

UNIVERSITÉ DE LIÈGE

COURS DE CONSTRUCTIONS DU GENIE CIVIL

N° 3

La fibre moyenne des grandes voûtes hyperstatiques

PAR FERNAND CAMPUS,
INGÉNIEUR DES CONSTRUCTIONS CIVILES ET ÉLECTRICIEN,
(A. I. BR., A. I. LG. ET A. I. E. M.)
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

(Mémoire présenté au 1^{er} Congrès International du Béton et du Béton armé. Liège 1930.)

Editions " LA TECHNIQUE DES TRAVAUX
196, Rue Grétry
LIEGE

La fibre moyenne des grandes voûtes hyperstatiques

Par FERNAND CAMPUS,

INGÉNIEUR DES CONSTRUCTIONS CIVILES ET ÉLECTRICIEN,

(A. I. BR., A. I. LG. ET A. I. E. M.)

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

LE problème de la conformation des grandes voûtes est un des plus intéressants de la science des constructions. Depuis plus d'un siècle, il a été l'objet des études de nombreux ingénieurs de tous pays, qui ont apporté à la question des contributions essentielles, tant par leurs recherches théoriques que par la réalisation d'un grand nombre de voûtes remarquables. Ils ont abouti à la conception générale que la fibre moyenne des grandes voûtes doit être tracée suivant le funiculaire des poids morts, qui constitue, selon l'observation de M. C. Gay (*Ponts en maçonnerie*, éd. Baillièrre, 1924), une figure rationnelle d'équilibre.

La théorie de l'élasticité apprend que la ligne des pressions des charges fixes n'est pas confondue avec la fibre moyenne des grandes voûtes hyperstatiques lorsque cette fibre moyenne suit exactement le funiculaire des poids morts. La ligne des pressions s'écarte de la fibre moyenne par suite du raccourcissement élastique de l'arc sous l'effet des charges, lequel produit une diminution de la poussée. Tout raccourcissement de l'arc hyperstatique dû à d'autres causes externes ou internes (abaissement de température, retrait, surcharges), ou tout mouvement relatif concordant des appuis (recul), amplifie ces écarts de la

ligne des pressions par rapport à la fibre moyenne et les flexions correspondantes de la voûte.

Dans les arcs bi-articulés, la ligne des pressions des charges fixes est au-dessus de la fibre moyenne dans toute son étendue, l'écart est maximum dans la section de clef. Dans le cas d'une fibre moyenne parabolique relative à une charge fixe uniformément répartie suivant les abscisses, et en supposant que la voûte ait un moment d'inertie réduit constant I_c et une section réduite constante Ω_c , l'excentricité dans la section de clef est kf , f étant la flèche et k désignant l'expression

$$\frac{5}{8} \frac{I_c}{\Omega_c f^2} = \frac{1,25}{8} \left(\frac{e_c}{f} \right)^2$$

e_c étant l'épaisseur du joint de clef.

Dans les voûtes inarticulées, la ligne des pressions est en dessous de la fibre moyenne entre les retombées et les reins et au-dessus entre les reins et la clef; les écarts sont maximaux aux retombées et à la clef. Ainsi, dans le cas de l'arc parabolique surbaissé à charge fixe uniformément répartie suivant les abscisses, ayant un moment d'inertie réduit et une section réduite constants, l'écart vers le haut à la clef est $\frac{k'f}{3}$ et l'écart normal aux retombées, vers l'intrados, est $\frac{2}{3} k' f \cos \varphi$,

k' ayant comme expression :

$$\frac{45}{4} \frac{I_c}{\Omega_c f^2} = \frac{7,5}{8} \left(\frac{e_c}{f} \right)^2 = 6 k$$

Lorsque la fibre moyenne n'est pas confondue avec le funiculaire des poids morts, la forme de la ligne des pressions et la loi de ses écarts par rapport à la fibre moyenne varient d'une manière qui dépend des écarts de la fibre moyenne par rapport au funiculaire des poids morts. On peut poser le problème de déterminer une forme de fibre moyenne réalisant une certaine loi des écarts de la ligne des pressions par rapport à cette fibre moyenne, c'est-à-dire une certaine loi des moments de flexion. Mais cet énoncé est trop général ; les équations permettent seulement de remplir certaines conditions en nombre égal à celui des inconnues hyperstatiques de l'arc.

Ces conditions étant satisfaites, la forme de la ligne des pressions et la loi des moments sont complètement déterminées et ne peuvent donc réaliser complètement des formes ou lois choisies d'avance, mais seulement en être plus ou moins voisines. Généralement on s'impose les moments ou les excentricités dans la section de clef de la voûte bi-articulée et, en outre les mêmes éléments dans les joints de retombée de la voûte inarticulée. Le choix de ces quantités est effectué après une étude sommaire, en tenant compte des effets thermiques, du retrait, des surcharges, etc. On peut ainsi, d'après les écarts qui résultent des parties fixes, variables et réversibles de la sollicitation, déterminer les valeurs optima des éléments dus à la partie fixe. En particulier, on peut faire passer la ligne des pressions par les centres des sections de clef et de naissances, c'est-à-dire annuler les moments fléchissants dans ces sections. Comme ce cas se prête bien à un exposé théorique, nous l'examinerons tout d'abord.

C'est sous cette même forme que M. Ritter, professeur à l'École polytechnique fédérale de Zurich, a résolu le problème dans une communication faite au Congrès international des Ponts et Charpentes à Zurich en 1926. Je rappelle que sa méthode conduit à employer comme fibre moyenne le funiculaire du système de forces constitué par les charges fixes et un ensemble de forces verticales virtuelles, dirigées en sens inverse de la pesanteur. La position et la grandeur de ces charges virtuelles sont déterminées, en

vue de résoudre les conditions du problème, par l'emploi des lignes d'influence des moments centraux des sections de clef et de naissances (le mémoire de M. le professeur Ritter envisage uniquement les voûtes inarticulées). Il faut faire choix tout d'abord d'une forme d'arc et en tracer les lignes d'influence ; la solution s'obtient par approximations successives.

Un point délicat de la résolution générale du problème provient, selon la remarque faite précédemment, de ce que l'on ne peut fixer la position de la ligne des pressions qu'en trois points, quel que soit le système d'arc, y compris l'arc isostatique à trois rotules. Si l'on peut de la sorte annuler ou régler l'écart de la ligne des pressions et de la fibre moyennée dans trois sections, c'est-à-dire améliorer la sollicitation de ces sections, en même temps on détermine la loi des écarts dans toutes les autres sections et l'on ne sait à priori s'il ne s'y produit pas des aggravations relatives ou même absolues. M. Ritter ne manque pas de faire cette réserve et d'indiquer qu'elle peut éventuellement obliger à faire des remaniements.

La méthode exposée ci-après permet d'apprécier d'avance l'allure générale des excentricités et même de la régler. Elle est directe et n'exige pas l'étude préalable d'un arc. Son point de départ est le tracé du funiculaire des charges fixes, figure invariable et complètement déterminée. Elle établit ensuite une loi de variation relative des excentricités dans toute l'étendue de la voûte, qui doit satisfaire à certaines conditions simples à réaliser. Par combinaison, la fibre moyenne se trouve complètement déterminée et l'arc fait ensuite l'objet du calcul usuel de vérification.

