

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX
—
REPRÉSENTATION GEOMÉTRIQUE
de l'état triple de tension.

L'ellipsoïde de Lamé et la quadrique directrice des tensions constituent la plus ancienne et la plus connue des représentations géométriques de l'état triple de tension.

Une autre représentation, qui possède l'avantage d'être plane, est celle des cercles de Mohr. Son utilisation est actuellement en grand progrès; on peut en trouver une étude très complète dans l'ouvrage de M. Mesnager intitulé : *Matériaux de construction. Pierres* ⁽¹⁾; le cercle de Maurice d'Ocagne en constitue le cas particulier relatif à la sollicitation plane.

La représentation géométrique exposée ci-après est également plane et se compose également de cercles. De nombreux ouvrages allemands ⁽²⁾ l'utilisent pour l'étude la poussée des terres, dans l'hypothèse de la sollicitation plane. Ils ne se servent toutefois que des propriétés angulaires de la construction, non de ses propriétés métriques, et déterminent les poussées par des méthodes graphostatiques dérivées de celle de Coulomb.

Depuis plusieurs années, nous avons constaté ces propriétés métriques et les avons appliquées à notre enseignement. Ce

(1) Baillièrre et fils, éditeurs, Paris, 1923.

(2) Voir, par exemple : KREY : *Erddruck*, p. 9 (Ernst, éditeur à Berlin, 1918); ou R. KIRCHHOFF, *Statik*, t. II, 1922 (même éditeur).

n'est qu'à la suite de correspondances relatives aux articles de M. Ravier sur la poussée des terres que nous avons pu retrouver tout récemment le mémoire original du professeur J. Weyrauch de Stuttgart, intitulé « Theorie des Erddruckes auf Grund der neueren Anschauungen », publié dans l'*Allgemeine Bauzeitung*, de Vienne, en 1880 (p. 63 et 77). On y trouve la démonstration originale du diagramme circulaire appliqué à la sollicitation plane seulement et son emploi pour le calcul de la poussée des terres sans autre construction, c'est-à-dire d'après les hypothèses de Rankine et Maurice Lévy. On trouve dans le mémoire de Weyrauch presque toutes les propriétés géométriques qui seront démontrées au n° IV ci-après (sollicitation plane), sauf ce qui a trait au diagramme des glissements effectifs. Pour ce qui concerne l'état triple de tension, Weyrauch déclare simplement que l'on pourrait obtenir une représentation analogue en substituant des sphères aux cercles. Il n'a donc pas vu la possibilité de généraliser la représentation circulaire pour l'état triple de tension. Je ne pense pas qu'elle ait été jamais tentée d'autre part. Nous démontrerons directement les propriétés pour cet état à trois dimensions, la sollicitation plane n'en étant qu'un cas particulier.

Prenons comme axes de références les axes principaux OX, OY et OZ de l'ellipsoïde de Lamé au point O considéré. L'orientation d'une facette quelconque est définie en coordonnées sphériques ω et ψ , c'est-à-dire qu'elle est tangente à la sphère de référence à l'extrémité N du rayon défini par ω et ψ (fig. 1). Désignons les tensions principales par σ_z , σ_y et σ_x . Par définition :

$$\sigma_z > \sigma_y > \sigma_x.$$

Appelons n et t les composantes normales et tangentielles de la tension σ agissant sur la facette N ; appelons également σ_m , σ_p , n_p , t_m et t_p les composantes de ces tensions dans le plan méridien ZON et dans le plan du parallèle Y'NX'.

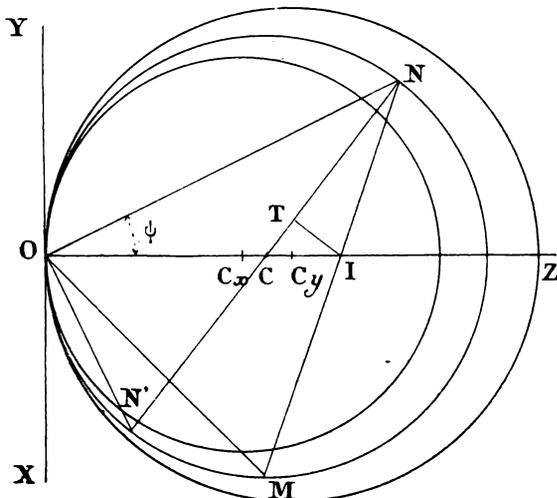


FIG. 2.

