RACCORDEMENT PROGRESSIF

DE

DEUX ARCS DE CERCLE

PAR

F. CAMPUS
Ingénieur des Constructions civiles et Électricien,
Professeur à l'Université de Liége.

EXTRAIT DES
ANNALES DES TRAVAUX PUBLICS DE BELGIQUE
DÉCEMBRE 1926

BRUXELLES
GOEMAERE, IMPRIMEUR DU ROI, ÉDITEUR
21, rue de la Limite, 21

1926

RACCORDEMENT PROGRESSIF

DE

DEUX ARCS DE CERCLE

PAR

F. CAMPUS
Ingénieur des Constructions civiles et Électricien,
Professeur à l'Université de Liége.

I. — **Rappel de la théorie générale.** (D'après M. Maurice D'OCAGNE, *Leçons sur la Topométrie*, Paris 1910, pp. 118 et suiv.). — La courbe de raccordement est rapportée à la tangente Ax et à la normale Ay au point d'inflexion A ; elle peut être représentée par des équations telles que :

$$x = X(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$y = Y(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

t étant un paramètre choisi de telle sorte qu'il soit nul en A, ce qui exige que :

$$X(o) = 0, \quad Y(o) = 0, \quad Y'(o) = 0, \quad Y''(o) = 0.$$

Soit M un point courant de la courbe, de coordonnées x et y. Le coefficient angulaire de la tangente en ce point est :

$$tg\,\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{Y'(t)}{X'(t)} = \Phi(t) \quad . \; . \quad . \; . \quad (3)$$

Le rayon de courbure en M est :

$$r = \frac{\left[\,\overline{X'(t)}^2 + \overline{Y'(t)}^2\,\right]^{3/2}}{Y''(t)\,X'(t) - X''(t)\,Y'(t)} = R(t) \quad . \; . \; . \quad (4)$$

Les coordonnées du centre de courbure O sont :

$$\xi = x - r \sin\varphi = x(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

$$\eta = y + r \cos\varphi = y(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

II. — **Raccordement d'un alignement droit et d'un arc de cercle** (fig. 1). — Soit Xx un alignement droit se raccordant avec un arc de cercle de rayon r. Il faut insérer un raccordement progressif entre la droite et le cercle. Il sera tangent à la droite en son point d'inflexion A et osculateur au cercle en un point tel que M dont le centre de courbure est confondu avec celui du cercle. Si l'on conserve le rayon r du cercle, l'équation (4) donne la valeur de t correspondante et permet de déduire des équations (1), (2), (3), (5) et (6) les valeurs de x, y, φ, ξ et η, par rapport à Xx et à la perpendiculaire à cette droite élevée en A.

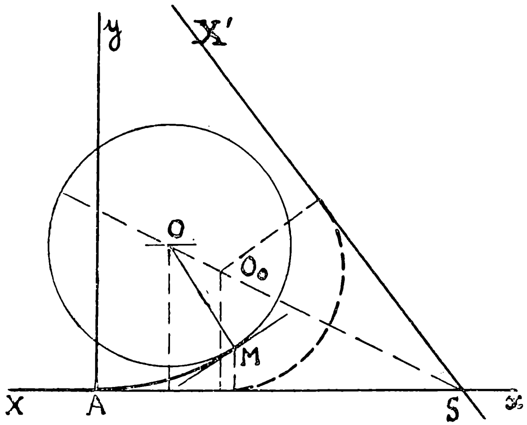

Fig. 1.

On est ainsi en possession de tous les éléments du tracé que l'on entreprend en déterminant la position du centre O, qui doit se trouver sur la bissectrice de l'angle des deux alignements droits à raccorder. Le tracé est symétrique par rapport à cette bissectrice.

Par rapport au raccordement direct, l'alignement droit et l'arc de cercle ont subi un déplacement relatif, nécessaire pour permettre l'insertion des courbes de raccordement.

