

DE LA
HAUTEUR DU POINT D'INFLEXION
SUR LES
MONTANTS DES POUTRES VIERENDEEL

PAR

F. CAMPUS

Ingénieur A. I. Br., A. I. Lg. et A. I. M.
Professeur à l'Université de Liège

Extrait de la *Revue Universelle des Mines*, n° du 1^{er} Août 1929
(8^e série t. II, n° 3)



LIÈGE

IMPRIMERIE H. VAILLANT-CARMANNE, 4, PLACE ST-MICHEL

1929

2613

DE LA HAUTEUR DU POINT D'INFLEXION SUR LES MONTANTS DES POUTRES VIERENDEEL

par F. CAMPUS, Ingénieur A. I. Br., A. I. Lg., et A. I. M.
Professeur à l'Université de Liège

Dans un article relatif à cette question, paru dans le numéro du 15 juillet 1926 de la *Revue Universelle des Mines*, M. P. Thomas a établi deux formules destinées à suppléer à certaines imperfections qu'il attribuait à la méthode du professeur Vierendeel. Il s'est servi à cette fin d'hypothèses qu'il n'a guère justifiées et qui paraissent, à première vue, assez arbitraires. Elles n'ont, pour le moins, pas de signification définie. D'après ces résultats, l'auteur exprimait des conclusions dont certaines appellent également, nous semble-t-il, quelques réserves. Nous avons cherché à substituer aux hypothèses de M. Thomas des éléments plus significatifs, permettant des conclusions plus sûres. Nous croyons utile pour la clarté de l'exposé de reprendre la question de la flexion des montants dans son ensemble en ce qui concerne les principes, sans toutefois exposer la suite des calculs, ce qui exigerait un rappel complet de théorie des poutres Vierendeel. Nous ne croyons pouvoir mieux faire sur ce point que de renvoyer le lecteur aux ouvrages de l'inventeur même (1).

Il nous semble que la manière la plus intuitive d'établir les effets de la flexibilité des montants est celle indiquée par le professeur Engesser. Il considère tout d'abord que les montants soient infiniment rigides et, grâce à cette hypothèse commode, il détermine très facilement les contraintes principales d'une poutre Vierendeel quelconque. Les points d'inflexions des brides sont sur une même verticale passant par le centre de gravité du panneau trapézoïdal. Il n'y a de points d'inflexion fixes sur les montants que lorsque la poutre est symétrique, et alors ils sont nécessairement à mi-hauteur, et aussi lorsque le rapport des moments d'inertie réduits des membrures est constant, c'est-à-dire lorsque $\frac{I' \cos \omega'}{I \cos \omega} = \text{constante}$.

Il en résulte d'ailleurs — nous conservons les notations de M. Thomas — que $\frac{R'}{R} = C^{\text{te}}$ et, dans ce cas :

$$\frac{\mu}{\mu'} = -\frac{R}{R'}$$

La hauteur du point d'inflexion est alors donnée par la formule du professeur Vierendeel :

$$\frac{y}{H} = \frac{\mu}{\mu - \mu'} = \frac{R}{R + R'}$$

(1) A. Vierendeel, Cours de stabilité, tome IV.

μ et μ' représentant les moments aux extrémités des montants. Les moments m et m' en des points des brides situés sur une même verticale sont d'ailleurs liés par la même relation $\frac{m}{m'} = \frac{R}{R'}$.

Les hauteurs des montants étant peu variables, sauf éventuellement vers les extrémités, les points d'inflexion des brides se trouvent très approximativement sur les verticales médianes des panneaux, *sauf éventuellement aux panneaux extrêmes*.

Dans un panneau central, on a donc très sensiblement $m_{12} = -m_{21}$.

Par contre dans un panneau extrême — $m_{01} \geq m_{10}$.

