

U N I V E R S I T É D E L I È G E

Constructions du Génie Civil

N° 54

Théorie générale des arcs élastiques plans

par

Fernand CAMPUS,

Ingénieur A. I. Br. - A. I. Lg. - A. I. M.,

Professeur à la Faculté des Sciences appliquées de l'Université de Liège

EXTRAIT DE L'OUVRAGE

*Hommage de la Faculté des Sciences appliquées
à l'Association des Ingénieurs sortis de l'Ecole de Liège
à l'occasion de son centenaire*

LIÈGE

Georges Thone, Editeur

1947

Théorie générale des arcs élastiques plans

par

Fernand CAMPUS,

Ingénieur A. I. Br. - A. I. Lg. - A. I. M.,

Professeur à la Faculté des Sciences appliquées de l'Université de Liège

I. Introduction

1. CONVENTION DE SIGNES

Les sens positifs des coordonnées x et y sont indiqués par des flèches, de même que le sens positif des longueurs d'arc s comptées sur le segment AB.

Les angles ω sont positifs dans le sens trigonométrique usuel (sens inverse des aiguilles d'une montre).

Les déplacements de translation sont positifs dans le sens de l'accroissement des coordonnées correspondantes, de même que les translations tangentielles sont positives dans le sens de croissance de s . Les rotations sont positives dans le sens de la croissance de ω .

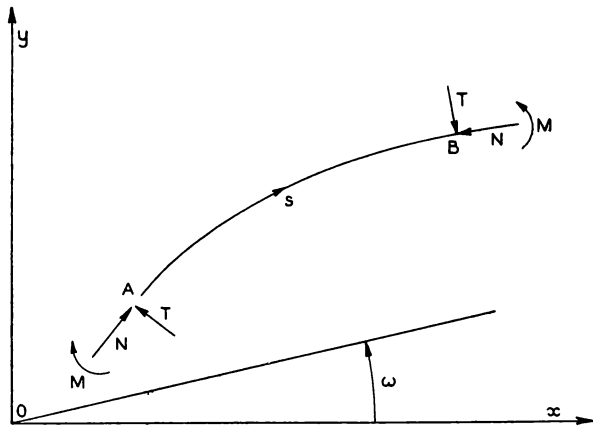


FIG. 1.

Les éléments de réduction M (moment fléchissant central), N (effort normal central) et T (effort tranchant) de gauche (point A) et de droite (point B) sont positifs dans les sens indi-

qués par les flèches sur la figure 1. Ces considérations correspondent à l'usage, sauf éventuellement pour N , que nous considérons ici comme positif en cas de compression. Cela se justifie pour des arcs qui sont en principe comprimés, afin d'éviter de devoir entraîner le signe — devant N dans tous les calculs. Si l'on désire considérer N comme positif en traction, il suffira de changer le signe de N dans toutes les formules qui suivent.

Nous n'attribuons pas de signes aux charges extérieures; celles-ci seront entièrement définies par les éléments de réduction M , N et T avec leurs signes.

Il s'agit uniquement de sollicitation plane, sans torsion.

2. CHOIX DU SYSTÈME D'AXES DE COORDONNÉES

Nous admettons qu'il s'agisse d'arcs à faible courbure ⁽¹⁾.

Nous prendrons comme axes coordonnés orthogonaux les axes principaux centraux d'inertie généralisés de l'arc.

Nous entendons par axes généralisés ceux qui tiennent compte des effets des efforts normaux et des efforts tranchants, en plus de ceux des moments fléchissants.

A cet effet, en un point quelconque Z de l'arc, dont les paramètres sont x , y , s , ω , Ω , I et $\Omega' = k\Omega$ (section réduite pour le potentiel élastique de l'effort tranchant), posons

$$r = \sqrt{\frac{I}{\Omega}}, \quad r' = \sqrt{\frac{EI}{G\Omega'}} = r \sqrt{\frac{2(1+\eta)}{k}}$$

⁽¹⁾ Cf. E. TIMOCHENKO, *Calcul des arcs élastiques*, Paris, 1922; — E. FOULON, *Influence de la courbure des pièces sur leurs tensions, leur potentiel élastique et leurs éléments hyperstatiques* (*Revue universelle des Mines*, mai et juin 1935).

(η est le coefficient de Poisson ; le facteur de réduction k est < 1).

Faisons correspondre à ce point $Z(x, y)$, trois points tels que

$$\begin{aligned} Z' : x' &= x - \frac{r\sqrt{6}}{2} \sin \omega + \frac{r'}{\sqrt{2}} \cos \omega, \\ y' &= y + \frac{r\sqrt{6}}{2} \cos \omega + \frac{r'}{\sqrt{2}} \sin \omega; \\ Z'' : x'' &= x + \frac{r\sqrt{6}}{2} \sin \omega + \frac{r'}{\sqrt{2}} \cos \omega, \\ y'' &= y - \frac{r\sqrt{6}}{2} \cos \omega + \frac{r'}{\sqrt{2}} \sin \omega; \end{aligned}$$

$$Z''' : x''' = x - r' \sqrt{2} \cos \omega, \quad y''' = y - r' \sqrt{2} \sin \omega;$$

entre lesquels on répartit le moment d'inertie total I de la section transversale, de telle sorte que

$$\frac{ds'}{EI'} = \frac{ds''}{EI''} = \frac{ds'''}{EI'''} = \frac{ds}{3EI}.$$

ds' , ds'' et ds''' sont les trois éléments correspondant à l'élément d'arc ds au point Z dans les trois arcs lieux des points associés Z' , Z'' et Z''' . Les trois points Z' , Z'' et Z''' sont les sommets d'un triangle isocèle et le point Z de l'arc est le centre de gravité des masses partielles dont la somme est $\frac{ds}{EI}$.

Le centre élastique de coordonnées (X, Y) est défini par

$$\begin{aligned} X \int_A^B \frac{ds}{EI} &= \int_A^B \frac{x'ds'}{EI'} + \int_A^B \frac{x''ds''}{EI''} + \int_A^B \frac{x'''ds'''}{EI'''} \\ &= \int_A^B \frac{xds}{EI} \\ Y \int_A^B \frac{ds}{EI} &= \int_A^B \frac{y'ds'}{EI'} + \int_A^B \frac{y''ds''}{EI''} + \int_A^B \frac{y'''ds'''}{EI'''} \\ &= \int_A^B \frac{yds}{EI}; \end{aligned}$$

il est indépendant de l'effet des N et des T , c'est-à-dire du détriplement de la masse $\frac{ds}{EI}$. Il n'en est pas de même des axes principaux centraux d'inertie.

Le centre élastique G étant déterminé, prenons-le comme origine des axes. Donc $X=0$, $Y=0$ et

$$\int_A^B \frac{xds}{EI} = 0, \quad \int_A^B \frac{yds}{EI} = 0.$$

Appelons

$$\begin{aligned} J_y &= \int_A^B \frac{x^2 ds}{EI}, \\ J_x &= \int_A^B \frac{y^2 ds}{EI}, \quad J_{xy} = \int_A^B \frac{xy ds}{EI}. \end{aligned}$$

Le moment centrifuge par rapport aux axes principaux centraux d'inertie est nul. Soient Gx_p et Gy_p ces axes et γ l'angle $\widehat{xGx_p}$ (fig. 2)

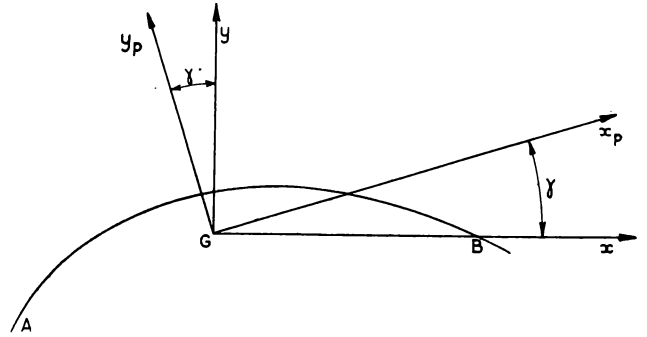


FIG. 2.

$$\begin{aligned} x_p &= x \cos \gamma + y \sin \gamma; \quad y_p = y \cos \gamma - x \sin \gamma \\ J_{x_p y_p} &= \int_A^B \frac{(x \cos \gamma + y \sin \gamma)(y \cos \gamma - x \sin \gamma) ds}{EI} = 0 \\ Jxy(\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) + (Jx - Jy) \sin \gamma \cos \gamma &= 0 \\ Jxy \cos 2\gamma + \frac{(Jx - Jy) \sin 2\gamma}{2} &= 0 \\ \operatorname{tg} 2\gamma &= \frac{2Jxy}{Jy - Jx}. \end{aligned} \quad (1)$$

Cette relation détermine les axes principaux centraux d'inertie. En cas de généralisation (détriplement), il faut écrire :

$$\begin{aligned} J_y &= \int_A^B \frac{x'^2 ds'}{EI'} + \frac{x''^2 ds''}{EI''} + \frac{x'''^2 ds'''}{EI'''} \\ &= \int_A^B \frac{x^2 + r^2 \sin^2 \omega + r'^2 \cos^2 \omega}{EI} ds. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} J_x &= \int_A^B \frac{y'^2 ds'}{EI'} + \frac{y''^2 ds''}{EI''} + \frac{y'''^2 ds'''}{EI'''} \\ &= \int_A^B \frac{y^2 + r^2 \cos^2 \omega + r'^2 \sin^2 \omega}{EI} ds. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \int_A^B \frac{x'y' ds'}{EI'} + \frac{x''y'' ds''}{EI''} + \frac{x'''y''' ds'''}{EI'''} \\ &= \int_A^B \frac{xy - (r^2 - r'^2) \sin \omega \cos \omega}{EI} ds \end{aligned} \quad (4)$$

La relation (1) reste inchangée.

On peut dès lors rapporter tout arc à ses axes principaux centraux d'inertie généralisés (fig. 3) et l'on a dans ce cas les relations :

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{xds}{EI} &= 0, \quad \int_A^B \frac{yds}{EI} = 0, \\ \int_A^B \frac{xy - (r^2 - r'^2) \sin \omega \cos \omega}{EI} ds &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Les expressions de J_y et de J_x restent conformes aux formules (2) et (3) ci-dessus. Nous y ajoutons le paramètre

$$S = \int_A^B \frac{ds}{EI} = \int_A^B \frac{ds'}{EI'} + \frac{ds''}{EI''} + \frac{ds'''}{EI'''}.$$

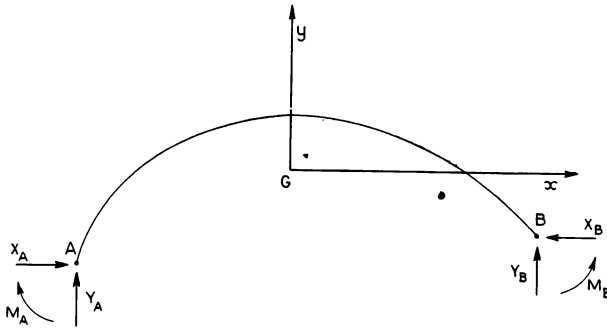


FIG. 3.

Dans ces formules, si l'on tient compte des N et des T , on admet le détriplement et l'on conserve les termes en r et r' . Si l'on ne tient pas compte des T , on suppose $r' = 0$; le triangle $Z'Z''Z'''$ se réduit à une droite, Z''' s'évanouit (dédoublement) et $\frac{ds'}{EI'} = \frac{ds''}{EI''} = \frac{ds}{2EI}$ ($Z'Z''$ est un segment de longueur $r\sqrt{6}$ de la normale à l'arc au point Z , qui en est le milieu). Enfin, si l'on ne tient en outre pas compte des N , seulement des M , on suppose $r' = 0$ et $r = 0$; les trois points associés s'évanouissent. Pour les sections rectangulaires, $k = \frac{5}{6}$. En admettant $\eta = \frac{1}{6}$ pour le béton, $\frac{2(1+\eta)}{k} = 2,8$ et $r'^2 = 2,8 r^2$ env.

3. NOTATIONS

x, y, ω : coordonnées d'un point courant de l'arc.
 α, β, φ : coordonnées d'un point particulier de l'arc.

$\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\varphi$: déplacements élastiques finis du point (α, β, φ) .

E : module de Young.

η : coefficient de Poisson.

I : moment d'inertie central principal d'une section transversale de l'arc.

Ω : aire de la même section transversale.

$\Omega' = k\Omega$ ($k < 1$) : section transversale réduite pour le potentiel de l'effort tranchant.

$$r = \sqrt{\frac{I}{\Omega}}, \quad r' = \sqrt{\frac{EI}{G\Omega'}} = r \sqrt{\frac{2(1+\eta)}{k}}.$$

J_x, J_y : moments d'inertie centraux principaux (généralisés ou non) de l'arc.

S : masse élastique totale de l'arc.

δ : coefficient de dilatation thermique.

t : accroissement de température (en valeur algébrique).

$\Delta\psi$: déplacement angulaire d'ensemble de l'arc.

M, N, T : éléments de réduction de la résultante des forces sollicitantes par rapport à une section quelconque de l'arc réel.

μ, ν, θ : éléments de réduction de la résultante des forces extérieures par rapport à une section quelconque de l'arc supposé isostatiquement appuyé à ses deux extrémités.

x_A, y_A, x_B, y_B : coordonnées des extrémités de l'arc.

$\mathcal{H}_A, \mathcal{V}_A$: réactions hyperstatiques de l'arc.

X_A, Y_A, X_B, Y_B : réactions totales de l'arc hyperstatique.

M_A, M_B : moments aux retombées de l'arc hyperstatique.

$K_A, K_B, \Delta_X, a_A, a_B, b$: coefficients caractéristiques généraux de l'arc élastique.

$\mathcal{M}_A, \mathcal{M}_B$: fonctions caractéristiques des forces extérieures.

II. Formules générales des arcs élastiques plans

4. RAPPEL DES FORMULES GÉNÉRALES DE BRESSE

$$\Delta\alpha = \Delta x_A - (\beta - y_A) \Delta\varphi_A - \int_A^\alpha \frac{M}{EI} (\beta - y) ds - \int_A^\alpha \frac{N}{E\Omega} \cos \omega ds + \int_A^\alpha \frac{T}{G\Omega'} \sin \omega ds \quad (6)$$

$$\Delta\beta = \Delta y_A + (\alpha - x_A) \Delta\varphi_A + \int_A^\beta \frac{M}{EI} (\alpha - x) ds - \int_A^\beta \frac{N}{E\Omega} \sin \omega ds - \int_A^\beta \frac{T}{G\Omega'} \cos \omega ds \quad (7)$$

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_A + \int_A^\alpha \frac{M}{EI} ds, \quad (8)$$

5. EFFETS DES FORCES EXTÉRIEURES SUR L'ARC AB À DEUX ROTULES D'EXTRÉMITÉS

On décompose les réactions aux extrémités en leurs composantes X_A, X_B et Y_A, Y_B , parallèles aux axes.

Les forces extérieures sont définies par les éléments de réduction μ, ν et θ , par rapport à l'arc rendu isostatique en rendant la rotule B libre de se déplacer suivant les x . Donc

$$\nu_B \cos \omega_B - \theta_B \sin \omega_B = 0; \quad (\omega_B < 0).$$

La réaction en B est parallèle à l'axe des y .

