UNIVERSITÉ DE LIÉGE

COURS DE CONSTRUCTIONS DU GÉNIE CIVIL

N° 4

NOTE

SUR LA

DÉFORMABILITÉ DES BARRAGES A GRAVITÉ

PAR

F. CAMPUS
Ingénieur A. I. Lg., A. I. Br. et A. I. M.
Professeur à l'Université de Liége

Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique* [Classe des Sciences]
Séance du 6 décembre 1930 (n° 12, pp. 1384-1395)

BRUXELLES

M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

112, Rue de Louvain, 112

1931

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XVI, no 12.
Séance du 6 décembre 1930, pp. 1384-1395.

GÉNIE CIVIL.

Note sur la déformabilité des barrages à gravité,

par FERNAND CAMPUS,
Professeur à l'Université de Liége (*).

M. A. Merten a établi, dans une note publiée en 1924 (1), les équations de déformation dans le cas très particulier d'un mur triangulaire isocèle sans charge d'eau, en partant de la loi des tensions de M. Lévy.

La présente note généralise ce résultat pour le cas de barrages triangulaires quelconques, à vide et sous charge d'eau, en tenant compte ou non des sous-pressions, et contient des formules complètes de déformation des barrages lors de la mise en charge.

*
* *

Nous établirons d'abord les équations sans tenir compte des sous-pressions. Le poids spécifique du mur est π. Les équations indéfinies de l'élasticité sont

$$\frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial n_2}{\partial y} - \pi = 0,$$

$$\frac{\partial^2 (n_1 + n_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (n_1 + n_2)}{\partial y^2} = 0.$$

La solution de M. Lévy pour le barrage triangulaire indéfini à sollicitation homothétique est

$$n_1 = a_1 x + b_1 y, \quad n_2 = a_2 x + b_2 y, \quad t = (\pi - b_2)\, x - a_1 y\,;$$

elle tient compte des équations à la surface.

(*) Présenté par M. Dehalu.
(1) *Bull. Acad. roy. de Belg.*, Cl. des Sc., 1924, p. 355.

Les équations aux dérivées partielles des déformations sont

$$-\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{E}(n_1-\eta n_2), \qquad -\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{E}(n_2-\eta n_1),$$

$$-\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{2(1+\eta)}{E}t=\frac{t}{G},$$

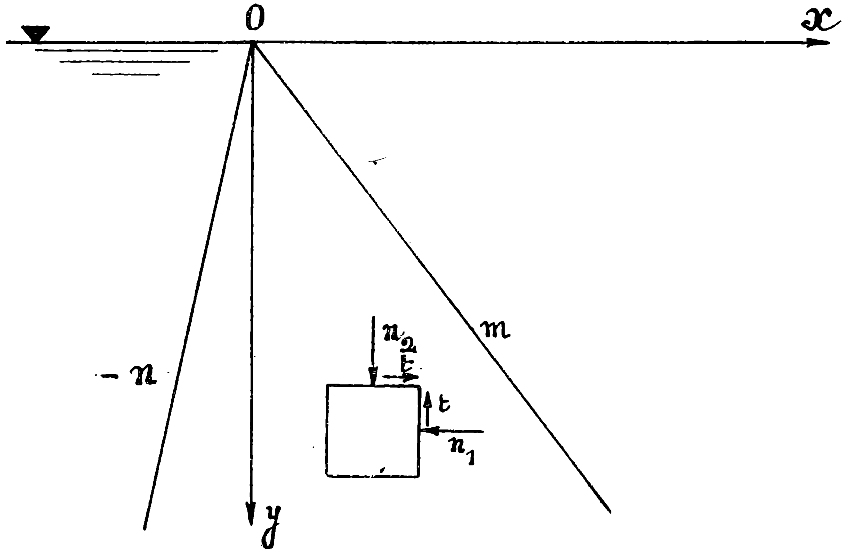

fig 1.

en désignant par E le module d'Young et par η le coefficient de Poisson.

