

NOTE

sur le Calcul des Massifs en Maçonnerie à section rectangulaire sollicités par flexion plane composée

PAR

Fernand CAMPUS

Ingénieur des Constructions civiles et Electricien

Extrait du *Bulletin Technique de l'A. I. Br.*, n° 5, 1923.

Imp. G. BOTHY
23, rue de la Concorde
BRUXELLES

1924

Note sur le Calcul des Massifs en Maçonnerie à section rectangulaire solicités par flexion plane composée

PAR

Fernand CAMPUS

Ingénieur des Constructions civiles et Electricien.

Le titre de cette note ne diffère de celui d'un mémoire de M. le professeur L. Baes, publié dans notre Bulletin (1), que par une spécification supplémentaire qui restreint sa généralité. Je m'y réfère pour l'exposé des principes généraux de la théorie de la stabilité élastique des massifs en maçonnerie. Je me borne à les résumer pour servir de préambule à la suite de l'étude.

Lorsque la résultante des efforts de compression s'exerce dans une section d'un massif en maçonnerie agit à l'intérieur du noyau central de cette section, les tensions élastiques sont des compressions dans toute l'étendue de la section. La stabilité élastique est assurée si la plus grande de ces tensions de compression est inférieure au taux de travail de sécurité.

Lorsque la résultante agit en dehors du noyau central, il se produit dans l'étendue de la section des tensions des deux signes. La stabilité élastique exige que la plus grande des tensions de compression calculée soit inférieure au taux de travail de sécurité. Pour ce qui est des tensions de traction, la plus grande valeur calculée doit également être inférieure

(1) *Note sur le Calcul des Massifs en Maçonnerie sollicités par flexion plane composée.* Pour les massifs à section circulaire, tracé d'un diagramme analogue au diagramme de Bélanger, par L. BAES, *Bulletin Technique de l'A. I. Br.*, février 1910.



au taux de sécurité, qui est toujours très faible et même généralement nul d'après les anciennes prescriptions.

Il est cependant souvent impossible de limiter ainsi les tensions de traction ou de les éviter, les dimensions des massifs deviendraient trop encombrantes ou dispendieuses. Si des raisons spéciales (étanchéité, etc.) ne s'y opposent pas, on admet alors que le massif de maçonnerie est fissuré dans toute la zone où les tensions de traction sont supérieures au taux de sécurité très faible ou nul imposé. On calcule les tensions de compression, et éventuellement, de traction pour la section restante active.

Ces principes sont classiques, ainsi que les formules qu'on en peut déduire. J'ai cherché à en simplifier les applications en les écrivant sous une forme particulière, en substituant aux grandeurs physiques concrètes des rapports numériques abstraits, de la même manière que j'ai procédé pour le calcul organique des pièces fléchies en béton armé, dans une étude qui paraîtra prochainement dans les *Annales des Travaux Publics de Belgique* (1).

Nous admettons pour l'établissement des formules que la loi de variation des tensions soit linéaire et continue dans toute l'étendue de la section, ce qui implique la constance du module d'élasticité.

Cet élément étant à vrai dire indéterminé dans un massif hétérogène de maçonnerie, il serait vain de compliquer les calculs par l'emploi d'un module d'élasticité variable. Nous n'envisagerons donc pas, même pour les massifs en béton, de différenciation dans ce facteur pour les états élastiques de traction et de compression, hypothèse qui se justifie éventuellement pour le calcul du béton armé et pour des tensions des deux signes relativement grandes. Nous considérerons comme positives les tensions de compression, comme négatives les tensions de traction. Nous représenterons les unes et les autres par des symboles algébriques, c'est-à-dire tenant compte implicitement du signe.

(1) *Note sur le Calcul organique des Pièces fléchies en Béton armé (avec tables numériques et graphiques)*, par F. CAMPUS.

Annales des Travaux Publics de Belgique, 1924, fasc. 1 et suivants.

La figure 1 ci-contre définit les éléments b et h de la section active ainsi que ceux de la sollicitation : la résultante N des actions normales, son point d'application F distant de la longueur ε de l'arête la plus voisine, les tensions t et t' aux fibres extrêmes. Les grandeurs seront comptées positivement vers l'intérieur de la section. Remarquons que la section envisagée, tout entière active, peut être une partie d'une section réelle plus grande, de hauteur $H > h$, mais supposée fissurée sur une hauteur $(H - h)$.