Si l'ouverture angulaire de l'arc de cercle est très grande, c'est-à-dire si l'angle des deux alignements à raccorder est très faible, le déplacement du centre du cercle ne produit qu'un très faible déplacement relatif de l'alignement droit et du cercle, nul à la limite. Pour permettre l'insertion de la courbe de raccordement, il faut diminuer r et, par exemple, conserver le centre du cercle. De cette manière, η est connu, on en déduit t d'après l'équation (6). Les autres relations donnent x. y, ρ, r et ξ, ce qui permet d'exécuter le tracé.

III. — **Raccordement de deux arcs de cercles** (fig. 2). — Soient deux alignements droits xS et x'S raccordés par une courbe circulaire à tangentes inégales, c'est-à-dire par deux arcs de cercle. Si les longueurs des tangentes sont données, une construction géométrique connue, qui admet d'ailleurs une infinité de solutions, résout le problème. Il faut ensuite insérer des raccordements paraboliques entre les alignements droits et les arcs de cercle, ce qui se fait comme ci-dessus, et un autre entre les deux arcs de cercle.

Le problème est pratiquement assez complexe et s'effectue généralement par la prédétermination des centres, que M. d'Ocagne expose de la manière suivante. Si le raccordement se fait avec rayons conservés r et r', on peut déterminer t et t' et η et η' pour les courbes de raccordement avec les alignements droits. Les centres O et O' doivent donc se trouver sur deux droites Δ et Δ' parallèles à xS et x'S. On peut également déterminer t, t', ξ, ξ', η et η' pour le raccordement des deux arcs, donc la distance OO' $= \delta$ des centres.

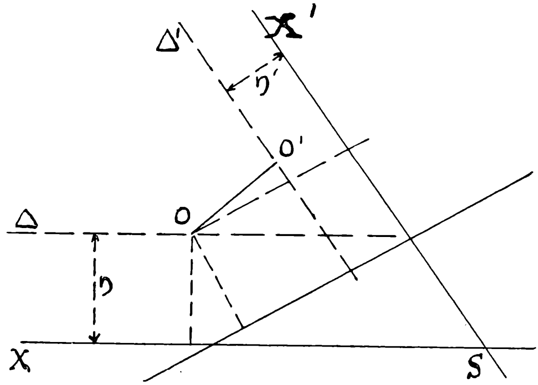

Fig. 2.

$$\delta = (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2.$$

La tangente au point d'inflexion de la courbe de raccordement des deux cercles fait avec OO' un angle τ tel que

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'}.$$

Il y a encore une infinité de solutions. On prendra par exemple OO' parallèle à la droite joignant les centres primitifs (sans raccordement progressif); il est simple de déterminer alors sur Δ et Δ' les points O et O' tels que OO' $= \delta$. La tangente au point d'inflexion de la courbe de raccordement des deux arcs fait avec OO' un angle τ et se trouve à distance η de O ; elle est donc déterminée et le tracé peut s'achever sans difficultés.

La méthode du centre conservé n'est pas applicable au sens propre. Si l'on détermine les rayons des cercles par ce procédé pour les raccordements avec les alignements droits, les valeurs de δ et τ en découlent et il faut forcément déplacer l'un des centres.

IV. — Principe de la méthode proposée — Les méthodes prérappelées de construction du raccordement de deux arcs de cercle présentent quelques inconvénients. Elles demandent d'assez nombreux calculs différents de ceux des raccordements aux alignements droits. Elles admettent une infinité de solutions, et le choix de la direction OO' ou de l'un des deux centres est en somme arbitraire. Ces points constituent une gêne pour le personnel technique, chargé du calcul des raccordements progressifs, qui n'éprouve par contre aucune difficulté s'il s'agit d'un alignement droit et d'un cercle.

Cette observation justifie le principe de la méthode exposée ci-après. On peut considérer qu'au point de contact de deux cercles existe un alignement droit infiniment petit dont la direction est connue. Cet alignement droit fictif peut être raccordé progressivement avec les deux arcs de cercle, les éléments du tracé sont définis par la condition que ces raccordements constituent géométriquement une même courbe.