Dans l'arc hyperstatique à deux rotules, il y a en plus des réactions hyperstatiques $\mathcal{H}_A$ et $\mathcal{V}_A$. Les réactions totales sont, eu égard au fait que

$$\mathcal{V}_A = \mathcal{H}_A \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A},$$

$$(9) \begin{cases} X_A = \nu_A \cos \omega_A - \theta_A \sin \omega_A + \mathcal{H}_A, & (\omega_A > 0) \\ Y_A = \nu_A \sin \omega_A + \theta_A \cos \omega_A + \mathcal{H}_A \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ X_B = \mathcal{H}_A \\ Y_B = -\nu_B \sin \omega_B - \theta_B \cos \omega_B - \mathcal{H}_A \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \end{cases} \quad \begin{aligned} & - \int_A^B \frac{M}{EI} (y_B - y) ds - \int_A^B \frac{N}{EQ} \cos \omega ds \\ & + \int_A^B \frac{T}{GQ'} \sin \omega ds \\ 0 = & \int_A^B \frac{M}{EI} [x(y_B - y_A) - y(x_B - x_A) + x_B y_A - x_A y_B] ds \\ & + \int_A^B \frac{N}{EQ} [(y_B - y_A) \sin \omega + (x_B - x_A) \cos \omega] ds \\ & + \int_A^B \frac{T}{GQ'} [(y_B - y_A) \cos \omega - (x_B - x_A) \sin \omega] ds. \end{aligned} \quad (11)$$

Les éléments de réduction dans l'arc hyperstatique sont :

$$(9') \begin{cases} M = \mu + \mathcal{V}_A (x - x_A) - \mathcal{H}_A (y - y_A) = \mu \\ \quad + \mathcal{H}_A \frac{(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y + y_A x_B - y_B x_A}{x_B - x_A} \\ N = \nu + \mathcal{H}_A \frac{(y_B - y_A) \sin \omega + (x_B - x_A) \cos \omega}{x_B - x_A} \\ T = \theta + \mathcal{H}_A \frac{(y_B - y_A) \cos \omega - (x_B - x_A) \sin \omega}{x_B - x_A} \end{cases}$$

En vertu de la formule (7), comme

$$\Delta y_B - \Delta y_A = 0$$

$$\Delta \varphi_A = - \frac{\left\{ \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) ds - \int_A^B \frac{N}{EQ} \sin \omega ds \right.}{x_B - x_A} \quad (10)$$

En vertu de la formule (6), comme

$$\Delta x_B - \Delta x_A = 0$$

$$0 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \left[\int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) ds - \int_A^B \frac{N}{EQ} \sin \omega ds - \int_A^B \frac{T}{GQ'} \cos \omega ds \right]$$

Posons

$$\Delta_X = \frac{J_X (x_B - x_A)^2 + J_Y (y_B - y_A)^2 + S (y_A x_B - y_B x_A)^2}{(x_B - x_A)^2} \quad (12)$$

$$\mathcal{H}_A = \frac{\left\{ - \int_A^B \frac{\mu}{EI} [x(y_B - y_A) - y(x_B - x_A) + x_B y_A - x_A y_B] ds - \int_A^B \frac{\nu}{EQ} [(x_B - x_A) \cos \omega + (y_B - y_A) \sin \omega] ds + \int_A^B \frac{\theta}{GQ'} [(x_B - x_A) \sin \omega - (y_B - y_A) \cos \omega] ds \right\}}{(x_B - x_A) \Delta_X} \quad (13)$$

D'après la formule (10) combinée avec les relations (9'),

$$\Delta \varphi_A = - \frac{\int_A^B \frac{\mu}{EI} (x_B - x) ds - \int_A^B \frac{\nu}{EQ} \sin \omega ds - \int_A^B \frac{\theta}{GQ'} \cos \omega ds}{x_B - x_A} + \frac{\mathcal{H}_A}{(x_B - x_A)^2} [J_Y (y_B - y_A) - x_B (y_A x_B - y_B x_A) S].$$

Posons

$$K_B = \frac{J_Y (y_B - y_A) - x_B (y_A x_B - y_B x_A) S}{(x_B - x_A)^2} \quad (14)$$

$$\Delta \varphi_A = - \frac{\int_A^B \frac{\mu}{EI} (x_B - x) ds - \int_A^B \frac{\nu}{EQ} \sin \omega ds - \int_A^B \frac{\theta}{GQ'} \cos \omega ds}{x_B - x_A} + K_B \mathcal{H}_A \quad (15)$$

D'après (8),

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_B &= \Delta\varphi_A + \int_A^B \frac{M}{EI} ds \\ \Delta\varphi_B &= \Delta\varphi_A + \int_A^B \frac{\mu}{EI} ds + \frac{\mathcal{H}_A}{x_B - x_A} \int_A^B \frac{(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y + y_A x_B - y_B x_A}{(x_B - x_A)EI} ds \\ \Delta\varphi_B &= - \frac{\int_A^B \frac{\mu}{EI} (x_A - x) ds - \int_A^B \frac{\gamma}{E\Omega} \sin \omega ds - \int_A^B \frac{\theta}{G\Omega'} \cos \omega ds}{x_B - x_A} \\ &\quad + \frac{\mathcal{H}_A}{(x_B - x_A)^2} [J_y (y_B - y_A) - x_A (y_A x_B - y_B x_A) S]\end{aligned}$$

Posons

$$K_A = \frac{J_y (y_B - y_A) - x_A (y_A x_B - y_B x_A) S}{(x_B - x_A)^2} \quad (16)$$

$$\Delta\varphi_B = - \frac{\int_A^B \frac{\mu}{EI} (x_A - x) ds - \int_A^B \frac{\gamma}{E\Omega} \sin \omega ds - \int_A^B \frac{\theta}{G\Omega'} \cos \omega ds}{x_B - x_A} + K_A \mathcal{H}_A \quad (17)$$

Posons

$$\left. \begin{aligned}\mathcal{N}_A &= - \frac{\int_A^B \frac{\mu}{EI} (x_A - x) ds + \int_A^B \frac{\gamma}{E\Omega} \sin \omega ds + \int_A^B \frac{\theta}{G\Omega'} \cos \omega ds}{x_B - x_A} \\ \mathcal{N}_B &= \frac{\int_A^B \frac{\mu}{EI} (x_B - x) ds - \int_A^B \frac{\gamma}{E\Omega} \sin \omega ds - \int_A^B \frac{\theta}{G\Omega'} \cos \omega ds}{x_B - x_A}\end{aligned} \right\} \quad (18)$$

d'où

$$\left. \begin{aligned}\Delta\varphi_A &= -\mathcal{N}_B + K_B \mathcal{H}_A \\ \Delta\varphi_B &= \mathcal{N}_A + K_A \mathcal{H}_A\end{aligned} \right\} \quad (19)$$

6. EFFETS DE COUPLES M_A ET M_B AUX DEUX RETOMBÉES À ROTULES

On a :

$$\left. \begin{aligned}X_A &= \mathcal{H}_A \\ Y_A &= \frac{M_B - M_A}{x_B - x_A} + \mathcal{H}_A \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ X_B &= \mathcal{H}_A \\ Y_B &= - \frac{M_B - M_A}{x_B - x_A} - \mathcal{H}_A \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\end{aligned} \right\} \quad (20) \text{ (fig. 3)}$$

Les éléments de réduction de l'arc hyperstatique sont :

$$\left. \begin{aligned}M &= \frac{M_A (x_B - x) - M_B (x_A - x)}{x_B - x_A} + \mathcal{H}_A \frac{(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y + y_A x_B - y_B x_A}{x_B - x_A} \\ N &= \frac{M_B - M_A}{x_B - x_A} \sin \omega + \mathcal{H}_A \frac{(y_B - y_A) \sin \omega + (x_B - x_A) \cos \omega}{x_B - x_A} \\ T &= \frac{M_B - M_A}{x_B - x_A} \cos \omega + \mathcal{H}_A \frac{(y_B - y_A) \cos \omega - (x_B - x_A) \sin \omega}{x_B - x_A}\end{aligned} \right\} \quad (20')$$

Introduisant dans la formule (11) les expressions de M, N et T tirées des relations (20'), on obtient :

$$\Delta x \mathcal{H}_A - K_B M_A + K_A M_B = 0$$

$$\mathcal{H}_A = \frac{K_B M_A - K_A M_B}{\Delta x} \quad (21)$$

En introduisant les expressions (20') dans la formule (10), on obtient :

$$\Delta \varphi_A = -M_A \frac{Jy + x_B^2 S}{(x_B - x_A)^2} + M_B \frac{Jy + x_A x_B S}{(x_B - x_A)^2} + K_B \mathcal{H}_A$$

Posons

$$\frac{Jy + x_B^2 S}{(x_B - x_A)^2} = a_B, \quad \frac{Jy + x_A x_B S}{(x_B - x_A)^2} = b \quad (22)$$

$$\Delta \varphi_A = -a_B M_A + b M_B + K_B \mathcal{H}_A \quad (23)$$

D'après (8), $\Delta \varphi_B = \Delta \varphi_A + \int_A^B \frac{M}{EI} ds$

$$\Delta \varphi_B = \Delta \varphi_A + \frac{M_A x - M_B x_A}{x_B - x_A} S$$

$$+ \frac{\mathcal{H}_A}{(x_B - x_A)^2} \int_A^B \left\{ \frac{(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)}{y + y_A x_B - y_B x_A} \right\} \frac{ds}{EI}$$

$$\Delta \varphi_B = -M_A \frac{Jy + x_A x_B S}{x_B - x_A} + M_B \frac{Jy + x_A^2 S}{(x_B - x_A)^2} + K_A \mathcal{H}_A$$

Posons

$$\frac{Jy + x_A^2 S}{(x_B - x_A)^2} = a_A \quad (22')$$

$$\Delta \varphi_B = -b M_A + a_A M_B + K_A \mathcal{H}_A. \quad (24)$$

7. DÉPLACEMENT RELATIF DES APPUIS A ET B SUIVANT LES y

Dans ce cas,

$$\Delta y_B - \Delta y_A \neq 0,$$

posons

$$\Delta y_B - \Delta y_A = (x_B - x_A) \Delta \psi. \quad (25)$$

La formule (10) devient :

$$\Delta \varphi_A = \Delta \psi - \frac{\int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) ds - \int_A^B \frac{N}{E\Omega} \sin \omega ds - \int_A^B \frac{T}{G\Omega'} \cos \omega ds}{x_B - x_A} \quad (26)$$

$$\Delta \varphi_B = \Delta \varphi_A + \int_A^B \frac{M}{EI} ds$$

$$\Delta \varphi_B = \Delta \psi - \frac{\int_A^B \frac{M}{EI} (x_A - x) ds - \int_A^B \frac{N}{E\Omega} \sin \omega ds - \int_A^B \frac{T}{G\Omega'} \cos \omega ds}{x_B - x_A}. \quad (27)$$

La formule (11) devient :

$$0 = (x_B - x_A)(y_B - y_A) \Delta \psi + \int_A^B \frac{M}{EI} \left[x(y_B - y_A) - y(x_B - x_A) + x_B y_A - x_A y_B \right] ds$$

$$+ \int_A^B \frac{N}{E\Omega} \left[(y_B - y_A) \sin \omega + (x_B - x_A) \cos \omega \right] ds + \int_A^B \frac{T}{G\Omega'} \left[(y_B - y_A) \cos \omega - (x_B - x_A) \sin \omega \right] ds. \quad (28)$$

On a

$$X_A = \mathcal{H}_A, \quad Y_A = \mathcal{H}_A \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A},$$

$$X_B = \mathcal{H}_A, \quad Y_B = -\mathcal{H}_A \frac{y_B - y_A}{x_B - x_B} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} M &= \mathcal{H}_A \frac{(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y + y_A x_B - y_B x_A}{x_B - x_A} \\ N &= \mathcal{H}_A \frac{(y_B - y_A) \sin \omega - (x_B - x_A) \cos \omega}{x_B - x_A} \\ T &= \mathcal{H}_A \frac{(y_B - y_A) \cos \omega - (x_B - x_A) \sin \omega}{x_B - x_A} \end{aligned} \right\} \quad (29')$$

Introduisant les expressions (29'), dans les équations (28), (26) et (27), il vient :

$$(y_B - y_A) \Delta \psi + \Delta_X \mathcal{H}_A = 0$$

$$\mathcal{H}_A = - \frac{(y_B - y_A) \Delta \psi}{\Delta_X} \quad (30) \quad \text{posons}$$

D'où

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi_A &= \Delta \psi + K_B \mathcal{H}_A \\ \Delta \varphi_B &= \Delta \psi + K_A \mathcal{H}_A \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

La relation (10) n'est pas modifiée, mais la formule (11) devient :

$$\begin{aligned} 0 &= (x_B - x_A) \Delta l + \int_A^B \frac{M}{EI} [x (y_B - y_A) - y (x_B - x_A) + x_B y_A - x_A y_B] ds \\ &\quad + \int_A^B \frac{N}{E\Omega} [(y_B - y_A) \sin \omega + (x_B - x_A) \cos \omega] ds \\ &\quad + \int_A^B \frac{T}{G\Omega} [(y_B - y_A) \cos \omega - (x_B - x_A) \sin \omega] ds \quad (32) \end{aligned}$$

Les relations (29) et (29') sont valables dans ce cas. Si on les introduit dans les formules (32) et (10), on obtient :

$$\Delta l + \Delta_X \mathcal{H}_A = 0$$

$$\mathcal{H}_A = - \frac{\Delta l}{\Delta_X} \quad (33)$$

$$\Delta \varphi_A = K_B \mathcal{H}_A, \quad \Delta \varphi_B = K_A \mathcal{H}_A. \quad (34)$$

9. EFFETS D'UNE VARIATION DE TEMPÉRATURE UNIFORME t

Nous considérons la variation comme positive en cas d'augmentation de la température.

A un tel réchauffement correspond dans l'arc hyperstatique :

I. Une dilatation empêchée suivant les x , équivalente à un écartement relatif des appuis

$$\Delta l_t = - \delta t (x_B - x_A).$$

II. Une dénivellation empêchée suivant les y , équivalente à un déplacement angulaire relatif

$$\Delta \psi_t = - \delta t \frac{(y_B - y_A)}{x_B - x_A}.$$

Il suffirait donc d'introduire ces valeurs dans les formules des paragraphes 7 et 8, notamment les formules (30), (31), (33) et (34), et d'en additionner les effets, en vertu du principe de superposition.

Il est encore plus expéditif de recourir aux formules du paragraphe 5, les éléments de réduction équivalents se réduisant à $\nu = -E\Omega \delta t$.

Dès lors, d'après la formule (13)

$$\mathcal{H}_A = \frac{\delta t}{\Delta_X} \left[\frac{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}{x_B - x_A} \right] \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi_A &= - \delta t \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + K_B \mathcal{H}_A \\ \Delta \varphi_B &= - \delta t \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + K_A \mathcal{H}_A \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

10. EFFETS D'UNE VARIATION DE TEMPÉRATURE NON UNIFORME

Supposons une élévation de température t_s de la fibre supérieure de l'arc, t_i de la fibre inférieure et une variation linéaire intermédiaire. Il en résulte la superposition d'un effet de dilata-

tion uniforme $\frac{\delta (t_s + t_i)}{2}$, correspondant aux effets de $\nu = - \frac{E\Omega \delta (t_s + t_i)}{2}$, et un effet de

flexion, correspondant à $\mu = - \frac{EI \delta (t_s - t_i)}{h}$

h étant la hauteur de la section de l'arc. Il suffit d'introduire les valeurs correspondantes dans les formules du paragraphe 5.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A &= \frac{\delta (t_s - t_i)}{\Delta_X} \left[\frac{(y_B - y_A) \int_A^B \frac{x ds}{h} - (x_B - x_A) \int_A^B \frac{y ds}{h} + (x_B y_A - x_A y_B) \int_A^B \frac{ds}{h}}{x_B - x_A} \right] \\ &\quad + \frac{\delta (t_s + t_i)}{2 \Delta_X} \frac{[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]}{x_B - x_A}. \quad (37) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi_A &= \frac{\delta(t_s - t_i)}{x_B - x_A} \int_A^B \frac{(x_B - x) ds}{h} - \frac{\delta(t_s + t_i)}{2(x_B - x_A)} (y_B - y_A) + K_B \mathcal{H}_A \\ \Delta \varphi_B &= \frac{\delta(t_s - t_i)}{x_B - x_A} \int_A^B \frac{(x_A - x) ds}{h} - \frac{\delta(t_s + t_i)}{2(x_B - x_A)} (y_B - y_A) + K_A \mathcal{H}_A \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

On écrirait aisément les formes particulières de ces formules dans les cas où

$$h = c^{te}, \quad \text{ou} \quad h \cos \omega = h_c = c^{te}, \quad \text{etc.}$$

Il est à remarquer que d'autres effets de changement de volume, par exemple de retrait pour le béton et le béton armé, peuvent, au point de vue de la sollicitation hyperstatique, être assimilés à des variations de température fictives. On tiendra compte en outre des tensions propres correspondantes.

