

Note sur le Calcul graphique des Réseaux de distribution d'Énergie électrique.

AVANT-PROPOS

La première partie de la présente note constitue l'étude graphique du distributeur isolé. Ses principes sont classiques, ils sont cités dans les traités belges de M. Eric Gérard et de M. E. Piérard et exposés dans tous les ouvrages qui s'occupent des distributions d'énergie électrique. Cet exposé se borne cependant ordinairement aux généralités et conclut à une analogie avec certains procédés de la graphostatique auxquels il se réfère. Une étude plus fouillée a été publiée par M. H. Michel ⁽¹⁾.

J'ai cherché à détailler davantage encore tout le parti que l'on peut tirer de l'intégration graphique pour le calcul des distributeurs simples dans les cas les plus complexes et de donner en même temps aux diagrammes une forme plus appropriée aux problèmes électriques et d'un usage facile en tous cas. Peut-être aurai-je ainsi réussi à communiquer quelque intérêt à cette première partie qui n'apporte à proprement parler rien de nouveau, mais que je considère comme un préliminaire indispensable.

La suite, c'est-à-dire le calcul graphique des réseaux constitue le véritable objet de la note. Le problème du calcul des réseaux ne présente aucun mystère et rien n'est théoriquement moins compliqué que d'établir les systèmes d'équations linéaires auxquels il donne lieu et d'en concevoir la résolution. Là s'arrête toutefois la simplicité et, si les calculs pour un système d'un grand nombre d'équations n'ont rien d'insurmontable, ils sont presque toujours fastidieux et peu pratiques.

⁽¹⁾ H. MICHEL : Calcul graphique des distributions électriques à courant continu. *Bulletin technique de l'Association des Ingénieurs sortis de l'Ecole polytechnique de Bruxelles*, 7^e année, n° 2, décembre 1908.

Il existe des méthodes graphiques pour la résolution des systèmes d'équations linéaires. Le génial créateur de l'intégration graphique, feu le professeur J. Massau de Gand, en a établi une⁽¹⁾.

Elle est applicable au calcul des réseaux et l'auteur en donne comme exemple le problème du pont de Wheatstone. L'ouvrage magistral de l'Autrichien M. Herzog et du hollandais M. Feldmann, « Die Berechnung elektrischer Leitungsnetze in Theorie und Praxis » (1921) énumère plusieurs méthodes graphiques analogues. Presque toutes sont d'un intérêt plus mathématique que pratique.

Mr J. Musyck a développé récemment une méthode vectorielle pour le calcul des réseaux⁽²⁾.

Elle présente un caractère pratique évident et le symbolisme des systèmes plans joint à l'originalité une élégance très marquée. J'oserais cependant lui objecter d'être trop transcendante et d'exiger pour son application une compréhension trop spéciale, que l'on ne pourrait être assuré de trouver que chez des ingénieurs diplômés. Le calcul des réseaux de distribution est souvent un problème d'intérêt secondaire, que l'on devrait pouvoir confier pratiquement à des techniciens d'ordre moyen.

La méthode graphique exposée dans la présente note écarte, comme celle de M. Musyck, tout appareil algébrique ; elle interprète fidèlement le caractère électrique du problème. Elle emploie les coordonnées cartésiennes rectangulaires et n'a recours qu'à des tracés de droites. Elle se présente donc sous un aspect familier à toute personne connaissant bien les mathématiques élémentaires. Son emploi fait réaliser, par rapport à l'application des méthodes algébriques et même pour des cas relativement simples, un gain de temps très considérable, sans entraînement spécial. J'espère avoir pu rendre la méthode aussi élémentaire que possible et accessible au personnel subalterne des bureaux d'étude

Octobre 1922.

(1) J. MASSAU : Note sur la résolution graphique des équations du 1^{er} degré. *Ann. de l'Ass. des Ing. sortis de Gand*, t. XI, 3^e livraison, 1889.

(2) J. MUSYCK : Procédés vectoriels pour le calcul des réseaux électriques. *Bulletin de l'Association des Ingénieurs électriciens sortis de l'Institut électrotechnique Montefiore*, t. III, 5^e série, 1921.

PREMIÈRE PARTIE

CALCUL GRAPHIQUE DES DISTRIBUTEURS

1. — Nous représenterons un distributeur, selon la convention habituelle, par un trait simple, quel que soit le nombre des conducteurs. Nous supposerons toujours implicitement la distribution bifilaire et nous y substituerons fictivement un fil simple de résistivité double avec retour par la terre. S'il y a deux ponts de distribution également chargés, il nous suffit de considérer un seul conducteur extrême pour obtenir les chutes de tension aux récepteurs branchés entre ce conducteur et le neutre.

Distributeurs à sections constantes.

2. — Considérons un distributeur AB (fig. 1), de longueur L, de section constante s , alimentant en 1, 2, 3, ..., n , des branchements absorbant des intensités $i_1, i_2, \dots, i_n$. Désignons les longueurs des différents tronçons par $l_1, l_2, \dots, l_n$ et l_{n+1} . Supposons le distributeur alimenté sous tension constante V_a à l'extrémité A et désignons par V_x la tension disponible au point X situé à une distance x de cette extrémité.

L'intensité du courant de circulation dans un tronçon quelconque 34 du distributeur est

$$I_4 = \sum_{m=4}^{m=n} i_m \quad (1)$$

L'expression de la chute de tension entre A et X est, ρ désignant la résistivité du métal employé,

$$V_a - V_x = \frac{2\rho}{s} \left[I_1 l_1 + I_2 l_2 + \dots + I_k \left(x - \sum_{m=1}^{m=k-1} l_m \right) \right] \quad (2)$$

Par rapport à l'axe des abscisses AB, la courbe représentative des courants de circulation dans les diverses portions du distributeur est le diagramme à gradins $I'_a I'_1 I'_2 \dots I'_n$, aisé à tracer. L'équation (2) montre que la chute $V_a - V_x$ peut être représentée par l'aire partielle A $I'_a I'_1 \dots I'_x$ X de ce diagramme.