La méthode (1) dérive d'une conception ingénieuse du professeur E. Timochenko, exposée dans son ouvrage français intitulé *Calcul des arcs élastiques* (1922). Elle consiste à résoudre le problème des voûtes hyperstatiques dont la fibre moyenne est confondue avec le funiculaire des poids morts ou en est voisine, en prenant comme système isostatique de base l'arc à trois rotules. Nous simplifierons toutefois les résultats de M. Timochenko en ne considérant que les effets des moments fléchissants et des efforts normaux,

(1) Les principes de cette méthode ont fait l'objet d'une communication à l'Académie des Sciences de Paris le 20 janvier 1930 (Compte-rendus du 27 janvier 1930).

non ceux des efforts tranchants et de la courbure. Les tables de M. Timochenko établissent d'ailleurs que ces derniers effets sont négligeables dans les constructions usuelles.

I. ARC A DEUX ROTULES.

a) La fibre moyenne est confondue avec le funiculaire des poids morts : $y = y_p$.

Les éléments de réduction de l'arc tri-articulé de référence sont :

$$M_3 = 0, \quad T_3 = 0, \quad N_3 = -\frac{H_p}{\cos \omega}$$

Le raccourcissement élastique de l'arc est :

$$\Delta l = \int_0^l \frac{M_3}{EI} y ds - \int_0^l \frac{N_3}{E\Omega} \cos \omega ds = -\frac{H_p}{E} \int_0^l \frac{ds}{\Omega}$$

Dans l'arc hyperstatique bi-articulé, ce raccourcissement est empêché, il en résulte une poussée négative

$$H' = \frac{H_p \int_0^l \frac{ds}{\Omega}}{\int_0^l \left(\frac{y^2}{I} + \frac{\cos^2 \omega}{\Omega} \right) ds} \neq 0$$

La poussée de l'arc à deux rotules est donc $H = H_p - H'$. En un point quelconque de la fibre moyenne, le moment fléchissant est

$$M = (H_p - H) y = H' y.$$

Ce moment est maximum dans la section de clef et y vaut $M_c = H' f$.

L'excentricité de la ligne des pressions à la clef est $\eta_c = \frac{H' f}{H} = \frac{H'}{H_p - H'} f$.

b) La fibre moyenne est très voisine du funiculaire : $y = y_p + \Delta y$ (fig. 1)

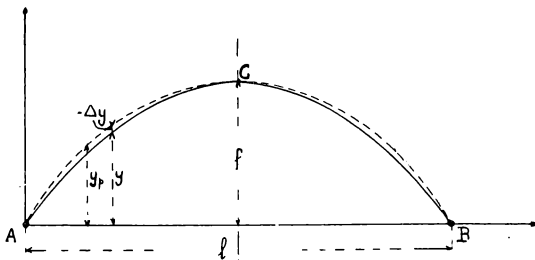


Fig. 1.

Δy étant par hypothèse très faible, nous admettrons comme le professeur Timochenko que les deux courbes ont même inclinaison. Les éléments de réduction de l'arc à trois rotules de référence sont :

$$M_3 = -H_p \Delta y, \quad N_3 = \frac{H_p}{\cos \omega}, \quad T_3 = 0$$

Le raccourcissement élastique de l'arc est :

$$\Delta l = \int_0^l \frac{M_3}{EI} y ds - \int_0^l \frac{N_3}{E\Omega} ds = -H_p \left[\int_0^l \frac{y \Delta y ds}{EI} + \int_0^l \frac{ds}{E\Omega} \right]$$

Il en résulte pour l'arc à deux rotules une poussée négative :

$$H' = H_p \frac{\int_0^l \frac{ds}{\Omega} + \int_0^l \frac{y \Delta y}{I} ds}{\int_0^l \left[\frac{y^2}{I} + \frac{\cos^2 \omega}{\Omega} \right] ds}$$

Donc $H = H_p - H'$ $M = H' y - H_p \Delta y$

Dans la section de clef, $\Delta y = 0$ et $M_c = H' f$. L'excentricité de la ligne des pressions y est

$$\eta_c = \frac{H'}{H_p - H'} f$$

Alors que dans le cas a), H' est toujours différent de 0, dans le cas b), on peut annuler H' et par conséquent l'excentricité η_c . Il faut et il suffit que

$$\int_0^l \frac{ds}{\Omega} = - \int_0^l \frac{y \Delta y}{I} ds \quad (I)$$

Il faut pour cela que Δy soit constamment négatif. La fibre moyenne qui passe par A, B et C doit, dans les intervalles, être partout en dessous du funiculaire des poids morts.

Si $\Omega \cos \omega = \Omega_c =$ constante et $I \cos \omega = I_c =$ constante, l'équation ci-dessus s'écrit :

$$- \int_0^l y \Delta y dx = \frac{I_c}{\Omega_c} l$$

Si cette condition est réalisée, $H' = 0$, $H = H_p$ et $M = -H \Delta y$.

La ligne des pressions est confondue avec le funiculaire des poids morts et les excentricités par rapport à la fibre moyenne sont égales aux Δy .

La solution du problème consiste à déterminer une courbe de Δy satisfaisant à la condition (I) et aux autres circonstances du problème.

Elle renseigne directement sur la sollicitation de l'arc dans toute son étendue. La courbe des Δy rapportée aux abscisses de l'arc doit avoir des ordonnées nulles aux naissances et à la clef. Si l'arc est symétrique, elle doit être symétrique par rapport à la verticale passant par la clef et présenter une tangente horizontale en ce point. On peut dans ce cas se borner à opérer sur un demi-arc. Il résulte de ces conditions géométriques que

Δy passe par un maximum dans chaque demi-arc entre la clef et la retombée.

On choisira une courbe des Δy telle que ce maximum se produise dans une section d'épaisseur convenable pour que l'excentricité relative reste modérée.

Observons que :

$$\int_0^l \frac{y \Delta y}{I} ds = \int_0^l \frac{(y_p + \Delta y) \Delta y}{I} ds = \omega \int_0^l \frac{y_p \Delta y}{I} ds$$

en négligeant l'intégrale $\int_0^l \frac{\Delta y^2}{I} ds$.

Pratiquement, on choisira une courbe $\Delta y = K f(x)$, la fonction $f(x)$ satisfaisant aux conditions géométriques énoncées ci-dessus et le paramètre K étant déterminé par l'équation

$$-K \int_0^l \frac{f(x) y_p ds}{I} = \int_0^l \frac{ds}{\Omega}$$

La solution s'obtient par le calcul numérique si les intégrales précédentes sont solubles, ou bien par la méthode de Simpson ou encore par intégration graphique.

II. ARC INARTICULÉ.

a) La fibre moyenne est confondue avec la funiculaire des poids morts : $y = y_p$.