Dans le cas du mur de barrage envisagé :

$$-\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{E}[(b_1-\eta b_2)y+(a_1-\eta a_2)x]$$

$$-\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{E}[(a_2-\eta a_1)x+(b_2-\eta b_1)y]$$

$$-\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{2(1+\eta)}{E}[(\pi-b_2)x-a_1y]$$

Les intégrales des deux premières équations sont

$$-u = \frac{x}{E}\left[(b_1 - \eta b_2)\,y + \frac{a_1 - \eta a_2}{2}\,x\right] + \varphi(y)$$

$$-v = \frac{y}{E}\left[(a_2 - \eta a_1)\,x + \frac{b_2 - \eta b_1}{2}\,y\right] + \psi(x).$$

Par subsitution dans la 3ᵉ équation, on obtient

$$\left.\begin{aligned}\frac{a_2 - \eta a_1}{E}\,y + \psi'(x) + \frac{b_1 - \eta b_2}{E}\,x + \varphi'(y)&\\ = \frac{2(1+\eta)}{E}\,[(\pi - b_2)\,x - a_1 y].&\end{aligned}\right\}$$

Il en résulte que

$$\varphi'(y) = -\frac{2a_1}{E}(1+\eta)\,y - \frac{a_2 - \eta a_1}{E}\,y + A = -\frac{2a_1 + \eta a_1 + a_2}{E}\,y + A$$

$$\varphi(y) = -\frac{a_1(2+\eta) + a_2}{2E}\,y^2 + Ay + B.$$

$$\left.\begin{aligned}\psi'(x) &= \frac{2(1+\eta)}{E}(\pi - b_2)\,x - \frac{b_1 - \eta b_2}{E}\,x - A\\ &= \frac{2\pi(1+\eta) - b_1 - (2+\eta)\,b_2}{E} - A.\end{aligned}\right\}$$

$$\psi(x) = \frac{2\pi(1+\eta) - b_1 - (2+\eta)\,b_2}{2E}\,x^2 - Ax + C.$$

Finalement,

$$-u = \frac{b_1 - \eta b_2}{E}\,xy + \frac{a_1 - \eta a_2}{2E}\,x^2 - \frac{(2+\eta)\,a_1 + a_2}{2E}\,y^2 + Ay + B.$$

$$\left.\begin{aligned}-v = \frac{a_2 - \eta a_1}{E}\,xy + \frac{b_2 - \eta b_1}{2E}\,y^2&\\ + \frac{2\pi(1+\eta) - b_1 - (2+\eta)\,b_2}{2E}\,x^2 - Ax + C.&\end{aligned}\right\}$$

L'hypothèse de la conservation des sections planes est en défaut, ce qui confirme que cette hypothèse n'est nullement un postulat nécessaire pour que des tensions varient suivant une loi linéaire.

Afin d'éviter des complications excessives de formules et attendu que n est toujours très petit, nous supposerons que le parement amont est vertical ($n = 0$).

Dans ces conditions,

$$a_1 = 0, \quad b_1 = \varpi, \quad a_2 = -\frac{\pi}{m} + \frac{2\varpi}{m^3}, \quad b_2 = \pi - \frac{m^2}{\varpi}, \quad \pi - b_2 = \frac{\varpi}{m^2},$$

ϖ représentant le poids spécifique de leau.

Lorsque le mur est en charge

$$n_1 = \varpi y, \quad n_2 = \left(-\frac{\pi}{m} + \frac{2\varpi}{m^3}\right)x + \left(\pi - \frac{\varpi}{m^2}\right)y, \quad t = \frac{\varpi}{m^2}x.$$

A vide :

$$\varpi = 0, \quad n_1 = 0, \quad t = 0, \quad n_2 = -\frac{\pi x}{m} + \pi y.$$

Donc,

$$\left.\begin{aligned} -u = \frac{\varpi + \frac{\eta\varpi}{m^2} - \eta\pi}{\mathrm{E}}xy - \frac{\eta}{m\mathrm{E}}\left(\frac{\varpi}{m^2} - \frac{\pi}{2}\right)x^2 \\ - \frac{y^2}{m\mathrm{E}}\left(\frac{\varpi}{m^2} - \frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{A}y + \mathrm{B}, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} v = \left(\frac{2\varpi}{m^2} - \pi\right)\frac{xy}{m\mathrm{E}} + \frac{\pi - \frac{\varpi}{m^2} - \eta\varpi}{2\mathrm{E}}y^2 \\ + \frac{\eta\pi + \varpi\left(\frac{2+\eta}{m^2} - 1\right)}{2\mathrm{E}}x^2 - \mathrm{A}x + \mathrm{C}. \end{aligned}\right\}$$

Admettons que l'origine soit fixe; d'où $\mathrm{B} = \mathrm{C} = 0$.