Il en résulte que la courbe intégrante du diagramme des courants de circulation est la représentative des chutes de tension $V_a - V_x$, que l'on peut tracer par les procédés généraux de l'inté-

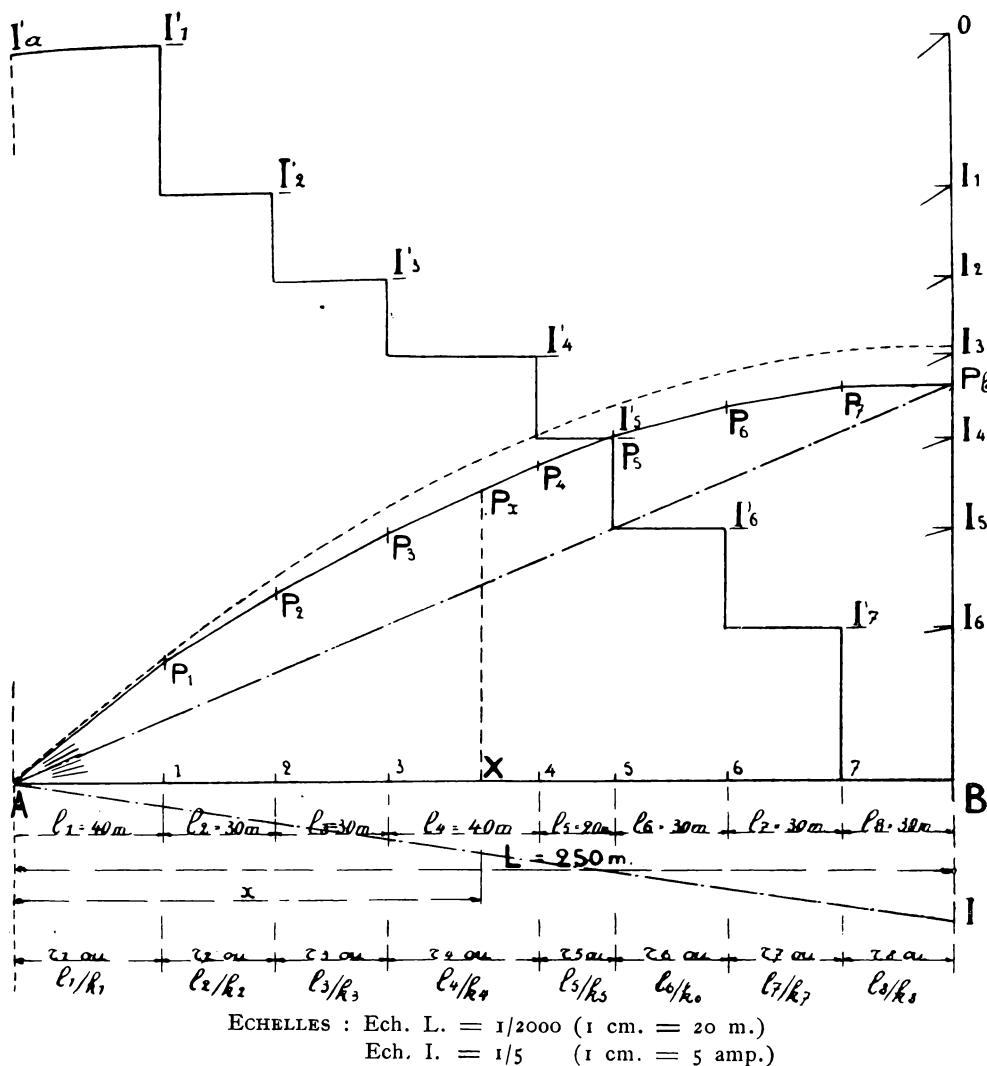


Fig. 1.

gration graphique. On peut dire également que le diagramme des courants de circulation est analogue à celui des efforts tran-

chants d'une pièce droite AB, appuyée en A seulement et sollicitée par des forces $i_1, i_2, \dots, i_n$ agissant normalement à son axe en des points $1, 2, \dots, n$. Et que d'après l'équation (2), la courbe des chutes de tension est un polygone funiculaire tracé au moyen de ces forces en partant du point A.

L'un et l'autre de ces procédés de statique et d'intégration graphique, donnant des résultats identiques d'ailleurs, sont assez classiques pour que je puisse m'y référer sans plus ample démonstration. Ces remarques justifient les tracés suivants.

Sur une droite AB, représentative de la longueur du distributeur, marquons les origines des branchements $1, 2, 3, \dots, n$. Elevons en son extrémité B une perpendiculaire sur laquelle nous portons, à partir du point B et vers le haut, des longueurs superposées $BI_{n-1}, I_{n-1}I_{n-2}, \dots, I_2I_1$ et I_1O , représentant à une certaine échelle les intensités $i_n, i_{n-1}, \dots, i_2$ et i_1 . Du pôle A traçons les rayons vecteurs aboutissant aux extrémités de ces longueurs et, partant du point A, traçons le polygone intégrant ou le polygone funiculaire dont les sommets sont situés sur les ordonnées des points $1, 2, 3, \dots, n$ et les côtés parallèles aux rayons vecteurs.

Les ordonnées de ce diagramme polygonal $AP_1P_2 \dots P_nP_b$, mesurées par rapport à l'axe des abscisses AB, représentent les chutes de tension aux différents points du distributeur. Ainsi, la chute de tension $V_a - V_x$ en X est représentée par XP_x . La chute de tension maximum, qui se produit à l'extrémité B, est représentée par BP_b .

Dans la suite, pour la rapidité de l'expression, nous dirons que la chute de tension $V_a - V_b$ est égale à BP_b , en considérant implicitement que BP_b est mesurée à l'échelle de la grandeur qu'elle représente. Donc, lorsque le distributeur AB est alimenté en A seulement, le courant I_{ab} entrant à l'extrémité A est OB, le courant I_{ba} à l'extrémité B est nul et la tension en B est $[V_b] = [V_a] - BP_b$.

3. — Par analogie avec la statique, le principe de l'indépendance des effets des forces et de leur superposition est applicable aux charges des branchements dérivés sur le distributeur.

C'est à dire que si une modification est apportée aux branchements existants ou que de nouveaux viennent s'y ajouter, il suffit

de tracer le diagramme polygonal pour les intensités supplémentaires et nouvelles seules et de superposer ce diagramme au précédent, donc de faire la somme algébrique des ordonnées des deux diagrammes.