I. TENSIONS MÉRIDIENNES (fig. 2). — En appelant $\cos \alpha$, $\cos \beta$ et $\cos \gamma$ les cosinus directeurs de ON, on sait que :

$$n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \beta + \sigma_z \cos^2 \gamma \quad (1).$$

Or : $\cos \alpha = \cos \psi \sin \omega$, $\cos \beta = \cos \psi \cos \omega$, $\cos \gamma = \sin \psi$.

Donc : $n = (\sigma_x \sin^2 \omega + \sigma_y \cos^2 \omega) \cos^2 \psi + \sigma_z \sin^2 \psi$.

D'autre part :

$$t_m = \sigma_z \sin \psi \cos \psi - \sigma_y \cos \psi \cos^2 \omega \sin \psi - \sigma_x \cos \psi \sin^2 \omega \sin \psi,$$

$$t_m = (\sigma_z - \sigma_y \cos^2 \omega - \sigma_x \sin^2 \omega) \sin \psi \cos \psi.$$

Moyennant une transformation trigonométrique simple, on obtient :

$$n = \frac{\sigma_x \sin^2 \omega + \sigma_y \cos^2 \omega + \sigma_z}{2} - \frac{\sigma_z - \sigma_y \cos^2 \omega - \sigma_x \sin^2 \omega}{2} \cos 2\psi,$$

$$t_m = \frac{\sigma_z - \sigma_y \cos^2 \omega - \sigma_x \sin^2 \omega}{2} \sin 2\psi.$$

Traçons un cercle de centre C et de rayon :

$$OC = \frac{\sigma_z + \sigma_y \cos^2 \omega + \sigma_x \sin^2 \omega}{2}$$

et son diamètre horizontal OCZ, ainsi que la tangente YOX.

Déterminons sur le diamètre OCZ le point I, tel que :

$$OI = \sigma_z, \quad IZ = \sigma_x \sin^2 \omega + \sigma_y \cos^2 \omega.$$

Traçons la corde ON faisant l'angle ψ avec OC, traçons NC et NI, et abaissons la perpendiculaire IT sur NC.

L'angle NCZ est égal à 2ψ , et :

$$NT = NC - CT = NC - IC \cos 2\psi =$$

$$= \frac{\sigma_z + \sigma_y \cos^2 \omega + \sigma_x \sin^2 \omega}{2} - \frac{\sigma_z - \sigma_y \cos^2 \omega - \sigma_x \sin^2 \omega}{2} \cos 2\psi.$$

$$IT = IC \sin 2\psi = \frac{\sigma_z - \sigma_y \cos^2 \omega - \sigma_x \sin^2 \omega}{2} \sin 2\psi.$$

Donc : $IN = n$ et $IT = t_m$, $NI = \sigma_m$.

Si $\omega = 0$, la tension appartient au plan diamétral principal ZOY. Alors :

$$n = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cos 2\psi,$$

$$t = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\psi.$$

Traçons un cercle de centre C_y , situé sur la droite OCZ, qui passe par O et de rayon $\frac{\sigma_z + \sigma_y}{2}$. Le point I est invariable et jouit des mêmes propriétés que dans le cercle précédent.

Si $\omega = \frac{\pi}{2}$, le plan méridien est le plan principal ZOY. Alors :

$$n = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} - \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \cos 2\psi,$$

$$t = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \sin 2\psi.$$

Traçons le cercle de centre C_x , situé sur OCZ, qui passe par O et de rayon $\frac{\sigma_z + \sigma_x}{2}$. Le point I jouit encore de la même propriété.

On trouve aisément que $\frac{C_x C}{C C_y} = \cotg^2 \omega$. Nous avons défini de la sorte une famille de cercles, tous tangents en O à YOX, dont les centres sont situés sur la perpendiculaire OZ à YOX et dont les rayons varient de $\frac{\sigma_z + \sigma_x}{2}$ à $\frac{\sigma_z + \sigma_y}{2}$. Le point I défini par le segment $OI = \sigma_z$ porté sur OC jouit pour tous les cercles de la propriété démontrée ci-dessus.