Il importe, bien entendu, de considérer pour ces effets les valeurs de E adéquates, éventuellement décroissantes en fonction du temps pour les effets de longue durée. Il en sera ainsi notam-

ment pour les effets des charges permanentes, auxquelles correspond éventuellement une valeur de E décroissant exponentiellement en fonction du temps ⁽¹⁾. Les mêmes valeurs de E décroissantes avec le temps sont évidemment à appliquer aux effets des déformations permanentes, définis par des déplacements relatifs des extrémités de l'arc (§ 7 et § 8).

11. FORMULES GÉNÉRALES DES ARCS ÉLASTIQUES PLANS

Elles s'obtiennent par la superposition des cas de sollicitation considérés dans les paragraphes 5 à 10 inclus. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A &= \frac{\left\{ \int_A^B \frac{-\mu}{E} \left[x(y_B - y_A) - y(x_B - x_A) + x_B y_A - x_A y_B \right] ds - \int_A^B \frac{\nu_A}{E\Omega} \left[(x_B - x_A) \cos \omega \right] \right.}{(x_B - x_A) \Delta_X} \\ &\quad \left. + (y_B - y_A) \sin \omega \right\} ds + \frac{\int_A^B \frac{\theta}{G\Omega^2} \left[(x_B - x_A) \sin \omega - (y_B - y_A) \cos \omega \right] ds}{(x_B - x_A) \Delta_X} \\ &\quad + \frac{K_B M_A - K_A M_B}{\Delta_X} - \frac{(y_B - y_A) \Delta \psi}{\Delta_X} - \frac{\Delta l}{\Delta_X} \\ &\quad + \frac{\delta(t_s - t_i)}{\Delta_X} \left[\frac{(y_B - y_A) \int_A^B \frac{x ds}{h} - (x_B - x_A) \int_A^B \frac{y ds}{h} + (x_B y_A - x_A y_B) \int_A^B \frac{ds}{h}}{x_B - x_A} \right] \\ &\quad + \frac{\delta(t_s + t_i)}{2 \Delta_X} \left[\frac{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}{x_B - x_A} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} X_A &= \nu_A \cos \omega_A - \theta_A \sin \omega_A + \mathcal{H}_A \\ Y_A &= \nu_A \sin \omega_A + \theta_A \cos \omega_A + \mathcal{H}_A \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \frac{M_B - M_A}{x_B - x_A} \\ X_B &= \mathcal{H}_A \\ Y_B &= -\nu_B \sin \omega_B - \theta_B \cos \omega_B - \mathcal{H}_A \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} - \frac{M_B - M_A}{x_B - x_A} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} M &= \mu + \frac{M_A (x_B - x) - M_B (x_A - x)}{x_B - x_A} + \mathcal{H}_A \frac{(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y + y_A x_B - y_B x_A}{x_B - x_A} \\ N &= \nu + \frac{M_B - M_A}{x_B - x_A} \sin \omega + \mathcal{H}_A \frac{(y_B - y_A) \sin \omega + (x_B - x_A) \cos \omega}{x_B - x_A} \\ T &= \theta + \frac{M_B - M_A}{x_B - x_A} \cos \omega + \mathcal{H}_A \frac{(y_B - y_A) \cos \omega - (x_B - x_A) \sin \omega}{x_B - x_A} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

⁽¹⁾ Cf. F. CAMPUS, *Influence des propriétés physiques des matériaux sur la statique du béton armé*. Rapport d'introduction au Premier Congrès international des

Ponts et Charpentes, Paris, 1932, publication préliminaire.

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_A &= -\mathcal{M}_B + K_B \mathcal{H}_A - a_B M_A + b M_b + \Delta\psi + \frac{\delta(t_s - t_i)}{x_B - x_A} \int_A^B \frac{(x_B - x) ds}{h} \\ &\quad - \frac{\delta(t_s + t_i)}{2(x_B - x_A)} (y_B - y_A) \\ \Delta\varphi_B &= \mathcal{M}_A + K_A \mathcal{H}_A - b M_A + a_A M_B + \Delta\psi + \frac{\delta(t_s - t_i)}{x_B - x_A} \int_A^B \frac{(x_A - x) ds}{h} \\ &\quad - \frac{\delta(t_s + t_i)}{2(x_B - x_A)} (y_B - y_A) . \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

On déduit des expressions (42) les relations suivantes ⁽¹⁾:

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} M_A &= \frac{-a_A (\Delta\varphi_A - \Delta\psi) + b (\Delta\varphi_B - \Delta\psi)}{a_A a_B - b^2} - \frac{a_A \mathcal{M}_B + b \mathcal{M}_A}{a_A a_B - b^2} - y_A \mathcal{H}_A \\ &\quad + \frac{\delta(t_s - t_i) a_A \int_A^B \frac{(x_B - x) ds}{h} - b \int_A^B \frac{(x_A - x) ds}{h}}{a_A a_B - b^2} - \frac{\delta(t_s + t_i) (y_B - y_A) (a_A - b)}{2(x_B - x_A) a_A a_B - b} \\ M_B &= \frac{-b (\Delta\varphi_A - \Delta\psi) + a_B (\Delta\varphi_B - \Delta\psi)}{a_A a_B - b^2} - \frac{b \mathcal{M}_B + a_B \mathcal{M}_A}{a_A a_B - b^2} - y_B \mathcal{H}_A \\ &\quad + \frac{\delta(t_s - t_i) b \int_A^B \frac{(x_B - x) ds}{h} - a_B \int_A^B \frac{(x_A - x) ds}{h}}{a_A a_B - b^2} - \frac{\delta(t_s + t_i) (y_B - y_A) (b - a_B)}{2(x_B - x_A) a_A a_B - b^2} \end{aligned} \right.$$

Les formules se simplifient lorsque $y_A = y_B$, ce qui est le cas le plus fréquent. Les termes ayant $(y_B - y_A)$ en facteur s'annulent; de ce fait $\varphi_A = 0$.

Dans ces formules interviennent les six coefficients caractéristiques des arcs élastiques: Δ_X (formule 12), K_B (formule 14) et K_A (formule 16), a_B (formule 22), a_A (formule 22') et b (formule 22).

Les trois premiers se simplifient également lorsque $y_A = y_B$.

$y_A = y_B$ et $-x_A = x_B = \frac{l}{2}$, l étant l'ouverture de l'arc.

Les formules deviennent alors ce qui suit.

Les coefficients caractéristiques des arcs se réduisent à quatre :

$$\Delta_X = J_x + S y_A^2 \quad (44)$$

$$K = -\frac{S y_A}{2} = K_B = -K_A \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{J_y}{l^2} + \frac{S}{4} = a_B = a_A \\ b &= \frac{J_y}{l^2} - \frac{S}{4} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

12. FORMULES DES ARCS SYMÉTRIQUES

Les arcs sont le plus souvent symétriques. Alors d'où

$$a^2 - b^2 = \frac{J_y S}{l^2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A &= \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\mu}{EI} (y - y_A) ds - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\nu}{EQ} \cos \omega ds + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\theta}{GQ'} \sin \omega ds}{\Delta_X} + \frac{K (M_A + M_B)}{\Delta_X} \\ &\quad - \frac{\Delta l}{\Delta_X} - \frac{\delta(t_s - t_i)}{\Delta_X} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{(y - y_A) ds}{h} + \frac{\delta(t_s + t_i) l}{2 \Delta_X} \end{aligned} \quad (47)$$

⁽¹⁾ Les formules (43) ont été simplifiées en tenant compte de ce que

$$\frac{a_A K_B - b K_A}{a_A a_B - b^2} = -y_A \quad \text{et} \quad \frac{b K_B - a_B K_A}{a_A a_B - b^2} = -y_B$$

L'expression de $a_A a_B - b^2$ est $\frac{J_y S}{(x_B - x_A)^2}$.

$$\left. \begin{aligned} X_A &= \nu_A \cos \omega_A - \theta_A \sin \omega_A + \mathcal{H}_A \quad \varphi_A = 0 \\ Y_A &= \nu_A \sin \omega_A + \theta_A \cos \omega_A + \frac{M_B - M_A}{l} \\ X_B &= \mathcal{H}_A \\ Y_B &= -\nu_B \sin \omega_B - \theta_B \cos \omega_B - \frac{M_B - M_A}{l} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} M &= \mu + \frac{M_A \left(\frac{l}{2} - x \right) + M_B \left(\frac{l}{2} + x \right)}{l} - \mathcal{H}_A (y - y_A) \\ N &= \nu + \frac{M_B - M_A}{l} \sin \omega + \mathcal{H}_A \cos \omega \\ T &= \theta + \frac{M_B - M_A}{l} \cos \omega - \mathcal{H}_A \sin \omega \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi_A &= -\mathcal{M}_B + K \mathcal{H}_A - a M_A + b M_B + \Delta \psi + \frac{\delta(t_s - t_i)}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{l}{2} - x \right)}{h} ds \\ \Delta \varphi_B &= -\mathcal{M}_A - K \mathcal{H}_A - b M_A + a M_B + \Delta \psi - \frac{\delta(t_s - t_i)}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{l}{2} + x \right)}{h} ds \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

$$\left. \begin{aligned} M_A &= \frac{-a(\Delta \varphi_A - \Delta \psi) + b(\Delta \varphi_B - \Delta \psi)}{a^2 - b^2} - \frac{a \mathcal{M}_B + b \mathcal{M}_A}{a^2 - b^2} - y_A \mathcal{H}_A \\ &\quad + \frac{\delta(t_s - t_i)}{l} \frac{a \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{l}{2} - x \right)}{h} ds + b \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{l}{2} + x \right)}{h} ds}{a^2 - b^2} \\ M_B &= \frac{-b(\Delta \varphi_A - \Delta \psi) + a(\Delta \varphi_B - \Delta \psi)}{a^2 - b^2} - \frac{b \mathcal{M}_B + a \mathcal{M}_A}{a^2 - b^2} - y_A \mathcal{H}_A \\ &\quad + \frac{\delta(t_s - t_i)}{l} \frac{b \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{l}{2} - x \right)}{h} ds + a \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{l}{2} + x \right)}{h} ds}{a^2 - b^2} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}_A &= \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\mu}{EI} \left(\frac{l}{2} + x \right) ds + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\nu}{E\Omega} \sin \omega ds + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\theta}{G\Omega'} \cos \omega ds}{l} \\ \mathcal{M}_B &= \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\mu}{EI} \left(\frac{l}{2} - x \right) ds - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\nu}{E\Omega} \sin \omega ds - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\theta}{G\Omega'} \cos \omega ds}{l} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

13. QUELQUES CAS PARTICULIERS D'ARCS SYMÉTRIQUES la parabole est

A. Arc parabolique de hauteur réduite constante

Rapportée aux axes yox (fig. 4), l'équation de

$$y = 4f \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \omega = \frac{4f}{l} \left(1 - \frac{2x}{l} \right)$$

$$\sin \omega = \frac{\frac{4f}{l} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)}{\sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2}}$$

$$\cos \omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2}}$$

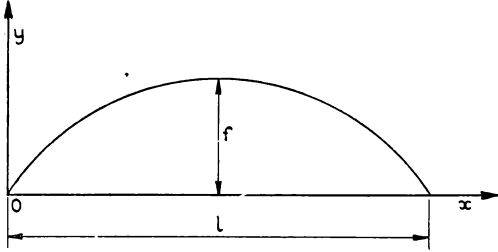


FIG. 4.

Comme $h \cos \omega = h_c = c^{te}$

$$\Omega \cos \omega = \Omega_c = c^{te} \quad I \cos^3 \omega = I_c = c^{te}$$

$$Y = \frac{\int_0^l \frac{\frac{4f}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{1 + \frac{16f^2}{l^2} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2} dx}{\int_0^l \frac{dx}{1 + \frac{16f^2}{l^2} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2}}$$

$$= f + \frac{l^2}{32f} \frac{2 \operatorname{arctg} \frac{4f}{l} - \frac{8f}{l}}{\operatorname{arctg} \frac{4f}{l}}$$

Si $\frac{4f}{l}$ est assez faible (arc très surbaissé), nous pouvons poser

$$\operatorname{arctg} \frac{4f}{l} = \frac{4f}{l} - \frac{1}{3} \left(\frac{4f}{l}\right)^3$$

Alors

$$Y = \sim \frac{2}{3} f.$$

On a

$$r^2 \cos^2 \omega = r_c^2 = c^{te} \quad \text{et} \quad r'^2 \cos^2 \omega = r_c'^2$$

$$= r_c^2 \frac{2(1 + \eta)}{k} = c^{te}.$$

Déplaçons l'origine des axes au centre élastique (fig. 5)

On a

$$y_A = -Y = -f - \frac{l^2}{32f} \frac{2 \operatorname{arctg} \frac{4f}{l} - \frac{8f}{l}}{\operatorname{arctg} \frac{4f}{l}}$$

L'équation de la parabole est :

$$y = y_A + f - \frac{4fx^2}{l^2} \quad c = y_A + f$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \omega = -\frac{8fx}{l^2}.$$

$$\sin \omega = \frac{-\frac{8fx}{l^2}}{\sqrt{1 + \frac{64f^2 x^2}{l^4}}}, \quad \cos \omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{64f^2 x^2}{l^4}}}.$$

$$S = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{ds}{EI} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\cos^2 \omega dx}{EI_c} = \frac{l^2}{4EI_c f} \operatorname{arctg} \frac{l}{4f}.$$

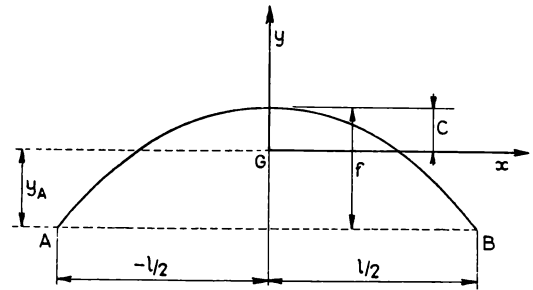


FIG. 5.

Si l'arc est très surbaissé

$$S = \sim \frac{l}{EI_c}.$$

$$J_y = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{x^2 + r^2 \sin^2 \omega + r'^2 \cos^2 \omega}{EI_c} \cos^2 \omega dx$$

$$J_y = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{x^2 \cos^2 \omega + r_c^2 \sin^2 \omega + r_c'^2 \cos^2 \omega}{EI_c} dx$$

$$J_y = \frac{l^6}{512 f^3 EI_c} \left[\frac{8f}{l} - 2 \operatorname{arctg} \frac{4f}{l} \right]$$

$$+ \frac{r_c^2}{EI_c} \left[l - \frac{l^2}{4f} \operatorname{arctg} \frac{4f}{l} \right]$$

$$+ \frac{r_c'^2}{EI_c} \frac{l^2}{4f} \operatorname{arctg} \frac{4f}{l}.$$

Pour un arc très surbaissé

$$\begin{aligned}
 J_y &= \infty \frac{l^3}{12 EI_c} + \frac{16 f^2 r_c^2}{3 EI_c l} + \frac{r_c'^2 l}{EI_c} \\
 &= \infty \frac{l^3}{EI_c} \left[\frac{1}{12} + \frac{16}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 \left(\frac{r_c}{l} \right)^2 + \left(\frac{r_c'}{l} \right)^2 \right] . \\
 J_x &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{y^2 + r^2 \cos^2 \omega + r'^2 \sin^2 \omega}{EI_c} \cos^2 \omega dx \\
 &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{y^2 \cos^2 \omega + r_c^2 \cos^2 \omega + r_c'^2 \sin^2 \omega}{EI_c} dx . \\
 J_x &= \frac{(y_A + f)^2}{EI_c} \frac{l^2}{4 f} \operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} \\
 &\quad - \frac{(y_A + f) l^4}{64 f^2 EI_c} \left[\frac{8 f}{l} - 2 \operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} \right] \\
 &\quad + \frac{l^6}{2048 f^3 EI_c} \left[\frac{128 f^3}{3 l^3} - \frac{8 f}{l} + 2 \operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} \right] \\
 &\quad + \frac{r_c'^2 l^2}{4 f EI_c} \operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} + \frac{r_c'^2}{EI_c} \left[l - \frac{l^2}{4 f} \operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} \right] .
 \end{aligned}$$

Pour un arc très surbaissé, en posant

$$\operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} = \frac{4 f}{l} - \frac{1}{3} \left(\frac{4 f}{l} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{4 f}{l} \right)^5$$

$$\begin{aligned}
 J_x &= \infty \frac{4 f^2 l}{45 EI_c} + \frac{r_c^2 l}{EI_c} + \frac{16 f^2 r_c'^2}{3 EI_c l} \\
 &= \infty \frac{f l}{EI_c} \left[\frac{4}{45} + \left(\frac{r_c}{f} \right)^2 + \frac{16}{3} \left(\frac{r_c'}{f} \right)^2 \right] .
 \end{aligned}$$

Pour les effets des variations de température :

On calculera dès lors aisément Δx , K , a et b , d'après les formules (44), (45) et (46).