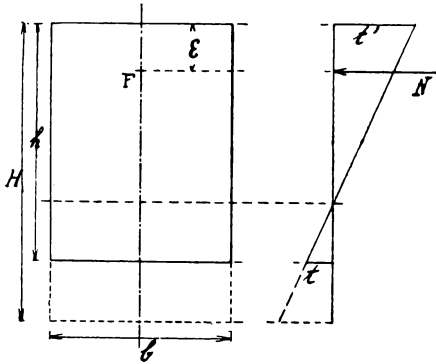


Fig. 1.

La loi linéaire continue des tensions conduit, d'après la théorie classique, aux expressions.

$$t' = \frac{N}{bh} + \frac{N(0,5h - \varepsilon)}{\frac{bh}{6}} = \frac{N}{bh} \left(4 - \frac{6\varepsilon}{h} \right).$$

$$t = \frac{N}{bh} - \frac{N(0,5h - \varepsilon)}{\frac{bh}{6}} = \frac{N}{bh} \left(\frac{6\varepsilon}{h} - 2 \right).$$

On déduit de ces formules les relations

$$\frac{t}{t'} = \frac{3 \frac{\varepsilon}{h} - 1}{2 - 3 \frac{\varepsilon}{h}}, \quad (1)$$

$$\frac{bht'}{N} = 2 \left(2 - 3 \frac{\varepsilon}{h} \right), \quad (2)$$

$$\frac{bht}{N} = 2 \left(3 \frac{\varepsilon}{h} - 1 \right), \quad (3)$$

$$\frac{b\varepsilon t'}{N} = 2 \left(2 - 3 \frac{\varepsilon}{h} \right) \frac{\varepsilon}{h}, \quad (4)$$

$$\frac{b\varepsilon t}{N} = 2 \left(3 \frac{\varepsilon}{h} - 1 \right) \frac{\varepsilon}{h}. \quad (5)$$

Constatons que t est positif, c'est-à-dire représente une compression, tant que $\varepsilon/h > 1/3$, c'est-à-dire que F est à l'intérieur du noyau central, propriété connue.

Les formules ci-dessus sont toutes fonctions de ε/h , il est très aisé d'en inscrire les valeurs dans un tableau numérique pour diverses valeurs échelonnées de ε/h . Pour les calculs pratiques de massifs en maçonnerie, il suffit de considérer l'intervalle de 0,50 à 0. Elles peuvent également être traduites en diagrammes, en portant leurs valeurs en ordonnées, les valeurs de ε/h figurant en abscisses. Ces courbes fournissent une représentation très claire des effets du déplacement de résultante des actions normales dans l'étendue d'une demi-section.

Ci-après sont reproduites ces tables numérique et graphique.

$\frac{\varepsilon}{h}$	$\frac{t'}{t}$	$\frac{bh t'}{N}$	$\frac{bht}{N}$	$\frac{b\varepsilon t'}{N}$	$\frac{b\varepsilon t}{N}$
0,50	1,000	1,00	1,00	0,500	0,500
0,45	0,538	1,30	0,70	0,585	0,315
0,40	0,250	1,60	0,40	0,640	0,160
0,35	0,053	1,90	0,10	0,665	0,035
0,333	0,000	2,00	0,00	0,667	0,000
0,30	-0,091	2,20	-0,20	0,660	-0,060
0,25	-0,200	2,50	-0,50	0,625	-0,125
0,20	-0,286	2,80	-0,80	0,560	-0,160
0,15	-0,355	3,10	-1,10	0,465	-0,165
0,10	-0,412	3,40	-1,40	0,340	-0,140
0,05	-0,459	3,70	-1,70	0,185	-0,085
0,00	-0,500	4,00	-2,00	0,000	-0,000