Pour une facette définie par ω et ψ , on trace le cercle correspondant à ω , de rayon $\frac{\sigma_z + \sigma_y \cos^2 \omega + \sigma_x \sin^2 \omega}{2}$ et la corde ON

de ce cercle telle que $NOC = \psi$. NI représente la composante méridienne σ_m de la tension σ , NT représente sa composante normale n et IT sa composante tangentielle méridienne t_m . L'angle θ_m de σ_m avec la normale ON est, par définition, égal à INT. Cet angle se reproduit en MON', de telle sorte que MO est la direction de la tension méridienne conjuguée de ON, si OZ est la direction de la tension σ_z . On voit donc que toutes les directions conjuguées telles que ON et OM de tous les plans méridiens jouissent de la propriété que la corde MN passe par I. Connaissant l'une des directions, définie par l'angle $NOZ = \psi$, pour une valeur donnée de ω , la corde NIM détermine l'autre.

(1) Voir MESNAGER, ouvrage cité.

II. TENSIONS PARALLÈLES (fig. 3). — Dans le plan du parallèle YOX, on a :

$$n_p = \sigma_y \cos \psi \cos^2 \omega + \sigma_x \cos \psi \sin^2 \omega = (\sigma_y \cos^2 \omega + \sigma_x \sin^2 \omega) \cos \psi,$$

$$t_p = \sigma_y \cos \psi \cos \omega \sin \omega - \sigma_x \cos \psi \cos \omega \sin \omega = (\sigma_y - \sigma_x) \cos \psi \cos \omega \sin \omega.$$

Donc :

$$n_p = \left(\frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\omega \right) \cos \psi,$$

$$t_p = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\omega \right) \cos \psi.$$

Traçons un cercle de centre C et de rayon $\frac{\sigma_y + \sigma_x}{2}$. Par un point O quelconque de ce cercle, traçons les cordes OX et OY, perpendiculaires entre elles et parallèles aux directions principales correspondantes. Traçons le diamètre XCY et sur ce diamètre déterminons le point I tel que IX = σ_y et IY = σ_x .

Traçons une droite ON faisant avec OX l'angle ω , $\widehat{NCX} = 2\omega$. Il en résulte que, si nous abaissons la perpendiculaire IT sur NC :

$$NT = NC + CT = NC + CI \cos 2\omega = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\omega = \frac{n_p}{\cos \psi},$$

$$IT = CI \sin 2\omega = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\omega = \frac{t_p}{\cos \psi}.$$

Donc, à l'échelle près, en un point quelconque de la sphère de référence, NT représente la tension normale parallèle n_p , IT représente la tension tangentielle parallèle t_p , NI représente la composante parallèle σ_p de la tension. L'angle θ_p de σ_p avec la normale est égal à INT. Il se reproduit en N'OM, de telle sorte que OM représente encore la direction conjuguée de ON dans le plan du parallèle, et les cordes telles que NIM jouissent de la propriété de passer toutes par I. Un seul cercle suffit ici pour tous les parallèles. On le trace pour le plan principal XOY et il suffit, pour un parallèle défini par ψ , de multiplier tous les segments par $\cos \psi$.

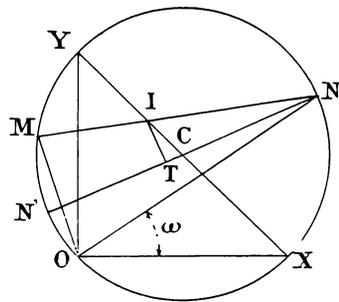


FIG. 3.

III. TENSIONS TOTALES (fig. 4). — La famille des cercles méridiens et le cercle parallèle suffisent pour représenter l'ensemble de toutes les tensions en un point et pour définir les facettes correspondantes. Mais il est possible de généraliser encore davantage et de représenter toutes les tensions par une seule famille de cercles.

Nous avons établi précédemment que :

$$n = (\sigma_x \sin^2 \omega + \sigma_y \cos^2 \omega) \cos^2 \psi + \sigma_z \sin^2 \psi,$$

ce qui peut s'écrire :

$$n = (\sigma_x \operatorname{tg}^2 \omega + \sigma_y) \cos^2 \psi \cos^2 \omega + \sigma_z (1 - \cos^2 \psi),$$

ou : $n = \sigma_z - [\sigma_z - \sigma_y + (\sigma_z - \sigma_x) \operatorname{tg}^2 \omega] \cos^2 \psi \cos^2 \omega.$