Les éléments de réduction de l'arc tri-articulé de référence sont encore :

$$M_3 = 0 \quad T_3 = 0 \quad N_3 = \frac{H_p}{\cos \omega}$$

L'arc est supposé symétrique et l'origine des axes est au centre élastique.

L'allongement et la rotation d'un demi-arc sont :

$$\Delta l = -\frac{H_p}{E} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{ds}{\Omega}, \quad \Delta \varphi = -\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_3}{EI} ds = 0$$

Dans l'arc inarticulé, il en résulte une poussée négative

$$H' = H_p \frac{\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{ds}{\Omega}}{\int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{y^2}{I} + \frac{\cos^2 \omega}{\Omega} \right) ds} \neq 0$$

qui agit suivant l'horizontale du centre élastique, et un moment $M' = 0$ agissant en ce même centre. Il en résulte que $H = H_p - H'$, $M = H' y$.

A la clef : $M_c = H' c$; aux naissances :

$M_n = H' y_n = -H' (f - c)$. Donc les excentricités correspondantes sont :

$$\eta_c = \frac{H' c}{H_p - H'}, \quad \eta_n = -\frac{H' (f - c)}{\frac{H_p}{\cos \varphi_n} - H' \cos \varphi_n}$$

b) La fibre moyenne est très voisine du funiculaire : $y = y_p + \Delta y$ (fig. 2)

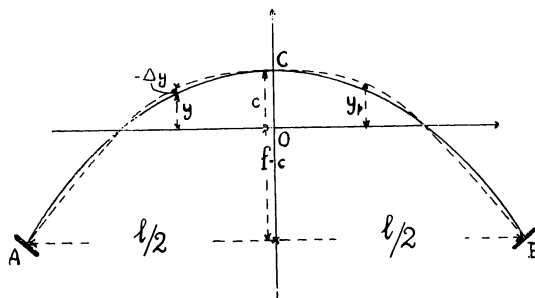


Fig. 2.

$$M_3 = -H_p \Delta y, \quad N_3 = \frac{H_p}{\cos \omega}, \quad T_3 = 0.$$

Le raccourcissement et la rotation d'un demi-arc sont :

$$\Delta l = -H_p \left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y \Delta y}{EI} ds + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{ds}{E\Omega} \right],$$

$$\Delta \varphi = H_p \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\Delta y}{EI} ds$$

Dans l'arc inarticulé, il en résulte une poussée négative.

$$H' = H_p \frac{\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{ds}{\Omega} + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y \Delta y}{I} ds}{\int_0^{\frac{l}{2}} \left[\frac{y^2}{I} + \frac{\cos^2 \omega}{\Omega} \right] ds},$$

qui agit suivant l'horizontale du centre élastique, et un moment

$$M' = H_p \frac{\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\Delta y}{I} ds}{\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{ds}{I}}$$

qui agit en ce centre. Il en résulte que

$$H = H_p - H',$$

$$M = M_3 + M' + H' y = -H \Delta y + H' y_p + M'$$

A la clef $M_c = M' + H' c, \quad \eta_c = \frac{M' + H' c}{H_p - H'}$

Aux retombées

$$M_n = M' - H' (f - c), \quad \eta_n = \frac{M' - H' (f - c)}{\frac{H_p}{\cos \varphi_n} - H' \cos \varphi_n}$$

Pour que $\eta_c = 0$ et $\eta_n = 0$, il faut que $H' c + M' = 0$ et $H' (f - c) - M' = 0$ d'où $M' = 0$ et $H' = 0$, c'est-à-dire :

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{ds}{\Omega} + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y \Delta y}{I} ds = 0 \text{ (I) et } \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\Delta y}{I} ds = 0 \text{ (II)}$$

Si $\Omega \cos \omega = \Omega_c = \text{constante}$ et $I \cos \omega = I_c = \text{constante}$,

$$\int_0^{\frac{l}{2}} y \Delta y dx = -\frac{I_c}{2\Omega_c} l \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{l}{2}} \Delta y dx = 0.$$

D'après cela, pour que η_c et η_n soient nuls, il faut que la fibre moyenne soit sous le funiculaire dans la région des y positifs, c'est-à-dire entre la clef et les reins, et au-dessus du funiculaire dans la région des y négatifs c'est-à-dire entre les reins et les retombées. Donc la courbe des Δy pour un demi-arc comporte deux ondes situées de part et d'autre de l'axe des abscisses et ayant mêmes aires. Elle coupe l'axe des abscisses au droit de la retombée, au droit de la clef et en un point intermédiaire. Par raison de symétrie, elle doit avoir une tangente horizontale au droit de la clef lorsque l'arc est symétrique. Elle présente deux maxima en valeur absolue de part et d'autre des reins ; ils donnent la mesure des moments de flexion maxima dans l'arc. En effet, comme $H' = 0$ et $M' = 0$, $M = -H \Delta y = -H_p \Delta y$.

C'est d'ailleurs évident, puisque le funiculaire du poids mort coïncide avec la ligne des pressions de l'arc inarticulé. En outre, en vertu de la condition (II), le centre élastique de l'arc est invariable. Nous écrivons la condition (I') sous la forme pratique

$$-\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y_p \Delta y ds}{I} = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{ds}{\Omega}, \text{ en négligeant } \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\Delta y^2}{I} ds$$

D'une manière générale, pour tracer une courbe des Δy satisfaisant aux diverses conditions énoncées, on peut opérer comme suit (fig 3).

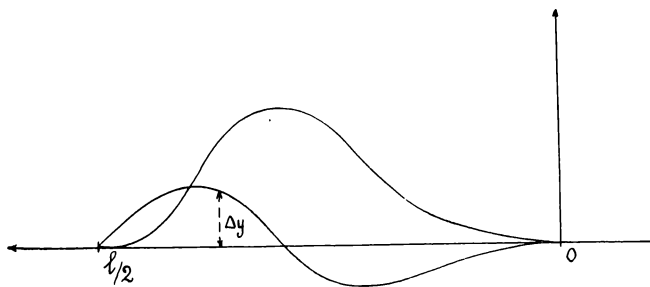


Fig. 3.

Traçons dans l'étendue d'un demi-arc une courbe tangente à l'axe des abscisses au droit de la retombée et de la clef, le point au droit de la clef étant en outre un point d'inflexion. Cette courbe présente intermédiairement un maximum et deux points d'inflexion. Traçons en la courbe

dérivée ; elle satisfait aux diverses conditions géométriques exigées de la ligne des Δy . Il suffit de multiplier ses ordonnées par un paramètre indéterminé en facteur pour permettre de satisfaire à la condition

$$-\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y_p \Delta y}{I} ds = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{ds}{\Omega}$$

qui fixe simplement l'échelle de la courbe des Δy , comme il a été indiqué pour l'arc à deux rotules.

* * *

A titre d'exemple, nous appliquerons les principes précédents aux arcs à funiculaire parabolique, c'est-à-dire supportant une charge verticale uniformément répartie suivant les abscisses. Pour simplifier les calculs, nous admettrons en outre que $\Omega \cos \omega = \Omega_c = \text{constante}$ et $I \cos \omega = I_c = \text{constante}$.