Au pied du parement amont ($x = 0$, $y = h$) :

$$-u = \frac{-h^2}{m\mathrm{E}}\left(\frac{\varpi}{m^2} - \frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{A}h, \qquad -v = \frac{\pi - \varpi\left(\frac{1}{m^2} + \eta\right)}{2\mathrm{E}}h_2$$

Au pied du parement aval ($x = mh$, $y = h$) :

$$-u = \frac{h^2}{E}\left[\varpi\left(m - \frac{1}{m^3}\right) + \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{m} - m\eta\right)\right] + Ah,$$

$$-v = \frac{h^2}{E}\left[\varpi\left(\frac{3}{2m^2} + 1 - \frac{m^2}{2}\right) + \frac{\pi}{2}(\eta m^2 - 1)\right] - Amh.$$

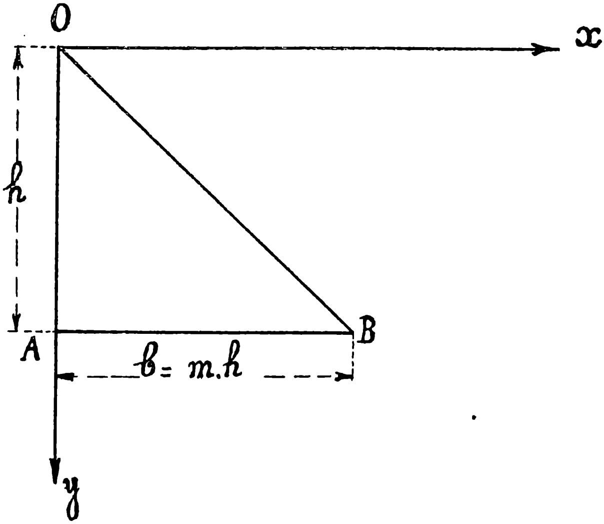

fig 2.

Lorsque le mur n'est pas en charge, il faut annuler ϖ dans les formules précédentes. Les déformations de mise en charge s'obtiennent en faisant les différences :

$$\Delta u = u_\varpi - u_0, \qquad \Delta v = v_\varpi - v_0,$$

c'est-à-dire en conservant des expressions précédentes seuls les termes en ϖ. Donc,

$$\Delta u_{am} = \frac{\varpi h^2}{m^3 E} - Ah, \qquad \Delta v_{am} = \frac{\varpi h^2}{2E}\left(\frac{1}{m^2} + \eta\right),$$

$$\Delta u_{av} = -\frac{\varpi h^2}{E}\left(1 - \frac{1}{m^3}\right) - Ah,$$

$$\Delta v_{av} = -\frac{\varpi h^2}{E}\left(\frac{3}{2m^2} + 1 - \frac{m^2}{2}\right) + Amh.$$

La base A B éprouve donc un raccourcissement égal à

$$\Delta b = \Delta u_{av} - \Delta u_{am} = -\frac{\varpi h^2 m}{E}.$$

Le déplacement vertical de B par rapport à A est

$$\Delta v_{av} - \Delta v_{am} = -\frac{\varpi h^2}{E}\left(\frac{2}{m^2} + 1 - \frac{m^2}{2} + \frac{\eta}{2}\right) + Amh.$$

Abstraction faite du terme indéterminé Amh, la fibre O B se raccourcit davantage que O A. C'est ce qui produit le déplacement horizontal du couronnement O, complètement défini si l'orientation de la base est connue. On a généralement admis l'encastrement parfait de la base A B du barrage dans un sol indéformable, ce qui se traduit par

$$\Delta v_{av} - \Delta v_{am} = 0;$$

d'où

$$A = \frac{\varpi h}{mE}\left(\frac{2}{m^2} + 1 - \frac{m^2}{2} + \frac{\eta}{2}\right).$$

En admettant que le pied B du parement d'aval soit invariable, le déplacement horizontal du couronnement par rapport à ce point est égal à

$$-\Delta f = \Delta u_{am} + \Delta_b = -\frac{\varpi h^2}{mE}\left(\frac{1}{m^2} + 1 + \frac{\eta}{2} + \frac{m^2}{2}\right). \qquad \text{(I)}$$

*
* *

On sait que la théorie ordinaire de la résistance des matériaux appliquée aux barrages triangulaires homothétiques donne une loi linéaire de variation des tensions, identique à celle de la méthode de l'élasticité.