La composante tangentielle totale t est définie par :

$$t^2 = \sigma_x^2 \cos^2 \alpha + \sigma_y^2 \cos^2 \beta + \sigma_z^2 \cos^2 \gamma - n^2 \quad (1),$$

$$t^2 = \sigma_x^2 \cos^2 \psi \sin^2 \omega + \sigma_y^2 \cos^2 \psi \cos^2 \omega + \sigma_z^2 \sin^2 \psi - \left\{ \sigma_z - [\sigma_z - \sigma_y + (\sigma_z - \sigma_x) \operatorname{tg}^2 \omega] \cos^2 \psi \cos^2 \omega \right\}^2,$$

$$t^2 = [(\sigma_z - \sigma_y)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \operatorname{tg}^2 \omega] \cos^2 \psi \cos^2 \omega - [\sigma_z - \sigma_y + (\sigma_z - \sigma_x) \operatorname{tg}^2 \omega]^2 \cos^2 \psi \cos^4 \omega.$$

Posons :

$$\gamma = \frac{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \operatorname{tg}^2 \omega}{2[\sigma_z - \sigma_y + (\sigma_z - \sigma_x) \operatorname{tg}^2 \omega]},$$

et écrivons :

$$n = \sigma_z - \frac{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \operatorname{tg}^2 \omega}{2[\sigma_z - \sigma_y + (\sigma_z - \sigma_x) \operatorname{tg}^2 \omega]} \times \frac{2[\sigma_z - \sigma_y + (\sigma_z - \sigma_x) \operatorname{tg}^2 \omega]^2 \cos^2 \beta}{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \operatorname{tg}^2 \omega},$$

$$n = \sigma_z - \gamma (1 + \cos \eta),$$

$$1 + \cos \eta = 2 \frac{[\sigma_z - \sigma_y + (\sigma_z - \sigma_x) \operatorname{tg}^2 \omega]^2 \cos^2 \beta}{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \operatorname{tg}^2 \omega} = f(\omega) \cos^2 \psi,$$

$$\cos^2 \eta = [1 - f(\omega) \cos^2 \psi]^2,$$

$$\sin^2 \eta = 1 - \cos^2 \eta = 4 \left\{ \frac{[(\sigma_z - \sigma_y) + (\sigma_z - \sigma_x) \operatorname{tg}^2 \omega]^2 \cos^2 \beta}{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \operatorname{tg}^2 \omega} - \frac{[(\sigma_z - \sigma_y) + (\sigma_z - \sigma_x) \operatorname{tg}^2 \omega]^2 \cos^4 \beta}{[(\sigma_z - \sigma_y)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \operatorname{tg}^2 \omega]} \right\}.$$

Finalement :

$$\gamma^2 \sin^2 \eta = [(\sigma_z - \sigma_y)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \operatorname{tg}^2 \omega] \cos^2 \beta - [(\sigma_z - \sigma_y) + (\sigma_z - \sigma_x) \operatorname{tg}^2 \omega]^2 \cos^4 \beta = t^2.$$

Donc : $n = \sigma_z - \gamma (1 + \cos \eta)$ et $t = \gamma \sin \eta.$

Traçons un cercle de centre C, dont le diamètre OZ soit parallèle à la direction principale correspondante et de rayon $(\sigma_z - \gamma)$.

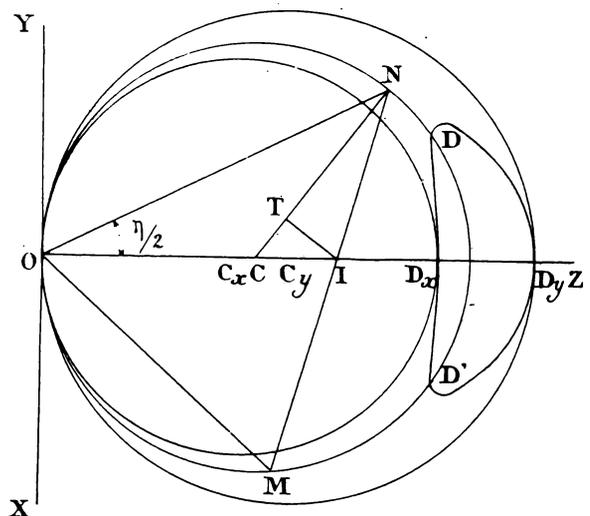


FIG. 4.

Portons sur le diamètre OZ le segment OI = σ_z , de telle sorte que CI = γ . Enfin, traçons la tangente XOY.

γ ne dépend que de ω , il y a donc un tel cercle pour chaque plan méridien. Nous tracerons tous les cercles de manière qu'ils passent par O et qu'ils aient le diamètre OZ commun.

