

## MÉMOIRE

---

### Note

## sur le Calcul graphique des Réseaux de distribution d'Énergie électrique.

(SUITE ET FIN)

---

### DEUXIÈME PARTIE

#### CALCUL DES RESEAUX DE DISTRIBUTION

22. — Les réseaux sont formés d'un certain nombre de distributeurs, constituant éventuellement des contours fermés ou mailles, reliés entre eux en des points appelés nœuds.

On ne considère en général comme nœud que le point de concours d'au moins trois distributeurs. Cependant, pour simplifier les calculs d'échelles graphiques, on pourrait aussi considérer comme nœud le point de rencontre de deux tronçons de distributeurs de sections différentes ; de cette manière, les distributeurs constitutifs du réseau seraient tous à sections constantes.

Les réseaux sont alimentés par des feeders ou artères, qui sont raccordés aux distributeurs en des centres d'alimentation ou de distribution, où les tensions sont supposées invariables.

Le plan schématique d'un réseau est déterminé par les emplacements des récepteurs et autres circonstances particulières. Le nombre des feeders sera aussi élevé que le permettent ces circonstances et qu'il est utile en vue de l'économie réelle. Les centres de distribution seront choisis au voisinage des centres de gravité de groupes importants de récepteurs. A ce point de vue, le calcul

---

(<sup>1</sup>) Voir *Bulletin de l'A. I. M.*, 1923, n° 4, p. 132.

graphique offre, par suite de sa simplicité et de sa rapidité, l'avantage de permettre la comparaison facile de diverses solutions.

Le schéma du réseau général étant entièrement défini, on le divisera tout d'abord en réseaux partiels indépendants, c'est-à-dire n'ayant pas d'autres points communs que des centres d'alimentation et dont les calculs sont par conséquent distincts.

A condition que chaque réseau indépendant soit alimenté par un nombre suffisant d'artères pour réduire les chances d'interruption de courant, il y a d'ailleurs intérêt à diviser un réseau général assez étendu en un certain nombre de sections indépendantes, pour localiser les perturbations en cas d'avarie à un feeder ou à un distributeur.

23. — Au point de vue du calcul, un nœud est complètement déterminé lorsque l'on connaît sa tension ainsi que tous les courants qui y aboutissent ou s'en éloignent.

Lorsque plusieurs distributeurs AP, BP, CP..., etc., groupés en étoile (fig. 11), concourent en un même nœud P et sont alimentés chacun par leur extrémité non commune A, B, C, ... etc., le calcul du réseau ainsi formé se réduit à la détermination du nœud P, qui est très aisée par la méthode graphique.

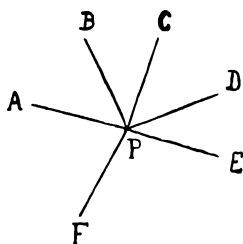


Fig. 11.

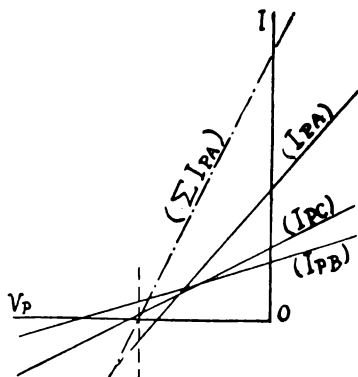


Fig. 12.

Les caractéristiques des différents distributeurs permettent en effet, les tensions en A, B, ... etc. étant connues, de tracer en fonction de la tension variable  $V_P$  en P les droites de variation de  $I_{PA}$ ,  $I_{PB}$ ,  $I_{PC}$ , ... etc. (fig. 12). Par addition des ordonnées, on

obtient la droite de  $\Sigma I_{p_A}$ . Or, en P, d'après la première loi de Kirchoff,  $\Sigma I_{p_A} = 0$ . Donc, la tension en P, correspond au point où la droite de  $\Sigma I_{p_A} \dots$  coupe l'axe des abscisses  $V_p$ . Les ordonnées correspondantes représentent les valeurs cherchées de  $I_{p_A}$ ,  $I_{p_B}$ ,  $I_{p_C}$ , ... etc. Le nœud P est donc complètement déterminé et l'on peut calculer par les diagrammes polygonaux tous les éléments des divers distributeurs.

Lorsque au nœud P concourent encore d'autres distributeurs isolés ou formant réseau, et ne comportant pas de centres d'alimentation, ce nœud peut-être considéré comme un centre de distribution auxiliaire. On tracera comme précédemment la droite de  $\Sigma I_{p_A}$  en fonction de  $V_p$ . Toutefois,  $\Sigma I_{p_A}$  ne doit plus être nulle, mais égale à la somme des charges de tous les distributeurs isolés ou formant réseaux raccordés au nœud P et qui ne peuvent être alimentés par aucun autre point. Cette charge totale étant I, le point de la droite de  $\Sigma I_{p_A}$ , correspondant à une ordonnée égale à I détermine la tension au point P, qui ne dépend que de la charge I.

A moins de circonstances spéciales de symétrie, on ne peut déterminer dans un réseau qu'un seul pareil centre d'alimentation auxiliaire.

24. — Au pont de vue du calcul, un distributeur est complètement déterminé lorsque les courants de circulation ou la différence des tensions aux deux extrémités sont connus ; il suffit de se reporter au diagramme polygonal.

Tels sont les cas d'un distributeur dont les deux extrémités sont des centres d'alimentation, ou un centre d'alimentation et un nœud déterminés, qui jouent le même rôle au point de vue du calcul.

Lorsque plusieurs distributeurs 1. 2. 3. ... etc., sont dérivés entre deux nœuds A et B (fig. 13), il est avantageux dans les calculs graphiques de les remplacer par le distributeur fictif équivalent, défini par ses caractéristiques. Sa charge fictive est égale à la somme des charges des différents

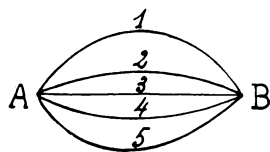


Fig. 13.

distributeurs. Pour une

différence de tension déterminée entre A et B, le courant du distributeur fictif en A ou en B est égal, en valeur et sens, à la somme algébrique des courants en ces points dans les distributeurs réels.

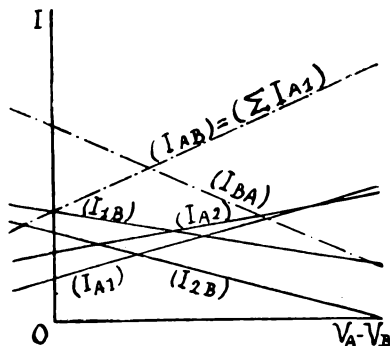


Fig. 14.

Traçons un diagramme dans lequel on représente en fonction des abscisses  $V_a - V_b$  les caractéristiques en A et B des différents distributeurs A1B, A2B, A3B, ... etc. (fig. 14). Par addition des ordonnées, nous obtenons les diagrammes de  $\sum I_{A_1}$  et de  $\sum I_{B_1}$ , qui sont les caractéristiques en A et B du distributeur fictif équivalent. Elles sont conjuguées par la relation :

$$\sum I_{A_1} + \sum I_{B_1}$$

= charge totale des distributeurs A1B, A2B, A3B, ... etc.