Les résultats de la méthode d'Engesser sont par excès pour les contraintes des montants et les efforts longitudinaux des brides, sauf dans les panneaux extrêmes ; ils sont par défaut pour la flexion des membrures. L'erreur est de quelques % ; elle paraît en tous cas assez faible pour que nous puissions admettre ces résultats en première approximation, même lorsque les montants sont flexibles. Nous allons chercher d'après ces résultats à déterminer, également en première approximation, la position des points d'inflexion des montants,

En conservant les notations de M. Thomas, nous exprimerons l'équilibre de rotation des nœuds 2 et 2'

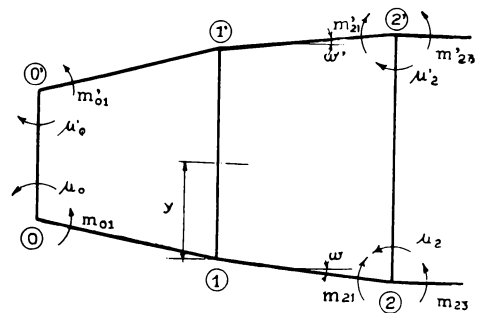


Fig. 1

ainsi que l'égalité des déformations angulaires des barres qui y aboutissent, exprimées par le théorème de Clerc. Mais à la différence de M. Thomas qui considérait les rotations comme inconnues, nous choisirons les moments. Au nœud 2 :

$$d_2 - \frac{m_{12} + 2m_{21}}{6 R_2} = d_3 + \frac{2m_{23} + m_{32}}{6 R_3} = \frac{2\mu_2 + \mu'_2}{6 r_2}$$

et $m_{23} = m_{21} - \mu_2$

d'où :

$$6(d_2 + d_3) = -\frac{2m_{23} + m_{32}}{R_3} + \frac{m_{12} + 2m_{21}}{R_3} + \frac{2(2\mu_2 + \mu'_2)}{r_2}$$

Comme les rotations des barres correspondantes des deux membrures sont égales, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, nous pouvons écrire par analogie pour le nœud 2' :

$$6(d_2 + d_3) = -\frac{2m'_{23} + m'_{32}}{R'_3} + \frac{m'_{12} + 2m'_{21}}{R'_2} - \frac{2(2\mu_2 + \mu'_2)}{r_2}$$

les sens positifs des μ et μ' étant inverses, comme l'indiquent les flèches de la figure 1, qui donnent les sens positifs des moments.

Nous admettrons comme M. Thomas que $R_2 = R_3 = R$ et $R'_2 = R'_3 = R'$, c'est-à-dire que les brides aient une rigidité constante, ce qui correspond très bien aux conditions logiques et pratiques des poutres Vierendeel.

La soustraction membre à membre des deux relations précédentes donne :

$$2 \left[\frac{m'_{21} - m'_{23}}{R'} - \frac{m_{21} - m_{23}}{R} \right] + \frac{m'_{12} - m'_{32}}{R'} - \frac{m_{12} - m_{32}}{R} - \frac{6(\mu + \mu')}{r} = 0 \quad (1)$$

Or :

$$m_{21} - m'_{23} = -\mu' \quad \text{et} \quad m_{21} - m_{32} = \mu, \quad \text{donc} :$$

$$-2 \left[\frac{\mu}{R} + \frac{\mu'}{R'} \right] + \frac{m'_{12} - m'_{32}}{R'} - \frac{m_{12} - m_{32}}{R} - \frac{6(\mu + \mu')}{r} = 0$$

Lorsque les montants sont infiniment rigides, $m_{12} = -m_{21}$, $m'_{12} = -m'_{21}$, $m'_{32} = -m'_{23}$, $m_{32} = -m_{23}$,

donc :

$$m'_{12} - m'_{32} = -(m'_{21} - m'_{23}) = \mu'$$

et :

$$m_{12} - m_{32} = -(m_{21} - m_{23}) = -\mu$$

Donc :

$$\begin{aligned} -\frac{\mu'}{R'} - \frac{\mu}{R} - \frac{6(\mu + \mu')}{r} &= 0 \\ -\mu' \left(\frac{1}{R'} + \frac{6}{r} \right) &= \mu \left(\frac{1}{R} + \frac{6}{r} \right) \\ \frac{\mu}{\mu'} &= -\frac{\frac{6}{r} + \frac{1}{R'}}{\frac{6}{r} + \frac{1}{R}} = -\frac{6 + \frac{r}{R'}}{6 + \frac{r}{R}} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{y}{H} = \frac{6 + \frac{r}{R'}}{12 + \frac{r}{R} + \frac{r}{R'}}$$

Nous retrouvons donc la formule de M. Thomas pour les montants intermédiaires *en nous basant sur l'hypothèse de l'égalité des valeurs absolues des moments aux deux extrémités d'une bride*, hypothèse plus explicite que celle faite par M. Thomas au sujet des rotations des nœuds successifs.