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{(y - y_A) ds}{h} = \frac{1}{h_c} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(f - \frac{4 f x^2}{l^2} \right) dx = \frac{2 f l}{3 h_c}$$

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{l}{2} - x \right) ds}{h} = \frac{1}{h_c} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} - x \right) dx = \frac{l^2}{2 h_c}$$

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{l}{2} + x \right) ds}{h} = \frac{1}{h_c} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} + x \right) dx = \frac{l^2}{2 h_c}$$

Pour les arcs suffisamment surbaissés :

$$y_A = \infty \frac{2}{3} f, \quad c = \infty \frac{f}{3}, \quad S = \frac{l}{EI_c},$$

$$J_y = \infty \frac{l^3}{12 EI_c}, \quad J_x = \frac{4 f^2 l}{45 EI_c} \left[1 + \frac{45}{4} \left(\frac{r_c}{f} \right)^2 \right] .$$

$$\Delta x = J_x + \frac{4 f^2 l}{9 EI_c} = \frac{8 f^2 l}{15 EI_c} \left[1 + \frac{15}{8} \left(\frac{r_c}{f} \right)^2 \right] ,$$

si l'on tient compte des effets des N , sinon on néglige le deuxième terme entre crochets

$$K = - \frac{S y_A}{2} = \frac{f l}{3 EI_c} .$$

$$a = \frac{l}{3 EI_c}, \quad b = - \frac{l}{6 EI_c}, \quad a^2 - b^2 = \frac{l^2}{12 (EI_c)^2} .$$

$$\frac{a}{a^2 - b^2} = \frac{4 EI_c}{l}, \quad \frac{b}{a^2 - b^2} = - \frac{2 EI_c}{l},$$

$$\frac{K}{a - b} = \frac{2}{3} f .$$

B. Arc parabolique de section réduite et de moment d'inertie réduit constants

On admet que simultanément

$$\Omega \cos \omega = \Omega_c = c^{te}$$

et

$$I \cos \omega = I_c = c^{te},$$

d'où $r = r_c = c^{te}$ et $r' = r'_c = c^{te}$.

On peut réaliser rigoureusement cette condition par un arc de hauteur constante $h = h_c$ et de largeur variable suivant la loi

$$b \cos \omega = b_c = c^{te} .$$

Par approximation, on admet souvent, ces conditions lorsque $h \cos \omega = h_c = c^{te}$ (cas A) et que l'arc est très surbaissé ($\cos \omega = \sim 1$).

Dans ce cas, en reprenant les axes de la figure 4,

$$Y = \frac{4 f}{l} \frac{\int_0^l x \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx}{\int_0^l dx} = \frac{2}{3} f .$$

Dans le système d'axes de la figure 5,

$$y_A = - Y = - \frac{2}{3} f, \quad c = \frac{f}{3} .$$

$$S = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{EI_c} = \frac{l}{EI_c}$$

$$\begin{aligned}
 J_y &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{x^2 + r_c^2 \sin^2 \omega + r_c'^2 \cos^2 \omega}{EI_c} dx \\
 &= \frac{l^3}{12 EI_c} + \frac{r_c^2}{EI_c} \left[l - \frac{l^2}{4 f} \operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} \right] \\
 &\quad + \frac{r_c'^2 l^2}{EI_c 4 f} \operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} .
 \end{aligned}$$

L'expression est la même que dans le cas A pour les arcs surbaissés

$$J_x = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{y^2 + r_c^2 \cos^2 \omega + r_c'^2 \sin^2 \omega}{EI_c} dx$$

$$= \frac{4 f^2 l}{45 EI_c} + \frac{r_c^2}{EI_c} \frac{l^2}{4 f} \operatorname{arctg} \frac{4 f}{l}$$

$$+ \frac{r_c'^2}{EI_c} \left[l - \frac{l^2}{4 f} \operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} \right].$$

Même expression aussi que dans le cas A pour les arcs très surbaissés, ainsi que pour les valeurs de Δ_X , K , a et b .

Pour les effets des variations de température, on trouve ce qui suit, si $h = h_c = c^{te}$:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{(y - y_A)}{h_c} ds = \frac{1}{h_c} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\left(f - \frac{4 f x^2}{l^2}\right) dx}{\sqrt{1 + 64 \frac{f^2 x^2}{l^4}}}$$

$$= \frac{l^2}{8 h_c} \left\{ \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{4 f} \right)^2 \right] \log \left(\sqrt{1 + \frac{16 f^2}{l^2}} + \frac{4 f}{l} \right) - \frac{l}{4 f} \sqrt{1 + \frac{16 f^2}{l^2}} \right\}$$

Pour les arcs très surbaissés, cette expression devient :

$$\frac{l^2}{8 h_c} \left\{ \left(1 + \frac{l^2}{32 f^2} \right) \left[\frac{8 f}{l} \left(1 - \frac{8 f^2}{l^2} \right) + \frac{128 f_3}{3 l^3} \right] - \frac{l}{4 f} \left(1 + \frac{8 f^2}{l^2} \right) \right\} = \sim \frac{2 f l}{3 h_c}.$$

$$\frac{1}{h_c} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} - x \right) ds = \frac{1}{h_c} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{l}{2} - x \right) dx}{\sqrt{1 + \frac{64 f^2 x^2}{l^4}}}$$

$$= \frac{l^3}{16 f h_c} \log \left(\sqrt{1 + \frac{16 f^2}{l^2}} + \frac{4 f}{l} \right)$$

$$\frac{1}{h_c} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} + x \right) ds = \frac{1}{h_c} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{l}{2} + x \right) dx}{\sqrt{1 + 64 \frac{f^2 x^2}{l^4}}}$$

$$= \frac{l^3}{16 f h_c} \log \left(\sqrt{1 + \frac{16 f^2}{l^2}} + \frac{4 f}{l} \right)^2$$

Pour les arcs très surbaissés, ces expressions tendent vers

$$\frac{l^3}{16 f h_c} \left[\frac{8 f}{l} \left(1 - \frac{8 f^2}{l^2} \right) + \frac{128 f_3}{3 l^3} \right] = \sim \frac{l^2}{2 h_c}.$$

C. Arc circulaire d'épaisseur et de largeur constantes

Dans ce cas h , Ω , I , r et r' sont invariables. Par rapport aux axes $y O x$ (fig. 6),

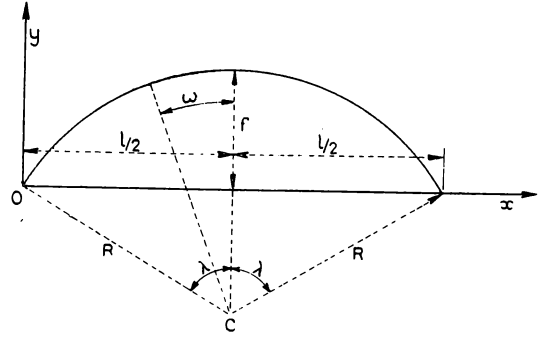


FIG. 6.

$$Y = \frac{\int_0^l \frac{y}{EI} ds}{\int_0^l \frac{ds}{EI}} = \frac{R \int_{-\lambda}^{\lambda} (\cos \omega - \cos \lambda) d\omega}{\int_{-\lambda}^{\lambda} d\omega}$$

$$Y = R \left(\frac{\sin \lambda}{\lambda} - \cos \lambda \right) = f - R \frac{\sin \lambda + \lambda}{\lambda}.$$

Pour le plein cintre, $\lambda = \frac{\pi}{2}$ et $R = f$

$$Y = \frac{2 R}{\pi} = 0,6366 f = \sim \frac{2}{3} f.$$

Transférons l'origine des coordonnées au centre élastique (fig. 7)

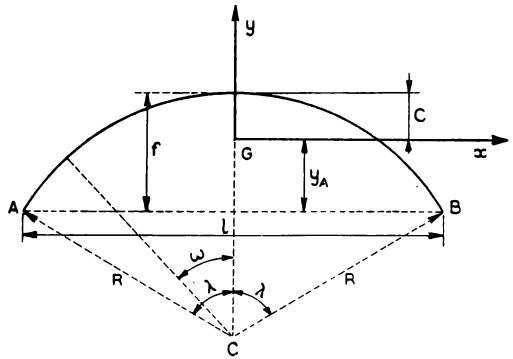


FIG. 7.

$$y_A = -Y,$$

$$x = -R \sin \omega, \quad y = R \left(\cos \omega - \frac{\sin \lambda}{\lambda} \right),$$

$$l = 2R \sin \lambda.$$

$$S = \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{EI}{ds} = \frac{2R\lambda}{EI}.$$

$$J_y = \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{R^2 \sin^2 \omega + r^2 \sin^2 \omega + r'^2 \cos^2 \omega}{EI} R d\omega.$$

$$J_y = \frac{R}{EI} [(R^2 + r^2 - r'^2)(\lambda - \sin \lambda \cos \lambda) + 2\lambda r'^2]$$

En négligeant les effets de N et de T,

$$J_y = \frac{R^3}{EI} (\lambda - \sin \lambda \cos \lambda).$$

Pour le plein cintre $\left(\lambda = \frac{\pi}{2}\right)$, $J_y = \frac{\pi R^3}{2EI}$

$$J_x = \frac{R}{EI} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left[\left(R \cos \omega - \frac{R \sin \lambda}{\lambda} \right)^2 + r^2 \cos^2 \omega + r'^2 \sin^2 \omega \right] d\omega.$$

$$J_x = \frac{R}{EI} \left[(R^2 + r^2 - r'^2)(\lambda + \sin \lambda \cos \lambda) + 2\lambda \left(\frac{R^2 \sin^2 \lambda}{\lambda^2} + r'^2 \right) - \frac{4R^2 \sin^2 \lambda}{\lambda} \right].$$

En négligeant les effets de N et de T,

$$J_x = \frac{R^3}{EI} \left(\lambda + \sin \lambda \cos \lambda - \frac{2 \sin^2 \lambda}{\lambda} \right).$$

Pour le plein cintre,

$$J_x = \frac{R^3}{EI} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \right).$$

$$\Delta_x = J_x + S y_A^2 = \frac{R^3}{EI} \left[\lambda + 2\lambda \cos^2 \lambda - 3 \sin \lambda \cos \lambda \right] + \frac{R}{EI} [(r^2 - r'^2)(\lambda + \sin \lambda \cos \lambda) + 2\lambda r'^2].$$

Le dernier terme disparaît lorsqu'on néglige les N et les T et, pour le plein cintre, $\Delta_x = \frac{\pi R^3}{2EI}$

$$K = \frac{-S y_A}{2} = \frac{R^2}{EI} (\sin \lambda - \lambda \cos \lambda);$$

pour le plein cintre $K = \frac{R^2}{EI}$

$$a = \frac{J_y}{I^2} + \frac{S}{4} = \frac{J_y}{4R^2 \sin^2 \lambda} + \frac{S}{4} = \frac{R}{4EI \sin^2 \lambda} (\lambda + 2\lambda \sin^2 \lambda - \sin \lambda \cos \lambda) + \frac{(r^2 - r'^2)(\lambda - \sin \lambda \cos \lambda) + 2\lambda r'^2}{4EIR \sin^2 \lambda}.$$

Le dernier terme disparaît lorsqu'on néglige les N et les T et, pour le plein cintre, $a = \frac{3\pi R}{8EI}$

$$b = \frac{J_y}{I^2} - \frac{S}{4} = \frac{R}{4EI \sin^2 \lambda} (\lambda - 2\lambda \sin^2 \lambda - \sin \lambda \cos \lambda) + \frac{(r^2 - r'^2)(\lambda - \sin \lambda \cos \lambda) + 2\lambda r'^2}{4EIR \sin^2 \lambda}.$$

Si l'on néglige les N et les T, pour le plein cintre, $b = -\frac{\pi R}{8EI}$

En ce qui concerne les effets des variations de température

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{(y - y_A) ds}{h} = \frac{R^2}{h} \int_{-\lambda}^{\lambda} (\cos \omega - \cos \lambda) d\omega = \frac{2R^2}{h} (\sin \lambda - \lambda \cos \lambda).$$

Pour le plein cintre : $\frac{2R^2}{h}$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right) ds}{h} = \frac{R^2}{h} \int_{-\lambda}^{\lambda} (\sin \lambda + \sin \omega) d\omega = \frac{2R^2}{h} \lambda \sin \lambda$$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{\left(\frac{l}{2} + x\right) ds}{h} = \frac{R^2}{h} \int_{-\lambda}^{\lambda} (\sin \lambda - \sin \omega) d\omega = \frac{2R^2}{h} \lambda \sin \lambda.$$

Pour le plein cintre : $\frac{\pi R^2}{h}$

D. Arc en parabole du quatrième degré obéissant à la relation

$$I \cos \omega = \frac{I_c}{1 + mx^2} \left(-\frac{l}{2} < x < \frac{l}{2} \right),$$

axes selon la figure 5

m peut être négatif (arcs encastres) ou positif (arcs articulés, semi-articulés ou même encastres).

On peut admettre

$$b = b_c = c^{\text{te}} \quad \text{et} \quad h \cos \omega = \frac{h_c}{1 + mx^2}$$

$$\text{d'où} \quad \Omega \cos \omega = \frac{\Omega_c}{1 + mx^2}$$

$$\text{et} \quad I \cos \omega = \sim \frac{I_c}{1 + mx^2}$$

lorsque l'arc est très surbaissé ($\cos \omega = \sim 1$).

Ou bien

$$h = h_c = c^{\text{to}} \quad \text{et} \quad b \cos \omega = \frac{b_c}{1 + mx^2}$$

d'où

$$\Omega \cos \omega = \frac{\Omega_c}{1 + mx^2}$$

et

$$I \cos \omega = \frac{I_c}{1 + mx^2}$$

indépendamment de l'importance de ω .

L'équation de la parabole du quatrième degré, rapportée aux axes de la figure 4 est :

$$y = f \left[1 - (1 - n) \left(\frac{2x}{l} - 1 \right)^2 - n \left(\frac{2x}{l} - 1 \right)^4 \right]$$

On dispose du paramètre n pour faire passer la parabole par deux points symétriques par rapport à la clef, autres que les retombées, par exemple pour faire coïncider autant que possible cette parabole avec l'axe réel de l'arc ⁽¹⁾.

Quant au paramètre m , il a pour valeur

$$\frac{4}{l^2} \left(\frac{I_c}{I_A \cos \varphi_A} - 1 \right) = \frac{4}{l^2} (i - 1),$$

en posant $i = \frac{I_c}{I_A \cos \varphi_A}$.

