

TENSIONS PRODUITES DANS LE BÉTON ET LE BÉTON ARMÉ PAR SUITE DES VARIATIONS DE VOLUME

par F. CAMPUS,

Professeur à l'Université de Liège

Directeur du Laboratoire d'essais des constructions du Génie Civil

Résumé. — *L'auteur a observé que les fissures du béton armé sont parfois localisées par la présence d'armatures, parallèlement à celles-ci. Il a récemment examiné un cas de fissuration de pieux en béton armé résultant du battage et dont les fissures transversales, à travers toute la section, correspondaient toutes aux plans des étriers. La présence de ces armatures favorise la fissuration par empêchement de retrait.*

En admettant l'hypothèse de l'élasticité, on peut se rendre compte des effets, dans un corps déformable subissant un retrait, de la présence d'une inclusion non soumise à un retrait propre ou subissant un retrait moindre. L'auteur établit des formules pour le cas d'un disque circulaire dans un milieu plan indéfini, d'un cylindre coaxial à un cylindre indéfini et d'une sphère dans un milieu indéfini. Ces formules montrent la possibilité du développement d'extensions importantes tangentiellement aux armatures du béton armé, dont l'ordre de grandeur peut provoquer la fissuration; les formules cessant naturellement d'être valables dans ce cas. Ces tensions sont de l'ordre de grandeur de celles qui résulteraient de l'empêchement total du retrait.

Le béton lui-même est composé d'éléments subissant un retrait négligeable, pierres et sable, liés par une pâte rétractile. Il en résulte que le retrait du ciment donne lieu à des tensions internes dans les mortiers et les bétons. Cette notion éclaire un certain nombre de propriétés des bétons et mortiers, variables en fonction de leurs constituants: retrait, résistance à l'extension, résistance au choc, etc.

Quelques exemples numériques et expériences simples complètent et appuient l'exposé théorique, qui se termine par une étude des tensions internes dans une colonne cylindrique en béton armée et frettée au moyen d'un tube coaxial.

L'auteur a eu, au cours des dernières années, l'occasion d'observer sur plusieurs constructions en béton armé, des fissures localisées par la présence d'armatures auxquelles elles étaient parallèles.

Une communication a été faite le 21 décembre 1933, à l'Association belge pour l'Etude, l'Essai et l'Emploi des Matériaux, à Bruxelles, sur la « Détérioration des pieux en béton armé par le battage » (1).

Elle rapporte des constatations nombreuses et concluantes, sans exception, de la localisation des fissures dans les plans des étriers transversaux. Ces fissures traversent toute la section des pieux (fig. 1). Le compte rendu des essais de résistance au

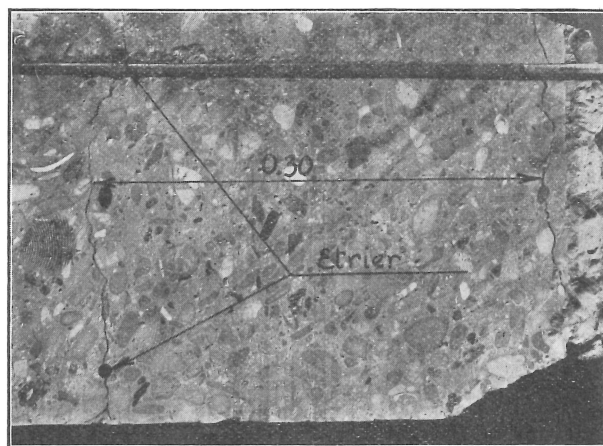


Fig. 1

Sciage à travers le bloc perpendiculairement aux fissures.

battage de pieux en béton armé effectués par la Building Research Station d'Angleterre (2) rapporte des observations de fissures transversales, sans indiquer leur position par rapport aux étriers.

(1) A paru dans les *Annales des Travaux Publics de Belgique*, fascicule de février 1935.

(2) Report of the Building Research Board for the year 1932, Londres 1933. Voir aussi *Concrete and Constructional Engineering*, fascicule de décembre 1933.