De cette manière, le tracé comme la théorie sont ramenés à ceux du raccordement d'une droite et d'un cercle, qui sont familiers. Le tracé est très simple pour certaines courbes pratiques de raccordement, telles que les paraboles cubiques. Enfin, la méthode est applicable aussi en cas de raccordement d'une courbe et d'une contre-courbe.

V. Théorie générale de la méthode. — Dans le procédé à rayon conservé, on connaît les droites Δ et Δ', sur lesquelles doivent se trouver les centres O et O', et la direction de la tangente TT' au point d'inflexion de la courbe de raccordement des deux arcs. Cette tangente sert de base au tracé qui comporte la détermination des points O et O' pour le raccordement de la tangente avec chacun des deux cercles. On mène ensuite par O une parallèle à Δ, par O' une parallèle à Δ', ensuite les droites Sx et Sx' parallèles aux précédentes aux distances η_1 et η_1', correspondantes aux raccordements progressifs des arcs de cercle avec les alignements droits (fig 3).

Par cette méthode, l'ensemble de la courbe de raccordement s'éloigne sensiblement du sommet de l'angle des deux alignements droits extrêmes. Si l'on doit réduire ce déplace-

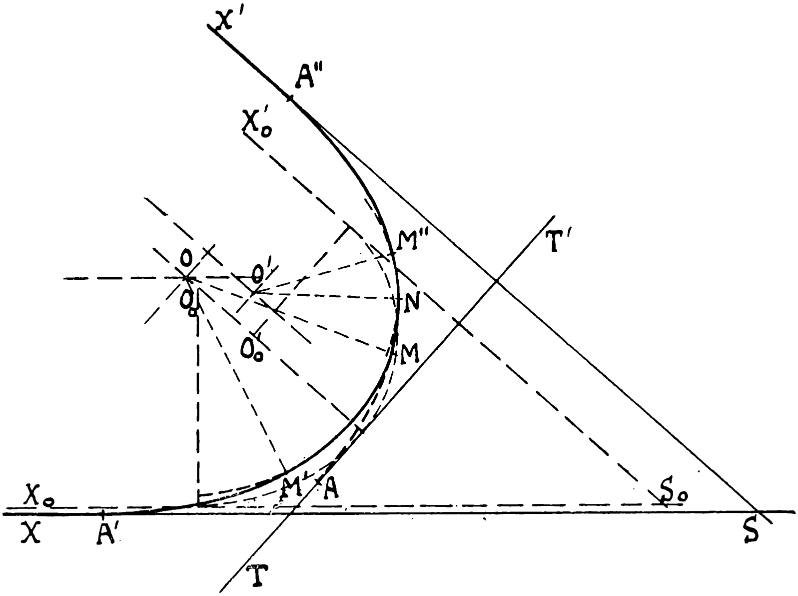

Fig. 3.

ment, on diminue le rayon en employant la méthode suivante qui procède du tracé à centre conservé (fig. 4).

Considérons les deux alignements extrêmes xS, x'S et la tangente TT' commune aux deux arcs de cercle sans raccordement progressif. Nous pouvons tracer les deux raccordements à rayon conservé de l'arc de plus petit rayon avec les droites Sx et TT' considérées comme fixes indépendamment de Sx'. La courbe de raccordement des deux arcs de cercle est ainsi définie, notamment son point d'inflexion A sur TT' ; le centre du cercle se déplace en O. Si l'on veut effectuer le tracé en conservant O' par rapport à Sx', on en déduit la valeur du rayon r' et la position de O' par rapport à TT'. La nouvelle position de Sx' est obtenue par déplacement parallèle, de telle sorte que sa distance à O' soit égale au rayon modifié r'. Le déplacement de la courbe de raccordement par rapport au sommet S est moindre.