Pour $\omega = 0$:

plan méridien YOZ, $\gamma = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}$ et $OC_y = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2}$

Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$:

plan méridien XOZ, $\gamma = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}$ et $OC_x = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2}$

Ces deux cercles sont les mêmes que les deux cercles méridiens définis pour les tensions méridiennes (voir I), ce qui est d'ailleurs évident a priori, car, dans ces deux plans principaux, les tensions sont purement méridiennes.

Pour une valeur quelconque de ω , $OC = \sigma_z - \gamma$. Il en résulte que :

$$\frac{C_x C}{CC_y} = \frac{0,5(\sigma_z - \sigma_x) - \gamma}{\gamma - 0,5(\sigma_z - \sigma_y)} = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{\sigma_z - \sigma_x} \cot^2 \omega.$$

Il est donc facile de tracer la famille de cercles et de les coter en valeurs de ω . Le point I est invariable.

A une certaine valeur de ψ , pour une valeur déterminée de ω , correspond un angle η , défini par $1 + \cos \eta = f(\omega) \cos^2 \psi$, d'où :

$$\cos \frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{f(\omega)}{2}} \cos \psi = \sqrt{\frac{[(\sigma_z - \sigma_y)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \operatorname{tg}^2 \omega] \cos^2 \psi}{1 + \operatorname{tg}^2 \omega}} \cdot \frac{1}{2\gamma}$$

(1) Voir MESSAGER, ouvrage cité.

Traçons l'angle $\widehat{ZCN} = \eta$ ou encore $\widehat{ZON} = \frac{\eta}{2}$. Traçons IN et abaïssons la perpendiculaire IT sur NC.

$$NT = NC - CT = \sigma_z - \gamma - \gamma \cos \eta = \sigma_z - \gamma(1 + \cos \eta) = n.$$

$$IT = \gamma \sin \eta = t.$$

Donc, IN représente la tension totale σ , et l'angle de glissement θ de cette tension par rapport à la normale à la facette conjuguée est représentée par \widehat{TIN} .

La corde NIM définit deux facettes telles que ON et OM (caractérisées par une valeur déterminée de ω et des valeurs diverses de ψ) qui, dans un même plan méridien, ont même angle de glissement θ . On ne peut cependant plus, à proprement parler, appeler ON et OM des directions conjuguées.

Observons d'ailleurs qu'en dehors des cercles des plans YOZ et XOZ, qui sont le plus grand et le plus petit de la famille, on ne peut pas utiliser les cercles sur toute leur circonférence, sinon il y aurait dans chaque méridien deux tensions principales. Ce cas ne se présente que si l'ellipsoïde de Lamé est de révolution autour de OZ et alors $\sigma_x = \sigma_y$, il n'y a plus qu'un seul cercle.

Dans le cas le plus général de l'ellipsoïde à trois axes inégaux, lorsque $\psi = 0$, η est différent de 0, sauf lorsque $\omega = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$

(plans YOZ et XOZ). Donc, lorsque $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, la partie utile du cercle comprend un arc DOD' symétrique par rapport à OZ d'ouverture angulaire inférieure à 2π . Le lieu des points tels que D et D' est une courbe fermée passant par D_x et D_y et que l'on pourrait coter $\psi = 0$ (fig. 4).

On pourrait de même tracer en travers de la famille de cercles une famille de courbes cotées en valeur de ψ échelonnées de 0 à $\frac{\pi}{2}$, la dernière se réduisant à la tangente XOY. Les équations de ces courbes sont assez encombrantes et ne paraissent présenter aucun intérêt particulier. Si l'on désire tracer les courbes d'égales valeurs de ψ , le plus pratique semble être d'y procéder point par point, au moyen des tensions méridiennes et parallèles, dont la résultante, qui s'obtient par un triangle-rectangle, donne la grandeur de σ . Il suffit alors de déterminer, sur le cercle coté à la valeur correspondante de ω , les points distants de I de la longueur de σ . Ce sont deux points d'une courbe d'égale valeur de ψ . Les valeurs de σ correspondant à $\psi = 0$ sont données directement par le cercle des tensions parallèles, qui permet de tracer point par point comme ci-dessus le lieu des points D et D'.

La famille des cercles des tensions totales présente évidemment un intérêt intrinsèque, mais pratiquement les cercles des tensions méridiennes et le cercle des tensions parallèles constituent une représentation suffisante et plus commode au point de vue du repérage des directions.