La méthode du travail élastique, appliquée d'une manière correspondante, et en tenant compte, pour le glissement, de la section réduite, conduit à la formule

$$\Delta f = \frac{\varpi h^2}{mE}\left[\frac{1}{m^2} + \frac{3}{5}(1 + \eta)\right]. \qquad \text{(II)}$$

Le terme $\frac{1}{m^2}$, correspondant aux tensions normales de flexion, est le même que dans la formule (I). Mais le second terme est plus petit que le reste de la formule (I), parce que la loi de répartition des tensions tangentielles diffère dans les deux méthodes et que la seconde ne tient pas compte du raccourcissement de A B. Ecrivons

$$\Delta f = k \frac{\varpi h^2}{E}.$$

Supposons $m = 0{,}707$, valeur moyenne. On a

	Méthode de l'élasticité.	Méthode de la résistance des matériaux.
$\eta = 0$	$k = 4{,}60$	$k = 3{,}68$
$\eta = 0{,}10$	$k = 4{,}67$	$k = 3{,}76$

L'influence du coefficient de Poisson, mal connu, est faible. La méthode de l'élasticité décèle un supplément de déformation appréciable dû aux glissements et au raccourcissement de la base.

*
* *

L'hypothèse usuelle de l'invariabilité d'orientation de A B est inexacte; il a été reconnu, par l'observation (barrage d'essai de Stevenson Creek) et par la théorie, que l'inclinaison de A B influe fortement sur Δf. Le fondement du calcul a été établi en 1925 dans une note de M. Fredrik Vogt à l'Académie des Sciences d'Oslo [1]. Le point de départ de cette théorie est constitué par les formules établies par Boussinesq dans son mémoire de 1885, intitulé *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. M. Vogt établit les formules assez complexes des divers déplacements

(1) (Ueber die Berechnung der Fundamentdeformation.)

locaux et moyens de la base rectangulaire d'un massif fondé sur un sol élastique. Il indique ensuite une approximation simple et suffisamment précise, qui consiste à considérer le massif comme fictivement prolongé dans le sol de fondation d'une longueur $h_2 = \sim 0{,}45\ (1 - \eta^2)\ b$ et encastré à ce niveau. Il suppose à cet effet que le sol ait même module d'Young que le massif et soit donc rocheux.

Il en résulte que la base de fondation A B subit un affaissement (généralement négligeable), une rotation et un déplacement horizontal vers l'aval. Les flèches élastiques calculées par la formule (I) sont à multiplier par $[1 + 0{,}45\ m\ (1 - \eta^2)]^2$, ce qui pour $m = 0{,}707$ donne 1,74 environ.

La formule complète s'écrit

$$\frac{\varpi h^2}{m \mathrm{E}} \left(\frac{1}{m^2} + 1 + \frac{\eta}{2} + \frac{m^2}{2} \right) \left[1 + 0{,}45\, m\, (1 - \eta^2) \right]^2 . \quad \text{(III)}$$

Le barrage d'Eguzon, en France, répond à $h = 61{,}11$ mètres, $m = 0{,}834$ et $n = 0{,}05$. Nous admettrons $n = 0$, $m = 0{,}884$, $\mathrm{E} = 200\,000$ kg/cm² (béton cyclopéen) et $\eta = 0$. La formule usuelle (II) donne $\Delta f = 4$ mm. La formule (I) donne $\Delta f = 5{,}65$ mm.

La formule complète (III) donne $\Delta f = 11{,}1$ mm.

Des mesures effectuées au théodolithe, au cours de diverses mises en charge successives, et qui m'ont été communiquées par M. Mercier, de Paris, ont donné $\Delta f = 10$ mm. La concordance des résultats est exceptionnelle.