Il est négatif, nul ou positif selon que $I_A \cos \varphi_A$ est $>$, $=$ ou $<$ I_c , c'est-à-dire $i <$, $=$ ou $>$ 1. On a

$$Y = \frac{\left\{ f \int_A^B \left[1 - (1 - n) \left(\frac{2x}{l} - 1 \right)^2 - n \left(\frac{2x}{l} - 1 \right)^4 \right] \left[1 + m \left(x - \frac{l}{2} \right)^2 \right] dx \right.}{\int_A^B \left[1 + m \left(x - \frac{l}{2} \right)^2 \right] dx}$$

$$Y = f \frac{\frac{2l(5+n)}{15} + \frac{ml^3}{210} (7+3n)}{l + \frac{ml^3}{12}}$$

$$= f \frac{8(7+n) + 2i(7+2n)}{35(2+i)}.$$

Si $n=0$ (parabole du deuxième degré) et $i=1$ (cas B), on trouve $Y = \frac{2}{3} f$.

Transportons l'origine au centre élastique (figure 5) $y_A = -Y$.

L'équation de l'arc est :

$$y = y_A + f \left[1 - 4(1-n) \frac{x^2}{l^2} - 16n \frac{x^4}{l^4} \right].$$

Selon les hypothèses faites,

$$r = r_c = c^{\text{to}} \quad \text{et} \quad r' = r'_c = c^{\text{to}}$$

$$S = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{ds}{EI_c} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{(1+mx^2)dx}{EI_c}$$

$$= \frac{l}{EI_c} \left(1 + \frac{ml^2}{12} \right) = \frac{(2+i)l}{3EI_c}$$

$$J_y = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{(x^2 + r_c \sin^2 \omega + r'_c \cos^2 \omega)(1+mx^2)}{EI_c} dx.$$

Comme les effets des N et des T ne sont quelque peu sensibles que pour les arcs très surbaissés, eu égard d'autre part à la faible importance relative des termes correspondants, on admettra dans ce cas $\sin \omega = 0$ et $\cos \omega = 1$

$$J_y = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{(x^2 + r_c'^2)}{EI_c} (1+mx^2) dx$$

$$= \frac{l^3}{4EI_c} \left(\frac{1}{3} + \frac{ml^2}{20} \right) + \frac{r_c'^2 l}{EI_c} \left(1 + \frac{ml^2}{12} \right)$$

$$= \frac{l^3}{60EI_c} (2 + 3i) + \frac{r_c'^2 l}{3EI_c} (2 + i)$$

$$J_x = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{(y^2 + r_c^2)(1+mx^2)}{EI_c} dx$$

$$J_x = \frac{l}{EI_c} \left\{ [(y_a + f)^2 + r_c'^2] \left(1 + \frac{ml^2}{12} \right) \right.$$

$$- f(y_a + f) \left[\frac{2}{3} + \frac{4n}{15} + ml^2 \left(\frac{1}{10} + \frac{n}{35} \right) \right]$$

$$+ f^2 \left[\frac{1}{5} - \frac{4n}{35} + \frac{8n^2}{315} + ml^2 \left(\frac{1}{28} + \frac{2n}{63} + \frac{2n^2}{693} \right) \right] \left. \right\}$$

$$J_x = \frac{l}{EI_c} \left\{ [(y_a + f)^2 + r_c'^2] \frac{2+i}{3} \right.$$

$$- 2f(y_a + f) \left[\frac{2(7+4n) + i(21+6n)}{105} \right]$$

$$+ f^2 \left[\frac{2}{35} - \frac{76n}{315} + \frac{48n^2}{3465} + i \left(\frac{1}{7} + \frac{8n}{63} + \frac{8n^2}{693} \right) \right] \left. \right\}.$$

De là on calculera Δx , K, a et b .

Pour les effets des variations de température, en supposant $h \cos \omega = \frac{h_c}{1 + mx^2}$,

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{y - y_A}{h} ds = \frac{f}{h_c} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[1 - 4(1-n) \frac{x^2}{l^2} - 16n \frac{x^4}{l^4} \right] (1+mx^2) dx$$

$$= \frac{fl}{h_c} \left[\frac{2(5+n)}{15} + \frac{ml^2(3+7n)}{210} \right]$$

$$= \frac{2fl}{h_c} \frac{32 + i(3+7n)}{105}.$$

⁽¹⁾ Cf. M. RITTER, *Analytische Berechnung gelenkloser Brückengewölbe* (Denkschrift des E. T. H. zum hundertjährigen Bestehen der S. I. A., Zurich, 1937).

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)}{h} ds &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{l}{2} + x\right)}{h} ds \\
 &= \frac{1}{h_c} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} - x\right) (1 + mx^2) dx \\
 &= \frac{l^2}{2 h_c} \left(1 + \frac{ml^2}{12}\right) = \frac{l^2}{2 h_c} \frac{2 + i}{3} .
 \end{aligned}$$

14. ÉLÉMENTS DE RÉDUCTION DES FORCES EXTÉRIEURES

Par rapport à l'arc rendu isostatique considéré au paragraphe 5, les éléments de réduction de forces extérieures quelconques peuvent s'obtenir en superposant ceux de leurs composantes suivant les deux arcs coordonnés.

Nous pouvons donc nous borner à considérer les effets de ces composantes, en nous référant à

$$\begin{aligned}
 \mu &= \left| \frac{(x_B - \alpha)(x - x_A)}{x_B - x_A} \right. \\
 \nu &= \left| \frac{x_B - \alpha}{x_B - x_A} \sin \omega \right. \\
 \theta &= \left| \frac{x_B - \alpha}{x_B - x_A} \cos \omega \right.
 \end{aligned}$$

b) *Force parallèle à GX*, d'ordonnée β donnée, considérée comme positive dans le sens des y positifs.

$$\begin{aligned}
 \mu &= \left| (y - y_A) - \frac{(\beta - y_A)}{x_B - x_A} (x - x_A) \right. \\
 \nu &= \left| -\cos \omega - \frac{(\beta - y_A)}{x_B - x_A} \sin \omega \right. \\
 \theta &= \left| \sin \omega - \frac{(\beta - y_A)}{x_B - x_A} \cos \omega \right.
 \end{aligned}$$

On peut introduire ces expressions avec les limites d'intégration correspondantes x_A , α et x_B dans les formules (39) et (18) des arcs quelcon-

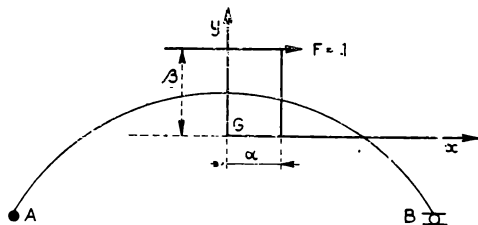


FIG. 9.

des forces mobiles unitaires, dont les points d'application ont une abscisse variable

$$\alpha \quad (x_A < \alpha < x_B).$$

Par superposition (sommation ou intégration),

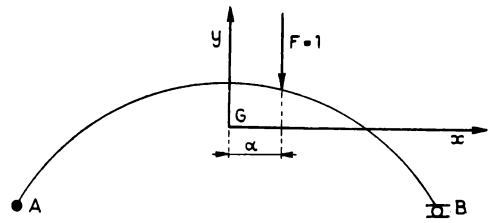


FIG. 8.

on peut en déduire les effets de cas de charges quelconques.

a) *Force parallèle à GY*, considérée comme positive dans le sens des y négatifs

$$\begin{aligned}
 \mu &= \left| \frac{(x_B - \alpha)(x - x_A)}{x_B - x_A} \right. \\
 \nu &= \left| \frac{x_B - \alpha}{x_B - x_A} \sin \omega \right. \\
 \theta &= \left| \frac{x_B - \alpha}{x_B - x_A} \cos \omega \right.
 \end{aligned}
 \quad (53)$$

Si la force est directement appliquée à l'arc, il faut donner à β la valeur correspondant à l'ordonnée de l'arc pour l'abscisse α

$$\begin{aligned}
 \mu &= \left| (y - y_A) - \frac{(\beta - y_A)}{x_B - x_A} (x - x_A) \right. \\
 \nu &= \left| -\cos \omega - \frac{(\beta - y_A)}{x_B - x_A} \sin \omega \right. \\
 \theta &= \left| \sin \omega - \frac{(\beta - y_A)}{x_B - x_A} \cos \omega \right.
 \end{aligned}
 \quad (54)$$

ques; on obtient ainsi les fonctions spécifiques d'influence. On se borne généralement à considérer les termes en μ . Les effets des termes en ν et θ sont généralement négligeables. On peut d'ailleurs s'en assurer dans chaque cas.

Pour les arcs symétriques, on opérera de même dans les formules (47) et (18), qui se simplifient comme suit :

$$(\mathcal{H}_A)_1 = \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\mu}{EI} (y - y_A) ds}{\Delta_X} \quad (55)$$

$$(\mathcal{M}_A)_1 = \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\mu}{EI} \left(\frac{l}{2} + x \right) ds}{l} \quad (\mathcal{M}_B)_1 = \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\mu}{EI} \left(\frac{l}{2} - x \right) ds}{l} \quad (56)$$

a) Cas de la force unitaire parallèle à l'axe GY.

$$(\mathcal{H}_A)_{Y_1} = \frac{\frac{l}{2} - \alpha \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{l}{2} + x \right) (y - y_A)}{EI} ds - \int_{\alpha}^{\frac{l}{2}} \frac{(x - \alpha) (y - y_A)}{EI} ds}{\Delta_X} \quad (57)$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{M}_A)_{Y_1} &= \frac{\frac{l}{2} - \alpha \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{l}{2} + x \right)^2}{EI} ds - \int_{\alpha}^{\frac{l}{2}} \frac{(x - \alpha) \left(\frac{l}{2} + x \right)}{EI} ds}{l} \\ (\mathcal{M}_B)_{Y_1} &= \frac{\frac{l}{2} - \alpha \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{l}{2} + x \right) \left(\frac{l}{2} - x \right)}{EI} ds - \int_{\alpha}^{\frac{l}{2}} \frac{(x - \alpha) \left(\frac{l}{2} - x \right)}{EI} ds}{l} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Pour le cas 13, A (arc parabolique de hauteur réduite constante), cela donne :

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_A)_{Y_1} &= \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{l} \right)}{\Delta_X} \\ &\left[\frac{l^3}{8 EI_c} \arctg \frac{4f}{l} - \frac{l^5}{128 f^2 EI_c} \left(\frac{4f}{l} - \arctg \frac{4f}{l} \right) \right] \\ &- \frac{l^4}{64 EI_c \Delta_X} \left(\log \sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2}} - \log \sqrt{1 + \frac{64f^2 \alpha^2}{l^4}} \right) \\ &+ \frac{\alpha l^2}{8 EI_c \Delta_X} \left(\arctg \frac{4f}{l} - \arctg \frac{8f\alpha}{l^2} \right) \\ &- \frac{\alpha l^4}{128 f^2 EI_c \Delta_X} \left(\frac{4f}{l} - \frac{8f\alpha}{l^2} - \arctg \frac{4f}{l} \right. \\ &\left. + \arctg \frac{8f\alpha}{l^2} \right) + \frac{l^5}{1024 f^3 EI_c \Delta_X} \\ &\left(\frac{8f^2}{l^2} - \frac{32f^2 \alpha^2}{l^4} - \log \sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2}} \right. \\ &\left. + \log \sqrt{1 + \frac{64f^2 \alpha^2}{l^4}} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_A)_{Y_1} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{l} \right) \frac{l^3}{16 f EI_c} \left[\arctg \frac{4f}{l} \right. \\ &+ \frac{l^2}{16 f^2} \left(\frac{4f}{l} - \arctg \frac{4f}{l} \right) \left. \right] + \frac{\alpha l^2}{16 f EI_c} \left(\arctg \frac{4f}{l} \right. \\ &- \arctg \frac{8f\alpha}{l^2} \left. \right) - \left(\frac{l}{2} - \alpha \right) \frac{l^3}{64 f^2 EI_c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\log \sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2}} - \log \sqrt{1 + \frac{64f^2 \alpha^2}{l^4}} \right) \\ &- \frac{l^5}{512 f^3 EI_c} \left(\frac{4f}{l} - \frac{8f\alpha}{l^2} - \arctg \frac{4f}{l} \right. \\ &\left. + \arctg \frac{8f\alpha}{l^2} \right) \\ (\mathcal{M}_B)_{Y_1} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{l} \right) \frac{l^3}{16 f EI_c} \left[\arctg \frac{4f}{l} \right. \\ &- \frac{l^2}{16 f^2} \left(\frac{4f}{l} - \arctg \frac{4f}{l} \right) \left. \right] \\ &+ \frac{\alpha l^2}{16 f EI_c} \left(\arctg \frac{4f}{l} - \arctg \frac{8f\alpha}{l^2} \right) \\ &- \left(\frac{l}{2} + \alpha \right) \frac{l^3}{64 f^2 EI_c} \left(\log \sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2}} \right. \\ &- \log \sqrt{1 + \frac{64f^2 \alpha^2}{l^4}} \left. \right) + \frac{l^5}{512 f^3 EI_c} \left(\frac{4f}{l} - \frac{8f\alpha}{l^2} \right. \\ &\left. - \arctg \frac{4f}{l} + \arctg \frac{8f\alpha}{l^2} \right). \end{aligned}$$

Ces expressions se simplifient beaucoup dans le cas des arcs très surbaissés et deviennent alors identiques à celles du cas 13, B, reproduites ci-après.

Pour le cas 13, B (arc parabolique à moment d'inertie réduit constant), on trouve :

$$(\mathcal{H}_A)_{Y_1} = \frac{15}{8 f^2 l \left[1 + \frac{15}{8} \left(\frac{r_c}{f} \right)^2 \right]} \left[\frac{5 fl^2}{48} - \frac{f\alpha^2}{2} + \frac{f\alpha^4}{3l^2} \right]$$

$$(\mathcal{M}_A)_{Y_1} = \frac{(3l + 2\alpha)(l^2 - 4\alpha^2)}{48 EI_c l}.$$

$$(\mathcal{M}_B)_{Y_1} = \frac{(3l - 2\alpha)(l^2 - 4\alpha^2)}{48 EI_c l}.$$

$$(\mathcal{H}_A)_{Y_1} = \frac{R^3}{EI\Delta_X} \left[\frac{\sin^2 \lambda - \sin^2 \xi}{2} + \xi \cos \lambda \sin \xi - \lambda \sin \lambda \cos \lambda - \cos^2 \lambda + \cos \lambda \cos \xi \right]$$

en appelant ξ l'angle ω qui définit la position de la charge mobile

$$\alpha = -R \sin \xi.$$

Pour le cas 13, C (*arc circulaire d'épaisseur constante*), on trouve :

Les formules (58) peuvent aussi s'écrire sous la forme

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{M}_A)_{Y_1} &= \frac{\frac{l}{2} - \alpha \int_{-\frac{l}{2}}^{\alpha} \frac{(\frac{l}{2} + x)^2}{EI} ds + \frac{l}{2} + \alpha \int_{\alpha}^{\frac{l}{2}} \frac{(\frac{l}{2} + x)(\frac{l}{2} - x)}{EI} ds}{l} \\ (\mathcal{M}_B)_{Y_1} &= \frac{\frac{l}{2} - \alpha \int_{-\frac{l}{2}}^{\alpha} \frac{(\frac{l}{2} + x)(\frac{l}{2} - x)}{EI} ds + \frac{l}{2} + \alpha \int_{\alpha}^{\frac{l}{2}} \frac{(\frac{l}{2} - x)^2}{EI} ds}{l} \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

On trouve pour l'arc circulaire d'épaisseur constante :

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{M}_A)_{Y_1} &= \frac{R^4}{EI l^2} \left\{ (\sin \lambda + \sin \xi) \left[(\lambda - \xi) \sin^2 \lambda + 2 \sin \lambda (\cos \lambda - \cos \xi) + \frac{\lambda - \xi}{2} - \frac{\sin 2\lambda - \sin 2\xi}{4} \right] \right. \\ &\quad \left. + (\sin \lambda - \sin \xi) \left[(\lambda + \xi) \sin^2 \lambda - \frac{\lambda + \xi}{2} + \frac{\sin 2\lambda + \sin 2\xi}{4} \right] \right\} \\ (\mathcal{M}_B)_{Y_1} &= \frac{R^4}{EI l^2} \left\{ (\sin \lambda + \sin \xi) \left[(\lambda - \xi) \sin^2 \lambda - \frac{\lambda - \xi}{2} + \frac{\sin 2\lambda - \sin 2\xi}{4} \right] \right. \\ &\quad \left. + (\sin \lambda - \sin \xi) \left[(\lambda + \xi) \sin^2 \lambda - 2 \sin \lambda (\cos \xi - \cos \lambda) + \frac{\lambda + \xi}{2} - \frac{\sin 2\lambda + \sin 2\xi}{4} \right] \right\} \end{aligned} \right\}$$