Cette application est destinée surtout à préciser d'une manière simple les conditions d'utilisation de la théorie et de comparer les ordres de grandeur des excentricités dans divers cas, elle permet ainsi d'apprécier les effets de la méthode.

D'après les définitions données plus haut, les courbes de Δy ont la forme d'élastiques de pièces droites. On peut choisir comme telles, ainsi qu'on le sait, des fonctions trigonométriques, mais il est plus simple généralement, au point de vue du calcul intégral, de choisir des fonctions algébriques représentant des élastiques simples.

Dans le cas de l'arc à deux rotules, l'origine des coordonnées étant placée à l'une des retombées :

$$y_p = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$$

Nous adopterons pour Δy la fonction $\Delta y = \frac{K}{l^2} x \left(\frac{l}{2} - x \right)^2$, qui représente l'élastique de la pièce droite constituée par la projection horizontale du demi-arc, encadrée au droit de la clef et appuyée au droit de la retombée, sollicitée par un couple extérieur en ce dernier point.

$$\int_0^{\frac{l}{2}} y_p \Delta y dx = \frac{4f}{l^4} k \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 (l-x) \left(\frac{l}{2} - x \right)^2 dx = \frac{Kfl^2}{320}$$

Il faut que $\frac{K fl^2}{320} = -\frac{I_c l}{2\Omega_c}$

donc $K = -160 \frac{I_c}{\Omega_c fl} = \frac{1280}{15} \frac{kf}{l} = 85,41 \frac{kf}{l}$

en posant $k = \frac{15}{8} \frac{I_c}{\Omega_c f^2}$

$$\text{Donc : } \Delta y = -85,41 \frac{kf}{l^3} x \left(\frac{l}{2} - x \right)^2$$

L'excentricité maximum est $\Delta y_{\max} = -1,58 kf$,
pour $x = \frac{l}{6}$.

Lorsque la fibre moyenne est confondue avec le funiculaire, l'écart de la ligne des pressions à la clef est $\tau_c = kf$, donc $\Delta y_{\max} = -1,58 \tau_c$.

$$\text{L'excentricité réelle maximum est } \tau_{\max} \equiv \Delta y_{\max} \\ \cos \omega = -1,58 \tau_c \frac{3l}{\sqrt{9l^2 + 64f^2}}$$

Elle est majorée, mais elle se produit en un endroit où l'arc est plus épais. D'autre part, le retrait, les abaissements de température et autres effets concordants améliorent la situation lorsque τ_{\max} est négatif et l'aggravent au contraire lorsqu'elle se produit positivement à la clef.

Pour étudier l'arc inarticulé, nous placerons l'origine au centre élastique et nous nous bornerons encore à considérer un demi-arc. L'équation du funiculaire est $y = f \left(\frac{1}{3} - \frac{4x^2}{l^2} \right)$. Pour Δy nous adopterons la fonction

$$\Delta y = \frac{Kx^2}{l^3} (x - \xi) \left(\frac{l}{2} - x \right)$$

K et ξ sont deux paramètres indéterminés. Cette fonction représente l'élastique d'une poutre droite de portée égale à $\frac{l}{2}$, encastree au droit de la clef et simplement appuyée à l'autre bout, portant une charge verticale uniformément répartie et soumise en outre à un couple extérieur négatif agissant à l'extrémité simplement appuyée. On détermine ξ par la condition (II)

$$\int_0^{\frac{l}{2}} x^2 (x - \xi) \left(\frac{l}{2} - x \right) dx = 0$$

on trouve $\xi = 0,30 l$. La condition (I') détermine la valeur de K :

$$\int_0^{\frac{l}{2}} y_p \Delta y dx = \frac{Kf}{l^3} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 (x - 0,30 l) \\ \left(\frac{l}{2} - x \right) \left(\frac{1}{3} - \frac{4x^2}{l^2} \right) dx = -\frac{0,4 K f l^2}{3360}$$

Il faut que

$$\frac{-0,4 K f l^2}{3360} = -\frac{I_c l}{2 \Omega_c}, \text{ donc}$$

$$K = \frac{1680}{0,4} \frac{I_c}{\Omega_c f l} = \frac{16800}{45} k' \frac{f}{l} = 373,33 k' \frac{f}{l}$$

$$\text{en posant } k' = \frac{45}{4} \frac{I_c}{\Omega_c f^2}$$

$$\text{Donc } \Delta y = 373,33 k' \frac{f}{l^4} x^2 (x - 0,30 l) \left(\frac{l}{2} - x \right)$$

Les écarts maxima sont les suivants :

$$\text{pour } x = 0,4225 l, \quad \Delta y_{\max} = 0,631 k' f \\ \text{pour } x = 0,1775 l, \quad \Delta y_{\max} = -0,464 k' f.$$

Lorsque la fibre moyenne est confondue avec le funiculaire, on sait que

$$\tau_c = 0,333 k' f \text{ et } \tau_m = -0,667 k' f \cos \varphi$$

Si l'on tient compte de la variation des épaisseurs et de l'inclinaison, mais surtout des effets thermiques et autres qui tendent à faire remonter la ligne des pressions à la clef et à l'abaisser aux retombées, on constate qu'il y a avantage à adopter la fibre moyenne modifiée plutôt que de la confondre avec le funiculaire et que les excentricités restent de l'ordre de grandeur courant. Mais elles sont telles qu'elles peuvent compenser les effets des diminutions quelconques de poussée de l'arc au lieu de s'y ajouter.

* * *

Cependant, il n'est pas permis d'affirmer que la fibre moyenne la plus avantageuse soit celle qui fait passer la ligne des pressions par les centres des sections de clef et de retombées. Si l'on faisait abstraction des effets des variations de température, du retrait, des surcharges, du recul des appuis, etc., la fibre moyenne la plus favorable serait intermédiaire entre le funiculaire des points morts et la fibre moyenne établie dans le paragraphe précédent. On pourrait même, ainsi que nous le montrerons ci-après, définir dans chaque cas concret des formes optima. D'après l'observation finale du paragraphe précédent, on conçoit que la conséquence des effets thermiques, du retrait, des surcharges, des reculs d'appuis, etc., est que la fibre moyenne optimum s'éloigne du funiculaire des poids morts pour se rapprocher de la forme établie dans le paragraphe précédent. Eventuellement elle pourrait même s'écarter encore davantage du funiculaire des poids morts si les effets secondaires étaient suffisamment importants. Pour que la méthode reste applicable, il faut toutefois que les écarts restent relativement faibles.

Dans un cas concret, on apprécierait l'importance des effets secondaires au moyen d'une étude sommaire. D'après cela, on choisirait à priori les valeurs des moments de flexion dans les sections de clef et des retombées sous l'effet des charges

fixes. Nous allons montrer que la forme correspondante de la fibre moyenne se déduirait très simplement de celle du paragraphe précédent.

ARC BI-ARTICULÉ.