Le raccordement à deux centres conservés est en tous cas impossible, même s'il s'agit d'une courbe et d'une contre-courbe. Mais on peut dans ce cas entamer la construction indifféremment par le raccordement à centre conservé (grand rayon) ou par celui à rayon conservé, car le raccordement des

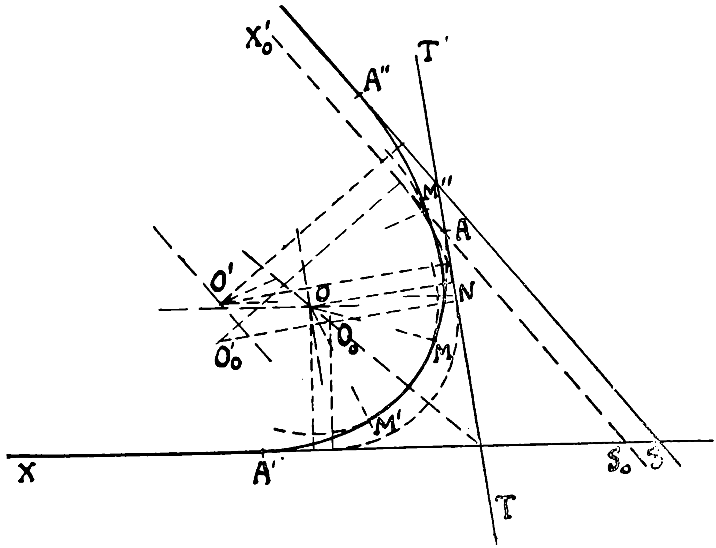

Fig. 4.

deux cercles est fait en réalité par deux arcs de raccordement progressif opposés par le point d'inflexion.

S'il s'agit d'introduire des raccordements dans une courbe existante, il est nécessaire de s'écarter le moins possible du tracé ancien. Ce résultat peut être atteint en conservant les positions relatives des deux alignements extrêmes Sx et Sx' et de la tangente commune TT'. On effectue le raccordement à rayon ou centre conservé de la courbe de plus petit rayon avec la tangente extrême et la tangente commune. On construit ensuite une courbe à centre et rayon modifiés, osculatrice à la courbe de raccordement avec la tangente commune et qui permette un raccordement convenable avec l'autre tangente extrême.

VI. — **Raccordement par la parabole cubique** (fig. 5). — La méthode est générale comme il résulte de son exposé et s'applique donc à toutes les courbes de raccordement, telles que la clothoïde, la lemniscate, etc. Mais son application est particulièrement simple à la parabole cubique, dont l'usage est très répandu dans les chemins de fer. (Cfr. *Manuel relatif à la pose de la voie et à l'entretien de la voie et de ses dépendances, des Chemins de fer de l'État Belge.)*

Le tracé du raccordement d'un alignement droit et d'un arc

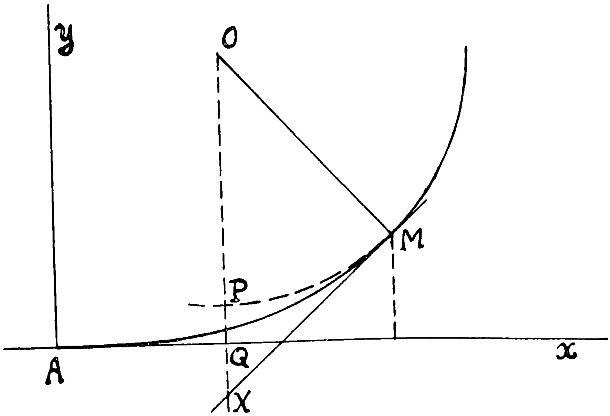

Fig. 5.

de cercle s'effectue généralement d'après le choix préalable de la longueur L du raccordement.

