MOUVEMENT DE FILTRATION EN RÉGIME VARIABLE

par **Fernand CAMPUS,**
Professeur à l'Université de Liége.

La question est envisagée dans cette note du point de vue théorique. Il est fait abstraction, par principe, de toutes les réserves qu'il y a lieu de faire aux formules relatives aux mouvements de filtration du fait de l'écart considérable qui existe entre les conditions complexes de la réalité et les hypothèses simples de la théorie. Nous conservons ces hypothèses simples, notamment celle de l'homogénéité et de l'isotropie parfaites du milieu perméable en petit. Pour la facilité de l'exposé nous admettrons aussi que l'écoulement se fasse par filets parallèles et que le massif filtrant repose sur un soubassement imperméable horizontal. Ce sont ces hypothèses qui servent de base à l'établissement des formules classiques et élémentaires du débit de la tranchée filtrante en régime permanent :

$$q = \frac{\varphi (h_1^2 - h_0^2)}{2l},$$

et du débit du puits filtrant en régime permanent :

$$Q = \frac{\varphi (h_1^2 - h_0^2)}{\log \frac{r_1}{r_0}}.$$

Le régime permanent envisagé correspond à un débit constant dans toutes les sections filtrantes, c'est-à-dire indépendant du lieu comme du temps; c'est l'analogue du mouvement permanent graduellement varié à débit constant des canaux découverts. Ce régime exige des conditions aux limites parfaitement définies et très particulières, aussi bien pour la tranchée que pour le puits filtrant. Ces conditions sont réalisables, mais, dans les mouvements naturels de filtration, elles ne sont pratiquement jamais réalisées. Aussi commet-on usuellement l'erreur fondamentale, au point de vue de la théorie et de la conception, d'appliquer les formules prérappelées du mouvement permanent à des mouvements variables.

En ce qui concerne l'étude théorique des mouvements de filtration des nappes souterraines naturelles, le régime permanent est improbable sinon impossible et la question principale est celle du mouvement variable. Elle est cependant moins connue que celle du mouvement permanent à débit constant.

Son étude est simple. Du fait que les mouvements de filtration sont très lents dans les milieux perméables en petit et très graduellement variables, on s'autorise à négliger dans l'équation du mouvement variable les termes d'accélération, comme on néglige dans le mouvement permanent les termes de l'énergie cinétique. Dès lors, l'équation indéfinie du mouvement variable est identique à celle du mouvement permanent, mais il ne faut pas franchir le pas d'en conclure que les deux mouvements sont identiques. Aux conditions aux limites, constantes ou dépendantes du temps, s'ajoute la loi de continuité, dont l'équation contient la variable du temps. Ce que l'on peut dire, c'est simplement que la forme instantanée de la nappe en régime variable est celle d'un certain mouvement permanent. Mais cette forme varie avec le temps et elle est, à chaque instant, en elle-même et dans sa variation, déterminée par l'équation de continuité.

Si des doutes pouvaient exister à ce sujet, il suffirait d'invoquer la mise en équation du problème faite par Boussinesq pour le mouvement plan de la tranchée filtrante indéfinie sur fond perméable horizontal, qui est exposée dans les traités classiques français d'hydraulique.

L'équation aux dérivées partielles qui sert de point de départ :

$$\frac{\partial q}{\partial x} = n\frac{\partial h}{\partial t},$$

n'est autre que l'équation infinitésimale de continuité. L'équation d'énergie ramenée à celle du mouvement permanent s'y ajoute sous la forme la plus générale et la plus simple de la loi de Dupuit :

$$u = \varphi \mathrm{I} = \varphi\frac{\partial h}{\partial x},$$

et conduit à l'équation connue :

$$n\frac{\partial h}{\partial t} = \varphi\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right),$$

dont nous ne rappellerons pas ici la résolution par Boussinesq dans les deux cas particuliers des nappes profondes et des nappes peu profondes.

Le principe de la méthode de Boussinesq est celui d'une mise en équation directe. On peut concevoir un autre principe de résolution qui consisterait à déterminer la forme instantanée de la nappe par l'équation du mouvement permanent et ensuite sa variation en fonction du temps. Répétons que les éléments sont subordonnés à l'équation de continuité et pas seulement le dernier; en d'autres termes, il ne suffit pas que la nappe instantanée satisfasse à l'équation du mouvement permanent, elle doit être en outre compatible avec l'équation de continuité. L'oublier expose à commettre l'erreur de principe de considérer comme formes instantanées du mouvement variable les formes du mouvement permanent à débit constant, dont les équations ont été rappelées ci-dessus. Nous montrerons que ces formes sont en contradiction avec la condition de continuité.