Nous nous imposons $\eta_c = \alpha k f$, $k f$ étant l'excentricité à la clef réalisée lorsque la fibre moyenne est confondue avec le funiculaire des poids morts. α est < 1 et éventuellement même < 0 .

Donc

$$M_c = H' f = (H_p - H') \alpha k f,$$

d'où $H' = H_p \frac{\alpha k}{1 + \alpha k}$ et $H = \frac{H_p}{1 + \alpha k}$.

Or :

$$H' = H_p \frac{\int_0^l \frac{ds}{\Omega} + \int_0^l \frac{y \Delta y}{I} ds}{\int_0^l \left(\frac{y^2}{I} + \frac{\cos^2 \omega}{\Omega} \right) ds}$$

Donc

$$\frac{\alpha k}{1 + \alpha k} = \frac{\int_0^l \frac{ds}{\Omega} + \int_0^l \frac{y_p \Delta y}{I} ds}{\int_0^l \left(\frac{y^2}{I} + \frac{\cos^2 \omega}{\Omega} \right) ds}$$

en substituant comme précédemment

$$\int_0^l \frac{y_p \Delta y}{I} ds \text{ à } \int_0^l \frac{y \Delta y}{I} ds$$

Cette équation détermine une relation à laquelle doit satisfaire la courbe de Δy , c'est-à-dire que $\int_0^l \frac{y_p \Delta y}{I} ds$ doit, comme dans le paragraphe précédent, être égale à une valeur bien déterminée, qui dépend du cas concret, mais qui est différente de celle qui correspond à $\alpha = 0$. On voit que l'on peut conserver la même loi de variation de Δy , mais en modifiant proportionnellement les valeurs absolues.

Reprenons l'exemple du funiculaire parabolique traité précédemment en admettant

Dans le cas de l'arc parabolique

$$\frac{\eta}{e} = \frac{k f l}{(1 + \alpha k) e_c} \left[\frac{4 \alpha (1 + \alpha k) x l (l - x) - 85,41 x \left(\frac{l}{2} - x \right)^2 (1 - \alpha)}{l^4 + 16 f^2 (l - 2x)^2} \right]$$

On peut calculer le maximum de $\frac{\eta}{e}$ par une équation algébrique, qu'il n'est pas difficile de résoudre lorsque l'on y remplace α par sa valeur

$I_c = I \cos \omega = \text{constante}$ et $\Omega_c = \Omega \cos \omega = \text{constante}$.

On a

$$\frac{\alpha k}{1 + \alpha k} = \frac{\frac{8}{15} k f^2 l + \int_0^l y_p \Delta y dx}{\frac{8}{15} f l (1 + k)}$$

$$\begin{aligned} \int_0^l y_p \Delta y dx &= \frac{8}{15} \frac{\alpha k}{1 + \alpha k} f^2 l - \frac{8}{15} k f^2 l = \\ &= -\frac{8}{15} k f^2 l \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha k} \end{aligned}$$

Si $\alpha = 1$, $\int_0^l y_p \Delta y ds = 0$ ou $\Delta y = 0$, résultat connu

Si $\alpha = 0$, $\int_0^l y_p \Delta y dx = -\frac{8}{15} k f^2 l$, résultat du paragraphe précédent.

Pour toute autre valeur de α , il suffit de multiplier les valeurs de Δy du paragraphe précédent par $\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha k}$,

donc $\Delta y = -85,41 \frac{(1 - \alpha) k f}{1 + \alpha k} \frac{1}{l^3} x \left(\frac{l}{2} - x \right)^2$

$$\Delta y_{\max} = -1,58 k f \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha k}$$

$$M = H' (y_p + \Delta y) - H_p \Delta y = H_p \left[\frac{\alpha k}{1 + \alpha k} (y_p + \Delta y) - \Delta y \right] = H_p \frac{\alpha k y_p - \Delta y}{1 + \alpha k}$$

A la clef

$$M_c = H_p \frac{\alpha k}{1 + \alpha k} f.$$

L'effort normal a pour valeur $N = \frac{H_p}{(1 + \alpha k) \cos \omega}$.

L'excentricité dans une section quelconque est

$$\eta = \frac{M (1 + \alpha k) \cos \omega}{H_p}$$

Donc $\frac{\eta}{e} = \frac{\eta \cos \omega}{e_c} = \frac{M (1 + \alpha k) \cos^2 \omega}{H_p e_c}$

numérique. On peut admettre que la forme optimum correspond à $\left(\frac{\eta}{e} \right)_{\max} = \frac{\alpha k f}{e_c}$. Cette condition ne peut être réalisée que par interpolation,

en essayant des valeurs de α situées de part et d'autre de la valeur optimum.

On peut aussi calculer le maximum de M, quoique cet élément soit moins significatif lorsque e varie.

$$\begin{aligned} M &= H_p \frac{4 \frac{\alpha k f}{l^2} x (l-x) - 85,41 \frac{kf}{l^3} x \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 \frac{1-\alpha}{1+\alpha k}}{1 + \alpha k} \\ &= H_p \frac{kf}{l^2} \frac{4\alpha x (l-x) - 85,41 \frac{x}{l} \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 \frac{1-\alpha}{1+\alpha k}}{1 + \alpha k} \\ &= \frac{H_p kf}{(1 + \alpha k)^2 l^3} \left[4\alpha (1 + \alpha k) lx (l-x) - \right. \\ &\quad \left. - 85,41 (1 - \alpha) x \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 \right] \end{aligned}$$

La condition du maximum est :

$$x^2 + \frac{2 lx}{3} \left[\frac{4\alpha (1 + \alpha k)}{85,41 (1 - \alpha)} - 1 \right] - \frac{l}{3} \left[\frac{4\alpha (1 + \alpha k)}{85,41 (1 - \alpha)} - \frac{1}{4} \right] = 0$$

$$\text{d'où } \frac{x}{l} = \frac{1}{6} - \frac{8\alpha (1 + \alpha k)}{3 \times 85,41 (1 - \alpha)}$$

Lorsque $\alpha = 0$, $\frac{x}{l} = \frac{1}{6}$ et $M_{\max} = H_p \Delta y_{\max}$, résultat du § précédent.

ARC INARTICULÉ.

Pour ce cas, nous obtenons des résultats tout à fait analogues, qui généralisent ceux du paragraphe précédent.