4. — Supposons que le distributeur, alimenté en A seulement, soit raccordé en B à un autre distributeur ou à un réseau, auquel il fournit un courant d'intensité i . Tout se passe comme s'il y avait en B un branchement nouveau d'une telle intensité. Tous les courants de circulation dans les divers tronçons sont augmentés de cette quantité constante i et il est évident qu'au point de vue des chutes de tension, les effets de ce courant supplémentaire se superposent également à ceux des courants considérés dans le cas précédent comme s'il existait seul.

Les chutes de tension dues au courant i s'ajoutant à celles déjà déterminées, nous obtiendrons les chutes totales en portant sur OB, à la suite de I_bB et dans le même sens, une longueur BI représentative de i . Traçons AI.

Les chutes de tension par rapport au point A dues au courant i seul, circulant dans le distributeur dans toute sa longueur, sont données par les ordonnées de AI mesurées par rapport à l'axe des abscisses AB. Donc, les chutes de tension totales par rapport à A sont représentées par les ordonnées du diagramme polygonal $AP_1 P_2 \dots P_n P_b$, lues par rapport à AI comme axe des abscisses.

Le courant I_{ab} entrant en A dans le distributeur est OI.

Le courant $I_{ba} = i$ sortant en B du distributeur est BI.

La chute de tension en B est $[V_a - V_b] = P_b I$.

5. — Réciproquement, si la tension en B est connue et plus petite qu'au point A, la chute $[V_a - V_b] = P_b I$ détermine le point I et le courant $I_{ab} = OI$ entrant en A ainsi que le courant $I_{ba} = BI$ sortant en B. Le diagramme polygonal lu par rapport à AI comme axe des abscisses fait connaître les chutes de tension par rapport à A en tous les points du distributeur.

Ce tracé s'applique au cas où les tensions sont maintenues aux deux extrémités du distributeur à des valeurs constantes par des boîtes de jonction d'artères par exemple.

6. — Les propriétés précédentes sont indépendantes de la valeur et du sens de i . Ainsi, si i est un courant entrant en B, c'est-à-dire circulant de B vers A, BI se porte vers le haut, mais les conclusions $I_{ab} = OI$, $I_{ba} = i = BI$. $[V_a - V_b] = P_b I$ subsistent pour les valeurs numériques de ces grandeurs.

La convention de signes suivante permet en outre de déterminer leurs sens.

Nous considérerons comme positifs les courants entrants, comme négatifs les courants sortants.

Les courants I_{ab} en A seront mesurés entre leur origine fixe O et le point I, positivement de O vers le bas, négativement en sens inverse. Les courants I_{ba} en B seront mesurés entre leur origine B et le point I, positivement de B vers le haut, négativement en sens inverse.

Les chutes de tension à partir de la tension en A seront mesurées sur les ordonnées de AI par rapport au polygone $AP_1 P_2 \dots P_b$ comme ligne de repère, positivement vers le bas, négativement vers le haut. C'est à dire que tous les points situés sous $AP_1 P_2 \dots P_c$ représentent des tensions inférieures à V_a , tous les points situés au-dessus représentent des tensions supérieures à V_a .

7. — Donc, le diagramme constitué par les axes AB, BO et la ligne polygonale $AP_1 P_2 \dots P_b$ permet de déterminer complètement l'état électrique du distributeur dans tous les cas.

Si les courants de circulation sont déterminés en grandeur et en sens, le point I est connu et il suffit de tracer la droite AI pour obtenir les tensions en tous les points du distributeur.

Si les tensions V_a et V_b aux extrémités sont fixées, la différence $V_a - V_b$ par sa valeur et son signe, détermine la position du point I, qui fait connaître les courants de circulation.

Nous l'appellerons dans la suite *diagramme polygonal* du distributeur.

8. — Les cas où I est situé entre O et B méritent un examen spécial. I_{ab} et I_{ba} sont tous deux positifs, le distributeur est alimenté par les deux extrémités. Il existe alors un branchement recevant du courant des deux tronçons qui y aboutissent et dont l'origine est appelée *point de partage*.

La détermination de ce point est immédiate ; c'est l'origine du branchement dont la charge est représentée par le vecteur portant le point I dans la somme géométrique $OI_1 I_2 \dots I_n B$ des charges. Les deux segments de ce vecteur déterminés par I mesurent d'ailleurs les intensités partielles fournies à ce branchement par les deux tronçons voisins. De plus, le sommet du polygone $AP_1 P_2 \dots P_b$ correspondant à ce point de partage est le seul par lequel on puisse mener une parallèle à AI qui soit en tous points extérieure au polygone.

Le point de partage est le point du distributeur où la tension est la plus réduite, la chute de tension est fournie par le diagramme.

Si le distributeur est alimenté sous la même tension en chaque extrémité; $V_a - V_b = 0$ et le point I est en P_b .

Pour le diagramme polygonal de la fig. 1, le point de partage est dans ce cas le branchement 4, dont le vecteur $I_3 I_4$, représentatif de la charge i_4 porte le point P_b . Le sommet P_4 du polygone $AP_1 P_2 \dots P_b$ est le seul par lequel on puisse mener une parallèle à AP_b qui soit partout extérieure à ce polygone. La chute de tension maximum est mesurée par la portion d'ordonnée comprise entre P_4 et AP_b . Il est à remarquer que les intensités fictives appelées généralement composantes aux nœuds des branchements du distributeur sont représentées par les segments OP_b et BP_b .

9. — Si l'on imagine un distributeur AB sur lequel sont branchés une infinité de récepteurs élémentaires également chargés, équidistants et infiniment voisins, c'est-à-dire débitant une charge uniformément répartie, de j ampères par unité de longueur, la charge totale est $OB = jL$ et le diagramme polygonal devient une parabole passant par le point A où elle a pour tangente AO, et dont le sommet P_b est au milieu de OB, qui est confondu avec l'axe de la parabole. Ce cas théorique peut être intéressant dans des études d'avant-projets et d'installations nouvelles où tous les branchements possibles et à prévoir ne sont pas déterminés à l'avance. On se fixerait alors, d'après les circonstances particulières et les précédents connus, une certaine charge unitaire en vue d'un calcul des distributeurs adéquat au but proposé.