L'équation de la parabole cubique rapportée à la tangente et à la normale au point d'inflexion est :

$$y = kx^3.$$

Dans l'étendue des arcs pratiques de raccordement, on peut considérer que $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$ est si petit que son carré est négligeable. On peut donc confondre l'abscisse avec la longueur d'arc et adopter pour le rayon de courbure l'expression simplifiée :

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{1}{6kx}.$$

La valeur de k est déterminée par la condition que lorsque

$x = \mathrm{L}$, $\rho = r$, rayon de l'arc de cercle. Donc :

$$r = \frac{1}{6k\mathrm{L}},$$

et

$$k = \frac{1}{6rL}.$$

L'équation de la parabole cubique raccordant une droite et un cercle de rayon r par un arc de longueur L est donc :

$$y = \frac{x^3}{6rL}.$$

Donc, pour $x = L$,
$$Y = \frac{L^2}{6r}.$$

Selon la propriété connue de la parabole cubique, la sous-tangente est égale au tiers de l'abscisse. L'abscisse du centre de courbure est :

$$\xi = x - \rho \frac{dy}{dx} = x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2},$$

donc la moitié de l'abscisse du point correspondant de la courbe. D'autre part :

$$r_1 = r + PX - XQ.$$

Or,

$$XQ = \frac{Y}{2} = \frac{L^2}{12r} \quad \text{et} \quad 2r.PX = \frac{L^2}{4}, \text{ d'où } \quad PX = \frac{L^2}{8r}.$$

Donc :

$$r_1 = r + \frac{L^2}{24r}.$$

Le tracé du raccordement est donc simple. Le centre de l'arc de cercle est déplacé de $\frac{L^2}{24r}$ perpendiculairement à l'alignement droit. Les raccordements avec la droite et avec l'arc de cercle se font à distance $\frac{L}{2}$ de part et d'autre de la normale à l'alignement droit passant par le centre.

Le *Manuel relatif à la pose de la voie* des Chemins de fer de l'Etat belge donne pour des longueurs L = 40,60 et 80 mètres les déviations normales des points de la courbe de raccordement espacés de 10 en 10 mètres par rapport à l'axe primitif de la voie. Les rayons sont en progression arithmétique; pour les valeurs intermédiaires, on interpole.

VII. — **Raccordement parabolique de deux arcs de cercle de même concavité** (fig 6). — M. L. Limasset établit directement l'équation de la courbe de raccordement et le déplacement relatif des deux centres par des considérations de géométrie infinitésimale dans son Cours de Routes (*Encyclopédie des Travaux Publics*, Paris 1918, pp. 111 et suiv.). Cette méthode est peu intuitive et aboutit au tracé par prédétermi-

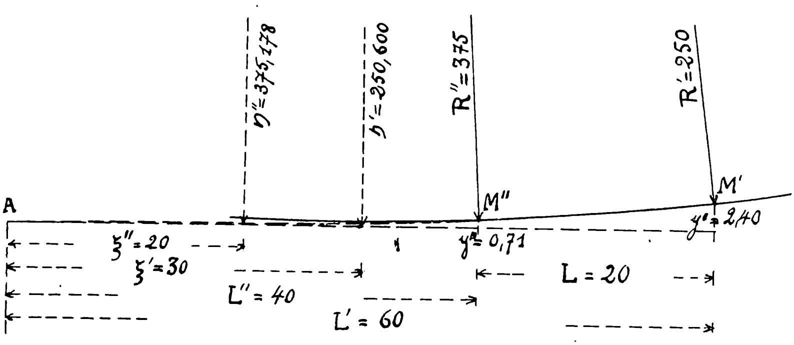

Fig. 6.

nation des centres, de la manière qui a été exposée au paragraphe III.

La méthode suivante est enseignée dans le Cours de Constructions civiles de l'Université de Liége, d'après le principe exposé au paragraphe IV (1).