La figure 2 représente l'état d'une poutre en béton armé raidissant une paroi de silo. L'épaisseur de quelques centimètres de béton recouvrant les armatures est séparée du reste par une fissure complète dans le plan des armatures longitudinales et se détache avec facilité par grandes plaques.

Des blocs de béton armé, détachés d'une construction neuve, ont été envoyés au laboratoire du Génie Civil à Liège en 1934. Le sciage de ces blocs a révélé l'existence de fissures le long de certaines armatures. Cette construction ne présentait d'ailleurs pas de vice et sa résistance était suffisante, mais on avait constaté l'apparence d'une résistance très faible à l'extension.

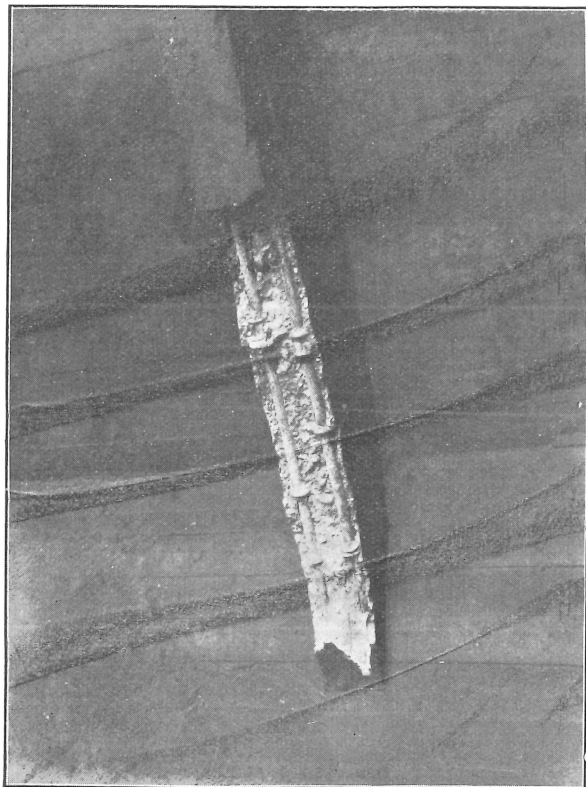


Fig. 2.

Un anneau scié hors d'un tube mince en béton centrifugé ayant été brisé par une chute accidentelle, toutes les surfaces de rupture passaient par des armatures longitudinales (fig. 3).

Dans des poutres à nervures de grande hauteur, dont les armatures longitudinales sont concentrées aux parties inférieure et supérieure, des fissures normales aux axes de ces poutres apparaissent dans la région médiane, en correspondance avec les étriers.

Lors du bétonnage de poutres d'assez grandes dimensions, par temps très chaud, l'auteur a observé des fissurations correspondant aux plans des étriers et prenant naissance dès le début du durcissement.

Enfin, dans des parois planes, soit verticales (silos, murs de soutènement), soit horizontales

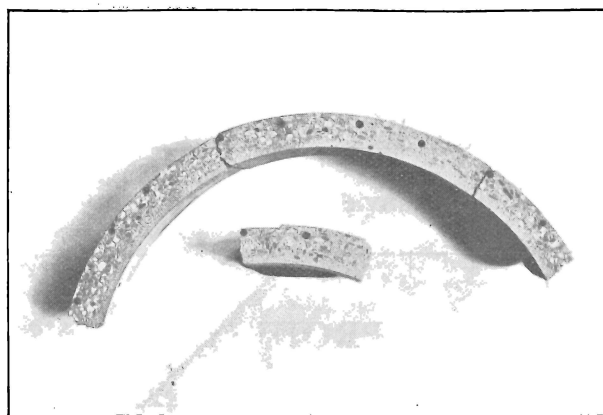


Fig. 3.

(dalles de plancher), on trouve aussi parfois des fissures localisées par le voisinage d'armatures et s'étendant le long de celles-ci.

Il s'agit donc d'un phénomène assez général, provenant d'une cause commune, à laquelle peuvent se superposer d'autres actions contribuant au même effet. Cette cause est la suivante.