La deuxième méthode envisagée ne permet d'aboutir à une solution aisée que par une nouvelle approximation, qui concerne la forme de la nappe. Comme on se borne généralement à étudier les nappes profondes peu dénivelées (conformément à l'hypothèse des filets parallèles), l'approximation peut être acceptable, ainsi que nous le vérifierons.

L'incertitude des hypothèses quant à la nature du massif filtrant et celle des valeurs de φ constituent des causes d'erreurs qui dépassent amplement celles qui résultent des approximations de la résolution mathématique. Celles-ci sont donc licites et elles permettent l'application de la deuxième méthode à presque tous les problèmes relatifs aux nappes souterraines naturelles, notamment en rapport avec l'hydraulique fluviale. Les solutions approximatives obtenues sont du moins concrètes, alors que la méthode de Boussinesq ne permettrait généralement pas d'intégrer.

*
* *

Il faut tout d'abord définir des formes de mouvement permanent applicables au mouvement variable. Bornons-nous à envisager le mouvement de filtration plan à travers un massif indéfini en longueur, de largeur égale à l'unité, reposant sur un fond imperméable horizontal (fig. 1).

Premier cas.

Mouvement permanent à débit constant q.

Le massif doit être compris entre deux réservoirs indéfinis à niveau constant. Il n'y a pas d'apports verticaux à la nappe.

La formule du débit, déjà rappelée, est

$$q = \varphi \frac{h_1^2 - h_0^2}{2l} = \varphi \frac{h^2 - h_0^2}{2x}.$$

Équation de la nappe :

$$h_1^2 - h^2 = \frac{2q(l-x)}{\varphi} \qquad \text{(parabole).}$$

Deuxième cas.

Mouvement permanent à débit variable; la nappe est alimentée par un apport vertical uniforme (pluie) p.

Débits : en O $q_0 = pl$, en X $q_x = p(l-x)$, en 1 $q_1 = 0$

$$q_x = p(l-x) = \frac{\varphi(h_1^2 - h^2)}{l-x}$$

$$q_0 = pl = \frac{\varphi(h_1^2 - h_0^2)}{l}.$$

Équation de la nappe :

$$h_1^2 - h^2 = \frac{p(l-x)^2}{\varphi} \qquad \text{(ellipse).}$$

Le régime permanent correspond à une longueur de nappe bien définie :

$$l = \sqrt{\frac{\varphi}{p}(h_1^2 - h_0^2)}.$$

Troisième cas.

Mouvement permanent à régime variable; la nappe est alimentée par un apport vertical variable $p = \gamma x$

En X . . $\quad q_x = \dfrac{\gamma}{2}(l^2 - x^2) = \dfrac{3\varphi}{2}(h_1^2 - h^2)\dfrac{l+x}{2l^2 - lx - x^2}.$

En O . $\quad q_0 = \dfrac{\gamma l^2}{2} = \dfrac{3\varphi(h_1^2 - h_0^2)}{4l}.$

En 1 . . . $\quad q_1 = 0.$

Équation de la nappe :

$$h_1^2 - h^2 = \frac{\gamma(l-x)(2l^2 - lx - x^2)}{3\varphi}$$

(cubique à deux branches, dont une, fermée, contient la partie utile).

Le régime permanent correspond à une longueur de nappe bien définie :

$$l = \sqrt[3]{\frac{3\varphi}{2\gamma}(h_1^2 - h_0^2)}.$$

Comme nous devons nous limiter, nous nous bornerons à ces exemples, dont le troisième nous permettra de traiter un cas de mouvement variable. Nous renvoyons, pour plus de détails, à une publication ultérieure. Pour la même raison, nous nous bornerons

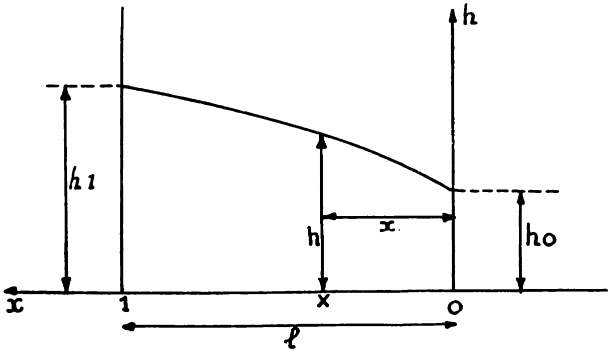

FIG. 1.