*
* *

Pour l'étude de l'effet des sous-pressions, nous adopterons l'hypothèse habituelle de sous-pressions diffuses dans le corps du barrage, variant linéairement du parement amont au parement aval [1].

Soit ρ le coefficient de sous-pression. La loi des sous-pressions est

$$s = \rho\varpi\left(y - \frac{x}{m}\right).$$

Les expressions des tensions sont

$$n_1 = \frac{\rho\varpi}{m}x + \varpi(1-\rho)y,$$

$$n_2 = \left(-\frac{\pi}{m} + \frac{2\varpi}{m^3} + \frac{\rho\varpi}{m}\right)x + \left(\pi - \rho\varpi - \frac{\varpi}{m^2}\right)y, \quad t = \frac{\varpi}{m^2}x.$$

Par des calculs analogues aux précédents, on obtient

$$\left.\begin{aligned}
-u = {} & \frac{\varpi(1-\rho) + \dfrac{\eta\varpi}{m^2} - \eta(\pi - \rho\varpi)}{E}xy \\
& + \frac{\dfrac{\rho\varpi}{m} - \eta\left(\dfrac{2\varpi}{m^3} - \dfrac{\pi}{m} + \dfrac{\rho\varpi}{m}\right)}{2E}x^2 \\
& - \frac{2\dfrac{\rho\varpi}{m} + \dfrac{\eta\rho\varpi}{m} - \dfrac{\pi}{m} + \dfrac{2\varpi}{m^3} + \dfrac{\rho\varpi}{m} - \dfrac{2\rho\varpi}{m}(1+\eta)}{2E}y^2 + Ay + B
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
-v = {} & \frac{\dfrac{2\varpi}{m^3} - \dfrac{\pi}{m} + \dfrac{\rho\varpi}{m} - \dfrac{\eta\rho\varpi}{m}}{E}xy + \frac{\pi - \dfrac{\varpi}{m^2} - \rho\varpi - \eta(1-\rho)\varpi}{2E}y^2 \\
& + \frac{\begin{array}{l} 2(\pi - \rho\varpi)(1+\eta) - \varpi(1-\rho) \\ \quad - 2\left(\pi - \dfrac{\varpi}{m^2} - \rho\varpi\right) - \eta\left(\pi - \dfrac{\varpi}{m^2} - \rho\varpi\right) \end{array}}{2E}x^2 - Ax + C.
\end{aligned}\right\}$$

---

(1) Voir BATICLE, La théorie de l'équilibre des massifs pesants, soumis à des sous-pressions et son application à la stabilité des barrages et des talus. (*C. R. Acad. des Sciences de Paris*, 1928.)

On en déduit

$$-u_{am} = \frac{-h^2}{mE}\left[\frac{\varpi}{m^2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\rho\varpi}{2} - \frac{\rho\varpi\eta}{2}\right] + Ah,$$

$$-v_{am} = \frac{h^2}{2E}\left[\pi - \frac{\varpi}{m^2} - \rho\varpi - \eta(1-\rho)\varpi\right],$$

$$-u_{av} = \frac{h^2}{E}\left[m\varpi - \frac{\rho m\varpi}{2} - \frac{\eta m}{2}(\pi - \rho\varpi) + \frac{\eta\rho\varpi}{2m} + \frac{\pi - \rho\varpi}{2m} - \frac{\varpi}{m^3}\right] + Ah,$$

$$-v_{av} = \frac{h^2}{E}\left[\frac{3}{2}\frac{\varpi}{m^2} - \frac{(\pi - \rho\varpi)}{2} - \frac{\eta\rho\varpi}{2} + \frac{\eta m^2(\pi - \rho\varpi)}{2} - \frac{\varpi(1-\rho)m^2}{2} + \varpi\right] - Amh,$$

$$\Delta u_{am} = \frac{\varpi h^2}{mE}\left[\frac{1}{m^2} + \frac{\rho}{2} - \frac{\rho\eta}{2}\right] - Ah,$$

$$\Delta v_{am} = \frac{\varpi h^2}{2E}\left[\frac{1}{m^2} + \rho + \eta(1-\rho)\right],$$

$$\Delta u_{av} = -\frac{\varpi h^2}{E}\left[m - \frac{1}{m^3} - \frac{m\rho}{2} + \frac{\eta m\rho}{2} + \frac{\eta\rho}{2m} - \frac{\rho}{2m}\right] - Ah,$$

$$\Delta v_{av} = -\frac{\varpi h^2}{E}\left[\frac{3}{2m^2} + 1 - \frac{m^2}{2} + \frac{\rho}{2} - \frac{\eta\rho}{2} - \frac{\eta m^2\rho}{2} + \frac{\rho m^2}{2}\right] + Amh.$$