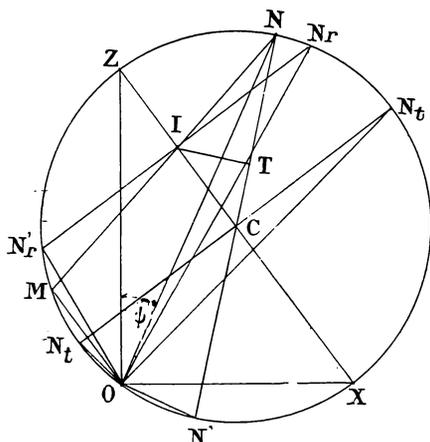


FIG. 5.

IV. SOLLICITATION PLANE. — Lorsque $\sigma_y = 0$, la sollicitation est plane, il n'y a plus qu'un seul cercle. La même situation est réalisée si $\sigma_x = \sigma_y$, tous les plans méridiens sont identiques. Dans ces conditions :

$$n = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} - \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \cos 2\psi,$$

$$t = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \sin 2\psi.$$

La représentation se fait par un diagramme circulaire analogue à celui des tensions parallèles (fig. 5). Le rayon en est

égal à $\frac{\sigma_z + \sigma_x}{2}$. Le point O est quelconque, OZ et OX sont parallèles aux directions principales correspondantes. Le point I est tel que $ZI = \sigma_x$ et $IX = \sigma_z$. L'angle ψ de la facette de direction ON se trace en \widehat{ZON} .

$$\text{On a : } NI = \sigma, \quad NT = n, \quad IT = t, \quad \widehat{INT} = \theta.$$

La direction de l'action conjuguée de ON est OM et toutes les cordes telles que NM passent par I.

En désignant par ON' la direction de la facette perpendiculaire à ON, la tension normale correspondante est :

$$n' = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \cos 2\psi,$$

elle est représentée par N'T.

En appelant σ' la tension de la facette OM conjuguée de ON, elle est représentée par MI, et sa direction est ON.

Ce diagramme circulaire permet aisément d'établir toutes les propriétés et relations qui figurent dans le premier chapitre de la *Poussée des terres* (première partie), de J. Résal. On reconnaît notamment à première vue les propriétés d'invariance :

$$\begin{aligned} n + n' &= \sigma_z + \sigma_x, \\ nn' - t^2 &= \sigma_z \sigma_x, \\ \frac{n' - n}{\cos 2\psi} &= \sigma_z - \sigma_x, \\ \frac{\sigma + \sigma'}{\cos \theta} &= \sigma_x + \sigma_z, \\ \sigma \sigma' &= \sigma_x \sigma_z. \end{aligned}$$

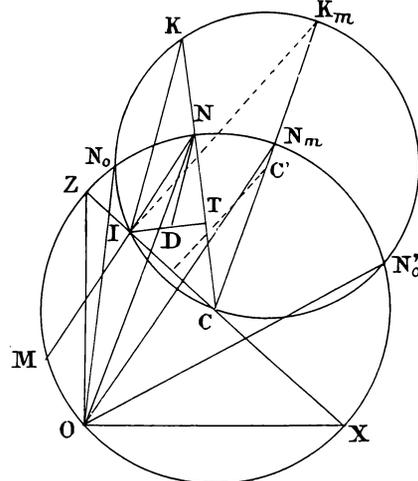


FIG. 6.

La valeur maximum de t est égale à IC, $t_{\max} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}$, elle est réalisée dans les facettes ON_t et ON'_t , inclinées à 45° sur OX et OZ.

L'angle de glissement maximum θ_m est réalisé lorsque NIM est perpendiculaire à XZ, et $\sin \theta_m = \frac{NC}{IC} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{\sigma_z + \sigma_x}$.

Les deux facettes conjuguées correspondant à θ_m sont ON_t et ON'_t , elles font entre elles l'angle $\frac{\pi}{2} - \theta_m$ dont OZ est la bissectrice.

Pour obtenir le glissement effectif $t - n \operatorname{tg} \varphi$ dans une facette ON, il suffit de tracer l'angle $CND = \varphi$; on voit (fig. 6) que :

$$ID = t - n \operatorname{tg} \varphi.$$

Traçons sur IC le segment capable de l'angle φ , que CN coupe en K. Traçons KI, qui est parallèle à ND, puis $\widehat{IKC} = \varphi$.

$$\text{Donc : } \frac{ID}{DT} = \frac{KN}{NT} \quad \text{ou} \quad \frac{t - n \operatorname{tg} \varphi}{n \operatorname{tg} \varphi} = \frac{KN}{n},$$

$$\text{d'où : } KN = \frac{t - n \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Donc, les segments des rayons du cercle des tensions, tels que KN, interceptés entre ce cercle et le segment capable de φ tracé sur CI, sont proportionnels à $t - n \operatorname{tg} \varphi$, dont on obtient ainsi un diagramme en croissant. Ce segment capable détermine les facettes ON_0 et ON'_0 entre lesquelles $t - n \operatorname{tg} \varphi$ est positif, c'est-à-dire existe réellement, ainsi que la facette ON_m du glissement effectif maximum, qui est inclinée de $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ sur OZ.