Le diagramme fondamental polygonal d'un distributeur à branchements isolés permet de déterminer la charge unitaire équivalente par le tracé d'une parabole circonscrite au polygone $AP_1P_2 \dots P_b$, passant par A et dont OB est l'axe. Pour le distributeur représenté à la fig. 1 on trouve ainsi que la charge unitaire équivalente aux branchements est de 0.217 ampères par mètre.

Cette notion ne présente évidemment une approximation admissible que dans le cas où la parabole et le polygone restent partout assez voisins, c'est-à-dire lorsque le nombre des branchements est important et leur répartition assez uniforme.

10. — Tous ces tracés sont simples et ne peuvent donner lieu en application à aucune difficulté. Le point le plus délicat réside toujours dans la détermination des échelles, que nous examinerons pour cette raison en détail.

Il faut faire choix d'abord des unités. Pour les grandeurs électriques, on adoptera les unités pratiques électromagnétiques : l'ampère, le volt et l'ohm. Il nous paraît que le plus simple est d'employer comme unité de longueur le centimètre et l'unité de section qui en dérive, donc le centimètre carré. Le coefficient de résistivité sera exprimé alors en ohm $\times$ centimètres, les densités de courant en ampères par cm^2 .

Dans tous les exemples de la suite, nous adopterons pour les fils de cuivre un coefficient de résistivité $= 1.7 \times 10^{-6} \text{ ohm} \times cm.$, à quoi correspond pratiquement un coefficient de conductivité de 60 pour un conducteur de 100 cm. de longueur et de 1 mm. carré de section.

Considérons une grandeur représentée par x (ou par le nombre x dans le système d'unités adopté). Représentons par le même symbole entre crochets, $[x]$, la longueur du dessin représentative de cette grandeur, mesurée dans le même système d'unités.

L'échelle de cette grandeur est définie par la relation

$$\text{éch. } x = \frac{[x]}{x}$$

Elle dépend donc des unités adoptées.

Ainsi, dans le système d'unités auquel nous nous référerons toujours et défini ci-dessus, si une chute de tension de 4 volts est

représentée par 0.6 cm., l'échelle des chutes de tension est

$$\text{éch. } V = \frac{0.6}{4} = 0.15$$

Pour le tracé des diagrammes polygonaux, on choisira arbitrairement, d'après les circonstances particulières et la précision que l'on veut obtenir dans les résultats, les échelles des longueurs et des intensités de courant ; de préférence exprimées par des nombres ronds pour la facilité des calculs ultérieurs.

L'échelle des chutes de tension peut-être déterminée alors par la connaissance de la section des conducteurs ou de la chute de tension extrême admissible. Lorsque cette dernière ΔV est définie, on mesure l'ordonnée maximum $[\Delta V]$ du diagramme des chutes de tension ; l'échelle est alors définie par $\text{éch. } V = \frac{[\Delta V]}{\Delta V}$

Si la section s est définie, on remarquera que

$$V_a - V_b = \frac{2\rho}{s} \sum_o^n I_4 l_4$$

ou

$$\frac{[V_a - V_b]}{\text{éch. } V} = \frac{2\rho}{s} \frac{\sum_o^n [I_4] [l_4]}{\text{éch. } I \times \text{éch. } l}$$

D'autre part, d'après les propriétés géométriques du graphique,

$$[V_a - V_b] = \frac{\sum_o^n [I_4] [l_4]}{[L]}$$

Donc

$$\text{éch. } V = \frac{s}{2\rho} \frac{\text{éch. } I \times \text{éch. } l}{[L]}$$

ou

$$\text{éch. } V = \frac{s}{2\rho L} \text{éch. } I$$

Donc, lorsque la section s est connue, l'échelle des chutes de tension est déterminée et l'on peut mesurer sur le diagramme les valeurs des chutes de tension.

Inversement, si par la considération de la chute de tension extrême admissible, on a pu déterminer l'échelle des chutes de

tension, on peut en déduire la section minimum du distributeur par la relation

$$s = 2 \rho L \frac{\text{éch. } V}{\text{éch. } I}$$

11. — Comme exemple concret, supposons que le distributeur AB, de 250 m. de longueur, défini par la fig. 1, soit alimenté par l'extrémité A seulement, sous la tension constante de 112 volts, et soit constitué par 2 conducteurs de 50 mm² de section. La tension disponible au récepteur le plus éloigné est $V_b = 112 - \Delta V$.

ΔV est représenté sur le diagramme par une longueur de 5.17 cm. Les échelles choisies sont :

$$\text{éch. } l = \frac{1}{2000},$$

$$\text{éch. } I = \frac{1}{5}$$

D'autre part, $s = 0.5 \text{ cm}^2$, $L = 25000 \text{ cm.}$ et $\rho = 1.7 \times 10^{-6} \text{ ohm} \times \text{cm.}$

Donc

$$\text{éch. } V = \frac{0.5}{2 \times 1.7 \times 10^{-6} \times 25000.} \frac{1}{5} = 1.175.$$

Donc

$$\Delta V = \frac{5.17}{1.175} = 4.4 \text{ volts,}$$

et

$$V_b = 112 - 4.4 = 107.6 \text{ volts.}$$

Comme autre exemple, supposons le même distributeur alimenté par les deux extrémités A et B sous une tension de 112 volts, et soit à déterminer la section minimum des deux fils qui le constituent pour que la tension au point de partage soit au moins égale à 108 volts. La chute de tension extrême admissible est de 4 volts. Elle est représentée dans le diagramme par une longueur de 1.3 cm. au point de partage 4.

Donc

$$\text{éch. } V = \frac{1.3}{4} = 0.325$$

Il en résulte que, les autres échelles et coefficients restant les

mêmes que dans l'exemple précédent, que la section minimum cherchée a pour valeur

$$s = 2 \times 1.7 \times 10^{-6} \times 25000 \times \frac{0.325}{0.2} = 0.138 \text{ cm}^2$$

soit 13.8 mm².

Distributeurs à sections variables.