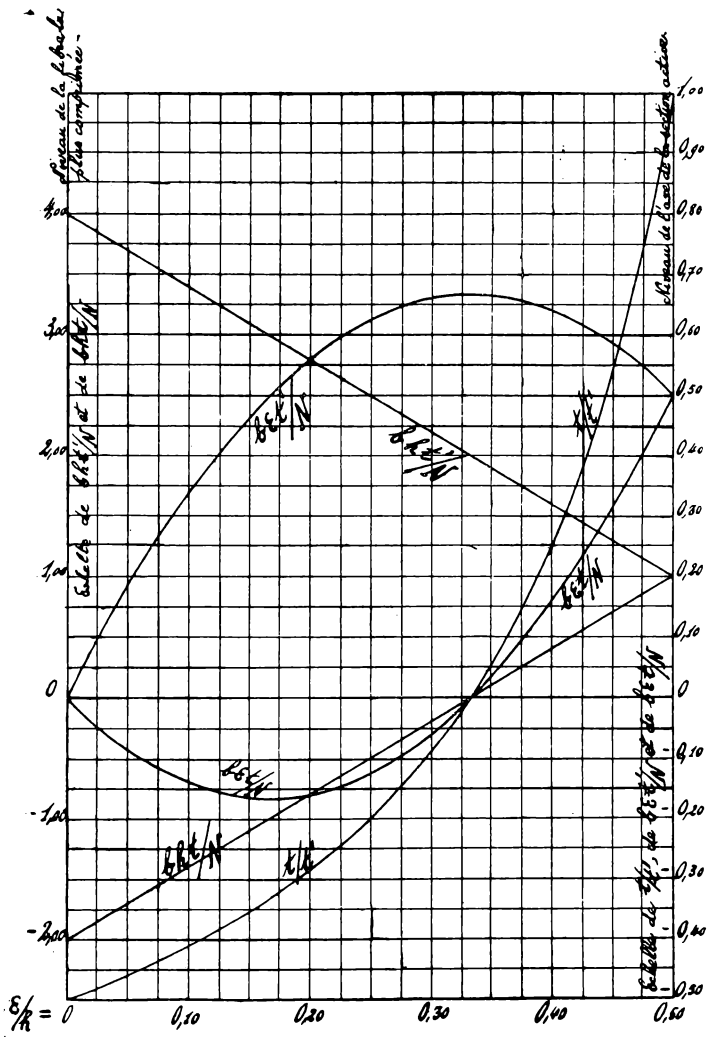


Fig. 2.

APPLICATIONS

1) Considérons un massif dont la section mesure 1 mètre de largeur et 4 mètres de hauteur. Les taux de travail de sécurité à ne pas dépasser sont $R' = 200\ 000\ \text{kg/m}^2$ et $R = 25\ 000\ \text{kg/m}^2$. La résultante des efforts normaux dans la section est égale à 400 tonnes; son point d'application se déplace dans la section.

S'il se trouve au centre du joint,

$$t' = t = \frac{400\ 000}{4} = 100\ 000 < R'$$

Si la résultante est excentrée de 0,36 m., $\epsilon = 1,64$ et

$$\frac{\epsilon}{H} = \frac{1,64}{4} = 0,41$$

Pour cette valeur,

$$\frac{bHt'}{N} = 1,54 \quad \text{et} \quad \frac{bHt}{N} = 0,46,$$

d'où

$$t' = 154\ 000 < R' \quad \text{et} \quad t = 46\ 000$$

Si la résultante est excentrée de 0,80 m., $\epsilon = 1,20$ et

$$\frac{\epsilon}{H} = 0,30.$$

Dans ces conditions,

$$\frac{bHt'}{N} = 2,20 \quad \text{et} \quad \frac{bHt}{N} = -0,20,$$

d'où

$$t' = 220\ 000 > R' \quad \text{et} \quad t = -20\ 000 < R.$$

La plus grande tension de compression est légèrement trop grande, tandis que la tension extrême de traction est admissible. Pour satisfaire exactement à la condition de

sécurité à la compression, il faudrait augmenter la hauteur de la section et fixer

$$H = \frac{2,20 \times 400\ 000}{1 \times 200\ 000} = 4,40$$

Dans ces conditions,

$$t = \frac{-0,20 \times 400\ 000}{1 \times 4,40} = -18\ 200 < R$$

2) Les tensions de sécurité étant les mêmes que ci-dessus, étudions les effets dans la même section d'un effort $N = 200\ T.$ plus excentré que le précédent.

$$\text{Si } \varepsilon = 0,90, \quad \frac{\varepsilon}{H} = 0,225.$$

Dans ce cas,

$$\frac{bHt'}{N} = 2,65 \quad \text{et} \quad \frac{bHt}{N} = -0,65$$

d'où

$$t' = 132\ 500 < R' \quad \text{et} \quad t = -32\ 500 > R.$$

La plus grande compression reste dans les limites prescrites, la traction maximum est au contraire trop grande. Nous devons donc admettre que la zone étendue est partiellement fissurée et considérer une section active de hauteur $h < H,$ définie par la relation

$$\frac{b\varepsilon t}{N} = -\frac{225\ 000}{200\ 000} = -0,1125$$

Il en résulte que

$$\frac{\varepsilon}{h} = 0,26$$

d'où

$$h = \frac{0,90}{0,26} = 3,46.$$

La hauteur de la zone fictivement fissurée est donc de 0,54 m. La valeur correspondante de t/t' est — 0,18, de sorte que

$$t' = \frac{25\ 000}{0,18} = 139\ 000 < R'$$

Si l'on négligeait complètement la résistance à l'extension ($R=0$),

$$\frac{\varepsilon}{h} = 0,333 \quad \text{d'où} \quad h = 3 \times \varepsilon = 2,70$$

La section serait fictivement fissurée sur une hauteur de 1,30 m.