Pour le montant d'extrémité, la relation (1) devient :

$$2 \left[-\frac{m'_{01}}{R'} + \frac{m_{01}}{R} \right] - \frac{m'_{10}}{R'} + \frac{m_{10}}{R} - \frac{3(\mu_0 + \mu'_0)}{r_0} = 0$$

Or :

$$m'_{01} = \mu'_0 \quad \text{et} \quad m_{01} = -\mu_0,$$

donc :

$$-2 \left[\frac{\mu'_0}{R'} + \frac{\mu_0}{R} \right] - \frac{m'_{10}}{R'} + \frac{m_{10}}{R} - \frac{3(\mu_0 + \mu'_0)}{r_0} = 0.$$

Si les montants sont infiniment rigides, m'_{10} peut varier de $-m'_{01}$ à $-\frac{m'_{01}}{2}$, suivant que le panneau extrême est rectangulaire ou triangulaire ; il en est de même pour m_{10} par rapport à m_{01} .

Si $m'_{10} = -m'_{01}$ et $m_{10} = -m_{01}$ (panneau rectangulaire), nous obtenons comme précédemment

$$\frac{\mu_0}{\mu'_0} = -\frac{3 + \frac{r_0}{R'}}{3 + \frac{r_0}{R}}$$

Si $m'_{10} = -\frac{m'_{01}}{2}$ et $m_{10} = -\frac{m_{01}}{2}$, (panneau triangulaire), nous obtenons :

$$\frac{\mu_0}{\mu'_0} = -\frac{2 + \frac{r_0}{R'}}{2 + \frac{r_0}{R}}$$

La première des deux formules correspond à celle que donne M. Thomas pour le montant extrême, à savoir

$$\frac{\mu}{\mu'} = -\frac{3 + \frac{r_0}{R'}}{3 + \frac{r_0}{R}}$$

Cette formule est basée sur l'hypothèse assez arbitraire, que M. Thomas n'indique pas explicitement, de l'égalité des rotations aux nœuds 0 et 1. Elle correspond à $m_{10} = -m_{01}$, c'est-à-dire au cas particulier où les points d'inflexion des brides du premier panneau sont aux milieux. Ce cas particulier ne peut d'ailleurs se produire en raison de la flexibilité des montants.

Lorsque la rigidité des montants est infinie, nous retrouvons naturellement la relation $\frac{\mu}{\mu'} = -\frac{R}{R'}$ pour tous les montants.

Lorsque $R = R'$ ou que les montants sont très peu rigides ($r = 0$), on trouve $\mu = -\mu'$, ce qui est non moins évident.

Recherchons ensuite, en seconde approximation, comment la flexibilité des montants peut modifier ces résultats. En se basant sur la position des points d'inflexion déterminée par la formule $\frac{\mu}{\mu'} = -\frac{R}{R'}$, le professeur Engesser a établi une correction à appliquer aux efforts transversaux des montants et, par conséquent, aux moments de flexion des brides. Les moments de flexion complémentaires Δm_2 , Δm_3 , etc., des brides des panneaux intermédiaires sont toujours positifs; ils sont à peu près les mêmes pour les différents panneaux si les montants sont également rigides (règle générale) et si les charges extérieures sont assez uniformément réparties (partie principale de la sollicitation). Par contre, les moments complémentaires Δm_1 sont négatifs dans les panneaux d'extrémité, si les montants extrêmes sont également ou plus rigides que les autres (règle générale). Ils peuvent avoir une valeur absolue beaucoup plus grande que dans les panneaux intermédiaires, si le nombre des panneaux est assez considérable. Quant aux montants, leur sollicitation est améliorée pour ceux de l'intérieur et aggravée pour ceux d'extrémité, qui étant, en tout état de cause, les plus fatigués, doivent être plus rigides que les autres. Il s'ensuit que les diagrammes des moments de flexion dans les brides sont modifiés conformément aux indications du schéma de la figure 2. Les points