Le segment capable et ses propriétés géométriques se reproduisent symétriquement par rapport au diamètre XZ.

La valeur de $(t - n \operatorname{tg} \varphi)_{\max}$ est :

$$(t - n \operatorname{tg} \varphi)_m = N_m K_m \operatorname{tg} \varphi = \left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2 \sin \varphi} - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} \right) \operatorname{tg} \varphi,$$

ou
$$(t - n \operatorname{tg} \varphi)_{\max} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2 \cos \varphi} - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} \operatorname{tg} \varphi,$$

formule connue de Maurice Lévy.

Il est à noter que les formules et constructions ci-dessus démontrées pour le cas de sollicitation plane sont identiquement les mêmes en cas de contrainte à trois dimensions. Les tensions de glissement maxima, les angles de glissement maxima et les cisaillements effectifs maxima se produisent dans le plan ZOX ($\sigma_z > \sigma_x > \sigma_y$) et ont les mêmes expressions que ci-dessus.

Jusqu'ici, nous avons admis que I se trouvait à l'intérieur du cercle, c'est-à-dire que σ_z et σ_x sont de même signe. Si les deux tensions principales sont de signes contraires, I est en dehors du cercle (fig. 7). Les propriétés précédentes subsistent, notamment celles relatives aux glissements,

mais $\theta_m = \frac{\pi}{2}$, et il existe deux direc-

tions de pur glissement, définies par les rayons vecteurs OG et OG' passant les points de contact G et G' des tangentes au cercle des tensions issues de I. Les valeurs de ces tensions de pur glissement sont :

$$t = IG = \sqrt{\sigma_x \sigma_z} \quad (\sigma_x \text{ et } \sigma_z \text{ étant pris en valeur absolue}).$$

V. APPLICATION A LA POUSSÉE DES TERRES. — Les constructions géométriques précédentes sont susceptibles de rendre de grands services dans l'étude de la sollicitation des milieux continus, notamment de la poussée des terres. Nous les appliquons depuis plusieurs années pour l'enseignement des théories de Résal, dont elles simplifient considérablement l'exposé et dont elles facilitent beaucoup les applications. C'est ainsi que nos élèves tracent sans difficulté aucune les diverses lignes de rupture des massifs indéfinis de terre douée de cohésion, déterminent les poussées exactes correspondantes et les angles fictifs du talus naturel. Cet exercice serait difficilement praticable en se servant de l'exposé de J. Résal.

Pour les terres non cohérentes, les états d'équilibre limite sont définis par $\theta_m = \varphi$. Il en résulte que $CI = CO \sin \varphi$. Donc, il suffit de tracer le cercle concentrique au cercle des tensions et de rayon $CI = CO \sin \varphi$, pour obtenir le lieu des points I d'équilibre limite. Si l'on connaît deux directions conjuguées ON et OM, la corde NM détermine deux points I_i et I_s (fig. 8) correspondant aux équilibres limites inférieurs et supérieurs. Le diagramme détermine le rapport des tensions conjuguées. Il suffit de connaître la valeur de l'une d'elles pour connaître, en outre, l'échelle.

Il en résulte que le seul cercle des tensions suffit pour l'emploi de la méthode de Rankine ou de Maurice Lévy. On connaît, en effet, deux directions conjuguées : la verticale et la ligne du terrain, et la grandeur de la charge verticale $p = \Delta y \cos i$ (y = profondeur verticale, i = inclinaison du terrain sur l'horizon).

Pour la méthode de Résal, les propriétés géométriques des lignes de poussée sont toujours connaître deux directions conjuguées (1), mais on ne connaît la grandeur d'aucune des tensions correspondantes. On peut donc simplement déterminer les angles et les rapports des tensions. Selon l'observation de M. Ravier, ces éléments suffisent pour obtenir par la méthode de Coulomb-

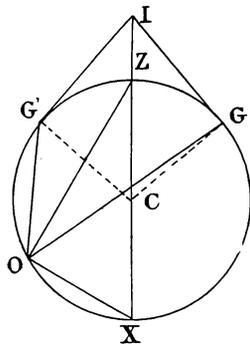


FIG. 7.