Dans ce cas,

$$\frac{bht'}{N} = 2,00 ,$$

d'où

$$t' = \frac{2 \times 200\ 000}{2,70} = 148\ 000 < R'$$

En général, le calcul de la stabilité élastique des massifs en maçonnerie s'effectue à *posteriori*, à titre de vérification et de la manière exposée dans les deux paragraphes précédents. Il est peu fréquent que l'on puisse entreprendre le calcul à *priori* des dimensions, parce que le poids propre est en général un élément très important de la sollicitation, qui influe non seulement sur la valeur, mais également sur la position de N.

Afin d'exposer cependant la manière dont un tel calcul pourrait être conduit, envisageons un cas plausible. Un mur de soutènement de 6,00 m. de hauteur est constitué par des dalles en béton armé ou des voûtes verticales appuyées contre des piliers rectangulaires en maçonnerie, de section constante et écartés de 4,00 d'axe en axe. Leur largeur est de 0,80 m. Il s'agit de calculer la hauteur du joint par la limitation des tensions, les taux de sécurité étant

$R' = 100\,000 \text{ kg/m}^2$ et $R = 8\,000 \text{ kg/m}^2$. La poussée des terres, que l'on suppose agir suivant l'horizontale, est

$$P = 28\,500 \text{ kg.}$$

Son moment dans la section la plus fatiguée est $28\,500 \times 2 = 57\,000 \text{ kgm}$.

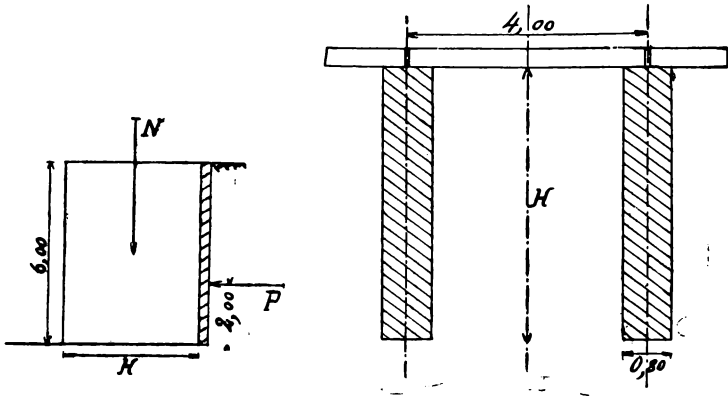


Fig. 3.

Le poids propre d'un pilier s'exprime par

$$N = 2\,200 \times 6 \times 0,80 \times H,$$

$$N = 10\,550 H.$$

Il en résulte que

$$\frac{\varepsilon}{H} = 0,50 - \frac{57\,000}{10\,550 H} = 0,50 - \frac{5,40}{H},$$

$$\frac{bHt}{N} = \frac{0,80 \times H \times 8\,000}{10\,550 H} = 0,606,$$

$$\frac{bHt'}{N} = \frac{0,80 \times H \times 100\,000}{10\,550 H} = 7,60.$$

A la première condition correspond la limite inférieure de

$\frac{\varepsilon}{H}$ qui, d'après les tables, est 0,232. La valeur correspondante de t/t' est — 0,23. Donc

$$0,232 = 0,50 - \frac{5,40}{H},$$

d'où

$$H = \frac{5,40}{0,268} = 4,50.$$

Dans une section de telle hauteur, $t = - 8\ 000 = R$ et $t' = \frac{- 8\ 000}{- 0,23} = 34\ 800 < R'$

Cette section est suffisante pour assurer l'équilibre statique; le coefficient de stabilité au renversement est en effet

$$\rho = \frac{10\ 550 \times 4,50 \times 2,25}{57\ 000} = 1,88 > 1,80.$$

Les conditions de stabilité au renversement seraient améliorées si les piliers étaient surchargés, au moyen de voûtes formant arc-boutants et portant une charge de terre ou d'une passerelle d'un poids mort assez élevé, etc. La stabilité élastique serait concurremment favorisée si la résultante de ces surcharges agissait suivant l'axe du pilier ou était excentrée vers les terres, de manière à en compenser partiellement la poussée. Le contraire se produirait si l'excentricité était inverse, ce qui résulterait par exemple de la réaction d'appui d'un longeron de pont. Dans ce cas, la stabilité au renversement étant améliorée, la hauteur H du joint pourrait être réduite. Pour satisfaire aux conditions de stabilité élastique aggravées, elle devrait au contraire être augmentée. Ainsi serait réalisée la situation déjà envisagée où l'observation stricte sans fissuration, des conditions de stabilité élastique conduit à des dimensions trop encombrantes. Il faudrait alors déterminer H par la condition d'équilibre statique au renversement et ensuite vérifier

la sécurité des fatigues intérieures, en admettant que le joint soit partiellement ouvert.