ralement exclue et que, presque toujours — $m_{01} > m_{10}$. Le point d'inflexion se rapproche du nœud 1 et peut même le dépasser. C'est notamment le cas de la poutre qui fit l'objet d'une étude photo-élastométrique du professeur Coker, dont le professeur Vierendeel a commenté les résultats dans le numéro de juin 1928 de la *Technique des Travaux*. Envisageons donc plusieurs valeurs du rapport :

$-\frac{m_{01}}{m_{10}} =$	1	1,25	2
$\frac{\mu_0}{\mu'_0} =$	$3 + \frac{r_0}{R'}$	$2,5 + \frac{r_0}{R'}$	$2 + \frac{r_0}{R'}$
$-\frac{m_{01}}{m_{10}} =$	$\infty (m_{10} = 0)$		-1
$\frac{\mu_0}{\mu'_0} =$	$1,5 + \frac{r_0}{R'}$		$1 + \frac{r_0}{R'}$
	$1,5 + \frac{r_0}{R}$		$1 + \frac{r_0}{R}$

Dans cette variation, le point d'inflexion des brides 01 part du milieu, se déplace vers 1, atteint 1, le dépasse et tend vers l'infini (valeur limite ∞ du coefficient numérique de $\frac{\mu_0}{\mu'_0}$).

Le rapport $\frac{\mu_0}{\mu'_0} = -\frac{3 + \frac{r_0}{R'}}{3 + \frac{r_0}{R}}$ indiqué par M. Tho-

mas est donc un cas particulier, qui ne peut guère être réalisé que dans les poutres à membrures parallèles et à montants rigides.

En posant $\frac{\mu_0}{\mu'_0} = -\frac{k + \frac{r_0}{R'}}{k + \frac{r_0}{R}}$, nous avons trouvé

$\frac{r_0}{R} =$	0	$\frac{5(n-1)}{6(n-3)}$	$\frac{3(n-1)}{n-3}$	$\frac{6(n-1)}{n-3}$	∞
$k =$	3	2,5	2	1,5	1

L'hypothèse $R = R'$ ne donne aux résultats précédents qu'une valeur indicative, mais elle montre bien que k dépend du rapport $\frac{r_0}{R}$. On voit que finalement k sera le plus souvent voisin de 2,5 dans les poutres à brides parallèles; peut-être de 2 dans les poutres polygonales. Observons que l'imprécision de la connaissance de k n'influe pas beaucoup sur la position du point d'inflexion et d'autant moins que R et R' sont moins différents, Aussi attachons nous moins

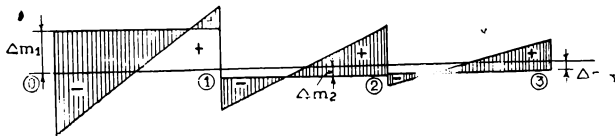


Fig. 2

d'inflexion sont déplacés. Mais comme Δm_2 et Δm_3 sont peu différents, on voit que l'égalité

$$m_{12} - m_{32} = -(m_{21} - m_{23}) \quad (2)$$

reste très sensiblement conservée et par conséquent, la flexibilité des montants intermédiaires altère peu la relation :

$$\frac{\mu}{\mu'} = -\frac{6 + \frac{r}{R'}}{6 + \frac{r}{R}}$$

que nous pouvons donc considérer comme généralement établie dans tous les cas où la relation (2) précédente est suffisamment vraie, c'est-à-dire dans tous les cas pratiques.