De même les caractéristiques résultantes de deux ou plusieurs distributeurs en série AB, BC, ... etc., s'obtiennent aisément. Il suffit de relever sur les diverses caractéristiques partielles, pour des valeurs identiques en grandeur mais de signes contraires des courants de circulation dans les tronçons de part et d'autre des points de jonction, les valeurs de  $V_a - V_b$ ,  $V_b - V_c$ , ... etc., dont on fait la somme. En résumé, pour les distributeurs en dérivation, on effectue la somme des courants aux nœuds pour une même valeur de  $V_a - V_b$ . Pour les distributeurs en série, au contraire, pour des valeurs correspondantes des courants aux nœuds, on effectue la somme des différences de potentiel afférentes aux divers tronçons.

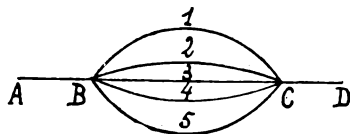


Fig. 15.

Par combinaison, on peut définir le distributeur fictif équivalent à un système (fig. 15) de deux distributeurs AB et CD réunis par un groupe de distributeurs B1C, B2C, ... etc., dérivés entre

B et C. A cet effet, on commence par définir, de la manière exposée ci-dessus, le distributeur fictif BC équivalent à B1C, B2C, ... etc., au moyen de ces caractéristiques  $I_{BC}$  et  $I_{CB}$ . Ensuite, on trace les caractéristiques résultantes des distributeurs AB, CD et BC fictif en série comme il vient d'être indiqué. On obtient finalement ainsi les caractéristiques  $I_{AB}$  et  $I_{DC}$ , en fonction de  $V_a - V_d$ , du distributeur fictif équivalent au système ABCD.

Plus généralement encore, en procédant de proche en proche et partant du dernier distributeur ou groupe de distributeurs dérivés entre deux nœuds K et L vers les deux nœuds extrêmes A et B, il est possible, par une succession d'opérations graphiques simples, de définir de la même manière le distributeur fictif équivalent à un système de distributeurs ABCD...KL en dérivations échelonnées (fig. 16). Ces constructions réalisent les transformations appelées biangulaires par MM. Herzog et Feldmann (ouv. cit.), mais d'une manière très rapide et en évitant notamment les longs calculs dont ces auteurs donnent un exemple.

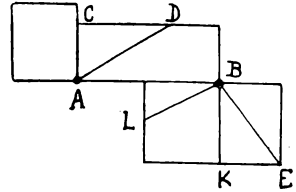


Fig. 16.

Un point pris sur une caractéristique d'un distributeur fictif équivalent détermine tous les distributeurs composants du système. Il suffit de se reporter aux caractéristiques individuelles mais en procédant dans l'ordre inverse de celui qui a été adopté pour la combinaison, c'est-à-dire en partant des nœuds extrêmes vers le dernier distributeur ou groupe de distributeurs en dérivation entre deux nœuds.

25. — Pour calculer un réseau indépendant, défini par le schéma des distributeurs avec les branchements et les centres d'alimentation, on commencera, d'après les considérations des numéros 23 et 24, par calculer les nœuds et distributeurs directement déterminés et par définir les distributeurs fictifs équivalents des groupes de distributeurs en dérivation.

Lorsque tous les centres de distribution sont à la même tension, il peut être avantageux parfois, pour la facilité des calculs graphiques, de les supposer confondus en un centre unique. On ob-

tient ainsi le schéma d'un réseau fictif équivalant au réseau réel, mais souvent plus simple. Ainsi, le réseau ABCDEF, de la figure 17, qui comporte trois centres de distribution A, B, et C à la même tension, peut être remplacé par un réseau fictif (ABC DEF), dans lequel les trois groupes de distributeurs dérivés entre (ABC) d'une part, et D, E et F d'autre part, peuvent être remplacés par leurs distributeurs fictifs équivalents.

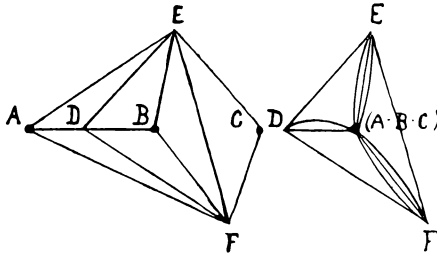


Fig. 17.

Par tous ces moyens, on réduira en somme le réseau à sa forme la plus simple irréductible, qui comprendra, en général, un certain nombre de mailles et de centres d'alimentation.

Si la méthode graphique utilisée se prête facilement aux transformations biangulaires, elle n'est d'aucun secours direct pour la classique transformation triangulaire, qui consiste à substituer une étoile à un triangle de distributeurs ou inversement.

Le caractère intuitif de la méthode vectorielle de M. Musyck ne pouvait recevoir de preuve plus élégante que la solution de cette transformation contenue dans la note citée de cet auteur.

L'ouvrage de MM. Herzog et Feldmann traite abondamment de toutes les transformations des réseaux, dont les biangulaires et les triangulaires sont généralement seules pratiques. La transformation triangulaire peut s'effectuer par des formules simples. Les charges sont remplacées par leurs composantes aux sommets du triangle. Si  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$  sont les résistances des distributeurs formant les côtés du triangle, on peut y substituer une étoile de distributeurs dont les résistances sont

$$\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3}, \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} \text{ et } \frac{r_3 r_1}{r_1 + r_2 + r_3}.$$

26. — Le principe des méthodes algébriques de calcul des réseaux est de définir un nombre suffisant d'inconnues parmi les éléments du réseau, en fonction desquelles on peut exprimer tous les autres éléments par application des lois d'Ohm et de Kirchoff.

Si  $m$  est le nombre de mailles,  $f$  le nombre de feeders, on choisit  $(m + f - 1)$  inconnues (1).

Les lois précitées permettent d'écrire un système de  $(m + f)$  équations linéaires entre ces inconnues, possédant une solution déterminée que l'on peut calculer par les méthodes algébriques ordinaires. Tous les éléments du réseau, tensions et courants de circulation, peuvent en être déduits.

Pour un réseau quelque peu étendu, le nombre d'équations est généralement élevé et la résolution donne lieu à des calculs fastidieux ou inextricables, dont un des caractères les plus désagréables est, selon MM. Herzog et Feldmann, la grande susceptibilité d'erreurs, surtout si l'on opère par les déterminants. On peut le constater dans les cas les plus simples.

Le principe de la méthode graphique est de représenter en diagrammes les lois de variation de différents éléments du réseau, tensions et courants de circulation, en fonction d'un nombre strictement suffisant de ces éléments considérés comme variables. Ces diagrammes sont des représentations graphiques des lois d'Ohm et de Kirchoff. En les combinant entre eux, on peut obtenir deux courbes différentes de la variation d'un même élément en fonction d'une même variable. Le point de rencontre de ces deux courbes et les points correspondants de tous les autres diagrammes fournissent la solution, c'est-à-dire les valeurs cherchées de tous les éléments du réseau. Le cas du n° 23 présente une application très simple du principe.

L'emploi de cette méthode graphique pour les réseaux de distribution électrique est remarquablement facilitée du fait que tous les diagrammes sont rectilignes. En effet, désignons par  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , . . . etc., un certain nombre  $n$  d'éléments du réseau. En vertu des lois d'Ohm et de Kirchoff, ces éléments sont liés par des relations linéaires telles que

$$A \alpha + B \beta + C \gamma + \dots + K = 0,$$

$A, B, C, \dots$  et  $K$  étant des constantes dépendant des dimensions et des charges du réseau.

---

(1) Voir « Leçons sur l'électricité » par Eric GÉRARD, t. II, 1910, p. 191.

