{3 \gamma bh^2 R'_b}} \quad (21)$$

(Cette formule est numérotée (17) dans le fascicule précité.)

Elle donne des résultats erronés dans la plupart des applications, parce que les deux hypothèses sont contradictoires. Admettre l'invariabilité de γ est déjà erroné en cas d'armature simple, mais le devient encore davantage en cas d'armature double lorsqu'on assigne à cette dernière une position variable en fonction de θ . C'est surtout l'hypothèse de l'invariabilité de γ qui fausse la formule ; je dois rectifier sur ce point le second alinéa de la page 329 de la *Revue Universelle des Mines* du 15 décembre 1924.

Avec la seule hypothèse que l'armature comprimée se trouve au tiers supérieur de la zone comprimée du béton, on établit aisément l'analogue de la formule (13) de M. Mayer (voir § 17), qui s'écrit :

$$\xi = \frac{\theta}{1 + \theta} = \sqrt{\frac{2M}{bh^2 R'_a}} \quad (21')$$

Elle est préférable à la formule (21) dans la plupart des cas.

De même que la formule (21) a été représentée graphiquement par la figure 6 de la *Revue Universelle des Mines* du 15 décembre 1924 (page 327) pour la valeur $\gamma = 0,85$, la formule (21') peut se représenter par le graphique de la figure 13 ci-contre, qui est indépendant de la

valeur de γ et présente des différences appréciables avec le graphique précédent.

Les conclusions générales déduites de la figure 6 précitée restent vraies, mais les limites sont fortement modifiées.

Ainsi, pour la valeur $\rho = 1,60$, une armature comprimée peut être utile dès que :

$$\frac{M}{bh^2 R'_b} > 0,1677 \text{ (au lieu de } 0,163).$$

Cependant, dans l'intervalle $\frac{M}{bh^2 R'_b} = 0,1667$ à $0,1755$ (au lieu de $0,163$ à $0,1925$), il est plus économique de conserver une armature simple avec $\sigma_a < R_a$.

Dans l'intervalle $\frac{M}{bh^2 R'_b} = 0,1755$ à $0,189$ (au lieu de $0,1925$ à $0,2415$), la solution la plus économique est donnée par l'armature double avec la valeur de θ calculée par la formule (21'). c'est-à-dire que le minimum théorique est admissible.

Lorsque $\frac{M}{bh^2 R'_b} > 0,189$ (au lieu de $0,2415$), la solution optimum est donnée par l'armature double avec $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$, donc $\theta = \rho$.

La figure 13 convient non seulement pour $\rho = 1,60$, mais pour toutes autres valeurs, sauf la courbe marquée α_{160} , dont il faudrait tracer une famille cotée en valeurs de ρ .

Dans la *Revue Universelle des Mines* du 15 décembre 1924 (page 326) nous avons examiné le cas concret : $b = 30$ cm., $h = 80$ cm., $a = a' = 4$ cm., $M = 1.800.000$ kg/cm., $R'_b = 50$, $R_a = 1200$ et $m = 15$, d'où $\rho = 1,60$. Il en résulte que :

$$\frac{M}{bh^2 R'_b} = 0,1875.$$

D'après la figure 6 du fascicule précité, nous en avons déduit que la solution optimum correspondait à l'armature simple avec $\sigma_a < R_a$, donc $\alpha = 0$ et $\theta = 1,27$ environ.

D'après la figure 13, nous avons affaire au contraire à un cas de minimum théorique, pour lequel $\theta = 1,585$ environ. Comme cette valeur est très voisine de $1,60$ et n'est qu'approximative, nous adoptons $\theta = 1,60$ comme valeur optimum. La différence avec le résultat donné par l'autre graphique est considérable.

On obtient pour $\theta = 1,60 = \rho$:

$$\Omega_a + \Omega'_a = 21,4 + 3,85 = 25,25 \text{ cm}^2.$$

L'armature simple nécessaire est $\Omega_a = 27,75 \text{ cm}^2$, avec $\theta = 1,28$ (valeur exacte), d'où $\sigma_a = 960 < R_a$.

L'économie d'armature résultant de l'emploi du graphique de la figure 13 par rapport à l'autre atteint près de 10%.