12. — Supposons que le distributeur AB (fig. 1) n'ait plus une section constante, mais variable d'un tronçon à l'autre. Désignons par $s_1, s_2, \dots, s_n$ et s_{n+1} les sections des tronçons A1, 12, 23, ... nB, de longueurs $l_1, l_2, \dots, l_n$ et l_{n+1} . Les résistances des divers tronçons sont $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$, de la forme

$$r_m = \frac{2\rho l_m}{s_m}$$

Dans ce cas, et en conservant pour le surplus les mêmes notations que dans l'étude des distributeurs à sections constantes, l'expression de la chute de tension de A en X est

$$V_a - V_x = r_1 I_1 + r_2 I_2 + r_3 I_3 + \dots + r_x I_k ; \quad (3)$$

r_x désigne la résistance du tronçon compris entre le point X et le branchement précédent,

$$r_x = \frac{r_k}{l_k} \left(x - \sum_{m=1}^{m=k-1} l_m \right)$$

L'expression (3) montre que tous les tracés et propriétés du diagramme polygonal établis pour les distributeurs à sections constantes restent applicables aux distributeurs à sections variables, à condition de représenter des abscisses, suivant l'axe AB, non plus les longueurs partielles et totales du distributeur, mais les résistances correspondantes.

La relation entre les échelles du diagramme devient

$$\text{éch. V} = \frac{1}{R} \text{éch. I},$$

R désignant la résistance totale du distributeur.

On remarquera qu'il est nécessaire que les diverses sections ou résistances partielles soient connues à l'avance, c'est-à-dire, qu'il n'est plus possible que de vérifier un distributeur complètement déterminé.

13. — On peut cependant dimensionner à priori un tel distributeur à condition de choisir arbitrairement des rapports déterminer des sections ou résistances,

$$\frac{s_1}{k_1} = \frac{s_2}{k_2} = \dots = \frac{s_{n+1}}{k_{n+1}} = \omega$$

$$\text{ou } \frac{r_1}{l_1/k_1} = \frac{r_2}{l_2/k_2} = \dots = \frac{r_{n+1}}{l_{n+1}/k_{n+1}} = \frac{2\rho}{\omega}$$

$k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$ étant des coefficients numériques.

L'expression de la chute de tension de A en X peut s'écrire alors

$$V_a - V_x = \frac{2\rho}{\omega} \left[I_1 \frac{l_1}{k_1} + I_2 \frac{l_2}{k_2} + \dots + I_k \frac{\left(x - \sum_{m=1}^{m=k-1} l_m \right)}{l_k} \right]$$

Les sections étant indéterminées, on peut cependant tracer le diagramme polygonal en portant en abscisses, suivant l'axe AB, non les longueurs partielles $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$, mais les longueurs partielles réduites $l_1/k_1, l_2/k_2, \dots, l_{n+1}/k_{n+1}$.

La relation entre les échelles prend alors la forme

$$\text{éch. V} = \frac{\omega}{2\rho} \frac{\text{éch. I}}{\sum_{m=1}^{m=k-1} l_m/k_m}$$

éch. V étant d'autre part déterminée par la considération de la chute de tension extrême admissible, $\left(\text{éch. V} = \frac{[\Delta V]}{\Delta V} \right)$ on en déduit

$$\omega = 2\rho \left(\sum_{m=1}^{m=n+1} l_m/k_m \right) \frac{\text{éch. V}}{\text{éch. I}}$$

et $s_1 = k_1 \omega, s_2 = k_2 \omega, \dots, \text{etc.}$

14. — Dans les deux interprétations précédentes du diagramme polygonal appliqué aux distributeurs à sections variables, le diagramme polygonal est, comme dans le cas où la section est constante, la courbe intégrante du diagramme des courants de circulation dans les divers tronçons du distributeur. La propriété capitale de l'indépendance des effets des charges et de leur superposition subsiste donc, ainsi que toutes les propriétés du diagramme polygonal qui en ont été déduites.

L'expression de la chute de tension de A en X peut encore s'écrire

$$V_a - V_x = 2\rho \left[l_1 \frac{I_1}{s_1} + l_2 \frac{I_2}{s_2} + \dots \right]$$

Or, $\frac{I_1}{s_1}$, $\frac{I_2}{s_2}$,etc. expriment les densités de courant δ_1 , δ_2 , etc., dans les divers tronçons du distributeur. En d'autres termes,

$$V_a - V_x = 2\rho (l_1 \delta_1 + l_2 \delta_2 + \dots)$$

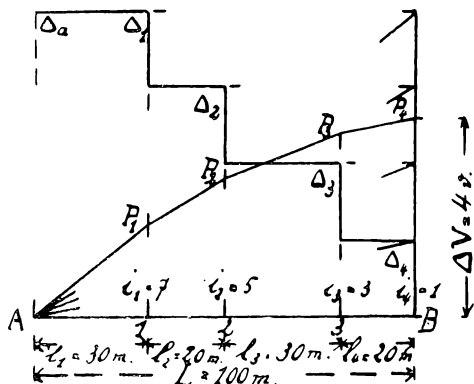
D'après cette expression, le diagramme des chutes de tension peut encore s'obtenir en portant en abscisses, suivant l'axe AB, les longueurs réelles des tronçons du distributeur et en traçant la courbe intégrante du diagramme des densités de courant dans les différents tronçons (fig. 2).

Dans le tracé du diagramme des densités, il faut tenir compte des sens des courants correspondants, d'après la convention de signes adoptés pour ceux-ci.

Les propriétés de l'indépendance des effets des charges et de leur superposition n'existent plus dans ce diagramme en (l, δ) ; celles qui en découlaient pour le diagramme polygonal ne subsistent donc pas également. L'usage du diagramme en (l, δ) est ainsi beaucoup plus restreint.

Ech. δ désignant l'échelle des densités de courant, la relation entre échelles devient

$$\text{éch. } V = \frac{1}{2\rho L} \text{ éch. } \delta.$$



ECHELLES :

Ech. $L = 1/2000$ (1 cm. = 20 m.)

Ech. $\delta = 0,0221$ (1 cm. = 45.5 amp./cm²)

Ech. $V = 0,65$ (1 cm. = 1,54 volt)

Fig. 2.