On peut écrire pour ces inconnues un système d'équations analogues, qui admet une solution déterminée pour  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  etc. Si nous prenons une des inconnues comme variable indépendante, nous pouvons obtenir, par la résolution d'un système de  $(n - 1)$  des équations ci-dessus, les fonctions

$$\beta = f_1(\alpha), \gamma = f_2(\alpha), \dots \text{ etc.}$$

Si nous remplaçons  $\beta, \gamma, \dots$  etc., par ces fonctions dans la  $n^e$  équation, nous obtenons une équation en  $\alpha$  seulement, dont la solution  $\alpha = a$  nous donne aussi les solutions de  $\beta, \gamma, \dots$  etc. par le calcul numérique des fonctions

$$b = f_1(a), c = f_2(a), \dots \text{ etc.}$$

Les fonctions  $\beta = f_1(\alpha), \dots$  etc., sont linéaires. Si en, effet, on les calcule par les déterminants du système de  $(n - 1)$  équations elles ont la forme d'une fraction dont le dénominateur est un déterminant dont tous les termes sont des constantes et dont le numérateur est un déterminant dont chaque terme développé ne peut contenir  $\alpha$  qu'au premier degré. D'ailleurs si on dérive par rapport à  $\alpha$  les  $(n - 1)$  équations du système, on obtient un nouveau système de  $(n - 1)$  équations à  $(n - 1)$  inconnues, de la forme

$$A + B \frac{d\beta}{d\alpha} + C \frac{d\gamma}{d\alpha} + \dots = 0$$

dont la solution nous donne des valeurs constantes

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = k_1, \frac{d\gamma}{d\alpha} = k_2, \dots \text{ etc.}$$

D'où il résulte que  $\beta, \gamma, \dots$  etc., sont des fonctions linéaires de  $\alpha$ , Et que les courbes représentatives de  $\beta, \gamma, \dots$  etc., en fonction de  $\alpha$  sont des droites.

Le mode de résolution que nous venons d'indiquer constitue, en somme, le principe mathématique de la méthode. Si nous représentons, par rapport à un axe des abscisses  $\alpha$ , les fonctions  $\beta = f_1(\alpha), \gamma = f_2(\alpha), \dots$  etc., par des courbes, nous pouvons



aussi tracer en fonction de  $\alpha$  la courbe représentative du premier membre de la  $n^{\text{e}}$  équation

$$A_n \alpha + B_n \beta + C_n \gamma + \dots + K_n = 0.$$

Le point de rencontre de cette courbe avec l'axe des abscisses fournit la solution.

Cette méthode est très rapide et simple lorsque ces courbes sont aisées à tracer ; c'est le cas pour les réseaux électriques.

27. — Nous avons défini aux nos 23 et 24 des formes particulières de réseaux, pouvant comporter un assez grand nombre de distributeurs ou de mailles et dont le calcul graphique est très rapide. Tous les éléments de ces réseaux sont définis directement en fonction d'une seule variable et les droites représentatives de leurs variations se déduisent immédiatement des caractéristiques.

Dans le cas des distributeurs concourant en un nœud unique, la solution est déterminée par la valeur de la tension en ce nœud, choisie comme variable, et est obtenue par l'intersection de deux droites. Pour les systèmes de distributeurs en dérivations échelonnées, la définition du distributeur fictif équivalent ramène le calcul du système à celui d'un distributeur unique ; la variable est la différence des tensions des extrémités.

Le premier cas peut être ramené au second, lorsque tous les centres de distribution sont à la même tension. On peut, en effet, supposer alors tous ces centres confondus et l'on obtient un groupe de distributeurs dérivés entre ce centre unique et le nœud commun.

#### Cas d'une seule variable.

28. — Le type général du réseau à une seule variable est celui de la fig. 18, dans lequel un nombre quelconque de centres d'alimentation A, B, C, . . . etc. sont réunis par des distributeurs à  $n$  nœuds 1, 2, 3, . . . etc., réunis d'autre part par  $(n - 1)$  distributeurs 12, 23, 34, . . . etc., ne comportant pas de centres d'alimentation. Tous ces distributeurs tels que A1,

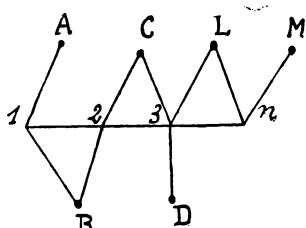


Fig. 18.

B<sub>1</sub>, . . . etc., et 12, 23 . . . etc., peuvent être des distributeurs fictifs équivalents de systèmes pouvant comporter un certain nombre de mailles. Mais 12, 23, 34, . . . etc. ne peuvent donc pas former une figure fermée.

Les tensions V<sub>A</sub>, V<sub>B</sub>, V<sub>C</sub>, . . . . aux centres de distribution sont connues. On choisira comme variable la tension V<sub>1</sub> en un nœud tel que 1 et l'on tracera tous les diagrammes en fonction des valeurs V<sub>1</sub> portées en abscisses suivant un axe OX coté en valeurs des tensions. On aura tout d'abord tracé à part les diagrammes polygonaux et les caractéristiques de tous les distributeurs.

La loi de V<sub>A</sub> — V<sub>1</sub> étant connue en fonction de V<sub>1</sub>, les caractéristiques de A<sub>1</sub> permettent de tracer les droites de I<sub>A1</sub> et de I<sub>1A</sub> en fonction de V<sub>1</sub>. On peut de même tracer les droites de I<sub>B1</sub> et de I<sub>1B</sub> pour B<sub>1</sub>. S'il n'y a pas d'autres distributeurs aboutissant en 1, d'après la première règle de Kirchoff

$$I_{12} = - I_{1A} - I_{1B}.$$

On en déduit donc la droite de I<sub>12</sub> en fonction de V<sub>1</sub> et aussi celle de I<sub>21</sub>, qui lui est conjuguée. Avec l'aide des caractéristiques de 12, on peut tracer la droite de variation de I<sub>21</sub> en fonction de V<sub>2</sub>.

Au nœud 2, la tension V<sub>c</sub> du nœud d'alimentation C étant connue, on en déduit, par les caractéristiques de C<sub>2</sub>, les droites de I<sub>c2</sub> et I<sub>2c</sub> en fonction de V<sub>2</sub>. On opère de même éventuellement pour les autres distributeurs aboutissant en 2 et venant d'un centre d'alimentation. D'après la première loi de Kirchoff.

$$I_{23} = - I_{21} - I_{2c} . . . . .$$

On en déduit les droites de I<sub>23</sub> et I<sub>32</sub> en fonction de V<sub>2</sub>, puis celle de I<sub>32</sub> en fonction de V<sub>3</sub>.

On continue ainsi en chaque nœud jusqu'au dernier *n*, où l'on détermine ainsi les droites de variation de I<sub>nm</sub> en fonction de V<sub>*m*</sub> en et fonction de V<sub>*n*</sub>. Si *n* est relié par les distributeurs *nL*, *nM*, . . . etc. aux centres L, M, . . . etc., on peut tracer les droites de I<sub>nL</sub>, I<sub>nM</sub>, . . . etc.

$$\text{Mais,} \quad I_{nm} = - I_{nL} - I_{nM} = . . . . .$$

On tracera donc la droite de — (I<sub>nL</sub> + I<sub>nM</sub> + . . .) et son point d'intersection avec la droite de I<sub>nm</sub> définit la solution; il déter-

mine par son abscisse la valeur cherchée de  $V_n$  et, de proche en proche, par rebroussement, les valeurs de tous les autres éléments du réseau. La condition que le polygone 123... $n$  ne soit pas fermé est indispensable pour qu'en aucun nœud il n'y ait jamais plus d'un seul distributeur nouveau dont les éléments sont à déterminer en fonction de la variable. S'il y en avait plus d'un, il faudrait, à partir de ce nœud, prendre une nouvelle variable, comme nous verrons plus loin. Si tous les centres A, B, C, ... etc., sont à la même tension, on peut les supposer confondus. Le schéma devient alors celui de la figure 19 ; tous les nœuds 1, 2, 3, ... et  $n$  sont reliés au centre unique par un ou plusieurs distributeurs. On voit que, dans ce cas, il est possible, par les considérations du n° 24, de ramener ce système à un distributeur fictif équivalent dont les deux extrémités sont confondues en A (distributeur fermé). Ce qui permet de calculer les éléments du réseau de proche en proche par la méthode exposée dans la première partie.