Posons $\eta_c = \alpha k' f$ et $\eta_n = -\beta k' f$.
Donc : $M_c = M' + H' c = (H_p - H') \alpha k' f$ et
 $M_n = M' - H'(f - c) = -\left(\frac{H_p}{\cos \varphi} - H' \cos \varphi\right) \beta k' f$.

$$M' + H'(c + \alpha k' f) = H_p \alpha k' f$$

$$M' - H'(f - c + \beta k' f \cos \varphi) = -\frac{H_p \beta k' f}{\cos \varphi}$$

$$H' = H_p \frac{\alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi}}{1 + \alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi}}$$

$$M' = H_p \alpha k' f - H_p \frac{\alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi}}{1 + \alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi}} (c + \alpha k' f) =$$

$$= H_p \frac{\alpha k' (f - c) - \frac{\beta k' c}{\cos \varphi}}{1 + \alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi}}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{ds}{\Omega} + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y_p \Delta y}{I} ds &= \frac{\alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi}}{1 + \alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi}} \\ \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{y^2}{I} + \frac{\cos^2 \omega}{\Omega} \right) ds &= \frac{\alpha k' (f - c) + \frac{\beta k' c}{\cos \varphi}}{1 + \alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi}} \\ \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\Delta y}{I} ds &= \frac{\alpha k' (f - c) + \frac{\beta k' c}{\cos \varphi}}{1 + \alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi}} \end{aligned}$$

On en déduit, dans un cas concret, les valeurs de $\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\Delta y}{I} ds$ et de $\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y_p \Delta y}{I} ds$, qui permettent de déterminer la courbe des Δy .

En général $\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\Delta y}{I} ds \neq 0$, c'est-à-dire que le centre élastique n'est plus invariable. Mais α et β peuvent recevoir des valeurs telles qu'il soit invariable, il suffit que $\alpha (f - c) = \frac{\beta c}{\cos \varphi}$

$$\text{ou } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{c}{(f - c) \cos \varphi}.$$

Si cette condition est réalisée, les équations deviennent :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\Delta y}{I} ds = 0 \text{ et } \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y_p \Delta y}{I} ds &= \frac{\alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi}}{1 + \alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi}} \\ \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{y^2}{I} + \frac{\cos^2 \omega}{\Omega} \right) ds - \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{ds}{\Omega} &= \frac{\alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi}}{1 + \alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi}} \end{aligned}$$

Il en résulte que l'on peut alors adopter la même forme de courbe de Δy que lorsque α et β sont nuls, mais en modifiant proportionnellement les ordonnées.

Reprenons l'exemple du funiculaire parabolique, en admettant $I \cos \omega = I_c$ et $\Omega \cos \omega = \Omega_c$. Supposons l'arc assez surbaissé et $\cos \varphi \equiv 1$.

Comme $c = \frac{f}{3}$, nous supposons que $\beta = 2\alpha$ alors $\int_0^{\frac{l}{2}} \Delta y dx = 0$.

Il reste

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y_p \Delta y}{I_c} dx &= \frac{3\alpha k'}{1 + 3\alpha k'} \times \frac{2 f^2 l}{45 I_c} (1 + k') - \frac{l}{2 \Omega_c} \\ \int_0^{\frac{l}{2}} y_p \Delta y dx &= \frac{3\alpha k'}{1 + 3\alpha k'} \times \frac{2}{45} f^2 l (1 + k') - \\ &\quad - \frac{2 k' f^2 l}{45} = -\frac{2 k' f^2 l}{45} \frac{1 - 3\alpha}{1 + 3\alpha k'} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\Delta y = \frac{1 - 3\alpha}{1 + 3\alpha k'} 373,33 \frac{k' f}{l^4} x^2 (x - 0,30 l) \left(\frac{l}{2} - x\right)$$

Les écarts maxima indiqués dans le paragraphe précédent sont diminués dans la proportion $\frac{1 - 3\alpha}{1 + 3\alpha k'}$. L'expression du moment fléchissant est

$$M = -H\Delta y + H' y_p + M' = H_p \left[y_p \frac{\alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi}}{1 + \alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi}} + \frac{\alpha k' (f - c) - \frac{\beta k' c}{\cos \varphi}}{1 + \alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi}} - \frac{\Delta y}{1 + \alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi}} \right]$$

$$M = H_p \frac{\left[y_p \left(\alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi} \right) + \alpha k' (f - c) - \frac{\beta k' c}{\cos \varphi} - \Delta y \right]}{1 + \alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi}}$$

Si

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{c}{(f - c) \cos \varphi}, M' = 0 \text{ et } M = H_p \frac{\left(\alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi} \right) y_p - \Delta y}{1 + \alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi}}$$

L'effort normal a comme expression

$$N = \frac{H_p}{\left(1 + \alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi} \right) \cos \omega}$$

On en déduit comme précédemment l'excentricité η et le rapport

$$\frac{\eta}{e} = \frac{\eta \cos \omega}{e_c} = \frac{\left[\left(\alpha k' + \frac{\beta k'}{\cos \varphi} \right) y_p - \Delta y \right] \cos^2 \omega}{e_c}$$

Comme dans le cas de l'arc à deux rotules, on peut rechercher le maximum de $\frac{\eta}{e}$ pour une valeur choisie de $\alpha = \frac{\beta c}{(f - c) \cos \varphi}$. On peut aussi rechercher par interpolation une forme optimum de fibre moyenne définie par $\left(\frac{\eta}{e} \right)_{\max} = \frac{\alpha k' f}{e_c} = \frac{\beta k' f \cos^2 \varphi}{e_c}$

Enfin, dans un cas concret, on déterminerait aisément la position et la valeur des moments maxima.

En résumé, on peut généralement obtenir une forme favorable de la fibre moyenne par simple transformation proportionnelle de celle qui a été établie dans le paragraphe précédent pour $M_c = M_n = 0$.

* * *

Dans tout ce qui précède, nous n'avons envisagé que des charges verticales. Comme le principe de la méthode repose uniquement sur la connaissance du funiculaire des charges fixes, elle

s'applique à toute disposition quelconque de charges. Il faut, bien entendu, introduire dans les formules les expressions correspondantes de M_3 , N_3 et T_3 (1).

A titre d'exemple, nous étudierons le cas où le funiculaire est un arc de cercle, les charges extérieures étant normales et uniformes. Si la fibre moyenne est confondue avec le funiculaire,

$M_3 = 0$, $T_3 = 0$, $N_3 = p R = \text{constante}$
 p étant la charge normale uniforme et R le rayon du funiculaire.

Supposons l'arc encastré en plein cintre et d'épaisseur constante e . Plaçons l'origine des

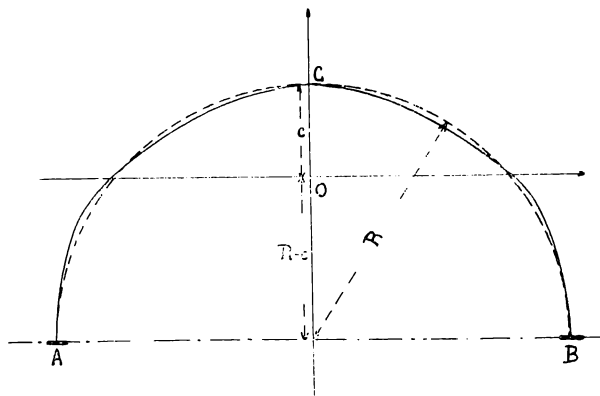


Fig. 4.

coordonnées au centre élastique (fig. 4). Dans ces conditions :

$$f = R, \quad c = \frac{\pi - 2}{\pi} R, \quad f - c = \frac{2}{\pi} R$$

L'allongement d'un demi-arc est $\Delta l = -\frac{p R}{E \Omega}$, la rotation $\Delta \varphi$ est nulle.