Les bétons subissent, au cours de leur durcissement, un retrait appréciable (2 à 4×10^{-4} dans des conditions de conservation en atmosphère assez humide, jusqu'à 6×10^{-4} et davantage en atmosphère close et sèche).

Les armatures d'acier constituent dans le béton armé des inclusions hétérogènes à volume invariable, sous réserve des déformations élastiques.

Elles produisent donc, dans leur voisinage immédiat et dans le sens transversal, un empêchement de retrait qui développe des tensions internes d'extension dans le béton, l'armature étant elle-même comprimée. L'expérience montre que, lorsque la tendance au retrait est assez forte, ces déformations empêchées sont assez grandes pour provoquer, à elles seules, la fissuration du béton. Dans de nombreux cas, les tensions correspondantes ne suffisent pas pour provoquer la fissuration, mais ont pour effet de localiser des tendances à la fissuration.

Celle-ci se produit aux endroits spécifiés par l'effet d'actions supplémentaires (battage dans le cas des pieux, flexion dans le cas des poutres et dalles, etc.) n'ayant pas de rapport direct avec les localisations constatées.

Ces effets du retrait dus à l'hétérogénéité du béton armé ne paraissent guère avoir été étudiés et ne semblent pas suffisamment connus des praticiens. Les tensions internes dues à l'empêchement de retrait dans le sens longitudinal des armatures ont principalement retenu l'attention. Elles sont cependant moins directes et moins caractéristiques que celles qui se développent transversalement, car elles sont conditionnées par l'adhérence ou du moins un empêchement de glissement du béton par rapport aux barres d'acier.

L'empêchement de retrait transversal est direct ; il résulte directement de l'invariabilité de volume

le l'armature, sans intervention nécessaire de l'adhérence et sans limitation par celle-ci.

Les figures 4 et 5 reproduisent les photographies des disques en pâte pure de ciment à retrait élevé, contenant des cylindres d'aciers co-axiaux ou excentrés. Dans le cas de la figure 4, les cylindres métalliques étaient graissés, pour éviter autant que pos-

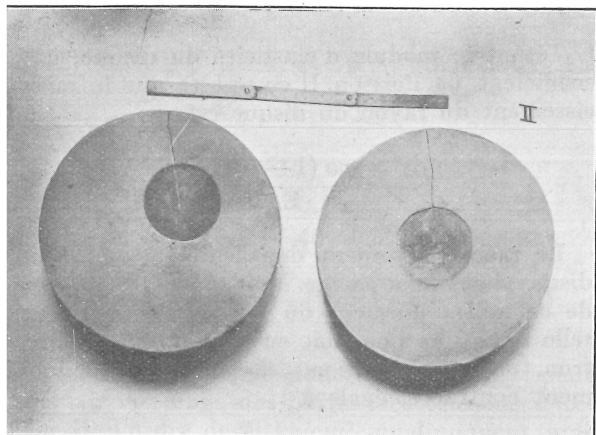


Fig. 4.

ble l'adhérence au ciment. Dans le cas de la figure 5, les cylindres étaient non graissés et adhérents au ciment. Ces expériences démontrent à la fois la réalité des phénomènes décrits et leur caractère direct, indépendant de l'adhérence.

Une contre-épreuve caractéristique de cette expérience a été obtenue fortuitement dans le laboratoire du Génie Civil à Liège. Un disque cylindrique de pâte pure de ciment, bien sec et peu perméable, a été soumis à un examen de per-

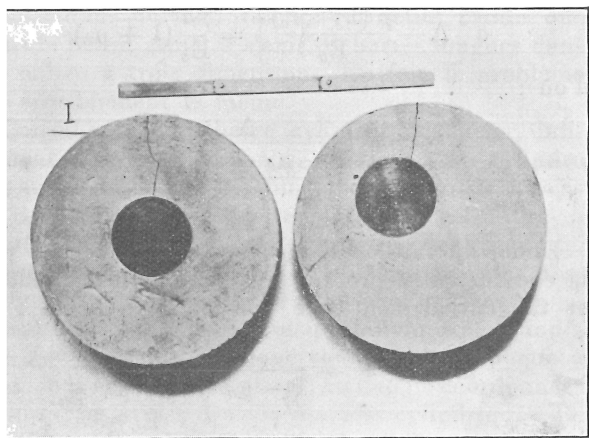


Fig. 5.