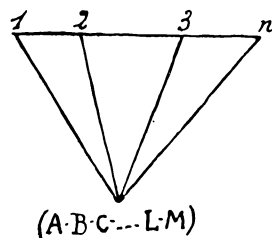


Fig. 19.

### Cas de plusieurs variables.

29. — Considérons un réseau quelconque ABC...123..., défini par le schéma de la figure 20a. Par le moyen de deux trans-

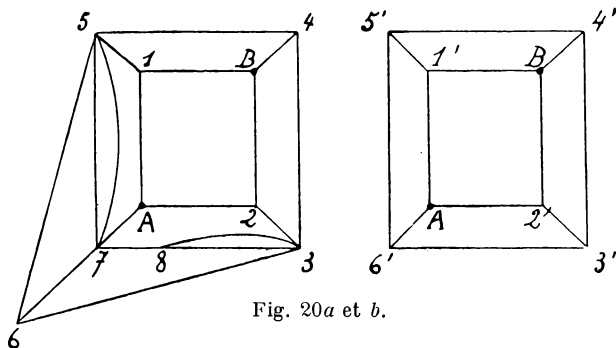


Fig. 20a et b.

formations biangulaires et de deux transformations triangulaires, on peut lui substituer le réseau ABC... 1' 2' 3' ..... de la figure

20*b*, système réduit à sa forme la plus simple et dans lequel certains distributeurs sont des distributeurs fictifs équivalents.

D'une manière générale, il ne sera pas possible d'exprimer tous les éléments du réseau au moyen d'une variable. Pour la résolution graphique d'un tel système, il faudra envisager un certain nombre de variables auxiliaires, que nous pouvons déterminer comme suit.

Recherchons sur le schéma le nombre minimum  $x$  de nœuds qu'il faudrait choisir comme centres d'alimentation supplémentaires pour que le réseau devienne à une seule variable ; c'est-à-dire pour que les nœuds restants, supposés au nombre de  $n$ , soient reliés par un nombre de distributeurs, ne comportant pas de centres d'alimentation, inférieur à  $n - 1$ . Le nombre total de variables est alors  $(x + 1)$  ; il y a  $x$  variables auxiliaires.

Si l'on ajoutait aux centres existants  $y$  centres placés en certains des  $x$  nœuds considérés, le nombre de variables auxiliaires serait réduit à  $(x - y)$ .

La recherche de  $x$  peut s'effectuer assez simplement. On suppose que tous les centres de distribution soient à la même tension, et on transforme le schéma en réunissant tous les centres de distribution en un seul, relié par  $n$  distributeurs fictifs aux  $n$  nœuds indéterminés restants. Ces derniers sont reliés par des distributeurs ne comportant pas de centres d'alimentation et formant des figures fermées (distributeurs en nombre supérieur à  $n - 1$ ).

Sur cette figure simplifiée, il est généralement aisé de déterminer quels sont les nœuds qu'il faudrait encore confondre avec le centre d'alimentation unique pour réduire finalement le réseau à un

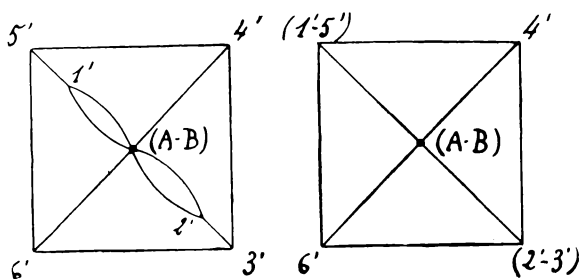


Fig. 20*c* et *d*,

schéma du genre de la figure 19. Le nombre de ces nœuds donne  $x$ .

Le réseau représenté par la figure 20*b* subit ainsi les transformations indiquées par les figures 20*c* et 20*d*. La dernière permet

de reconnaître facilement qu'il faut transformer un des quatre nœuds indéterminés en centre de distribution pour obtenir finalement le schéma d'un réseau à une seule variable (fig. 20e et fig. 20f).

Le calcul du réseau de la figure 20<sub>a</sub> est donc un problème à deux variables.

Comme centres d'alimentation fictifs, on envisagera de préférence ceux auxquels concourent le plus de distributeurs ; ils conduiront le plus favorablement au résultat désiré. Au point de vue de la facilité de calcul du réseau, il y

aurait intérêt à ce que les centres d'alimentation réels se trouvent aux nœuds où aboutissent un grand nombre de distributeurs et qui sont souvent des nœuds très chargés ; l'économie y trouverait donc son compte.

En général, lorsque le réseau aura été rendu irréductible, le nombre des variables dépassera rarement deux, sauf les cas de complication extrême défiant les calculs normaux.

30. — Pour la résolution, la méthode a recours, comme presque toutes les autres, au principe de superposition, elle résultera généralement de la combinaison de plusieurs solutions partielles, dépendant du nombre des variables, ou de solutions arbitraires ce qui revient au même (1). Par exemple, dans un problème à deux variables, on choisira comme variable auxiliaire  $y$  la tension en un nœud et on lui attribuera une valeur arbitraire  $Y$ . L'épure se trace dès lors comme pour le problème à une variable, par le moyen d'une variable indépendante  $x$ , mais on ob-

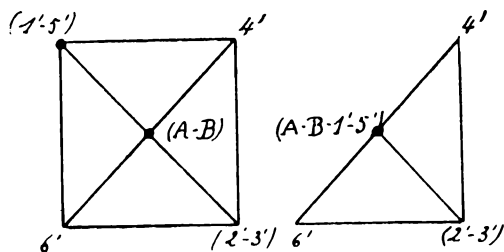


Fig. 20e et f.

(1) La solution directe indiquée par M. Musyck dans sa méthode vectorielle ne répond à cette qualification que par l'opération graphique, qui se fait en une seule épure ; mais le principe de la solution comporte réellement l'établissement successif de solutions arbitraires et leur combinaison graphique.

tient pour la solution une incompatibilité. Par exemple, un emprunt ou un débit de courant  $I$  en un nœud non réuni à une source ou prise de courant, ou bien une tension  $W$  inexacte en un centre d'alimentation qui doit être à la tension  $V$ . On note la solution. Ensuite, par le moyen de la même variable indépendante, le réseau étant considéré en charge ou à vide, on détermine l'effet d'une variation convenablement choisie  $\Delta Y$  de la variable auxiliaire. Il y correspond des variations  $\Delta I$  ou  $\Delta W$ . La comparaison avec la première solution permet de connaître de combien il faut modifier la première valeur arbitraire de la variable auxiliaire, ainsi que des autres inconnues du réseau, pour supprimer l'incompatibilité. La solution du problème résulte en somme, de la superposition des solutions

$$\begin{array}{l}
 V \dots\dots\dots, Y \dots\dots\dots, I \text{ ou } W \dots\dots\dots, \\
 \text{et} \quad 0 \dots\dots, -\Delta Y \frac{I}{\Delta I} \dots\dots, -I \dots\dots\dots \\
 \text{ou} \quad 0 \dots\dots, \Delta Y \frac{V-W}{\Delta W} \dots\dots, V-W \dots\dots\dots
 \end{array}$$

L'exemple que nous développerons plus loin fera comprendre facilement les opérations.