Le diagramme en (l, δ) ne diffère pas du diagramme polygonal lorsque la section est constante ; il n'offre dans ce cas aucune utilité d'ailleurs. Lorsque la section du distributeur est variable, il permet de dimensionner celui-ci en s'imposant à l'avance certaines conditions pour les densités de courant dans les divers tronçons. Par exemple, le distributeur étant alimenté par une seule extrémité, les rapports des diverses densités de courant sont fixés à l'avance, ou bien la densité doit être constante. On trace alors le diagramme des densités, toutes de même sens, à une échelle indéterminée et sa courbe intégrante. La connaissance de la chute de tension extrême admissible permet de calculer éch. V ; on en déduit

$$\text{éch. } \delta = 2\rho L \text{ éch. V}$$

On peut mesurer alors sur le diagramme les ou la densité de courant et, les courants de circulation étant d'ailleurs connus, on en déduit les sections des divers tronçons (voir l'exemple traité au n° 15). Lorsque le distributeur est alimenté par les deux extrémités, le problème est compliqué du fait de l'inconnaissance du point de partage. On peut opérer par tâtonnements ou choisir le point et traiter chaque partie ainsi délimitée comme un distributeur alimenté en une extrémité seulement, en tenant compte toutefois de la communauté du point de partage. Il est préférable à cet effet d'effectuer les tracés sur un dessin unique.

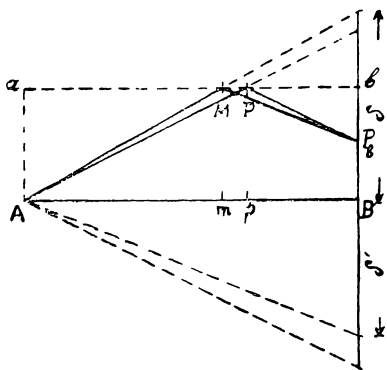


Fig. 3.

La condition d'une densité de courant constante fournit un exemple simple. Les tensions en A et en B étant V_a et V_b , $V_a - V_b$ est connu en grandeur et en sens. En choisissant arbitrairement éch. V, le point P_b du diagramme en (l, δ) est fixé (voir fig. 3). Si ΔV , chute de tension extrême admissible, est donné, on peut tracer la parallèle ab à AB , lieu du sommet P du diagramme polygonal des chutes de tension à partir de A. Les deux droites AP et PP_b doivent

faire des angles égaux et de sens contraires avec AB ou ab , donc

$$\frac{aP}{Pb} = \frac{aA}{bP_b} = \frac{V_a - V_p}{V_b - V_p} = \frac{\Delta V}{\Delta V - (V_a - V_b)}$$

ce qui détermine la position théorique du point de partage.

Il n'y a pas nécessairement d'origine de branchement en ce point ; le point de partage sera donc pris au branchement m le plus voisin de P. Les directions AM et MP_b déterminent les rayons vecteurs qui définissent les densités δ et δ' dans les tronçons Am et mB. Ces densités sont légèrement inégales et d'autant moins que M est plus voisin de P.

Comme éch. $\delta = 2 \rho L$ éch. V,
on peut mesurer δ et δ' .

15. — L'intérêt, plutôt théorique d'ailleurs, de l'étude des distributeurs à sections variables se rapporte à la recherche de l'économie de métal conducteur.

Pour un distributeur alimenté par une extrémité seulement et pour une chute de tension extrême déterminée, on sait que le poids de métal conducteur est le même lorsque la section du distributeur est constante et lorsqu'elle varie de façon à assurer la constance de la densité de courant. On peut le vérifier très aisément par les diagrammes en (l, δ) , en représentant outre les variations des densités et des chutes de tension, celles des courants de circulation et des sections.

Dans le cas de la section constante, le poids de métal est proportionnel à la longueur ; dans le cas de la densité constante, la chute de tension est proportionnelle à la longueur et, dans l'un comme dans l'autre, le rapport de la chute de tension au poids de cuivre varie tout le long du distributeur. Il est clair, pour une chute de tension donnée, que le poids de cuivre est minimum lorsqu'il est proportionné à la chute de tension. On peut le vérifier, aisément par voie analytique pour un distributeur alimenté par une extrémité.

Dans cette hypothèse, pour chaque tronçon

$$\frac{\Delta V}{2ls} = \text{constante}$$

$$\frac{2\rho(l/s)I}{2ls} = \frac{\rho I}{s^2} = \rho \frac{\delta}{s^2} = k (\text{constante}).$$

Les sections sont donc proportionnelles aux densités de courant ou encore aux racines carrées des intensités des courants de circulation. Dans le cas du distributeur alimenté par une seule extrémité, les courants de circulation étant connus, les rapports des sections le sont également et l'on peut employer directement le diagramme polygonal, ainsi qu'il est exposé au § 13, ou bien, les rapports des densités étant connus également, on peut utiliser le procédé du § 14, par le diagramme en (l, δ) . C'est ce qui a été fait à titre d'illustration des § 14 et 15 pour le distributeur de la figure 2.

Ce distributeur AB étant alimenté par A seulement, les courants de circulation sont : $I_1 = 16$ amp., $I_2 = 9$ amp., $I_3 = 4$ amp $I_4 = 1$ amp.

Les densités de courant doivent être proportionnelles aux racines carrées de ces intensités, donc aux nombres 4, 3, 2 et 1. Portons en ordonnées sur le diagramme $\Delta_a \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4$ des longueurs proportionnelles à ces nombres. Traçons ensuite le polygone intégrant $AP_1 P_2 P_3 P_4$. BP_4 , longueur représentative de la chute de tension de A en B mesure 2.6 cm. Si la chute de tension admissible est de 4 volts, éch. $V = \frac{2.6}{4} = 0,65$

éch. $\delta = 2 \rho L$ éch. $V = 2 \times 1.7 \times 10^{-6} \times 10000 \times 0.65 = 0.0221$

D'où :

$\delta_1 = 181$ amp./cm², $\delta_2 = 135.5$ amp./cm², $\delta_3 = 90.5$ amp./cm², $\delta_4 = 45$ amp./cm².

et

$s_1 = 0.038$ cm², $s_2 = 0.066$ cm², $s_3 = 0.044$ cm², $s_4 = 0.022$ cm².

Le volume du cuivre du distributeur est 1.144 dm³. Un distributeur de section constante aurait un volume de 1.36 dm³. Dans le cas d'un distributeur alimenté par les deux extrémités, il faut d'abord définir le point de partage. On peut ainsi que le fait M. H. Michel (ouv. cité), prendre le même point de partage que si la section était constante. Mais il n'est pas certain, surtout si le nombre de branchements est assez grand et leur distribution peu uniforme, que le poids de cuivre obtenu ainsi est minimum.