meabilité en appliquant sur une portion circulaire centrale, de 10 cm de diamètre, d'une de ses bases, une pression d'eau de cinq atmosphères. L'eau n'a pas traversé le disque, mais, après douze heures de cette expérience, ce disque s'est complètement fendu suivant un diamètre (fig. 6). L'explication proposée

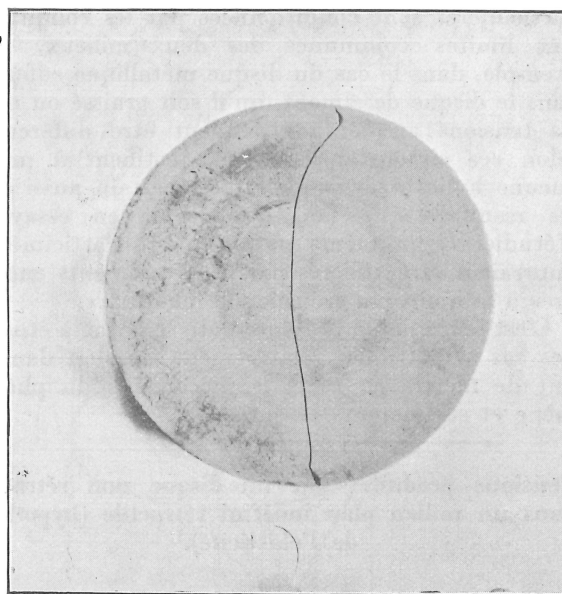


Fig. 6.

du phénomène est la suivante. Le ciment de la portion centrale s'est imbibé d'eau et a subi un fort gonflement, auquel l'anneau extérieur sec s'est opposé en formant une véritable frette. La résistance de cette frette en pâte de ciment n'a pas été suffisante pour résister à l'expansion du noyau humide. Le phénomène est d'ailleurs accidentel; d'autres disques soumis à une épreuve identique, sont restés entiers. Mais l'expérience a pu être répétée plusieurs fois dans d'autres conditions.

L'étude théorique de ces phénomènes rencontre comme principal obstacle la complexité des cas pratiques, de même que l'impossibilité d'une représentation simple des propriétés physiques et mécaniques des bétons. Celle des tensions internes résultant de l'empêchement de retrait longitudinal du béton armé a été faite dans l'hypothèse de l'élasticité, de différentes manières, dans des cas simplifiés, mais toujours entachés d'hypothèses arbitraires relatives aux limites, c'est-à-dire à l'adhérence.

Les cas théoriques simples d'empêchement de retrait dans le sens transversal ne sont pas affectés de cet inconvénient. En admettant l'hypothèse de l'élasticité, les équations générales permettent de résoudre des cas plus ou moins compliqués. Il est évident que la solution dépend, toutes choses égales d'ailleurs, des variations de volume relatives des deux milieux associés. Le résultat obtenu serait le même, en ce qui concerne les tensions internes, si le béton était invariable et si l'acier gonflait. Cette remarque montre la possibilité de l'étude du phénomène par la photo-élasticimétrie. Il suffit d'introduire dans un modèle troué un mandrin provoquant un élargissement du trou, sous réserve des précautions opératoires nécessaires. Cette méthode ou d'autres similaires seraient utiles pour l'étude des cas non symétriques, dont les solutions

particulières sont conditionnées par les conditions aux limites communes des deux milieux. Par exemple, dans le cas du disque métallique enfermé dans le disque de ciment, qu'il soit graissé ou non, les tensions au contact peuvent être différentes selon ces circonstances et ne justifient à priori aucune hypothèse simple. Il est certain aussi que les résultats que l'on obtiendrait en essayant d'étudier ce problème par la photo-élasticimétrie pourraient être affectés par les frottements engendrés à la limite du trou par le mandrin.

C'est pourquoi la présente note se borne à étudier des cas symétriques relativement simples, dans le but de mettre en relief le mécanisme du phénomène et ses facteurs essentiels.