Dans le cas du plein cintre $\left(\lambda = \frac{\pi}{2}\right)$ ces formules deviennent :

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{H}_A)_{Y_1} &= \frac{1 - \sin^2 \xi}{4\pi} \\ (\mathcal{M}_A)_{Y_1} &= \frac{R^2}{4EI} \left[\pi - \xi - 2 \cos \xi + \frac{\pi}{2} \sin \xi - 2 \xi \sin \xi - \sin \xi \cos \xi \right] \\ (\mathcal{M}_B)_{Y_1} &= \frac{R^2}{4EI} \left[\pi + \xi - 2 \cos \xi - \frac{\pi}{2} \sin \xi - 2 \xi \sin \xi + \sin \xi \cos \xi \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &\left[\frac{4(1-n)}{3l^2} - \frac{m}{3} \right] + \left(\frac{l^4}{16} - \alpha^4 \right) \left(\frac{m}{4} - \frac{1-n}{l^2} \right) \\ &+ \alpha \left(\frac{l^5}{32} - \alpha^5 \right) \left[\frac{16n}{5l^4} + \frac{4(1-n)m}{5l^2} \right] \\ &- \left(\frac{l^6}{64} - \alpha^6 \right) \left[\frac{2(1-n)m}{3l^2} + \frac{8n}{3l^4} \right] \\ &+ \frac{16nm\alpha}{7l^4} \left(\frac{l^7}{128} - \alpha^7 \right) - \frac{2nm}{l^4} \left(\frac{l^8}{256} - \alpha^8 \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{M}_A)_{Y_1} &= \frac{1}{lEI_c} \left[\frac{l^2}{3} \left(\frac{l}{2} - \alpha \right) \left(1 + \frac{ml^2}{10} \right) - \frac{5l^3}{48} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\alpha l^2}{8} - \frac{\alpha^2 l}{4} - \frac{\alpha^3}{6} - m \left(\frac{9l^5}{640} - \frac{7\alpha l^4}{192} + \frac{\alpha^4 l}{24} + \frac{\alpha^5}{20} \right) \right] \\ (\mathcal{M}_B)_{Y_1} &= \frac{1}{lEI_c} \left[\frac{l^2}{6} \left(\frac{l}{2} - \alpha \right) \left(1 + \frac{ml^2}{20} \right) - \frac{l^3}{48} - \frac{\alpha l^2}{24} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha^2 l}{4} + \frac{\alpha^3}{6} - m \left(\frac{l^5}{640} - \frac{\alpha l^4}{192} + \frac{\alpha^4 l}{24} - \frac{\alpha^5}{20} \right) \right]. \end{aligned} \right\}$$

Dans le cas 13, D (*arc parabolique du quatrième degré obéissant à la relation*

$$I \cos \omega = \frac{I_c}{1 + mx^2},$$

on obtient :

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{H}_A)_{Y_1} &= \frac{f}{I_c \Delta_X} \left\{ l \left(\frac{l}{2} - \alpha \right) \left[\frac{1}{3} + \frac{n}{15} + ml^2 \left(\frac{1}{30} + \frac{n}{140} \right) \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2} - \alpha \right)^2 + \alpha \left(\frac{l^3}{8} - \alpha^3 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha^2 l}{4} + \frac{\alpha^3}{6} - m \left(\frac{l^5}{640} - \frac{\alpha l^4}{192} + \frac{\alpha^4 l}{24} - \frac{\alpha^5}{20} \right) \right\} \end{aligned} \right\}$$

b) Cas de la force unitaire parallèle à l'axe GX.

$$(\mathcal{H}_A)_{X_1} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\alpha} \frac{(y - y_A)^2}{EI \Delta_X} ds - \frac{\beta_0}{l \Delta_X} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{l}{2} + x\right)(y - y_A)}{EI} ds + \frac{\beta_0}{\Delta_X} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{(y - y_A)}{EI} ds \quad (60)$$

en posant $\beta_0 = \beta - y_A$ (hauteur de la ligne d'action de la force unitaire parallèle à l'axe GX au-dessus de la ligne des naissances)

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{M}_A)_{X_1} &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\alpha} \frac{(y - y_A)\left(\frac{l}{2} + x\right)}{EI} ds - \frac{\beta_0}{l^2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{l}{2} + x\right)^2}{EI} ds + \frac{\beta_0}{l} \int_{\alpha}^{\frac{l}{2}} \frac{\frac{l}{2} + x}{EI} ds \\ (\mathcal{M}_B)_{X_1} &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\alpha} \frac{(y - y_A)\left(\frac{l}{2} - x\right)}{EI} ds - \frac{\beta_0}{l^2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{EI} ds + \frac{\beta_0}{l} \int_{\alpha}^{\frac{l}{2}} \frac{\frac{l}{2} - x}{EI} ds \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Pour le cas 13, A (arc parabolique de hauteur réduite constante), on trouve :

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_A)_{X_1} &= \frac{fl^2}{8 EI_c \Delta_X} \left[\left(\operatorname{arctg} \frac{8 f \alpha}{l^2} + \operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} \right) \right. \\ &+ \frac{l^4}{256 f^4} \left(\frac{512 f^3 \alpha^3}{3 l^6} + \frac{64 f^3}{3 l^3} - \frac{8 f \alpha}{l^2} + \frac{4 f}{l} \right. \\ &+ \operatorname{arctg} \frac{8 f \alpha}{l^2} + \operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} \left. \right) - \left(\frac{8 f \alpha}{l^2} + \frac{4 f}{l} \right. \\ &\left. - \operatorname{arctg} \frac{8 f \alpha}{l^2} - \operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} \right) \frac{l^2}{8 f^2} \Big] \\ &- \frac{\beta_0 l^2}{8 EI_c \Delta_X} \left[\operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} - \frac{l^2}{16 f^2} \left(\frac{4 f}{l} - \operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} \right) \right] \\ &+ \frac{\beta_0 l^2}{8 EI_c \Delta_X} \left[\operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} - \operatorname{arctg} \frac{8 f \alpha}{l^2} - \frac{l^2}{16 f^2} \left(\frac{4 f}{l} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{8 f \alpha}{l^2} - \operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} + \operatorname{arctg} \frac{8 f \alpha}{l^2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_A)_{X_1} &= \frac{l^2}{16 EI_c} \left[\operatorname{arctg} \frac{8 f \alpha}{l} + \operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} \right. \\ &+ \frac{l}{4 f} \left(\log \sqrt{1 + \frac{64 f^2 \alpha^2}{l^4}} - \log \sqrt{1 + \frac{16 f^2}{l^2}} \right) \\ &- \frac{l^2}{16 f^2} \left(\frac{8 f \alpha}{l^2} + \frac{4 f}{l} - \operatorname{arctg} \frac{8 f \alpha}{l^2} - \operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} \right) \\ &- \frac{l^3}{64 f^3} \left(\frac{32 f^2 \alpha^2}{l^4} - \frac{8 f^2}{l^2} - \log \sqrt{1 + \frac{64 f^2 \alpha^2}{l^2}} \right. \\ &\left. + \log \sqrt{1 + \frac{16 f^2}{l^2}} \right) - \frac{\beta_0 l^2}{16 f EI_c} \left[\operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} \right. \\ &\left. + \frac{l^2}{16 f^2} \left(\frac{4 f}{l} - \operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} \right) \right] + \frac{\beta_0 l^2}{16 f EI_c} \left[\operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} \right. \\ &- \operatorname{arctg} \frac{8 f \alpha}{l^2} + \frac{l}{4 f} \left(\log \sqrt{1 + \frac{16 f^2}{l^2}} \right. \\ &\left. \left. - \log \sqrt{1 + \frac{64 f^2 \alpha^2}{l^4}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_B)_{X_1} &= \frac{l^2}{16 EI_c} \left[\operatorname{arctg} \frac{8 f \alpha}{l} + \operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} \right. \\ &- \frac{l}{4 f} \left(\log \sqrt{1 + \frac{64 f^2 \alpha^2}{l^4}} - \log \sqrt{1 + \frac{16 f^2}{l^2}} \right) \\ &- \frac{l^2}{16 f^2} \left(\frac{8 f \alpha}{l^2} + \frac{4 f}{l} - \operatorname{arctg} \frac{8 f \alpha}{l^2} - \operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} \right) \\ &+ \frac{l^3}{64 f^3} \left(\frac{32 f^2 \alpha^2}{l^4} - \frac{8 f^2}{l^2} - \log \sqrt{1 + \frac{64 f^2 \alpha^2}{l^2}} \right. \\ &\left. + \log \sqrt{1 + \frac{16 f^2}{l^2}} \right) \Big] \\ &- \frac{\beta_0 l^2}{16 f EI_c} \left[\operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} - \frac{l^2}{16 f^2} \left(\frac{4 f}{l} - \operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} \right) \right] \\ &+ \frac{\beta_0 l^2}{16 f EI_c} \left[\operatorname{arctg} \frac{4 f}{l} - \operatorname{arctg} \frac{8 f \alpha}{l^2} \right. \\ &\left. - \frac{l}{4 f} \left(\log \sqrt{1 + \frac{16 f^2}{l^2}} - \log \sqrt{1 + \frac{64 f^2 \alpha^2}{l^4}} \right) \right] \end{aligned}$$

Dans le cas 13, B (arc parabolique à moment d'inertie réduit constant), on trouve :

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_A)_{X_1} &= \frac{f^2}{EI_c \Delta_X} \left(\alpha - \frac{8 \alpha^3}{3 l^2} + \frac{16 \alpha^5}{5 l^4} + \frac{4 l}{15} \right) \\ &- \frac{\beta_0 f}{EI_c \Delta_X} \left(\alpha - \frac{4 \alpha^3}{3 l^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_A)_{X_1} &= \frac{f}{EI_c l} \left(\frac{l^2}{2} \alpha + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{2 \alpha^3}{3 l} - \frac{\alpha^4}{l^2} + \frac{5 l^2}{48} \right) \\ &- \frac{\beta_0 l}{3 EI_c} + \frac{\beta_0}{EI_c l} \left(\frac{3 l^2}{8} - \frac{l \alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_B)_{X_1} &= \frac{f}{EI_c l} \left(\frac{l^2}{2} \alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{2 \alpha^3}{3 l} + \frac{\alpha^4}{l^2} + \frac{11 l^2}{48} \right) \\ &- \frac{\beta_0 l}{6 EI_c} + \frac{\beta_0}{EI_c l} \left(\frac{l^2}{8} - \frac{l}{2} \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Dans le cas 13, C (*arc circulaire d'épaisseur constante*), on trouve :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{H}_A)_{X_1} &= \frac{R^3}{EI\Delta_X} \left[(\lambda - \xi) \left(\frac{1}{2} + \cos^2 \lambda \right) \right. \\
 &\quad \left. - 2 \cos \lambda (\sin \lambda - \sin \xi) + \frac{\sin 2\lambda - \sin 2\xi}{4} \right] \\
 &\quad + \frac{\beta_0 R^2}{EI\Delta_X} (\sin \xi - \xi \cos \lambda) \\
 (\mathcal{M}_A)_{X_1} &= \frac{R^2}{2EI \sin \lambda} \left[\frac{\cos 2\lambda - \cos 2\xi}{4} \right. \\
 &\quad \left. + \sin \lambda (\sin \lambda - \sin \xi) - \cos \lambda (\cos \lambda - \cos \xi) \right. \\
 &\quad \left. - (\lambda - \xi) \sin \lambda \cos \lambda \right] \\
 &\quad - \frac{\beta_0 R}{4EI \sin^2 \lambda} (2\lambda \sin^2 \lambda + \lambda - \sin \lambda \cos \lambda) \\
 &\quad + \frac{\beta_0 R}{2EI \sin \lambda} [(\xi + \lambda) \sin \lambda + \cos \xi - \cos \lambda] \\
 (\mathcal{M}_B)_{X_1} &= \frac{R^2}{2EI \sin \lambda} \left[\frac{\cos 2\xi - \cos 2\lambda}{4} + \sin \lambda (\sin \lambda \right. \\
 &\quad \left. - \sin \xi) + \cos \lambda (\cos \lambda - \cos \xi) - (\lambda - \xi) \sin \lambda \cos \lambda \right] \\
 &\quad - \frac{\beta_0 R}{4EI \sin^2 \lambda} (2\lambda \sin^2 \lambda - \lambda + \sin \lambda \cos \lambda) \\
 &\quad + \frac{\beta_0 R}{2EI \sin \lambda} [(\xi + \lambda) \sin \lambda - \cos \xi + \cos \lambda]
 \end{aligned}$$

Dans le cas du plein cintre ($\lambda = \frac{\pi}{2}$)

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{H}_A)_{X_1} &= \frac{R^3}{2EI\Delta_X} \left(\frac{\pi}{2} - \xi - \sin \xi \cos \xi \right) + \frac{\beta_0 R^2 \sin \xi}{EI\Delta_X} \\
 (\mathcal{M}_A)_{X_1} &= \frac{R^2}{2EI} \left(\frac{3}{4} - \frac{\cos 2\xi}{4} - \sin \xi \right) \\
 &\quad - \frac{\beta_0 R}{4EI} \left(\frac{\pi}{2} - 2\xi - 2 \cos \xi \right) \\
 (\mathcal{M}_B)_{X_1} &= \frac{R^2}{2EI} \left(\frac{5}{4} + \frac{\cos 2\xi}{4} - \sin \xi \right) \\
 &\quad - \frac{\beta_0 R}{4EI} \left(\frac{\pi}{2} - 2\xi + 2 \cos \xi \right)
 \end{aligned}$$

Dans le cas 13, D (*arc parabolique du quatrième degré obéissant à la relation*

$$I \cos \omega = \frac{I_c}{1 + mx^2},$$

on obtient :

$$(\mathcal{H}_A)_{X_1} = \frac{f^2}{EI_c \Delta_X} \left\{ \alpha + \frac{l}{2} + \left[\frac{ml^2 - 8(1-n)}{3} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{\alpha^3}{l^2} + \frac{l}{8} \right) + \frac{8}{5} [2(1-4n+n^2) - (1-n)ml^2] \\
 &\left(\frac{\alpha^5}{l^4} + \frac{l}{32} \right) + \frac{16}{7} [8(1-n) + (1-4n+n^2)ml^2] \\
 &\left(\frac{\alpha^7}{l^6} + \frac{l}{128} \right) + \frac{128}{9} n [2n + (1-n)ml^2] \\
 &\left(\frac{\alpha^9}{l^8} + \frac{l}{512} \right) + \frac{256}{11} n^2 ml^2 \left(\frac{\alpha^{11}}{l^{10}} + \frac{l}{2048} \right) \Big\} \\
 &- \frac{\beta_0 fl}{EI_c \Delta_X} \left(\frac{1}{3} + \frac{n}{15} + \frac{ml^2}{60} + \frac{nmml^2}{140} \right) \\
 &+ \frac{\beta_0 f}{EI_c \Delta_X} \left[\frac{l}{2} - \alpha - \frac{4+4n-ml^2}{3} \left(\frac{l}{8} - \frac{\alpha^3}{l^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4}{5} (4n + ml^2 - nmml^2) \left(\frac{l}{32} - \frac{\alpha^5}{l^4} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{16}{7} nmml^2 \left(\frac{l}{128} - \frac{\alpha^7}{l^6} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{M}_A)_{X_1} &= \frac{1}{EI_c l} \left\{ \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{l}{2} \right)^2 - \left(1 - n - \frac{ml^2}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left(\frac{2\alpha^3}{3l} + \frac{\alpha^4}{l^2} + \frac{l^2}{48} \right) - [4n + (1-n)ml^2] \\
 &\quad \left(\frac{2\alpha^5}{5l^3} + \frac{2\alpha^6}{3l^4} + \frac{l^2}{480} \right) - nmml^2 \left(\frac{8\alpha^7}{7l^5} + \frac{2\alpha^8}{l^6} + \frac{l^2}{896} \right) \Big\} \\
 &\quad + \frac{\beta_0 l}{6EI_c} \left(2 + \frac{ml^2}{5} \right) + \frac{\beta_0}{EI_c} \\
 &\quad \left(\frac{3l}{8} + \frac{7ml^3}{192} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{2l} - \frac{ml^2\alpha^3}{6l^2} - \frac{ml^2\alpha^4}{4l^3} \right) \\
 (\mathcal{M}_B)_{X_1} &= \frac{1}{EI_c l} \left\{ \frac{3l^2}{8} + \frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha^2}{2} - \left(1 - n - \frac{ml^2}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left(\frac{2\alpha^3}{3l} - \frac{\alpha^4}{l^2} + \frac{7l^2}{48} \right) - [4n - (1-n)ml^2] \\
 &\quad \left(\frac{2\alpha^5}{5l^3} - \frac{2\alpha^6}{3l^4} + \frac{11l^2}{480} \right) - nmml^2 \left(\frac{8\alpha^7}{7l^5} - \frac{2\alpha^8}{l^6} + \frac{15l^2}{896} \right) \Big\} \\
 &\quad + \frac{\beta_0 l}{12EI_c} \left(1 + \frac{ml^2}{10} \right) + \frac{\beta_0}{EI_c} \\
 &\quad \left[\frac{1}{2l} \left(\frac{l}{2} - \alpha \right)^2 + \frac{ml^3}{192} - \frac{ml^2\alpha^3}{6l^2} + \frac{ml^2\alpha^4}{4l^3} \right]
 \end{aligned}$$

III. Applications

15. ARC À DEUX ROTULES

La résolution de ce cas s'effectue en annulant M_A et M_B dans les formules des paragraphes 11 et 12.