Remarquons que la formule de la chute de tension de A en X peut s'écrire sous la forme

$$V_a - V_x = 2 \sqrt{\rho k} [l_1 \sqrt{I_1} + l_2 \sqrt{I_2} + \dots]$$

La courbe des chutes de tension est l'intégrante du diagramme des racines carrées des intensités des courants de circulation par rapport aux longueurs portées en abscisses suivant AB.

On peut tracer une telle courbe de $V_a - V_x$ et, de même, celle de $V_b - V_x$.

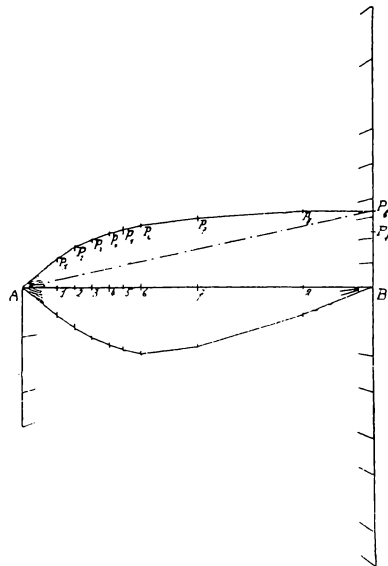
Au point de partage, V_x doit avoir les mêmes valeurs dans ces deux courbes intégrantes, c'est-à-dire que celles-ci doivent se rencontrer au droit de ce point. Seulement, comme la superposition des effets des charges n'existe plus dans ce cas, où l'on considère les racines carrées des courants de circulation, la détermination du point de partage et des courants de circulation se fait par tâtonnements. La relation d'échelles est

$$\text{éch. } V = \frac{1}{2\sqrt{\rho k L}} \text{ éch. } \sqrt{I}.$$

Elle permet de tenir compte éventuellement de la différence entre V_a et V_b . Le point de partage et les courants de circulation étant fixés, on peut déterminer les sections comme il vient d'être exposé pour les distributeurs alimentés par une extrémité. On se servira du diagramme en (l, δ) , qui est le même que le diagramme en $(l, \sqrt{I})$ déjà tracé.

Pour le distributeur défini aux figures 4 et 5, et alimenté en A et B sous la même tension, le point de partage dans le cas de la section constante est au branchement 5 (fig. 4) ; dans le cas des sections les plus économiques, il est en 6 (fig. 5). Les répartitions des courants de circulation sont indiquées à la figure 4 par les points P_b et P_b' ,

ECHELLES : (1)
Ech. $L = 1/2000$ (1 cm. = 20 m.)
Ech. $I = 1/5$ (1 cm. = 5 amp.)



ECHELLES : (1)
Ech. $L = 1/2000$ (1 cm. = 20 m.)
Ech. $\sqrt{I} = 1,41$ (1 cm. = 0.71)

Fig. 4 et 5.

(1) Ces échelles se rapportent au dessin original, dont les figures 4 et 5 sont une reproduction en mi-grandeur.

respectivement pour chaque cas. La détermination de P_b' a été faite par tâtonnements. On trouve ainsi

$$I'_1 = 32, \quad I'_2 = 24.5, \quad \text{etc.}$$

le diagramme en $(l, \sqrt{I})$ de la figure 5 permet de calculer

$$\sqrt{k} = \frac{1}{2\sqrt{\rho} L} \frac{\text{éch. } I}{\text{éch. } V}$$

et les sections par la formule $s = \sqrt{\frac{\rho I}{k}}$

Les résultats numériques sont les suivants, pour une chute de tension au point de partage de 2 volts.

Dans le cas de la section constante, éch. $I = 1/5$, $L = 200$ m.,

$$\text{éch. } V = \frac{0.975}{2} = 0.488.$$

$$s = 2\rho L \frac{\text{éch. } V}{\text{éch. } I} = 2 \times 1.7 \times 10^{-6} \times 20000 \times \frac{0.488}{0.2} = 0.166$$

Le volume brut de cuivre du distributeur est

$$\frac{2 \times 1.7 \times 10^{-6} \times 20000}{1000} = 6.64 \text{ cm}^3.$$

Dans le cas des sections les plus économiques, éch. $\sqrt{I} = 1.41$,

$$\text{éch. } V = \frac{1.9}{2} = 0.95, \text{ d'où}$$

$$\sqrt{k} = \frac{1}{2\sqrt{\rho} L} \frac{\text{éch. } I}{\text{éch. } V} = \frac{1}{2\sqrt{1.7 \times 10^{-3} \times 20000}} \frac{1.41}{0.95} = 0.0285.$$

On en déduit les sections par la formule

$$s = \sqrt{\frac{\rho I}{k}} = 0.0458 \sqrt{I} \quad (\text{cm}^2 \text{ et amp.})$$

On trouve ainsi $I_1 = 32$, $I_2 = 24.5$, $I_3 = 14.5$, $I_4 = 9.5$, $I_5 = 4.5$, $I_6 = 2$, $I_7 = 1$, $I_8 = 4.5$, $I_9 = 3$; $s_1 = 0.259$, $s_2 = 0.227$, $s_3 = 0.174$, $s_4 = 0.141$, $s_5 = 0.097$, $s_6 = 0.065$, $s_7 = 0.046$, $s_8 = 0.097$, $s_9 = 0.130$.

Comme $l_1 = 20$ m., $l_2 = 10$ m., $l_3 = 10$ m., $l_4 = 10$ m., $l_5 = 8$ m., $l_6 = 10$ m., $l_7 = 32$ m., $l_8 = 60$ m., $l_9 = 40$ m., le volume brut de cuivre est 4.904 dm^3 , soit 74 % du poids du distributeur de section constante donnant lieu à la même chute de tension. L'économie théorique est donc importante, la multiplicité des calibres et le grand nombre de joints en constituent le revers.

16. — A titre purement documentaire, nous examinerons sommairement le cas du distributeur bifilaire à dérivation en boucle (fig. 6).

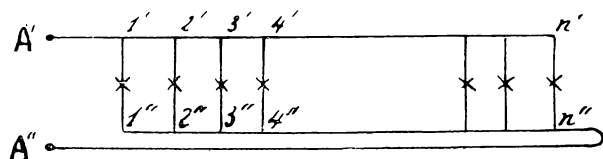


Fig. 6.