Tensions produites par un disque non rétractile dans un milieu plan indéfini rétractile (hypothèse de l'élasticité).

Considérons dans un milieu indéfini plan, homogène et élastique, un trou circulaire de rayon a . Supposons qu'une pression normale uniforme p s'exerce dans le plan sur les bords du trou. On sait que la sollicitation qui en résulte est définie par un réseau orthogonal d'isostatiques, qui sont des rayons et des cercles concentriques au trou.

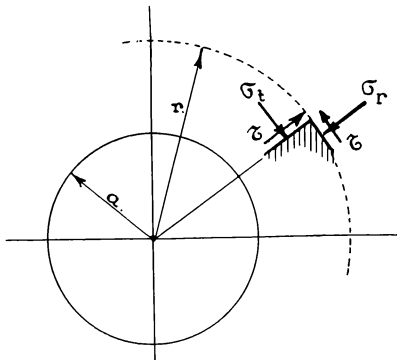


Fig. 7.

Suivant un cercle de rayon r , les tensions sont :

$$\sigma_r = p \frac{a^2}{r^2}, \quad \sigma_t = -p \frac{a^2}{r^2}, \quad \tau = 0$$

Donc, à la périphérie :

$$\sigma_r = p, \quad \sigma_t = -p$$

et il se développe donc au bord du trou des extensions égales à la compression.

Supposons que le trou soit rempli par un disque homogène élastique de volume spécifique constant, tandis que le milieu indéfini qui l'entoure serait le siège d'un retrait uniforme en tous sens. Le disque empêchera partiellement la déformation du milieu et se déformera lui-même partiellement. Il naîtra au contact une pression uniforme p , que nous admettrons normale.

Dans le disque, les isostatiques sont également des cercles concentriques et des rayons ; les tensions sont toutes purement normales et égales en tous les points.

$$\sigma_r = p \quad \sigma_t = p \quad \tau = 0$$

$$\delta_{ra} = \frac{1}{E_a} (\sigma_r - \mu_a \sigma_t) = \delta_{ta} = \frac{p}{E_a} (1 - \mu_a)$$

E_a étant le module d'élasticité du disque, μ_a son coefficient de Poisson. Il en résulte que le raccourcissement du rayon du disque est :

$$\frac{pa(1 - \mu_a)}{E_a}$$

Le raccourcissement dans le milieu entourant le disque doit être le même. Mais toutes les dimensions de ce milieu auraient dû se contracter de Δ , de telle sorte que l'on doit envisager, sur le bord du trou, une dilatation par rapport au milieu librement contracté, égale à :

$$a \left[\Delta - \frac{p(1 - \mu_a)}{E_a} \right]$$

Sous l'effet de la pression correspondante p au contact de la périphérie du disque, l'allongement du rayon du trou est :

$$\int_a^\infty \frac{p}{E_b} \frac{a^2}{r^2} (1 + \mu_b) dr = \frac{pa}{E_b} (1 + \mu_b)$$

E_b étant le module de Young du milieu, μ_b son coefficient de Poisson.

Il faut donc que :

$$a \left[\Delta - \frac{p(1 - \mu_a)}{E_a} \right] = \frac{pa}{E_b} (1 + \mu_b)$$

d'où :

$$p = \frac{\Delta}{\frac{1 - \mu_a}{E_a} + \frac{1 + \mu_b}{E_b}}$$

Donc, du fait de l'empêchement de retrait par la cheville, il se produit à la périphérie de celle-ci et tangentiellement une tension d'extension :

$$\sigma_{b\max} = - \frac{\Delta}{\frac{1 - \mu_a}{E_a} + \frac{1 + \mu_b}{E_b}}$$

A une distance r du centre du disque :

$$\sigma_b = \sigma_{b\max} \frac{a^2}{r^2}$$

Si la cheville est indéformable :

$$E_a = \infty \quad \text{et} \quad \sigma_{b\max} = - \frac{\Delta E_b}{1 + \mu_b}$$

Si μ_b est faible, ce que l'on peut admettre pour le béton :

$$\sigma_{b\max} = -\frac{\Delta E_b}{\frac{1-\mu_a}{m} + 1}$$

m désignant le rapport $\frac{E_a}{E_b}$.