16. ARC DOUBLEMENT ENCASTRÉ

La résolution de ce cas s'effectue en annulant

$\Delta\varphi_A$ et $\Delta\varphi_B$ dans les formules des paragraphes 11 et 12.

On élimine M_A et M_B de la formule (39) ou (47) au moyen des relations (43) ou (51). On obtient ainsi pour les arcs quelconques des formules très simples, en tenant compte des relations déjà indiquées au paragraphe 11 :

$$\frac{a_A K_B - b K_A}{a_A a_B - b^2} = -y_A; \quad \frac{b K_B - a_B K_A}{a_A a_B - b^2} = -y_B;$$

$\mathcal{H} =$

$$\begin{aligned} \frac{1}{J_X} \left\{ - \int_A^B \frac{\mu}{EI} [x(y_B - y_A) - y(x_B - x_A) + x_B y_A - x_A y_B] ds - \int_A^B \frac{\nu}{E\Omega} [(x_B - x_A) \cos \omega + (y_B - y_A) \sin \omega] ds \right. \\ \left. + \int_A^B \frac{\theta}{G\Omega'} \frac{[(x_B - x_A) \sin \omega - (y_B - y_A) \cos \omega] ds}{x_B - x_A} + y_B \mathcal{M}_A + y_A \mathcal{M}_B \right\} \\ \mathcal{H}_A = \frac{1}{J_X} \left[\int_A^B \frac{\mu y}{EI} ds - \int_A^B \frac{\nu \cos \omega}{E\Omega} ds + \int_A^B \frac{\theta}{G\Omega'} \sin \omega ds \right]; \end{aligned} \quad (63)$$

b) Pour l'effet d'une dénivellation relative des appuis parallèlement à l'axe GY : néant ;

c) Pour l'effet d'un déplacement relatif des appuis parallèlement à l'axe GX :

$$X_A = -\frac{\Delta l}{J_X} \quad (64)$$

d) Pour l'effet d'une variation de température non uniforme :

$$X_A = -\frac{\delta(t_s - t_i)}{J_X} \int_A^B \frac{y ds}{h} + \frac{\delta(t_s + t_i)(x_B - x_A)}{2 J_X}. \quad (65)$$

En cas de variation de température uniforme t , on écrit

$$\frac{t_s + t_i}{2} = t \quad \text{et} \quad t_s - t_i = 0.$$

En cas de symétrie, la formule totale de $\mathcal{H}_A$ devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A = \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\frac{\mu y}{EI} - \frac{\nu \cos \omega}{E\Omega} + \frac{\theta \sin \omega}{G\Omega'} \right] ds}{J_X} - \frac{\Delta l}{J_X} \\ - \frac{\delta(t_s - t_i)}{J_X} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{y ds}{h} + \frac{\delta(t_s + t_i)l}{2 J_X} \end{aligned} \quad (66)$$

Les inconnues hyperstatiques M_A et M_B sont données par les expressions (43) ou, en cas d'arc symétrique, par les formules (51), dans lesquelles on annule $\Delta\varphi_A$ et $\Delta\varphi_B$.

$$a_A a_B - b^2 = \frac{J_Y S}{(x_B - x_A)^2},$$

auxquelles s'ajoute

$$K_B y_A - K_A y_B = -\frac{J_Y (y_B - y_A)^2 + S (y_A x_B - y_B x_A)}{(x_B - x_A)^2}$$

L'expression de la réaction hyperstatique $\mathcal{H}_A$ s'écrit, en décomposant les divers effets :

a) Pour l'effet des forces extérieures :

Ces formules reproduisent les propriétés connues de l'arc doublement encastré. Par exemple, si la sollicitation se réduit à un déplacement relatif Δl :

$$\mathcal{H}_A = -\frac{\Delta l}{J_X}, \quad M_A = -y_A \mathcal{H}_A, \quad M_B = -y_B \mathcal{H}_A.$$

Si la sollicitation consiste uniquement en un déplacement relatif $\Delta\psi(x_B - x_A)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A = 0 \quad M_A = \frac{\Delta\psi(x_B - x_A)^2 (a_A - b)}{J_Y S} \\ = \frac{-\Delta\psi(x_B - x_A)x_A}{J_Y} \\ M_B = \frac{\Delta\psi(x_B - x_A)^2 (b - a_B)}{J_Y S} = \frac{-\Delta\psi(x_B - x_A)x_B}{J_Y} \end{aligned}$$

$$Y_A = \frac{-\Delta\psi(x_B - x_A)}{J_Y} = -Y_B$$

17. ARCS CONTINUS À APPUIS FIXES

Considérons une succession d'arcs continus (0, 1), (1, 2), ..., (n-1, n), (n, n+1), ..., etc., dont les retombées communes 1, 2, ..., n-1, n, n+1, ..., sont fixées par des rotules ne permettant d'autres mouvements que des rotations, qui sont égales pour les retombées communes. Si l'arc AB n'est pas chargé, on a :

$$\mathcal{H}_A = \frac{K_B M_A - K_A M_B}{\Delta_X}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_A &= -M_A \left(a_B - \frac{K_B^2}{\Delta_X} \right) + M_B \left(b - \frac{K_B K_A}{\Delta_X} \right) = -a_B' M_A + b' M_B \\ \Delta\varphi_B &= -M_A \left(b - \frac{K_B K_A}{\Delta_X} \right) + M_B \left(a_A - \frac{K_A^2}{\Delta_X} \right) = -b' M_A + a_A' M_B \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

On trouve aisément que :

$$\left. \begin{aligned} a_A' &= \frac{J_X J_Y + S (J_X x_A^2 + J_Y y_A^2)}{(x_B - x_A)^2 \Delta_X} \\ a_B' &= \frac{J_X J_Y + S (J_X x_B^2 + J_Y y_B^2)}{(x_B - x_A)^2 \Delta_X} \\ b' &= \frac{J_X J_Y + S (J_X x_A x_B + J_Y y_A y_B)}{(x_B - x_A)^2 \Delta_X} \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Si l'arc est symétrique :

$$\left. \begin{aligned} a_A' &= a_B' = a' = \frac{J_Y}{l^2} + \frac{S}{4} \frac{J_X}{J_X + S y_A^2} \\ b' &= \frac{J_Y}{l^2} - \frac{S}{4} \frac{J_X}{J_X + S y_A^2} \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Au nœud n , en cas de sollicitation isothermique, si aucun des deux arcs adjacents n'est chargé,

$$\Delta \varphi_n = -b_n' M_{n-1} + a_A' M_n = -a_{B_{n+1}}' M_n + b_{n+1}' M_{n+1},$$

d'où :

$$b_n' M_{n-1} - (a_A' + a_{B_{n+1}}') M_n + b_{n+1}' M_{n+1} = 0. \quad (70)$$

Cette équation des trois moments des arcs continus à rotules non chargés établit la propriété des foyers fixes de ces arcs, que l'on détermine de proche en proche à partir des arcs extrêmes.

Si A est une rotule simple (encastrement nul $\varepsilon_A = 0$) :

$$M_A = 0, \quad \frac{M_A}{M_B} = 0, \quad \frac{\Delta \varphi_A}{\Delta \varphi_B} = \frac{b'}{a_A'}.$$

Si A est un encastrement parfait ($\varepsilon_A = 1$) :

$$\Delta \varphi_A = 0, \quad \frac{\Delta \varphi_A}{\Delta \varphi_B} = 0, \quad \frac{M_A}{M_B} = \frac{b'}{a_B'}.$$

Si A est un encastrement partiel, de degré ε_A ($0 < \varepsilon_A < 1$), on écrit :

$$\Delta \varphi_A = a_B' \frac{(1 - \varepsilon_A)}{\varepsilon_A} M_A, \quad \frac{M_A}{M_B} = \varepsilon_A \frac{b'}{a_B'}.$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\mathcal{M}_B + K_B \mathcal{H}_A - M_A \left[\frac{a_B}{\varepsilon_A} - \frac{K_B^2 (1 - \varepsilon_A)}{\varepsilon_A \Delta_X} \right] + b M_B + \Delta \psi + \frac{\delta (t_s - t_i)}{x_B - x_A} \int_A^B \frac{(x_B - x) ds}{h} \\ &\quad - \frac{\delta (t_s + t_i)}{2 (x_B - x_A)} (y_B - y_A) \\ 0 &= \mathcal{M}_A + K_A \mathcal{H}_A - b \mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B \left[\frac{a_A}{\varepsilon_B} - \frac{K_A^2 (1 - \varepsilon_B)}{\varepsilon_B \Delta_X} \right] + \Delta \psi + \frac{\delta (t_s - t_i)}{x_B - x_A} \int_A^B \frac{(x_A - x) ds}{h} \\ &\quad - \frac{\delta (t_s + t_i)}{2 (x_B - x_A)} (y_B - y_A) \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

En posant :

$$\frac{a_B}{\varepsilon_A} - \frac{K_B^2 (1 - \varepsilon_A)}{\varepsilon_A \Delta_X} = a''_B \quad \text{et} \quad \frac{a_A}{\varepsilon_B} - \frac{K_A^2 (1 - \varepsilon_B)}{\varepsilon_B \Delta_X} = a''_A,$$

$$\frac{\Delta \varphi_A}{\Delta \varphi_B} = (1 - \varepsilon_A) \frac{a_B' b'}{a_A' a_B' - \varepsilon_A b'^2}.$$

Ces éléments concernent les foyers de gauche. Pour les foyers de droite, il faut permuter les indices A et B et changer de signe pour l'expression de

$$\Delta \varphi_B = -a_A' \frac{(1 - \varepsilon_B)}{\varepsilon_B} M_B$$

On peut donc définir pour les foyers de gauche les facteurs et les relations suivants :

$$\frac{M_A}{M_B} = -k_A, \quad \frac{\Delta \varphi_A}{\Delta \varphi_B} = -k_A', \quad k_A = -\varepsilon_A \frac{b'}{a_B'},$$

$$k_A' = -(1 - \varepsilon_A) \frac{a_B' b'}{a_A' a_B' - \varepsilon_A b'^2} = -\frac{b' + a_B' k_A}{a_A' + b' k_A}.$$

$$k_A = -\frac{b' + a_A' k_A'}{a_B' + b' k_A'},$$

$$\varepsilon_A = -k_A \frac{a_B'}{b'} = \frac{a_B' b' + a_A' k_A'}{b' a_B' + b' k_A'},$$

Pour les foyers de droite, les mêmes facteurs et relations s'obtiennent en permutant les indices A et B.

La relation (70) permet d'établir facilement la relation de récurrence pour la détermination des foyers de proche en proche.

Pour les foyers de gauche :

$$-b_n' k_{A_n} - (a_A' + a_{B_{n+1}}') - \frac{b_{n+1}'}{k_{A_{n+1}}} = 0 \quad (71)$$

Pour les foyers de droite :

$$-\frac{b_n'}{k_{B_n}} - (a_A' + a_{B_{n+1}}') - b_{n+1}' k_{B_{n+1}} = 0 \quad (72)$$

Pour chaque arc, les facteurs focaux sont indépendants de la sollicitation et les liaisons sont équivalentes à des degrés d'encastrement invariables ε_A et ε_B .

Les relations (42) s'écrivent alors :

on obtient :

$$\left. \begin{aligned} M_A &= - \frac{a_A'' \mathcal{N}_B + b \mathcal{N}_A}{a_A'' a_B'' - b^2} + \frac{a_A'' K_B - b K_A}{a_A'' a_B'' - b^2} \mathcal{H}_A + \frac{(a_A'' - b) \Delta \psi}{a_A'' a_B'' - b^2} \\ &+ \frac{\delta(t_s - t_i) a_B'' \int_A^B \frac{(x_B - x) ds}{h} - b \int_A^B \frac{(x_A - x) ds}{h}}{a_A'' a_B'' - b^2} - \frac{\delta(t_s + t_i)(y_B - y_A)}{2(x_B - x_A)} \frac{(a_A'' - b)}{a_A'' a_B'' - b^2} \\ M_B &= - \frac{b \mathcal{N}_B + a_B'' \mathcal{N}_A}{a_A'' a_B'' - b^2} + \frac{b K_B - a_B'' K_A}{a_A'' a_B'' - b^2} \mathcal{H}_A + \frac{\Delta \psi (b - a_B'')}{a_A'' a_B'' - b^2} \\ &+ \frac{\delta(t_s - t_i) b \int_A^B \frac{(x_B - x) ds}{h} - a_B'' \int_A^B \frac{(x_A - x) ds}{h}}{a_A'' a_B'' - b^2} - \frac{\delta(t_s + t_i)(y_B - y_A)}{2(x_B - x_A)} \frac{(b - a_B'')}{(a_A'' a_B'' - b^2)} \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Remplaçant M_A et M_B par ces expressions dans la formule (39), on obtient le résultat suivant. On pose

$$\Delta_X'' = \Delta_X + \frac{2 b K_B K_A - a_A'' K_B^2 - a_B'' K_A^2}{a_A'' a_B'' - b^2} \quad (75)$$

Pour l'effet des forces extérieures :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}_A &= \frac{1}{\Delta_X''} \left\{ - \frac{\int_A^B \frac{\mu}{EI} [x(y_B - y_A) - y(x_B - x_A) + x_B y_A - x_A y_B] ds}{x_B - x_A} - \frac{\int_A^B \frac{\nu}{EQ} [(x_B - x_A) \cos \omega + (y_B - y_A) \sin \omega] ds}{x_B - x_A} \right. \\ &+ \left. \frac{\int_A^B \frac{\eta}{G\Omega'} [(x_B - x_A) \sin \omega - (y_B - y_A) \cos \omega] ds}{x_B - x_A} - \mathcal{N}_A \frac{b K_B - a_B'' K_A}{a_A'' a_B'' - b^2} - \mathcal{N}_B \frac{a_A'' K_B - b K_A}{a_A'' a_B'' - b^2} \right\} \end{aligned} \quad (76)$$