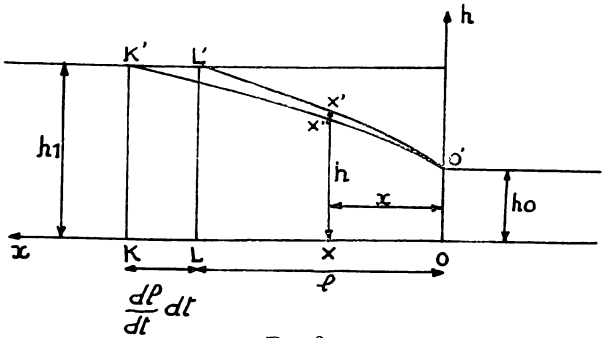

FIG. 2.

à l'exposé d'un seul exemple simple de mouvement variable, suffisamment démonstratif, celui de la vidange d'une nappe indéfinie (en mouvement plan comme ci-dessus).

Une nappe souterraine au repos, de hauteur h_1, communique en O avec un réservoir indéfini de même niveau. A un instant quelconque, pris comme origine des temps, la hauteur d'eau dans le réservoir est abaissée à $h_0 < h_1$.

Une nappe de filtration en mouvement variable prend naissance; le massif filtrant se vide progressivement et le rabattement progresse de 0 vers x. Au temps t, la surface de la nappe est O′X′L′; le rabattement a atteint la distance l. Au temps $t+dt$, elle a avancé de $\frac{dl}{dt}dt$ en plus; la surface est O′X″K′.

A l'instant t, à l'extrémité amont du rabattement, en L, le débit est nul, puisque la pente est nulle. En x, le débit est q_x; en 0, il est q_0. Tous ces débits varient en fonction du lieu et du temps. La continuité exige que

$$q_0 dt = n dS_0 \quad \text{et} \quad q_x dt = n dS_x,$$

en désignant par dS_0 et dS_x les différences des surfaces de vidange aux temps $t + dt$ et t, soient les onglets K′L′X′OX″ et K′L′X′X″. Donc, les courbes L′X′O′ et K′X″O′ ne peuvent être des courbes de mouvement permanent à débit constant.

Pour les nappes peu dénivelées, on sait que les courbes de rabattement sont très voisines de droites. Nous assimilerons L′O′K′ à un triangle rectiligne, ce qui revient à considérer la nappe comme alimentée par un apport vertical variable $p=\gamma x$.

Nous avons décrit précédemment la nappe permanente correspondante. Dans ces conditions,

$$q_x = \frac{3\varphi}{2}(h_1^2 - h^2)\frac{l+x}{2l - lx - x^2},$$

$$q_0 = \frac{3\varphi(h_1^2 - h_0^2)}{4l} = \frac{\gamma l^2}{2};$$

d'où

$$\gamma = \frac{3\varphi(h_1^2 - h_0^2)}{2l^3}.$$

Le résultat de Boussinesq pour le même problème, dans le cas des nappes profondes, est

$$q_0' = \frac{\Pi\varphi h_0(h_1 - h_0)}{2l}.$$

Posons

$$\alpha = \frac{h_0}{h_1} < 1.$$

On peut écrire

$$q_0 = \frac{3(1+\alpha)}{2\alpha}\varphi\frac{h_0(h_1 - h_0)}{2l} = \mathrm{K} q_0',$$

Si	$\alpha =$ 1	0,95	0,90	0,85	0,80
	K = 0,956	0,983	1,01	1,04	1,073

Cette comparaison avec la solution de Boussinesq permet de considérer l'approximation comme satisfaisante.

L'équation de la nappe est

$$h_1^2 - h^2 = \frac{(h_1^2 - h_0^2)(l - x)(2l^2 - lx - x^2)}{2l^3}.$$

La surface de rabattement au temps t est

$$S_0 = \int_0^l (h_1 - h)\,dx = h_1 l - \int_0^l \sqrt{h_1^2 - \frac{(h_1^2 - h_0^2)}{2l^3}(l - x)^2(2l + x)}\,dx.$$

L'intégrale, que nous désignerons par S_0' et qui représente la surface de la nappe, est une intégrale elliptique irréductible à une forme normale ou connue. Elle peut être ramenée à une intégrale algébrique simple lorsque

$$\alpha = \frac{h_0}{h_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Elle vaut alors

$$\frac{2}{5}(3\sqrt{2} - 2)\,lh_1 = 0,8970563\ldots\,lh_1.$$

L'intégrale a été calculée pour des valeurs de α comprises entre 1,00 et 0,50, par la formule de Simpson. (Calculs effectués par M. Jean Lamoen, alors aspirant du F. N. R. S.)