Le raccourcissement de la base A B a pour expression

$$\Delta b = -\frac{\varpi h^2}{E}\left[m - \frac{m\rho}{2} + \frac{\eta m\rho}{2}\right].$$

Le raccourcissement de la base est donc diminué du fait des sous-pressions, sans qu'il puisse s'annuler, même si $\rho = 1$. Si l'imbibition se fait après mise en charge complète, il y correspond un gonflement. Le déplacement vertical de B par rapport à A est

$$\Delta v_{av} - \Delta v_{am} = - \frac{\varpi h^2}{E} \left[\frac{2}{m^2} + 1 - \frac{m^2}{2} + \frac{\eta}{2} + \rho - \eta\rho - \frac{\eta m^2 \rho}{2} \right] + Amh.$$

Si la base reste horizontale,

$$A = \frac{\varpi h}{mE} \left(\frac{2}{m^2} + 1 - \frac{m^2}{2} + \frac{\eta}{2} + \rho - \eta\rho - \frac{\eta m^2 \rho}{2} \right].$$

Il en résulte que, dans cette hypothèse,

$$- \Delta f = - \frac{\varpi h^2}{mE} \left[\frac{1}{m_2} + 1 + \frac{\eta}{2} + \frac{m^2}{2} + \frac{\rho}{2} (1 + \eta - m^2) \right]. \quad \text{(IV)}$$

Donc, les sous-pressions augmentent les flèches du barrage si $m < \sqrt{1 + \eta}$, ce qui est la règle générale. L'effet augmente avec ρ et diminue si m augmente; il est toujours pratiquement très faible, car il s'agit ici uniquement de déplacements élastiques.

Dans ces conditions, pour tenir compte des déformations de la fondation, on peut appliquer à la formule (IV) le même coefficient de majoration qu'à (I) et écrire

$$\left. \begin{aligned} \Delta f = \frac{\varpi h^2}{mE} & \left[\frac{1}{m^2} + 1 + \frac{\eta}{2} + \frac{m^2}{2} + \frac{\rho}{2} (1 + \eta^2 - m^2) \right] \\ & \cdot \left[1 + 0{,}45\, m (1 - \eta^2) \right]^2 \end{aligned} \right\} \quad \text{(V)}$$

formule la plus complète.

*
* *

Les formules ci-dessus constituent un progrès par rapport aux formules usuelles; elles tiennent compte de toutes les circonstances exprimables en chiffres; elles permettent d'interpréter les résultats des observations et elles peuvent servir aux calculs. Elles ne doivent cependant pas prétendre à une exactitude rigoureuse et nous confirmons sur ce point, d'une manière généralisée, l'opinion exposée par M. Merten dans la note citée en introduction.

Les tensions et les déformations du barrage sont établies indépendamment de la base de fondation, en supposant le massif indéfini et homothétique. De même les tensions et les déformations du sol de fondation sont calculées indépendamment du massif. Les tensions et les déformations correspondantes dans la base de contact A B ne sont pas concordantes. Or, elles doivent concorder, ce qui montre que les solutions sont inexactes et sont en fait déterminées par les conditions de contact.

Mais nous différons de M. Merten au sujet de l'appréciation du degré d'erreur des méthodes usuelles. M. Vogt montre dans son mémoire que l'erreur relative à la fondation ne pourrait être grande. Les expériences faites sur modèles prouvent que les perturbations à la loi linéaire des tensions dans le corps du barrage ne sont importantes qu'au voisinage de la base, où les déformations sont faibles. Il semble donc que dans l'ensemble, tant au point de vue des tensions que des déformations, les méthodes connues présentent un degré d'approximation suffisant pour la sécurité.

M. HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.