Il est très aisé de démontrer que la relation

$$m_{12} - m_{32} = -(m_{21} - m_{23})$$

concorde avec l'hypothèse de M. Thomas

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 2\alpha_2.$$

Mais en ce qui concerne le montant d'extrémité, nous voyons que la relation $m_{10} = -m_{01}$ est géné-

d'importance à la détermination de la valeur même de k qu'à la mise au point des éléments qui déterminent cette valeur et à l'effet de la flexibilité des montants en général, au sujet desquels les hypothèses peu naturelles de M. Thomas sont susceptibles, nous semble-t-il, d'interprétations inexactes.

Nous sommes d'accord avec M. Thomas au sujet de l'opportunité de donner même raideur aux deux membrures des poutres Vierendeel, mais cette égalité, est malheureusement sérieusement modifiée en pratique par l'action raidissante du tablier. Celle-ci décharge les deux membrures, mais aggrave la sollicitation des montants, dont les points d'inflexion se déplacent vers la membrure la moins rigide. Nous ne pouvons, pour cette raison, partager l'opinion de M. Thomas au sujet du caractère rationnel des poutres Vierendeel qui, ayant des membrures de raideur différentes, devraient avoir de ce chef des montants de rigidité très faible par rapport à celle des membrures. Nous pensons qu'il importe au contraire dans ce cas d'augmenter la raideur des montants, puisqu'ils sont plus fatigués. Si les montants sont très flexibles, il ne s'agit d'ailleurs plus en somme de poutre Vierendeel. Il nous semble aussi que pratiquement, dans le cas d'un bow-string parabolique à surcharge principalement permanente, il convient en effet d'avoir des montants très flexibles, mais le système ne doit plus alors être considéré comme étant à arcades rigides.

* * *

Nous croyons intéressant de montrer que dans les constructions continues à panneaux rigides, tout à fait analogues à des poutres Vierendeel à brides parallèles mais dont les montants ne peuvent subir de déplacements verticaux, lorsque ces montants subissent des rotations, les points d'inflexion y sont déterminés par les formules de M. Thomas. La solli-

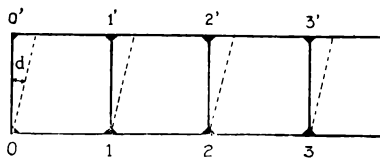


Fig. 3.

citation se ramène donc à des efforts horizontaux suivant les membrures et éventuellement à des charges verticales aux nœuds, qui sont sans influence. La déformation d'ensemble consiste en une déviation de tous les montants. Nous admettons que tous les panneaux intermédiaires soient dans des conditions identiques, dès lors, en un nœud quelconque inférieur

$$-6R\varphi - 2r(2\varphi + \varphi' - 3d) - 6R\varphi = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ou} \quad & 2\left(3\frac{R}{r} + 1\right)\varphi + \varphi' = 3d. \\ \text{De même} \quad & \varphi + 2\left(3\frac{R'}{r} + 1\right)\varphi' = 3d \end{aligned} \right\} \quad (\text{I})$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{6\frac{R'}{r} + 1}{6\frac{R}{r} + 1}.$$

On en déduit :

$$\frac{\mu}{\mu'} = \frac{2\varphi + \varphi' - 3d}{\varphi + 2\varphi' - 3d} = -\frac{R\varphi}{R'\varphi'} = -\frac{6 + \frac{r}{R'}}{6 + \frac{r}{R}}$$

Cette relation n'est toutefois pas valable pour le premier montant, mais nous admettons qu'elle s'applique à partir du second. Dans ces conditions, l'équilibre du nœud 0 s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} -2r(2\varphi_0 + \varphi'_0 - 3d) - 2R(2\varphi_0 + \varphi) &= 0 \\ \text{ou} \quad & 2\left(\frac{R}{r} + 1\right)\varphi_0 + \varphi'_0 = 3d - \frac{R}{r}\varphi \\ \text{De même} \quad & \varphi_0 + 2\left(\frac{R'}{r} + 1\right)\varphi'_0 = 3d - \frac{R'}{r}\varphi' \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Ces équations donnent :