Pour établir la solution rappelée ci-dessus, Boussinesq a admis, pour les nappes profondes, c'est-à-dire les valeurs de α peu inférieures à l'unité, que h est peu inférieur à h_1 et peut être égalé à h_1.

Nous pouvons de même considérer que $h_1 + h$ varie peu et poser

$$h_1 + h = H = c^{te}.$$

Alors,

$$h_1^2 - h^2 = (h_1 - h)H = \frac{(h_1^2 - h_0^2)(l - x)^2(2l + x)}{2l^3}$$

et

$$S_0' = \int_0^l h\,dx = \int_0^l h_1\,dx - \frac{h_1^2 - h_0^2}{2l^3 H}\int_0^l (l - x)^2(2l + x)\,dx$$

$$S_0' = h_1 l\left[1 - \frac{3(1 - \alpha^2)\,h_1}{8H}\right].$$

H est compris entre $h_1 + h_0$ et $2h_1$. Posons $H = 1,5h_1 + 0,5h_0$.

Dès lors,

$$S_0' = h_1 l\left[1 - \frac{3(1 - \alpha^2)}{8(1,5 + 0,5\,\alpha)}\right].$$

Le tableau ci-après reproduit les valeurs de S_0' calculées par la formule de Simpson et par l'intégration approchée, ainsi que la valeur exacte pour $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

α	Formule de Simpson. $\frac{S_0'}{lh_1}$	Intégration approchée. $\frac{S_0'}{lh_1}$	Intégration exacte. $\frac{S_0'}{lh_1}$
1,00	1,00	1,00	—
0 95	0 98144	0 98149	—
0 90	0 96325	0 96346	—
0 85	0 94546	0 94594	—
0 80	0 92814	0 92895	—
0 75	0 9112	0 9125	—
$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.70710678$	0 8971	0 89884	0,8970563
0,65	0 87897	0 8814	—
0 60	0 8627	0 8667	—
55	0 8491	0 8527	—
0 50	0 8352	0 8393	—

L'intégration exacte montre la très bonne approximation du calcul par la formule de Simpson, supérieure à 0,056 °/₀₀, ce qui est une précision superflue, vu l'incertitude des hypothèses fondamentales. Il est surprenant de constater que l'intégration approchée très simple donne des résultats qui ne diffèrent que d'une manière insignifiante de ceux calculés par la formule de Simpson. Même pour $\alpha = 0{,}50$, au-dessous de la limite d'application de la théorie, l'écart est inférieur à 0,5 %. Ceci justifie amplement l'intégration approchée et même, en quelque sorte, l'hypothèse faite pour la forme de la nappe.

Comme

$$q_0 dt = n d\mathrm{S}_0,$$

$$\frac{3}{4}\varphi\frac{h_1^2 - h_0^2}{l}dt = \frac{3}{8}n\frac{h_1^2 - h_0^2}{\mathrm{H}}dl;$$

d'où

$$\varphi\, dt = \frac{n l\, dl}{2\mathrm{H}}$$

et

$$t = \frac{n l^2}{4\varphi \mathrm{H}}, \quad l = 2\sqrt{\frac{\varphi \mathrm{H} t}{n}}.$$

L'équation de la forme instantanée de la nappe est

$$h = \sqrt{h_1^2 - \frac{(h_1^2 - h_0^2)}{2 l^3}(l - x)^2\,(2l + x)},$$

elle varie en fonction du temps d'après la valeur de l.

Le débit instantané en 0 est

$$q_0 = \frac{3}{4}\varphi\frac{h_1^2 - h_0^2}{l} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\varphi \mathrm{H} n}{t}}(h_1 - h_0).$$

La précision des résultats s'apprécie par les valeurs ci-après, en observant que

$$1 + \alpha < \frac{\mathrm{H}}{h_1} < 2.$$

Pour $\alpha = 0{,}90$:

$$0{,}125\frac{n l^2}{\varphi h_1} < t < 0{,}132\frac{\varphi h_1}{n l^2}$$

$$2{,}75\sqrt{\frac{\varphi h_1 t}{n}} < l < 2{,}82\sqrt{\frac{\varphi h_1 t}{n}}$$

Pour $\alpha = 0{,}80$:

$$0{,}125\frac{n l^2}{\varphi h_1} < t < 0{,}139\frac{n l^2}{\varphi h_1}$$

$$2{,}68\sqrt{\frac{\varphi h_1 t}{n}} < l < 2{,}82\sqrt{\frac{\varphi h_1 t}{n}}.$$

La valeur $\mathrm{H} = 1{,}5\, h_1 + 0{,}5\, h_0$ donne vraisemblablement une bonne approximation.