Pour l'effet d'une dénivellation relative des appuis parallèlement à l'axe GY :

$$\mathcal{H}_A = \frac{\Delta \psi}{\Delta_X''} \left\{ - (y_B - y_A) + \frac{K_A (a_B'' - b) + K_B (a_A'' - b)}{a_A'' a_B'' - b^2} \right\} \quad (77)$$

Pour l'effet d'un déplacement relatif des appuis parallèlement à l'axe GX :

$$\mathcal{H}_A = - \frac{\Delta l}{\Delta_X''} \quad (78)$$

Pour l'effet d'une variation de température non uniforme :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}_A &= \frac{\delta(t_s - t_i)}{(x_B - x_A) \Delta_X''} \left\{ (y_B - y_A) \int_A^B \frac{x ds}{h} - (x_B - x_A) \int_A^B \frac{y ds}{h} + (x_B y_A - x_A y_B) \int_A^B \frac{ds}{h} \right. \\ &+ K_B \frac{a_A'' \int_A^B \frac{x_B - x}{h} ds - b \int_A^B \frac{x_A - x}{h} ds}{a_A'' a_B'' - b^2} - K_A \frac{b \int_A^B \frac{x_B - x}{h} ds - a_B'' \int_A^B \frac{x_A - x}{h} ds}{a_A'' a_B'' - b^2} \left. \right\} \\ &+ \frac{\delta(t_s + t_i)}{2(x_B - x_A) \Delta_X''} \left\{ (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 - \frac{[K_A (a_B'' - b) + K_B (a_A'' - b)](y_B - y_A)}{a_A'' a_B'' - b^2} \right\} \end{aligned} \quad (79)$$

Ces formules se simplifient considérablement on a lorsque l'arc est symétrique

$$\Delta_X'' = \Delta_X - \frac{2 K^2}{a'' + b} \quad (80)$$

$$(y_B - y_A = 0, -x_B = x_A = \frac{l}{2}, K_B = -K_A = K)$$

Si de plus $\varepsilon_A = \varepsilon_B = \varepsilon$

$$a_A'' = a_B'' = \frac{a}{\varepsilon} - \frac{K^2(1 - \varepsilon)}{\varepsilon \Delta_X} , \quad \mathcal{H}_A = \frac{1}{\Delta_X''} \left\{ \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\frac{\mu (y - y_A)}{EI} - \frac{\nu \cos \omega}{EQ} + \frac{\eta}{G\Omega'} \sin \omega ds \right] - \frac{K}{a'' - b} (\mathcal{N}_A + \mathcal{N}_B) - \Delta l \right.$$

$$- \delta(t_s - t_i) \left\{ \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{(y - y_A) ds}{h} - \frac{K}{a'' - b} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{ds}{h} \right. \\ \left. + \frac{\delta(t_s + t_i) l}{2} \right\} \quad (81)$$

Les formules (74) permettent alors de calculer M_A et M_B .

18. ARCS CONTINUS À APPUIS ÉLASTIQUES MOBILES

Pour ces systèmes, les équations des paragraphes 11 et 12 s'appliquent dans toute leur généralité. Il se recommande généralement de prendre comme inconnues les mouvements de translation et de rotation des extrémités des arcs et des barres droites. Ces mouvements ne sont pas indépendants, mais dépendent les uns des autres en vertu des liaisons. Il est aisé d'établir des relations géométriques entre ces déplacements, ce qui réduit le nombre des inconnues. Les équations d'équilibre de rotation et de translation des nœuds, compte tenu des liaisons, permettent de déterminer les inconnues et de calculer la sollicitation. Le plus expédient est généralement de procéder par une méthode de décomposition et de superposition, consistant à étudier successivement les effets des déplacements élémentaires séparés, les autres mouvements étant empêchés.

Plusieurs étudiants ⁽¹⁾ ont appliqué les formules du paragraphe 12 (arcs symétriques) pour le calcul complet, comme travail de fin d'études, d'un pont à trois arcs continus encastrés aux retombées extrêmes et supporté par deux piles élastiques. Les résultats ont été entièrement satisfaisants.

Les équations peuvent être mises sous une forme qui constitue une généralisation de celle du paragraphe 16.

En éliminant M_A et M_B de la formule (39) ou (47) au moyen des relations (43) ou (51), on obtient :

a) Pour les arcs quelconques,

$$\mathcal{H}_A = \frac{1}{J_X} \left\{ \int_A^B \left[\frac{\mu y}{EI} - \frac{\nu \cos \omega}{E\Omega} + \frac{\theta}{G\Omega'} \sin \omega \right] ds \right. \\ \left. + y_A \Delta \varphi_A - y_B \Delta \varphi_B - \Delta l \right. \\ \left. - \delta(t_s - t_i) \int_A^B \frac{y ds}{h} + \frac{\delta(t_s + t_i)(x_B - x_A)}{2} \right\} \quad (82)$$

b) Pour les arcs symétriques,

$$\mathcal{H}_A = \frac{1}{J_X} \left\{ \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\frac{\mu y}{EI} - \frac{\nu \cos \omega}{E\Omega} + \frac{\theta}{G\Omega'} \sin \omega \right] ds \right. \\ \left. + y_A (\Delta \varphi_A - \Delta \varphi_B) - \Delta l \right. \\ \left. - \delta(t_s - t_i) \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{y ds}{h} + \frac{\delta(t_s + t_i) l}{2} \right\} \quad (83)$$

Au moyen de ces formules et des relations (43) ou (51), on peut écrire en tous les nœuds les équations d'équilibre de translation et de rotation en fonction des inconnues $\Delta \varphi$ et $\Delta \psi$ (ou Δl).

§ 19. APPLICATION AUX BARRES DROITES

Les arcs à liaisons élastiques sont souvent associés à des barres droites (piles, tirants, etc.).

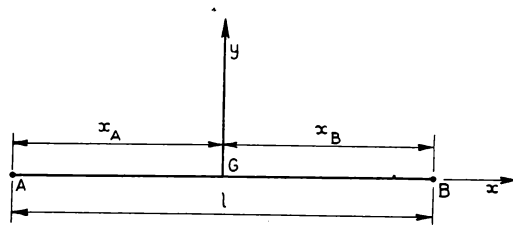


FIG. 10.

On peut aisément déduire des équations des arcs celles des barres droites dans toute leur généralité. L'axe des x est nécessairement confondu avec l'axe de la barre ; le centre élastique G est sur l'axe de la barre et tel que

$$\int_{x_A}^{x_B} \frac{x dx}{EI} = 0.$$

$$S = \int_A^B \frac{dx}{EI}, \quad J_Y = \int_A^B \frac{x^2 + r'^2}{EI} dx,$$

$$J_X = \int_A^B \frac{r'^2 dx}{EI} = \int_A^B \frac{dx}{E\Omega},$$

$$J_{XY} = 0, \quad \Delta_X = J_X = \int_A^B \frac{dx}{E\Omega}, \quad K_A = K_B = 0,$$

$$a_A = \frac{J_Y + x_A^2 S}{l^2}, \quad a_B = \frac{J_Y + x_B^2 S}{l^2}, \\ b = \frac{J_Y + x_A x_B S}{l^2}.$$

$$\mathcal{M}_A = \frac{- \int_A^B \frac{\mu}{EI} (x_A - x) dx + \int_A^B \frac{\theta}{G\Omega'} dx}{l}$$

$$\mathcal{M}_B = \frac{\int_A^B \frac{\mu}{EI} (x_B - x) dx - \int_A^B \frac{\theta}{G\Omega'} dx}{l}$$

⁽¹⁾ La théorie exposée est enseignée depuis 1927, en se bornant au cas des arcs symétriques pour la simplicité de l'exposé et des applications.

$$\mathcal{H}_A = - \frac{\int_A^B \frac{\nu}{E\Omega} dx + \Delta l - \delta t l}{\int_A^B \frac{dx}{E\Omega}}$$

les deux extrémités étant fixes.

$$X_A = \nu_A + \mathcal{H}_A, \quad Y_A = \theta_A + \frac{M_B - M_A}{l},$$

$$X_B = \mathcal{H}_A, \quad Y_B = -\theta_B - \frac{M_B - M_A}{l}$$

$$\Delta \varphi_A = -\mathcal{N}_B + \Delta \psi - a_B M_A + b M_B + \frac{\delta(t_s - t_i)}{l} \int_A^B \frac{(x_B - x) dx}{h}$$

$$\Delta \varphi_B = \mathcal{N}_A + \Delta \psi - b M_A + a_A M_B + \frac{\delta(t_s - t_i)}{l} \int_A^B \frac{(x_A - x) dx}{h}$$

$$M_A = l^2 \left[\frac{-a_A(\Delta \varphi_A - \Delta \psi) + b(\Delta \varphi_B - \Delta \psi)}{J_Y S} - \frac{a_A \mathcal{N}_B + b \mathcal{N}_A}{J_Y S} + \frac{\delta(t_s - t_i)}{l} \frac{a_A \int_A^B \frac{x_B - x}{h} dx - b \int_A^B \frac{x_A - x}{h} dx}{J_Y S} \right]$$

$$M_B = l^2 \left[\frac{-b(\Delta \varphi_A - \Delta \psi) + a_B(\Delta \varphi_B - \Delta \psi)}{J_Y S} - \frac{b \mathcal{N}_B + a_B \mathcal{N}_A}{J_Y S} + \frac{\delta(t_s - t_i)}{l} \frac{b \int_A^B \frac{x_B - x}{h} dx - a_B \int_A^B \frac{x_A - x}{h} dx}{J_Y S} \right]$$

Si la poutre est symétrique :

$$x_B = -x_A = \frac{l}{2},$$

$$a_A = a_B = \frac{J_Y}{l^2} + \frac{S}{4} = a, \quad b = \frac{J_Y}{l^2} - \frac{S}{4}.$$

$$\mathcal{N}_A = \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\mu}{EI} \left(\frac{l}{2} + x \right) dx + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\mu}{G\Omega} dx}{l}$$

$$\mathcal{N}_B = \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\mu}{EI} \left(\frac{l}{2} - x \right) dx - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\mu}{G\Omega} dx}{l}.$$

Si la poutre est prismatique : $I = c^4$, $\Omega = c^2$.

$$S = \frac{l}{EI}, \quad J_Y = \frac{l^3}{12 EI} + \frac{r'^2 l}{EI}, \quad J_X = \frac{l}{E\Omega} = \Delta_X.$$

$$a = \frac{l}{3 EI} + \frac{r'^2}{l EI}, \quad b = -\frac{l}{6 EI} + \frac{r'^2}{l EI}.$$

$$\mathcal{H}_A = - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\nu dx}{l} - E\Omega \left(\frac{\Delta l}{l} - \delta t \right)$$

$$\Delta \varphi_A = -\mathcal{N}_B + \Delta \psi - \frac{l}{EI} \left(\frac{M_A}{3} + \frac{M_B}{6} \right) - \frac{r'^2}{l EI} (M_A - M_B) + \frac{\delta(t_s - t_i)}{2 h} l.$$

$$\Delta \varphi_B = \mathcal{N}_A + \Delta \psi + \frac{l}{EI} \left(\frac{M_A}{6} + \frac{M_B}{3} \right) - \frac{r'^2}{l EI} (M_A - M_B) - \frac{\delta(t_s - t_i) l}{2 h}.$$

$$M_A = \frac{EI}{l^2 + r'^2} \left\{ -\left(\frac{l}{3} + \frac{r'^2}{l} \right) (\Delta \varphi_A - \Delta \psi) + \left(-\frac{l}{6} + \frac{r'^2}{l} \right) (\Delta \varphi_B - \Delta \psi) - \left(\frac{l}{3} + \frac{r'^2}{l} \right) \mathcal{N}_B - \left(\frac{l}{6} + \frac{r'^2}{l} \right) \mathcal{N}_A + \frac{\delta(t_s - t_i) l}{2 h} \left(\frac{l}{6} + \frac{2 r'^2}{l} \right) \right\}$$

$$M_B = \frac{EI}{l^2 + r'^2} \left\{ -\left(-\frac{l}{6} + \frac{r'^2}{l} \right) (\Delta \varphi_A - \Delta \psi) + \left(\frac{l}{3} + \frac{r'^2}{l} \right) (\Delta \varphi_B - \Delta \psi) - \left(-\frac{l}{6} + \frac{r'^2}{l} \right) \mathcal{N}_B - \left(\frac{l}{3} + \frac{r'^2}{l} \right) \mathcal{N}_A + \frac{\delta(t_s - t_i) l}{2 h} \left(\frac{l}{6} + \frac{2 r'^2}{l} \right) \right\}$$

On néglige généralement les efforts tranchants ($r' = 0$)

$$M_A = \frac{EI}{l} \left[-4(\Delta \varphi_A - \Delta \psi) - 2(\Delta \varphi_B - \Delta \psi) - 4\mathcal{N}_B + 2\mathcal{N}_A + \frac{\delta(t_s - t_i) l}{h} \right],$$

$$M_B = \frac{EI}{l} \left[2(\Delta \varphi_A - \Delta \psi) + 4(\Delta \varphi_B - \Delta \psi) + 2\mathcal{N}_B - 4\mathcal{N}_A + \frac{\delta(t_s - t_i) l}{h} \right].$$

Il est aisé de combiner ces équations des barres droites avec celles des arcs dans les systèmes continus élastiques.

Pour les effets des charges extérieures :

$$\mathcal{M}_A = \frac{1}{EI} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mu \left(\frac{l}{2} + x \right) dx$$

$$\mathcal{M}_B = \frac{1}{EI} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mu \left(\frac{l}{2} - x \right) dx .$$

Pour une charge unitaire normale à la poutre :

$$(\mathcal{M}_A)_Y = \frac{(3l + 2\alpha)(l^2 - 4\alpha^2)}{48EI} ,$$

$$(\mathcal{M}_B)_Y = \frac{(3l - 2\alpha)(l^2 - 4\alpha^2)}{48EI}$$

(voir § 14, cas 13, B).

Pour une charge unitaire parallèle à la poutre :

$$(\mathcal{M}_A)_X = \frac{\beta l}{2EI} \left(\frac{1}{12} - \frac{\alpha}{l} - \frac{\alpha^2}{l^2} \right) ,$$

$$(\mathcal{M}_B)_X = \frac{\beta l}{2EI} \left(-\frac{1}{12} - \frac{\alpha}{l} + \frac{\alpha^2}{l^2} \right)$$

20. CONCLUSIONS

La théorie entièrement générale établie sans artifices à partir des formules de Bresse est d'application immédiate à tous les arcs plans dont les conditions d'extrémité varient de l'encastrement nul (rotule) à l'encastrement parfait, ce qui

englobe tous les types d'arcs continus. Elle considère aussi tous les cas de sollicitation pratiques.

Les applications les plus classiques ont été seules envisagées, les autres ne sont pas exclues. Par exemple, pour l'arc à deux appuis hétérogènes, rotule en A et encastrement parfait en B, il suffit d'introduire dans les équations générales $M_A = 0$ et $\Delta\varphi_B = 0$, ce qui permet de séparer immédiatement les inconnues $\mathcal{H}_A$ et M_B .

Pour le cas des arcs à rotules intermédiaires entre les retombées (deux ou une), la méthode est théoriquement applicable si l'on se rapporte à des semi-articulations des types Mesnager ou Freyssinet. Les valeurs de I , Ω et Ω' ne sont nulles en aucun point de l'arc ; la méthode est applicable par intégration approximative aux différences finies. Sous réserve du soin minutieux et de la précision du calcul, la méthode tiendrait compte automatiquement de l'imperfection des articulations. Ce procédé s'appliquerait même en principe à un arc à trois semi-articulations.

Cependant, pour les arcs isostatiques on utilisera naturellement les méthodes ordinaires de la statique et, pour les arcs à rotules intermédiaires, on envisagera en règle générale des rotules parfaites, c'est-à-dire des valeurs de M toujours nulles en certains points.

Ces conditions introduisent dans les arcs des discontinuités (théoriquement infinies) incompatibles avec le système de base, de telle sorte qu'il ne se recommande pas d'appliquer à ces cas la méthode exposée.