Soit L la longueur du raccordement de deux courbes de rayon r' et r'' et soit $r' < r''$. A partir du point d'inflexion de la courbe de raccordement avec la tangente commune primitive, il correspond au cercle de rayon r' une longueur d'arc L' et au cercle de rayon r'' une longueur $L'' < L'$. Ces longueurs sont liées par la relation :

$$L = L' - L''.$$

D'autre part, la courbe de raccordement est unique et ne peut avoir qu'une équation, donc :

$$y = \frac{x^3}{6\,r'\,L'} = \frac{x^3}{6\,r''\,L''},$$

d'où :

$$\frac{L'}{L''} = \frac{r''}{r'}.$$

(1) Elle est analogue à celle qui est exposée par M. l'Ingénieur en chef LAVIOLETTE dans le Cours d'exploitation des Chemins de fer de l'Université de Liége.

Donc : $L' = L \dfrac{r''}{r'' - r'}$, $L'' = L \dfrac{r'}{r'' - r'}$;

et
$$y = \frac{x^3}{6\,L\,\dfrac{r'\,r''}{r'' - r'}} = \frac{x^3}{6\,L}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right)$$

La construction de la courbe de raccordement est des plus simples d'après la méthode géométrique indiquée ci-dessus.

On peut aussi se servir des tableaux du *Manuel relatif à la pose de la voie*, à condition de s'imposer pour le rapport $\dfrac{r''}{r'}$ une des valeurs $\dfrac{1}{0{,}75}$, 1,50 ou 2 et de prendre L = 20 ou 40 mètres.

VIII. — **Raccordement d'une courbe et d'une contre-courbe** (fig. 7). — Soient r' et r'' les rayons des courbes. Si L' et L'' sont les longueurs correspondantes des raccorde-

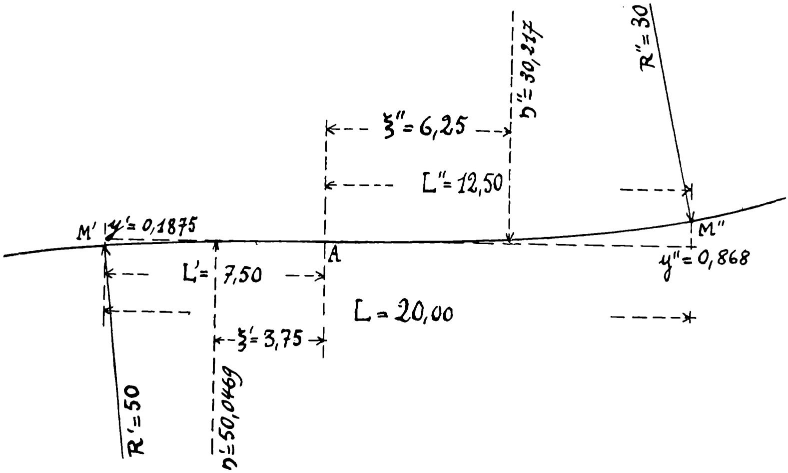

Fig. 7.

ments des deux courbes avec la tangente commune, les relations entre L', L'', r' et r'' sont dans le cas présent :

$$L' + L'' = L,$$

et

$$\frac{L'}{L''} = \frac{r''}{r'},$$

d'où

$$L' = L \frac{r''}{r' + r''},$$

$$L'' = L \frac{r'}{r' + r''},$$

et l'équation de la courbe de raccordement est :

$$y = \frac{x^3}{6L}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right).$$

Le tracé s'effectue comme dans le cas précédent, le raccordement est progressif sur toute la longueur. Le manuel précité recommande cependant pour les voies de chemin de fer l'intercalation d'un alignement droit d'au moins 10 mètres de longueur entre les deux courbes. Les tableaux de ce manuel peuvent servir à la condition de prendre pour le rapport $\frac{r'}{r''}$ une des valeurs 0,75, 1,00, 1,50 ou 2 et L = 80, 100, 120, 140 ou 160 mètres.

Pour le tracé des routes, on emploie des arcs de raccordement d'une longueur de l'ordre de 10 à 20 mètres. Pour les voies ferrées, la longueur des arcs de raccordement résulte de la condition du dévers progressif.

Liége 1926.