31. — Nous avons dit plus haut que le problème est à plusieurs variables lorsque,  $n$  nœuds du réseau étant reliés par des distributeurs à des centres d'alimentation, ils se trouvent réunis entre eux par plus de  $n - 1$  distributeurs qui ne comportent pas de centres d'alimentation. Si, par exemple, le nombre de ces distributeurs est  $n$ , il suffirait d'en supprimer fictivement un pour transformer le problème en un cas à variable unique.

C'est là le principe de la variante de la méthode par solutions partielles indiquée par M. Musyck, qui fait remarquer que l'on peut répéter cet artifice jusqu'à simplification suffisante du problème. C'est le cas de plusieurs variables.

Ce procédé peut-être très avantageux lorsque les distributeurs réunissant les  $n$  nœuds forment une figure assez simple, par exemple un contour fermé. Le distributeur  $MN$  à supprimer étant choisi sa charge est décomposée en ses composantes aux nœuds  $M$  et  $N$ ,

## ERRATUM

à la « Note sur le Calcul graphique des Réseaux de distribution d'énergie électrique ». *Bulletin* n° 5, 1923.

Page 185, ligne 12, lire :

$$V_M - V_N + \int \frac{v_M - v_N}{i} = \dots$$

Page 192, sous la figure 24, lire :

Échelles, voir page 193. (1)

au lieu de « même échelle que figure 22 (1) »

Page 193, ligne 3, lire :

L'intensité  $I_{A3} = - I_{3A}$  est.....

Page 193, ajouter aux figures 25 a et b, les indications

$$\Delta V_2 = 6,43.$$

Page 196, ligne 25, lire :

..... fournirait les [II]; .....

dont il faut, bien entendu, tenir compte. Le problème est soluble par le moyen d'une variable. On obtient ainsi une solution

$$V \dots \dots \dots, I \dots \dots \dots \quad O, V_M \text{ et } V_N.$$

Ensuite, le réseau étant à vide, on étudie l'effet de deux charges égales et opposées  $i$  aux nœuds M et N. On obtient ainsi une solution

$$O \dots \dots \quad O \dots \dots \dots, i, v_M \text{ et } v_N,$$

La solution vraie est

$$V \dots \dots \dots, I \dots \dots \dots, \mathfrak{J}. \mathcal{V}_M \text{ et } \mathcal{V}_N,$$

$\mathfrak{J}$  désignant le courant de circulation réel dans MN, et qui est défini par les relations.

$$V_M - V_N = \mathfrak{J} \frac{v_M - v_N}{i} = R \mathfrak{J} = \mathcal{V}_M - \mathcal{V}_N,$$

R désignant la résistance totale du distributeur MN

32. — Le problème du calcul d'un réseau peut, comme celui d'un distributeur simple, se présenter de deux façons différentes. Ou bien, les dimensions et les charges du réseau et les sections des conducteurs sont connues ; il s'agit alors de calculer les chutes de tension extrêmes. Les échelles des diagrammes polygonaux sont définies. On peut tracer les caractéristiques des différents distributeurs avec des échelles identiques pour toutes, ces échelles seront aussi celles des diagrammes de calcul du réseau, et l'on mesurera directement les chutes de tension sur ceux-ci et sur les diagrammes polygonaux ; pour les points de partage.

Ou bien, les dimensions et les charges du réseau sont connues, mais l'on désire déterminer les sections des distributeurs afin de ne pas dépasser une certaine chute de tension extrême admissible. Pour pouvoir résoudre ce problème, il faut se fixer au préalable les rapports des sections des divers distributeurs. Si l'on désire obtenir la solution la plus économique, on peut admettre, par analogie avec les conclusions de la première partie, que la proportionnalité des poids des distributeurs aux chutes de tension réalise cette condition.



Etant donnée la difficulté se de faire à priori une idée assez précise des courants de circulation et des chutes de tension pour un réseau quelque peu compliqué, la meilleure façon de procéder consistera à calculer tout d'abord le réseau en supposant tous les distributeurs de même section. Cette section étant déterminée, on calculera les chutes de tension et on recommencera le calcul avec des sections proportionnelles aux quotients des chutes de tension, par les longueurs des distributeurs. Une seule approximation sera en général suffisante, surtout si l'on veut éviter un trop grand nombre de calibres différents. Pour ce second calcul, il ne faudra pas recommencer tous les tracés, les diagrammes polygonaux établis pour le premier calcul peuvent servir, il suffit de changer les échelles des chutes de tension. Dans la solution de ce second problème, les échelles des chutes de tension ne sont pas définies, mais fonction de la section unique  $s$  des distributeurs dans le cas où ceux-ci sont de même section, ou d'une section réduite  $\omega$ , dans le cas où les distributeurs ont des sections différentes  $k_1\omega, k_2\omega, \dots$  etc.

Après solution du problème, la longueur représentative de la chute de tension extrême déterminera l'échelle des chutes de tension ; on en déduira la valeur de  $s$  ou de  $\omega$ , comme pour un distributeur unique de section constante ou variable.

### Application.

33. — Nous examinerons un problème à deux variables, dont la solution résultera de la superposition des éléments de deux systèmes à une variable, dont il serait superflu de présenter un exemple spécial. L'application est extraite de l'ouvrage cité de MM. Herzog et Feldmann (édition 1921, page 156) ; elle y est résolue algébriquement par la méthode des tensions aux nœuds et par celle des coupes. Le réseau comporte 4 mailles, 1 centre d'alimentation et 5 nœuds. Les systèmes algébriques linéaires, à résoudre dans l'application des deux méthodes énoncées comportent respectivement six et quatre équations.

La figure 21<sub>a</sub> qui représente le schéma du réseau, porte l'indication des conductances totales des distributeurs, ainsi que des charges concentrées aux nœuds. (Les données électriques ont été

réduites aux quarts de leurs valeurs dans l'exemple de l'ouvrage cité). La tension de distribution au centre d'alimentation A est de 500 volts.

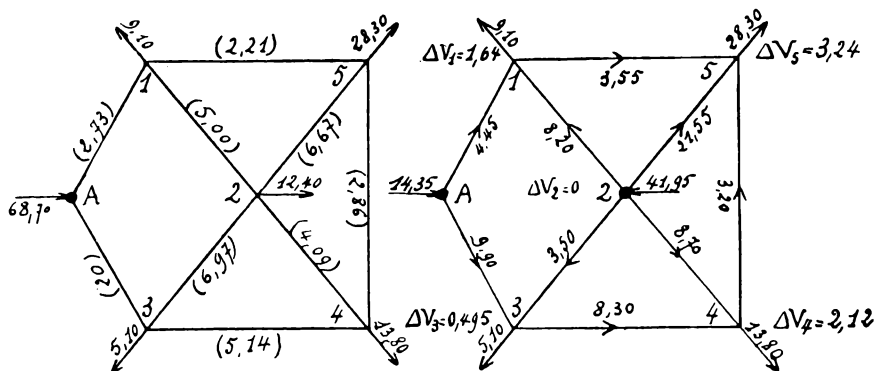


Fig. 21a et b.

Nous supposons tout d'abord que la tension au nœud 2 soit égale à celle du centre d'alimentation A. Le réseau ne contient plus alors que quatre nœuds indéterminés réunis par trois distributeurs seulement ; il ne comporte donc qu'une variable et est soluble par la méthode du § 28. La figure 22 représente les caractéristiques à vide de tous les distributeurs, aux échelles graphiques de 5 cm. par volt et de 0.5 cm. par ampère. C'est-à-dire que les échelles numériques sont 5 pour les tensions et 0.5 pour les intensités, en fonction du centimètre, du volt et de l'ampère (voir § 10).