D'une manière générale, l'exemple précédent indique que le calcul *à priori* présente peu d'intérêt. Remarquons aussi que ce n'est qu'exceptionnellement, et par hasard peut-on dire, que l'on peut atteindre simultanément les tensions de sécurité R' et R .

Les tables permettent d'effectuer avec facilité tous les calculs de stabilité auxquels peuvent donner lieu les massifs en maçonnerie à section rectangulaire; elles paraissent être d'un emploi plus pratique que le diagramme de Bélanger et présentent en tous cas sur celui-ci l'avantage de permettre le calcul des tensions d'extension, le joint étant supposé fissuré ou non.

Comme l'a fait observer M. Baes dans sa note précitée, les massifs en maçonnerie à section rectangulaire sont les plus fréquents; ils conviennent seuls généralement pour les constructions les plus courantes et les plus importantes : murs de soutènement, de barrages de réservoirs, de quais; piles et culées, voûtes. Le diagramme relatif de la figure 2 permet la solution de tous ces problèmes.

En s'aidant de la méthode graphique exposée par M. Baes, on pourrait tracer un diagramme relatif analogue pour la section circulaire pleine. On pourrait aussi en établir pour les sections annulaires ou elliptiques, mais ils ne seraient applicables que pour des sections géométriquement semblables, c'est-à-dire pour lesquelles toutes les dimensions linéaires correspondantes sont proportionnelles. Cette restriction diminue leur intérêt autant que celui des diagrammes analogues à celui de Bélanger.

Sarrebruck, juin 1922.

RECTIFICATION.

Un lecteur a bien voulu me faire observer une erreur d'application dans la Note sur le calcul des massifs en maçonnerie à section rectangulaire sollicités par flexion plane composée, parue dans le numéro 5 de 1923 du Bulletin Technique.

Il s'agit de calcul de H pour satisfaire à $t' = 200\,000 = R'$, exposé au bas de la page 204 et au haut de la page 205, pages 8 et 9 des tirés à part. Comme H devient différent de la valeur précédemment choisie de 4,00 m.

E varie ainsi que le rapport $\frac{\epsilon}{H}$. Or, le calcul de H, au haut de la page 205, page 9 des tirés à part, est erronément basé sur la valeur $\frac{b H t'}{N} = 2,20$, qui n'est valable que si $\frac{\epsilon}{H}$ n'a pas changé.

Il faut procéder comme suit. De la condition $t' = R'$, il résulte que:

$$\frac{b H t'}{N} = \frac{H \times 200.000}{400.000} = \frac{H}{2}$$

D'autre part:

$$\frac{\epsilon}{H} = \frac{0,50 H - 0,80}{H} = 0,50 - \frac{0,80}{H}$$

Nous connaissons, par l'exemple précédent, les valeurs de $\frac{b H t'}{N}$ et de $\frac{\epsilon}{H}$ pour $H = 4,00$, ce sont: $\frac{\epsilon}{H} = 0,30$ et $\frac{b H t'}{N} =$

$$2,20 > \frac{H}{2} \text{ car } \frac{H}{2} = 2,00.$$

Essayons une autre valeur de H, choisie, par exemple, de manière que $\frac{\epsilon}{H}$ corresponde à une valeur du tableau, pour éviter des interpolations.

$$\text{Si } H = 4,80: \frac{\epsilon}{H} = 0,333 \text{ et } \frac{b H t'}{N} = 2,00 < \frac{H}{2}, \text{ car } \frac{H}{2} = 2,40$$

Il en résulte que la condition $\frac{b H t'}{N} = \frac{H}{2}$ est réalisée pour: $H = 4,267$.
valeur pour laquelle $\frac{\epsilon}{H} = 0,311$.

$$\frac{b H t'}{N} = 2,133 \text{ et } \frac{b H t}{N} = -0,133$$

Donc:

$$t = - \frac{0,133 \times 400,000}{1 \times 4,267} = - 12.500$$

On peut résoudre le problème, sans l'emploi des tableaux par la formule (2), en y introduisant: $\frac{b H t'}{N} = \frac{H}{2}$ et

$$\frac{\epsilon}{H} = 0,50 - \frac{0,80}{H}$$

On obtient une équation du second degré, dont la racine positive donne la solution. On retrouve les valeurs ci-dessus.