On tracera un diagramme polygonal pour chaque conducteur, en considérant la section simple et en adoptant les mêmes échelles. Puis, pour chaque branchement, on fera la somme des ordonnées correspondantes des deux diagrammes. On pourra dresser de cette manière un graphique des chutes de tension aux divers branchements et vérifier le distributeur. On déterminera sa section comme pour la dérivation simple.

Détermination des centres d'alimentation.

17. — Nous considérerons uniquement des distributeurs à sections constantes. Un tel distributeur étant défini par la considération des récepteurs à alimenter, pour une chute de tension extrême admissible, l'économie de cuivre sera obtenue par le choix judicieux du nombre de points d'alimentation et de leurs emplacements.

On sait que, si les longueurs des feeders restent sensiblement égales, il y a intérêt pour réduire le poids du métal conducteur à les multiplier. Car leur section totale est invariable, tandis que les sections des distributeurs peuvent être sensiblement réduites pour de mêmes chutes de tension extrêmes. Leur nombre est en général imposé ou limité par des circonstances particulières ou des considérations économiques d'un autre ordre. Dans ce qui suivra

nous supposons que l'alimentation se fait en tous les centres sous la même tension.

18. — Supposons que le distributeur AB ne soit alimenté qu'en un seul centre.

La solution la moins économique consiste à placer ce centre en une des extrémités.

La solution la plus économique consiste à le placer en un point intermédiaire C tel que les chutes de tension de C en A et en B soient égales. On voit aisément qu'il en est ainsi lorsque ce point se trouve au centre de gravité des charges du distributeur. Ce centre de gravité C se trouve sur l'ordonnée du point de rencontre P_c des deux côtés extrêmes

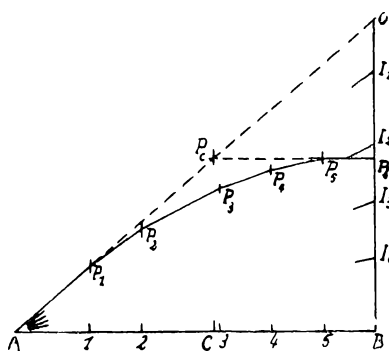


Fig. 7.

du polygone. Les chutes de tension de C en A et B sont donc égales et représentées par la portion d'ordonnée comprise entre P_c et le diagramme polygonal, beaucoup plus petite que BP_b .

19. — Si la longueur du distributeur l'exige, pour avoir une économie suffisante, on aura recours à deux centres d'alimentation. On peut les prévoir aux extrémités du distributeur, mais il est plus économique de les placer en des points C et D tels que les chutes de tension en A, B et au point de partage entre C et D soient égales.

Ces points se trouvent sur les ordonnées des sommets intermédiaires d'un polygone à trois côtés $AP_c P_d P_b$ circonscrit à la ligne polygonale $AP_1 P_2 P_3 \dots$ du diagramme polygonal tracé à partir du point A. Deux de ces côtés sont les prolongements des côtés

extrêmes du diagramme polygonal, le troisième passe par un ou éventuellement deux sommets de ce diagramme. Les portions d'ordonnées comprises entre la ligne $AP_1 P_2 \dots P_b$ et P_c et P_d respectivement doivent être égales (fig. 8).

On tracera donc le diagramme polygonal en partant de A. La droite $P_c P_d$ sera déterminée par quelques essais en la faisant pivoter autour d'un ou de plusieurs sommets du polygone $AP_1 P_2 \dots P_b$. Les points C

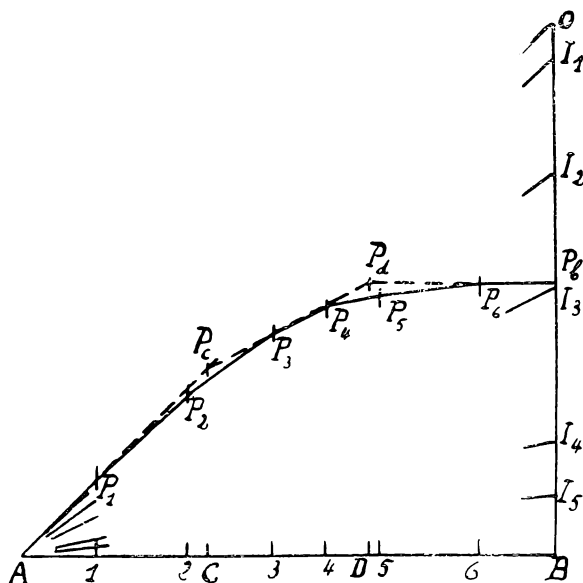


Fig. 8.

et D, les courants de circulation et les chutes de tension seront ainsi déterminés avec une précision très suffisante, si les échelles sont convenablement choisies.

20. — On peut opérer avec un plus grand nombre de centres d'alimentation, les tâtonnements devenant évidemment plus longs. Par exemple, deux centres d'alimentation étant placés aux extrémités, soit à déterminer la position la plus avantageuse d'un troisième C. Celui-ci doit se trouver sur l'ordonnée du point P_c de la ligne polygonale $AP_1 P_2 \dots P_b$ au diagramme polygonal, tel que les droites AP_c et $P_c P_b$ interceptent des portions maximales d'ordonnées du polygone (fig. 9).

En effet, $AP_1 P_2 \dots P_b$ étant la ligne de repère des chutes de tension à partir de A, le diagramme des chutes de tension est $AP_c P_b$ et les portions maximales d'ordonnées comprises entre ces deux lignes représentent les chutes de tension aux points de partage entre A et C et C et B ; ces chutes doivent être égales.

les deux droites ont des inclinaisons symétriques par rapport aux axes coordonnés.

Si la tension en l'une des extrémités A ou B. est connue, les caractéristiques peuvent être tracées en fonction de la tension variable de l'autre extrémité. La figure 10 représente les caractéristiques du distributeur dont le diagramme polygonal est représenté à la figure 1, la section étant de 0.5 cm^2 et éch. $I = 1/10$, éch. $V = 1$.

Les ordonnées à l'origine des deux caractéristiques représentent les composantes aux nœuds des branchements du distributeur. Les parallèles à ces caractéristiques menées par l'origine pourraient être appelées caractéristiques à vide du distributeur, elles dépendent uniquement de sa résistance totale. Le coefficient angulaire des caractéristiques est inversement proportionnel à cette résistance.

(A suivre.)