L'arc encastré subit de ce fait une poussée négative.

$$H' = p R \frac{\frac{R}{\Omega}}{\int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{y^2}{I} + \frac{\cos^2 \omega}{\Omega} \right) ds} = \frac{p R}{\frac{\pi^2 - 8}{4 \pi} \frac{R^2}{I} + \frac{\pi}{4}}$$

$$\eta_c = c \frac{H'}{p R - H'} = \frac{\pi - 2}{\pi} R \frac{1}{\frac{\pi^2 - 8}{4 \pi} \times \frac{12 R^2}{e^2} + \frac{\pi}{4} - 1}$$

Si $\frac{R}{e}$ est assez grand, on peut écrire

$$\eta_c = \frac{\pi - 2}{3(\pi^2 - 8)} \left(\frac{e}{R} \right) e \equiv 0,203 \left(\frac{e}{R} \right) e$$

(1) Compte-rendus de l'Académie des Sciences de Paris du 5 mai 1930.

Quant à η_n , elle est donnée par la formule :

$$\eta_n = -H' \frac{f-c}{pR} = -\frac{2R}{\pi} \frac{1}{\frac{\pi^2-8}{4\pi} \frac{R^2 \Omega}{I} + \frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{-R}{\frac{3}{2}(\pi^2-8) \frac{R^2}{e^2} + \frac{\pi^2}{8}}$$

Si $\frac{R}{e}$ est assez grand,

$$\eta_n = -\frac{2}{3(\pi^2-8)} \left(\frac{e}{R}\right) e \equiv -0,357 \left(\frac{e}{R}\right) e$$

Si $\frac{e}{R} = \frac{1}{35}$, (barrages fractionnés en voûtes de M. Mesnager et Veyrier), $\eta_n = -0,0102 e$.

Il résulte de ces chiffres qu'une voûte mince en plein cintre soumise à une pression hydrostatique uniforme et encadrée aux naissances n'est pas loin de travailler suivant la loi de compression simple ; les flexions sont minimales malgré l'encastrement. Il y a contradiction apparente entre cette conclusion et les résultats des essais, notamment de ceux effectués sur le barrage de Stevenson Creek. Des fissures d'intrados se sont produites à la partie supérieure de la génératrice médiane, impliquant des flexions ou contractions assez grandes.

Nous pouvons supposer avec une certaine vraisemblance que cette fissuration était due pour une grande part à des effets secondaires : refroidissement provoqué par l'eau et raccourcissement permanent de l'arc lors de la mise en charge. Il faut en effet observer que les calculs exposés plus haut supposent l'arc dans un état initial parfaitement élastique. Or, cet état ne peut être réalisé dans un barrage voûte construit verticalement. Il n'y existe aucune pression initiale, le massif est au contraire en état latent de fissuration et doit subir une déformation permanente avant d'entrer en pression. Ces effets secondaires sont vraisemblablement importants par rapport aux effets élastiques. Enfin, dans le cas d'une voûte de barrage, il faut noter que la répartition uniforme des pressions est altérée par les efforts rasants provenant de la continuité suivant les génératrices.

Pour ces raisons, malgré que la forme de la voûte circulaire mince soit favorable au point de vue élastique, il paraît utile de la « cambrer » en vue des effets secondaires ; éventuellement il faudrait aller jusqu'à créer des moments négatifs à la

clef. Si la fibre moyenne est voisine du funiculaire :

$$M_3 = -pR \Delta y \cos \omega, \quad N_3 = pR, \quad T_3 = 0$$

Nous désignons par Δy les écarts suivant la verticale. L'allongement et la rotation d'un demi-arc sont :

$$\Delta l = -pR \left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y_p \Delta y ds}{EI} + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\cos \omega ds}{E\Omega} \right],$$

$$\Delta \varphi = pR \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\Delta y \cos \omega ds}{EI}$$

ou encore

$$\Delta l = -pR \left[\frac{R^2}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \omega - \frac{2}{\pi} \right) \Delta y d\omega + \frac{R}{E\Omega} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \omega d\omega \right]$$

$$\Delta \varphi = \frac{pR^2}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta y \cos \omega d\omega$$

Il en résulte que

$$H' = pR \frac{\frac{R^2}{I} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \omega - \frac{2}{\pi} \right) \Delta y d\omega + \frac{R}{\Omega}}{\frac{\pi^2-8}{4\pi} \frac{R^3}{I} + \frac{\pi}{4}}$$

$$M' = pR \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta y \cos \omega d\omega}{\frac{\pi}{2}}$$

À la clef

$$M_c = M' + H' c, \quad \tau_{ic} = \frac{M' + H' c}{pR - H'}$$

Aux naissances

$$M_n = M' - H' (f-c), \quad \tau_n = \frac{M' - H' (f-c)}{pR}$$

Pour que $\tau_{ic} = 0$ et $\tau_n = 0$, il faut que $H' = 0$ et $M' = 0$, ou

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta y \cos \omega d\omega = 0 \text{ et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \omega - \frac{2}{\pi} \right) \Delta y d\omega = -\frac{e^2}{12R}$$

En désignant par $\Delta R = \Delta y \cos \omega$ les écarts suivant les rayons

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta R d\omega = 0 \text{ et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta y d\omega = \frac{\pi e^2}{24R}$$

D'après cela, la fibre moyenne qui coupe le funiculaire à la clef et aux retombées la rencontre encore en des points intermédiaires aux reins. Elle est sous le funiculaire dans l'intervalle entre la clef et les reins et elle se trouve au-dessus dans l'intervalle entre les reins et les retombées.

Pour Δy , on pourrait adopter par exemple la fonction

$$\Delta R = \Delta y \cos \omega = K \left[\sin \frac{16,972}{\pi} \left(\omega - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{16,972}{\pi} \left(\omega - \frac{\pi}{4} \right) \cos 4,493 \right]$$

en observant que $\sin 4,493 - 4,493 \cos 4,493 = 0$.

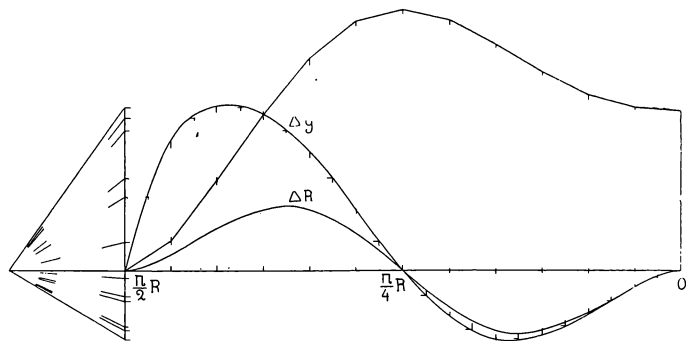


Fig. 5.