Pour tracer l'épure qui donnera la solution du problème à une variable, figure 23, choisissons un axe OX des tensions, dont l'origine corresponde aux différences de potentiel égales  $V_A$  et  $V_2$  des centres d'alimentation réel et fictif A et 2. Sur cet axe et vers la droite sont représentées les différences de tension par rapport à  $V_A$  et  $V_2$ . Les échelles sont les mêmes que celles de la figure 22.

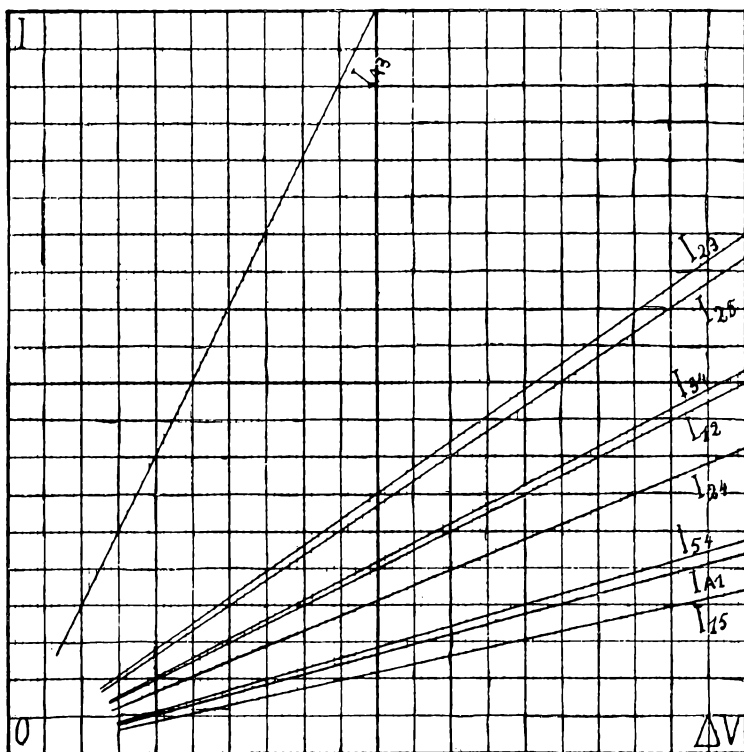
Adoptons comme variable auxiliaire  $V_1$  ou  $V_A - V_1 = V_2 - V_1$ , que nous désignerons par  $\Delta V_1$ . Nous traçons les droites  $(I_{1A})_1$  et  $(I_{12})_1$  en fonction de  $\Delta V_1$  ; ce sont les caractéristiques à vide de A1 et de 12 au nœud 1. En ce point, la première loi de Kirchoff exige que

$$I_{1A} + I_{12} + I_{15} + 9.10 = 0,$$

d'où

$$I_{15} = -I_{1A} - I_{12} - 9.10.$$

Cette expression, interprétée, en tenant compte des signes, par additions et soustractions graphiques des ordonnées, permet de tracer la droite de  $(I_{15})_1$  en fonction de  $\Delta V_1$ . La droite  $(I_{15})_5$  en fonction de  $\Delta V_5$  se déduit aisément de la précédente de la manière suivante. Un point pris sur  $(I_{15})_1$  définit une valeur de  $I_{15}$ , représentée par l'ordonnée, et correspondant à une valeur de  $\Delta V_1$



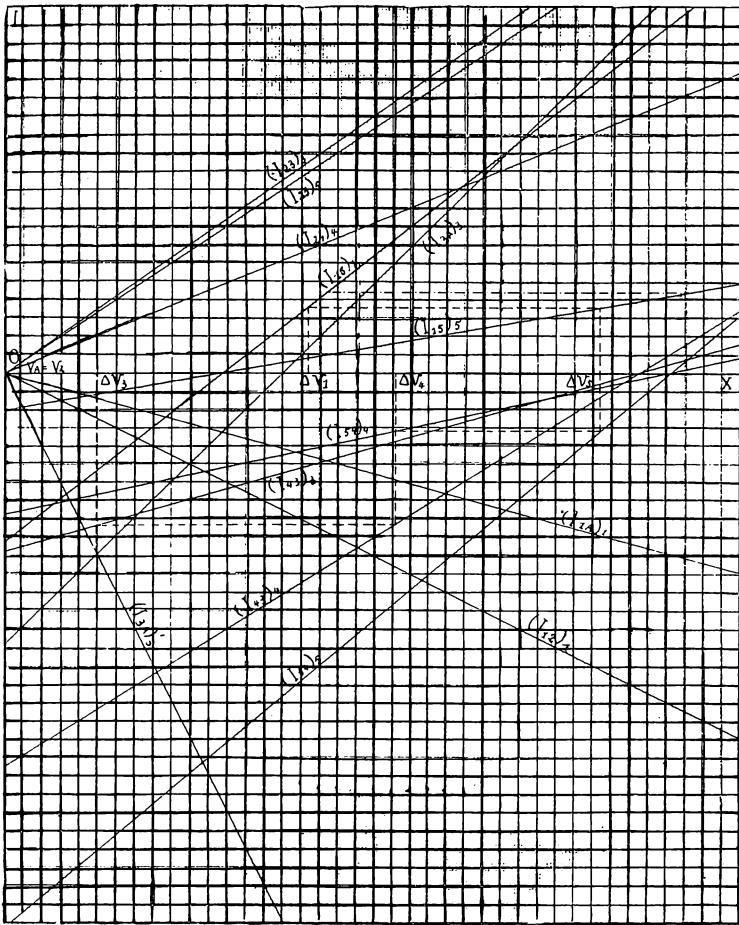
Echelles : Ech.  $I = 1/2$  (1 cm = 2 ampères).  
Ech.  $\Delta V = 5$  (1 cm = 0.2 volt).

Fig. 22.

ou  $V_1$  définie par l'abscisse. De la caractéristique du distributeur 15 on déduit qu'à cette valeur de  $I_{15}$  correspond une différence  $V_1 - V_5$  déterminée. Si l'on ajoute cette différence à l'abscisse, la nouvelle représentera

$$\Delta V_1 + V_1 - V_5 = V_2 - V_1 + V_1 - V_5 = V_2 - V_5 = \Delta V_5.$$

Si l'ordonnée est restée la même, le point obtenu appartient à la droite  $(I_{15})_5$ . Donc, il suffit de mener par un point de  $(I_{15})_1$



Mêmes échelles que figure 22 (1).

Fig. 23.

une parallèle à l'axe des tensions, et d'y porter, en tenant compte des signes et en partant de la droite  $(I_{15})_1$ , un segment représen-

(1) Ces échelles se rapportent au dessin original dont la figure 23 est une reproduction à mi-grandeur.

tant  $V_1 - V_5$  à l'échelle des tensions, et que fournit la caractéristique du distributeur 15.

Cette construction n'est à effectuer qu'une seule fois, si  $(I_{15})_1$  coupe l'axe OX dans les limites de l'épure, car le point de section appartient à  $(I_{15})_5$ .