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_0}{d} &= \frac{3\left(2\frac{R'}{r} + 1\right) - 2\left(\frac{R'}{r} + 1\right)\frac{R\varphi}{r d} + \frac{R'\varphi'}{r d}}{4\frac{RR'}{r^2} + 4\frac{R}{r} + 4\frac{R'}{r} + 3} \\ \frac{\varphi'_0}{d} &= \frac{3\left(2\frac{R}{r} + 1\right) - 2\left(\frac{R}{r} + 1\right)\frac{R'\varphi'}{r d} + \frac{R\varphi}{r d}}{4\frac{RR'}{r^2} + 4\frac{R}{r} + 4\frac{R'}{r} + 3} \end{aligned}$$

On en peut déduire :

$$\frac{\mu_0}{\mu'_0} = -\frac{2\frac{\varphi_0}{d} + \frac{\varphi'_0}{d} - 3}{\frac{\varphi_0}{d} + \frac{2\varphi'_0}{d} - 3}$$

Pour développer cette expression, il faut auparavant résoudre les équations (I), qui donnent :

$$\frac{\varphi}{d} = \frac{6\frac{R'}{r} + 1}{12\frac{RR'}{r^2} + \frac{4(R+R')}{r} + 1},$$

$$\frac{\varphi'}{d} = \frac{6\frac{R}{r} + 1}{12\frac{RR'}{r^2} + \frac{4(R+R')}{r} + 1}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{\mu'_0} &= -\frac{R}{R'} \times \\ & \frac{48\frac{RR'^2}{r^2} + 44\frac{RR'}{r^2} + 24\frac{R'^2}{r^2} + 20\frac{R'}{r} + 8\frac{R}{r} + 3}{48\frac{R^2R'}{r^2} + 44\frac{RR'}{r^2} + 24\frac{R^2}{r^2} + 20\frac{R}{r} + 8\frac{R'}{r} + 3} \end{aligned}$$

$$\frac{\mu_0}{\mu'_0} = -\frac{R}{R'} \times \frac{\left(3\frac{R'}{r} + 1\right) \left(16\frac{RR'}{r^2} + 8\frac{R}{r} + 8\frac{R'}{r} + 4\right) + 4\frac{RR'}{r^2} - 1}{\left(3\frac{R}{r} + 1\right) \left(16\frac{RR'}{r^2} + 8\frac{R}{r} + 8\frac{R'}{r} + 4\right) + 4\frac{RR'}{r^2} - 1}$$

Le terme $\frac{4RR'}{r^2} - 1$ est négligeable vis-à-vis des autres, d'autant plus que $\frac{R}{r}$ et $\frac{R'}{r}$ seront plus grands.

Or dans ce genre de construction $\frac{R}{r}$ et $\frac{R'}{r}$ sont généralement supérieurs à l'unité, à l'inverse de ce qui se fait pour les poutres Vierendeel. De telle sorte que très approximativement :

$$\frac{\mu_0}{\mu'_0} = -\frac{3 + \frac{r}{R'}}{3 + \frac{r}{R}}$$

Un exemple montrera le degré d'approximation : Soient $\frac{R}{r} = 2$ et $\frac{R'}{r} = 1$.

Les formules précédentes donnent :

$$\frac{\varphi}{d} = 0,189, \quad \frac{\varphi'}{d} = 0,352, \quad \frac{\varphi}{\varphi'} = 0,538, \quad \frac{\mu}{\mu'} = -1,077,$$

$$\frac{y}{H} = 0,517. \quad \frac{\varphi_0}{d} = 0,374, \quad \frac{\varphi'_0}{d} = 0,577, \quad \frac{\varphi_0}{\varphi'_0} = 0,647.$$

$$\frac{\mu_0}{\mu'_0} = -1,139 \quad \text{d'après la formule développée.}$$

$$\text{D'après la formule simplifiée } \frac{\mu_0}{\mu'_0} = -1,142. \text{ Enfin}$$

$$\frac{y_0}{H} = 0,532.$$

Nous concluons en constatant que l'imprécision du coefficient k n'entraîne heureusement que de faibles erreurs dans l'appréciation de la position des points d'inflexion des montants ; c'est une favorable occurrence pour le calcul des poutres Vierendeel.