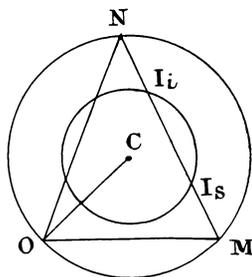


FIG. 8.

Poncelet des valeurs de la poussée très voisines de celles de J. Résal (2).

Pour les terres pourvues de cohésion, la condition d'équilibre limite est $(t - n \operatorname{tg} \varphi)_{\max} = C$, C représentant la valeur de la cohésion. On peut résoudre par le seul cercle des tensions et le diagramme en croissant des $t - n \operatorname{tg} \varphi$ le problème de l'équilibre limite du massif indéfini de terre cohérente, dont l'étude occupe un grand nombre de pages dans la deuxième partie du traité de J. Résal sur la *Poussée des terres*.

Supposons le problème résolu. On a, par hypothèse :

$$N_m K_m = \frac{C}{\operatorname{tg} \varphi}$$

d'où :
$$CK_m = \frac{\sigma + \sigma'}{2 \cos i} + \frac{C}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{CI}{\sin \varphi} \quad (\text{fig. 6}).$$

C étant connu et $\sigma + \sigma'$ étant arbitrairement choisi, la relation précédente détermine complètement I, et par conséquent les valeurs IN et IM de σ et σ' .

Ceci résout complètement le problème et permet le tracé des lignes de rupture. En remplaçant dans la relation précédente IC par son expression en fonction de σ et σ' :

$$IC = \sqrt{\frac{(\sigma + \sigma')^2}{4 \cos^2 i} - \sigma \sigma'}$$

on obtient une équation du second degré en σ' en fonction de σ et de i , qui permet de simplifier l'exposé algébrique de J. Résal, et de le ramener à la résolution et à la discussion d'une équation du second degré.

* *

En résumé, le cercle des tensions, imaginé par Weyrauch, mais susceptible de généralisation pour l'état triple de contrainte, peut être substitué dans tout problème d'élasticité aux équations à la surface, dont il constitue une représentation géométrique.

Il est particulièrement commode pour l'étude de la sollicitation plane des massifs continus indéfinis (poussée des terres) ou triangulaires (barrages à gravité, poussée des terres). Son emploi s'applique à tous les ouvrages enterrés (fondations, tunnels), moyennant des hypothèses plausibles. On peut encore y découvrir des propriétés accessoires, permettant certaines décompositions commodes de tensions, mais l'exposé général qui précède nous paraît suffisant pour caractériser l'intérêt de la question.

F. CAMPUS,

Professeur à l'Université de Liège.

PHYSIQUE INDUSTRIELLE

L'EMPLOI DU GAZ DANS LES GRANDES CUISINES

(Suite et fin.)

PRODUCTION DE L'EAU CHAUDE. — La question de la production de l'eau chaude dans la grande cuisine a une certaine importance, étant donnée la large consommation que l'on en fait. De plus, étant donnée la chaleur spécifique élevée de l'eau, son chauffage absorbe une quantité de chaleur importante. On doit donc s'efforcer de produire le chauffage de l'eau économiquement.

D'une manière générale, il est préférable de disposer d'une installation centrale de production d'eau chaude possédant un haut rendement d'utilisation, plutôt que de se contenter de produire de l'eau chaude dans des appareils divers, dont le rendement ne peut être que médiocre. D'autre part, dans une installa-

(1) Il est intéressant de noter que Weyrauch s'attribue dans son mémoire de 1880, p. 85, la priorité de la formule $A = \frac{\cos^2(\varphi - \alpha)}{c^2 \cos^2 \alpha}$ citée par M. L. Descans et qui aurait été publiée en 1878 dans la *Zeitschrift für Baukunde*. En même temps, Weyrauch constate l'identité de sa méthode et de celle de Coulomb, à condition d'employer la même valeur de φ . C'est exactement l'observation mise au point de M. Ravier.

(2) Voir le *Genie Civil* du 15 mars 1930 (t. XCVI, n° 11, p. 253).

(1) Voir : J. RÉSAL, *Poussée des terres*, première partie, pages 97 et suivantes.