On trace ensuite la droite  $(I_{25})_5$  en fonction de  $\Delta V_5$ , c'est la caractéristique à vide.

$$\text{Au nœud 5,} \quad I_{51} + I_{52} + I_{54} + 28,30 = 0,$$

$$\text{d'où} \quad I_{54} = -I_{51} - I_{52} - 28,30 = I_{15} + I_{25} - 28,30.$$

Par additions et soustractions d'ordonnées, on obtient ainsi la droite  $(I_{54})_5$ , puis, par une transformation analogue à la précédente,  $(I_{54})_4$ . Continuant ainsi aux nœuds 4, puis 3, on obtient finalement une droite  $(I_{3A})$ , en fonction de  $\Delta V_3$ . Mais la caractéristique de A3 permet de tracer une droite autre  $(I_{3A})'_3$  en fonction de  $\Delta V_3$ .

Comme  $I_{3A}$  ne peut avoir, pour une valeur quelconque de  $\Delta V_3$ , qu'une seule valeur, la solution est fournie par le point de rencontre des deux droites  $(I_{3A})_3$  et  $(I_{3A})'_3$ . A ce point correspondent, d'après l'épure, les valeurs  $\Delta V_3 = 0.495$ ,  $I_{3A} = -9.90$  ou  $I_{A3} = 9.90$ , et, en se reportant à la droite  $(I_{43})_3$ ,  $I_{43} = -8.30$  ou  $I_{34} = 8.30$ .

A cette valeur de  $I_{43}$  correspond, en se reportant à la droite  $(I_{43})_4$ ,  $\Delta V_4 = 2.12$ , etc.

Les résultats ainsi trouvés, de proche en proche, pour les chutes de tension aux nœuds et les courants de circulation, sont inscrits sur le schéma de la figure 21<sub>b</sub>.

Le problème à une variable est ainsi résolu, la figure 21<sub>b</sub> détermine complètement l'état électrique du réseau, lorsque A et 2 sont des centres d'alimentation à la même tension. Pour trouver la chute de tension maximum, il ne reste plus qu'à déterminer les points de partage des divers distributeurs par le moyen des diagrammes polygonaux.

34. — Mais le nœud 2 n'est pas un centre d'alimentation, la solution ci-dessus est arbitraire, car  $V_2$  est inférieur à  $V_A$ .

Il en résulte notamment que du courant serait emprunté à

l'extérieur au nœud 2, réduisant ainsi la quantité de courant empruntée au centre d'alimentation A. En effet,

$$I_{A1} + I_{A3} = 14.35,$$

alors que, A étant l'unique centre d'alimentation, l'emprunt total de courant, égal à la somme de toutes les charges du réseau, devrait être de 68.70 amp.

Si nous superposons au système

$$V_A = V_2, I_{A1} + I_{A3} = 14.35, \text{ en charge,}$$

constitué par la solution arbitraire étudiée, un second système  $V_A = 0, V_2 < 0, I_{A1} + I_{A3} = 54.35$ , à vide (sauf une restitution en 2 du courant emprunté en A, mais les charges étant nulles en tous les nœuds), nous réalisons, par cette superposition, la vraie solution du système

$$V_A, V_2 < V_A, I_{A1} + I_{A3} = 68.70, \text{ en charge.}$$

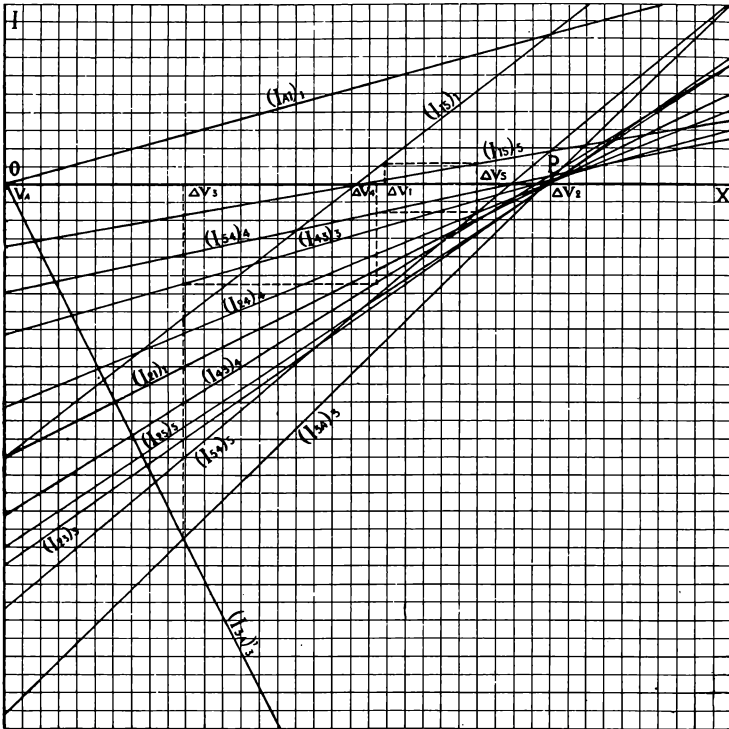
Le second système partiel est résolu par l'épure de la figure 24 tracée à l'aide des caractéristiques de la figure 22, mais dont les échelles restent provisoirement indéterminées. Le tracé de l'épure est possible malgré cette indétermination, parce qu'il s'agit d'une marche à vide ; les charges aux nœuds étant nulles, il n'est pas nécessaire de connaître avant la fin de l'opération les échelles des  $\Delta V$  et des I. Il faut simplement qu'elles soient proportionnelles à celles qui ont été utilisées pour le tracé des caractéristiques, c'est-à-dire que éch.  $V = 10 \times$  éch. I.

Le point O, origine de l'axe OX des tensions, correspond encore dans cette seconde épure, à la tension  $V_A$  au centre de distribution A. La tension au nœud 2 est supposée inférieure à  $V_A$  d'une quantité  $\Delta V_2$  représentée par l'abscisse arbitrairement choisie OP, portée sur l'axe OX.

Nous traçons tout d'abord la caractéristique à vide  $(I_{A1})_1$  de A1 par rapport à la variable indépendante  $\Delta V_1 = V_A - V_1$ , elle passe par le point O. Nous traçons ensuite la droite  $(I_{21})_1$  par rapport à  $V_2 - V_1$ , elle passe par le point P.

$$\text{Au nœud 1,} \quad I_{15} = I_{A1} + I_{21},$$

la droite  $(I_{15})_1$  s'obtient donc par addition graphique des deux précédentes. Le passage de la variable indépendante  $\Delta V_1$  à  $\Delta V_5$ ,



Mêmes échelles que figure 22 <sup>(1)</sup>.

Fig. 24.

s'opère par le moyen des caractéristiques comme dans l'épure précédente ; on en déduit aisément le tracé de  $(I_{15})_5$  <sup>(2)</sup>.

Et ainsi de suite, de la même manière que dans le § précédent

<sup>(1)</sup> Même observation que pour la figure 23.

<sup>(2)</sup> De même que dans la figure 23, toutes les droites telles que  $(I_{15})_1$  et  $(I_{15})_5$  se coupent sur l'axe des abscisses. Mais en outre, toutes les droites telles que  $(I_{15})_1$  et  $(I_{15})_1$  se rencontrent sur l'ordonnée du point P.

la solution s'obtient par l'intersection des deux droites  $(I_{3\Lambda})_3$  et  $(I_{3\Lambda})_3'$ .

L'intensité  $I_{A3} = -I_{A3}$  est représentée par 9.83 cm., l'intensité  $I_{A1}$  par 2.85 cm. ; leur somme est 12.63 cm.

Cette longueur doit représenter une intensité de 54.35 amp. L'échelle correspondante est, d'après le § 10

$$\text{éch. I} = \frac{12.68}{54.35} = 0.2333 ;$$

d'où

$$\text{éch. V} = 10 \times \text{éch. I} = 2.333$$

Les échelles de l'épure de la figure 24 étant déterminées, il est possible de mesurer les valeurs des intensités et des différences de tension. Les résultats sont indiqués sur le schéma de la figure 25<sub>a</sub>.