On vérifie aisément que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta R d\omega = 0$. Quant à l'expression

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta y d\omega = \frac{\pi e^2}{24 R}$$

qui doit déterminer la valeur du paramètre K , elle ne paraît pas intégrable; on pourrait la résoudre par la méthode de Simpson ou l'intégration graphique. Nous avons trouvé par cette dernière méthode la valeur $K = 0,115 \left(\frac{e}{R}\right) e$. Il en résulte que $\Delta R_{\max} = r_{\max} = 0,153 \left(\frac{e}{R}\right) e$, ce qui prouve une amélioration sensible de la sollicitation.

Si l'on voulait dépasser cette situation en créant par exemple un moment négatif à la clef, on constaterait qu'il faut augmenter les Δy négatifs entre la clef et les reins et augmenter les Δy positifs vers les retombées. La cambrure de la voûte s'accroît donc. Bien entendu, pour que la méthode reste applicable, il faut que les écarts soient encore relativement faibles. Il y a concordance entre la conclusion ci-dessus et celle déduite des expériences de Stevenson-Creek, à savoir qu'il est utile d'augmenter la courbure près des encastres.

L'exemple précédent montre également l'universalité d'application du principe de la méthode exposée, en combinaison avec tous les procédés usuels de calcul numérique et graphique de l'ingénieur.

*
* * *

Cette méthode constitue somme toute une étude rationnelle du « cambrage » des grandes

voûtes, qui a été fréquemment employé par de grands constructeurs de ponts, notamment M. Séjourné, mais d'après des méthodes plutôt géométriques. Elle est basée sur l'hypothèse de l'élasticité; nous pensons que ce n'est pas un inconvénient.

On peut considérer les déformations des voûtes comme composées des deux parties, les déformations élastiques et les déformations non élastiques. Les premières obéissent à la théorie. Les secondes comportent des déformations permanentes, imprévisibles en principe et des déformations réversibles (variation des températures, de l'humidité, etc).

Ces déformations peuvent être portées en compte dans la théorie de l'élasticité, à condition de les considérer comme indépendantes des forces ce qui n'est probablement qu'une approximation, mais suffisamment vraisemblable. On peut d'ailleurs chercher à compenser plus ou moins ces déformations non élastiques; cette tendance fait l'objet des préoccupations les plus sérieuses des constructeurs actuels de grandes voûtes. Les articulations provisoires, les clavages matés ou sous pression, le décentrement par soulèvement de la voûte et ouverture du joint de clef, les surcharges et déformations préalables (Freyssinet, *Génie Civil* du 15-9-1928), l'emploi d'éléments exempts de retrait (Baticle, *Génie Civil* du 20-10-1928), même la disposition asymétrique des armatures dans les voûtes en béton armé concourent à ce but de compenser le raccourcissement élastique et les déformations permanentes de mise en charge, le recul des appuis, le retrait, etc. La compensation des effets thermiques exige la triple articulation.

Au point de vue du calcul, l'effet de ces diverses opérations peut toujours se ramener à la mise en compte de dilatation et rotations connues, ou encore d'efforts normaux et de moments fléchissants correspondants. Elle s'opère facilement par la méthode exposée dans les paragraphes qui précèdent.

Par exemple, une voûte encastree dont la fibre moyenne est confondue avec le polygone funiculaire des charges fixes, est décentrée par ouverture du joint de clef. Si l'allongement ainsi produit est égal au raccourcissement élastique, on annule Δl et comme $\Delta l = 0$, la ligne des pressions du poids mort au décentrement est confondue avec la fibre moyenne. Ceci fait abstraction des raccour-

cissements non élastiques, dont la partie permanente peut être compensée comme ci-dessus.

Signalons dans un ordre d'idées différent la disposition adoptée au pont de Conflans (article de M. R. Valette, *Génie Civil* du 1-2-1930), consistant à amincir l'arc aux encastremets par rapport à la clef, ce qui constitue, à défaut de rotule, des encastremets flexibles. Il faut noter que cette disposition n'est pas incompatible avec la correction de la fibre moyenne, qui peut s'opérer quelle que soit la loi de variation des épaisseurs de l'arc.

Les paragraphes qui précèdent montrent que l'on peut contribuer à la compensation par une forme appropriée de la fibre moyenne. Elle s'obtient par des écarts systématiques, et d'ailleurs peu importants, de la fibre moyenne par rapport au funiculaire des poids morts. Une certaine latitude existe dans le choix de la loi des écarts, ce qui permet la meilleure adaptation. Ce résultat théorique intéressant à un revers inquiétant. Il donne à penser que les imperfections imprévisibles d'exécution exercent une influence sur la résistance des voûtes. Elle pourrait être de l'ordre de grandeur des effets que l'on cherche à compenser si l'exécution était peu soignée. On en conclut que non seulement il est capital de rechercher la perfection de forme des cintres au moment du clavage, mais encore qu'il est recommandable de recourir, dans la mesure du possible, à des compensations effectivement mesurées, réalisées par des méthodes de construction appropriées.

L'intérêt pratique de la correction de la fibre moyenne subsiste néanmoins. Elle s'applique principalement aux voûtes dont la compensation est difficilement réalisable (voûtes de barrages), ainsi qu'à la partie des charges fixes qui n'est pas soumise à compensation.

Par exemple, pour les ponts en voûte et en arc, toute la superstructure édiflée après décintrement des arcs et des voûtes, qui est généralement très importante.

Le problème prend un caractère tout différent si la superstructure rigide participe effectivement

avec la voûte à la résistance de l'ensemble (Études du Professeur Ros, dans la *Schweizerische Bauzeitung*). Certains types de ponts légers en béton armé construits en Suisse ont un tablier plus rigide que la voûte.

Dans ces conditions, le tablier reprend presque toute la flexion et la voûte est à peu près simplement comprimée. En ce cas, le funiculaire des charges fixes peut convenir pour la fibre moyenne, sans correction.

Nous croyons pouvoir proposer au Congrès les conclusions suivantes :

« Il est utile et nécessaire pour l'avancement de la technique encore relativement récente des grandes voûtes en béton et en béton armé, d'accumuler les résultats d'expériences et d'observations effectuées systématiquement sur les ouvrages en cours d'exécution et en service. Le but principal de ces recherches est de perfectionner nos connaissances relatives aux effets généralement secondaires, en vue de les mettre en compte dans les calculs d'établissement des projets. Il n'en est pas moins permis de constater que la technique de ces ouvrages a atteint déjà un degré de perfection très élevé et que les progrès réalisés au cours des dernières années ont été considérables. Le degré de confiance que l'on peut avoir dans ces ouvrages est grand et leurs perspectives d'avenir sont favorables.

Il est juste de reconnaître, malgré les réserves que l'on peut faire au sujet de ses principes, que la méthode de l'élasticité a considérablement aidé à ces progrès et qu'elle reste la plus appropriée pour la conception et un calcul approfondi des ouvrages. Comme elle permet de porter en compte les déformations non élastiques et les particularités de l'exécution, il est vraisemblable qu'elle restera la méthode classique pour le calcul des grandes voûtes en béton et en béton armé. Sa connaissance parfaite doit donc être considérée comme indispensable pour tous les ingénieurs qui désirent embrasser la carrière de constructeur de voûtes en béton et en béton armé. »