Nous pouvons encore établir une autre formule analogue à la formule (14) que j'ai proposée pour certains cas de flexion composée et qui ne comporte comme hypothèse approximative que la constance de c dans la dérivation ; elle s'écrit :

$$\xi = \frac{\theta}{1 + \theta} = \sqrt{\frac{2 Mr}{bhc R'_b}} \quad (21'')$$

formule dans laquelle r représente l'expression :

$$r = \frac{(\delta' - \xi)^2 - \xi^2 (1 - \delta')}{(1 - \xi) (2\delta' - 1 - \xi)}$$

Le § 17 contient un tableau des valeurs de ce coefficient, dont il résulte que, pour les valeurs élevées de δ' , voisines de 1,00, la valeur

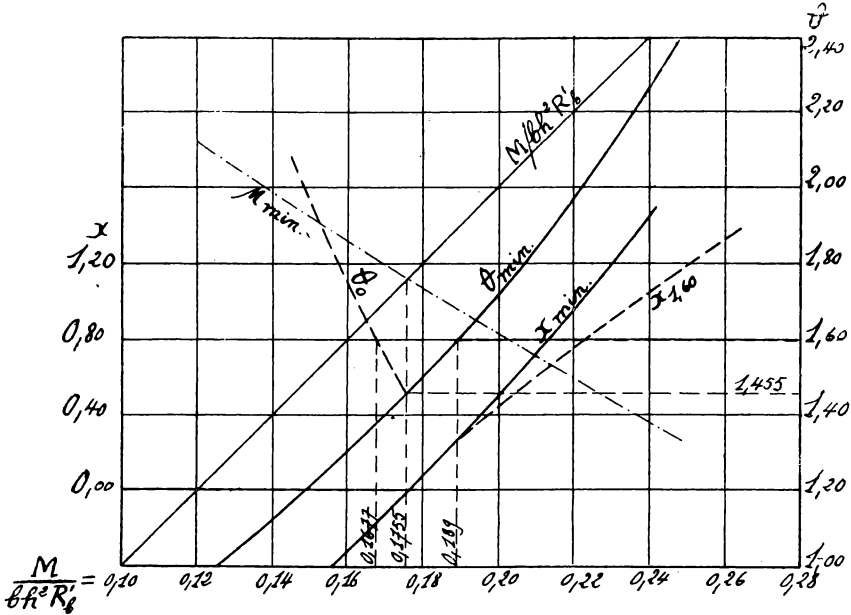


Fig. 13.

de r est très voisine de 1, de sorte que la formule (21'') peut s'écrire à peu près :

$$\xi = \sqrt{\frac{2 M}{bhc R'_b}}$$

Sous cette forme, qui correspond aux sections de grandes dimensions, elle donne des valeurs de θ supérieures à celles de la formule (21'), ce qui réduit la transition entre l'armature simple et l'armature double avec $\theta = \rho$. C'est généralement cette dernière solution qu'il faut adopter.

Lorsque δ' est voisin de 0,90, ce qui correspond à des sections de dimensions moyennes (hauteur voisine de 50 cm.), r est inférieur à 1,00 et en se combinant avec c , fait que la formule (21'') donne sensiblement les mêmes résultats que (21'), que l'on préférera donc parce que plus simple d'emploi.

Lorsque δ' est voisin de 0,80, ce qui correspond aux sections de petites dimensions (hauteur voisine de 25 cm.), r est généralement inférieur à 1 et la valeur de ξ donnée par la formule (21'') peut devenir même inférieure à celle qui résulte de la formule (21). Mais les valeurs très faibles de θ qui en résultent donnent généralement lieu à des valeurs négatives de α et sont donc inadmissibles ; la solution optimum correspond le plus souvent à l'armature simple avec $\sigma_a < R_a$. Il est d'ailleurs apparent qu'une armature comprimée est mal utilisée lorsque $\delta' = 0,80$ et ne peut donc être économique.

En résumé, la figure 13 qui représente la formule (21'), s'emploie utilement dans tous les cas ; l'opération est des plus simples. La formule (21'') n'est pas pratique et il faut s'abstenir d'user de la formule (21) et de l'abaque correspondant, sauf pour obtenir des indications générales dans certains cas de pièces de petites dimensions transversales.