On remarquera que t et l sont peu influencés par la dénivellation motrice $h_1 - h_0$.

*
* *

Nous avons appliqué ces méthodes à un très grand nombre de problèmes. Elles permettent somme toute de résoudre tous les problèmes de filtration en régime variable, éventuellement avec le secours de l'intégration graphique. Nous renvoyons à notre cours d'hydraulique fluviale professé à l'Université de Liége pour les principes et à une publication ultérieure plus étendue pour la résolution de divers problèmes de mouvement variable, notamment pour l'étude de nappes d'étendue limitée alimentées par des apports verticaux de pluie.

Notons cependant l'application au problème classique des puits filtrants. Nous avons rappelé déjà la formule des puits filtrants dans le cas du mouvement permanent à débit constant :

$$Q = \frac{\Pi\varphi(h_1^2 - h_0^2)}{\log\frac{l}{r}}.$$

Dans le cas du mouvement permanent à débit variable, avec apport vertical uniforme p, on a

$$Q_0 = \Pi l^2 p = \frac{\Pi\varphi(h_1^2 - h_0^2)}{\log\frac{l}{r} - \frac{1}{2} + \frac{r^2}{2l^2}};$$

l est une racine de l'équation

$$l^2\left(\log\frac{l}{r} - \frac{1}{2} + \frac{r^2}{2l^2}\right) = \frac{\varphi}{p}(h_1^2 - h_0^2).$$

En cas d'apport variable $p = \gamma x$,

$$Q_0 = \frac{\Pi\varphi(h_1^2 - h_0^2)\left(\frac{l^3}{3} - \frac{rl^2}{4} + \frac{r^3}{6}\right)}{l^3\left(\frac{l}{3} - \frac{r}{2}\right)\log\frac{l}{r} - \frac{l^3}{9} + \frac{rl^2}{4} - \frac{5r^3}{36}};$$

l est la racine de l'équation

$$l^2\left(\frac{l}{3} - \frac{r}{2}\right)\log\frac{l}{r} - \frac{l^3}{9} + \frac{rl^2}{4} - \frac{5r^3}{36} = \frac{\varphi}{\gamma}\frac{h_1^2 - h_0^2}{2}.$$

Le problème de la vidange d'une nappe par un puits, traité comme ci-dessus, donne les résultats suivants :

$$t = 0{,}3\frac{nl^2}{H\varphi} \qquad l = \sqrt{\frac{\varphi H t}{0{,}3\,n}} \qquad H = 1{,}5\,h_1 + 0{,}5\,h_0.$$

$$Q_0 = \frac{\Pi\varphi\,(h_1^2 - h_0^2)}{\log\frac{l}{r} - \frac{1}{3}}$$

solution simplifiée en admettant que l est devenu grand vis-à-vis de r, entachée d'une certaine erreur du fait que, pendant une période initiale assez courte, cette condition n'est pas satisfaite. Ces formules sont tout à fait analogues et aussi simples que celles du massif filtrant plan. On remarquera en outre que, lorsque $\frac{l}{r}$ est assez grand, le débit n'est pour ainsi dire pas affecté par la variabilité du mouvement, ce qui est très avantageux pour l'application des formules aux essais de pompage pour la mesure de φ, coefficient de perméabilité.

*
* *

Nous avons formé le projet de tenter une vérification expérimentale des formules précédentes dans des cas simples. Une subvention du Patrimoine de l'Université de Liége nous a permis de faire construire un appareil à cet effet, mais nos occupations ne nous ont pas encore permis de procéder aux expériences. Elles paraissent devoir être assez délicates et nous n'avons pas la certitude de les réussir. Leurs résultats feront éventuellement l'objet d'une publication ultérieure.

La communication actuelle a pour but essentiel de poser le principe de la prééminence de l'équation de continuité dans l'étude du mouvement de filtration en régime variable.

Une étude exacte quant aux principes de l'hydraulique doit nécessairement y satisfaire. Cette règle s'applique d'ailleurs à toutes formes du mouvement variable, notamment les ondes quelconques, les crues, etc. L'assimilation au mouvement permanent semble la faire violer trop fréquemment lorsqu'il s'agit de mouvements de filtration.

D'autre part, cette communication établit également les bases d'une méthode et d'une intégration approximatives, susceptibles de donner des résultats d'une précision suffisante, dont les applications feront l'objet d'une publication plus étendue.

Cours d'Hydraulique fluviale de l'Université de Liége.