La solution exacte du problème du § 33 s'obtient par la superposition des chutes de tension et des courants de circulation indiqués dans les schémas des deux solutions partielles. Ses résultats sont inscrits dans le schéma de la figure 25<sub>b</sub>. Ils concordent avec ceux des solutions algébriques de MM. Herzog et Feldmann.

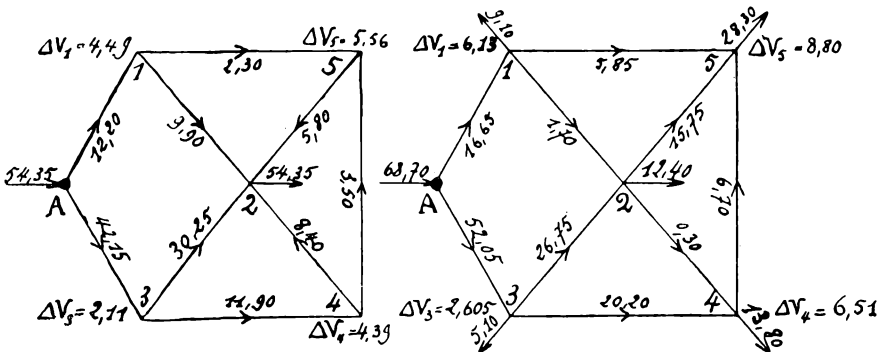


Fig. 25 a et b.

35. — Le problème précédent s'achèverait par l'étude des distributeurs au moyen de leurs diagrammes polygonaux ; la chute de tension maximum du réseau serait trouvée au point de partage de l'un des distributeurs.

L'application traitée fournit un exemple de vérification d'un réseau. Le lecteur se rendra aisément compte que le calcul des



dimensions des distributeurs d'un réseau s'effectue identiquement. Si les sections sont variables, il faut que les rapports en soient fixés à priori, ce qui revient à les exprimer tous en fonction d'une section réduite, multipliée par des coefficients  $k_1, k_2, k_3, \dots$  etc

Les caractéristiques et les épures de résolution du problème seront établies, non plus en fonction des variations de tension mais en fonction des variations des valeurs de  $\frac{(II)}{k}$ , dont tous les éléments sont connus. Si les sections des distributeurs sont constantes, on se rapportera aux variations des valeurs de  $(II)$ .

L'étude étant terminée, les épures fournissent la longueur représentative de la chute de tension maximum. Par la connaissance de la valeur de celle-ci, l'on calcule comme dans la première partie de l'étude, l'échelle des tensions. Sa combinaison avec l'échelle des  $\frac{(II)}{k}$  ou des  $(II)$  fournit la section réduite ou la section unique  $s$ , par les formules

$$\text{éch. } V = \frac{\omega}{2\rho} \text{ éch. } \frac{(II)}{k}$$

ou 
$$\text{éch. } V = \frac{s}{2\rho} \text{ éch. } (II).$$

36. — Le procédé graphique de résolution des problèmes à plusieurs variables permet, sans épures supplémentaires, de comparer diverses solutions. Ainsi, dans l'exemple étudié, il est très facile de calculer l'état électrique du réseau lorsque le centre d'alimentation est au nœud 2, A devenant un nœud ordinaire, caractérisé par sa charge. Ou bien encore, lorsque A et 2 sont concurremment des centres d'alimentation à des tensions quelconques.

Ce dernier problème ne comporte qu'une seule variable, et peut donc être résolu au moyen d'une seule épure ; la solution partielle du § 33 en constitue le cas particulier où  $V_2 = V_A$ .

Cette solution directe ne permettrait toutefois aucune comparaison avec des variantes, sans qu'il faille recourir au tracé d'épures supplémentaires. Tandis que la combinaison des deux solu-

tions partielles, établies pour l'exemple concret que nous avons étudié, permet de calculer les effets des variations quelconques des tensions des deux centres d'alimentation A et 2.

37. — Pratiquement, la méthode est dénuée d'erreurs systématiques. Son principe est tellement élémentaire, que les chances d'erreurs de raisonnement sont très réduites ; les fautes commises se décèlent d'ailleurs assez rapidement. Tous les calculs sont simples et faciles.

Le degré de précision de la solution sera déterminé par la précision du dessin. Cette précision peut, sans précautions très particulières, être grande, par suite de la simplicité des opérations graphiques. Il est très recommandable de les effectuer sur du bon papier millimétrique. Le seul ustensile de dessin à utiliser est une bonne règle droite ; le compas à pointe sèche peut être utile, mais n'est pas nécessaire. Toutes les droites à tracer sont définies par deux points. Il n'y a pas de parallèles ni de perpendiculaires à tracer, opérations graphiques pouvant donner lieu à des erreurs pratiques.

Les échelles seront choisies par l'opérateur selon le degré de précision ; les très grandes échelles toutefois ne sont guère préférables aux petites, à cause de l'incertitude du tracé des droites de très grandes longueurs. On pourra considérer comme bonnes valeurs des échelles, celles qui permettent d'apprécier aisément 1/100 de volt et 1/10 à 1/20 d'ampère. Il est inutile de rechercher une approximation plus grande, son degré de précision étant déjà largement supérieur à celui des appareils industriels de mesure.

Les planches accompagnant cette note reproduisent les épures en vraie grandeur. Les échelles en ont été choisies assez réduites en vue de l'empagement. Les épures ont pu ainsi tenir dans des surfaces de 20 × 25 cm., et de 20 × 20 cm. Leur précision peut cependant être déjà considérée comme satisfaisante.

L'exiguité des espaces précités indique à suffisance quelle marge d'agrandissement pratique subsiste pour ces épures, et combien il serait donc possible d'en améliorer les résultats. L'utilité en apparaît spécialement pour la seconde solution partielle, qui donne lieu, par suite de circonstances particulières, à la mesure de plusieurs longueurs assez réduites.

### Réseaux à courants alternatifs.

38. — Bien qu'aucune restriction spéciale n'ait été énoncée, il n'a été question, dans les paragraphes précédents, que de courants continus. La méthode graphique n'apportant aucune distinction nouvelle dans l'étude de ces deux espèces de courants, il n'y a pas lieu d'en examiner plus en détail l'application aux réseaux transportant des courants alternatifs. Je me référerai donc aux ouvrages traitant de la question, et notamment au livre cité de MM. Herzog et Feldmann.

Pratiquement, les distributeurs seront presque toujours dépourvus de réactance ou considérés comme de simples résistances ohmiques. Pour tenir compte des diversités de phase des courants absorbés par les récepteurs, ils seront décomposés en courants wattés et déwattés, et les réseaux seront étudiés séparément pour les deux genres de courant. Les deux solutions superposées fourniront les courants de circulation réels et leurs déphasages. La représentation vectorielle est d'un usage favorable, en association avec la méthode graphique, surtout pour les tracés qui ont fait l'objet de la première partie.

Si les distributeurs avaient une impédance spécifique constante par unité de longueur, connue à priori, dont  $Z$  est l'expression imaginaire, il serait possible d'en tenir compte, en recourant à la représentation symbolique. On tracerait les diagrammes en  $(I \times I)$  des courants wattés et déwattés, leur superposition fournirait les  $[IL]$ ; les chutes de tension seraient de la forme

$$[\Delta V] = \Sigma [II] Z$$

ce qui permettrait de calculer les valeurs efficaces et les déphasages des  $\Delta V$ .

Fernand CAMPUS.