Soient $\Delta = 4 \times 10^{-4}$, $E_b = 50.000 \text{ kg/cm}^2$,
 $m = 40$, $\mu_a = 0,30$:

$$\sigma_{b\max} = -\frac{4 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^4}{\frac{0,7}{40} + 1} = -\frac{20}{1,0175} = -19,65 \text{ kg/cm}^2.$$

Donc un retrait même modéré de 4×10^{-4} peut donner au voisinage des barres des tensions d'extension de l'ordre de 20 kg/cm^2 , qui diminuent rapidement à mesure que l'on s'éloigne de l'armature. Des amorces de fissures peuvent donc s'y produire. Lorsque ces amorces sont réalisées, les équations précédentes ne sont plus valables. Mais comme le retrait se développe progressivement, la théorie précédente permet une appréciation suffisante de la phase initiale du phénomène.

Tensions produites dans un cylindre indéfini rétractile par un cylindre coaxial à volume spécifique constant (hypothèse de l'élasticité).

On peut faire à la théorie élémentaire précédente l'objection qu'elle s'applique à un disque plan d'acier dans un plan indéfini rétractile, tandis que dans le béton armé, il s'agit de barres longues dans un milieu à trois dimensions. En fait, le problème est sensiblement le même.

Considérons une barre cylindrique d'acier, infiniment longue, de rayon a , coaxiale à un cylindre rétractile de béton, indéfini et de rayon R . Le cas de sollicitation est de révolution, c'est-à-dire à symétrie tournante indépendante des azimuts. Il est identique dans tous les plans parallèles normaux à l'axe. On admettra que ces sections transversales restent planes, puisque le cylindre est indéfini. Le problème est donc tout à fait analogue à celui de la sollicitation plane ; au lieu de coordonnées polaires, on utilise des coordonnées cylindriques. Le retrait naturel du béton est Δ , d'ailleurs entravé par la barre. Les équations d'élasticité pour le cylindre en béton sont :

$$\delta_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \delta_r = \frac{\partial \rho}{\partial r} \quad \delta_t = \frac{\rho}{r} \gamma_{rx} = \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial r}$$

$$\sigma_x = 2 G_b \left[\delta_x + \frac{\mu_b (\delta_x + \delta_r + \delta_t)}{1 - 2 \mu_b} \right]$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2 G_b \left[\delta_r + \frac{\mu_b (\delta_x + \delta_r + \delta_t)}{1 - 2 \mu_b} \right] \\ \sigma_t &= 2 G_b \left[\delta_t + \frac{\mu_b (\delta_x + \delta_r + \delta_t)}{1 - 2 \mu_b} \right] \\ \tau &= G_b \gamma_{rx}. \end{aligned}$$

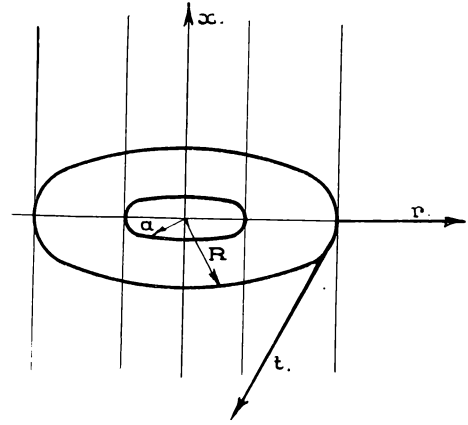


Fig. 8.

Les équations d'équilibre indéfinies sont :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\tau}{r} = 0$$

Le système étant de longueur indéfinie, on admet que σ_x est constant, ce qui revient somme toute à considérer un cas d'élasticité plane.

Donc :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \quad \text{d'où :} \quad \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d\tau}{\tau} + \frac{dr}{r} = 0$$

$\log r \tau = \log f(x) = c^{te}$, puisque le cylindre est indéfini.

Donc :

$$\tau = \frac{K}{r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0.$$

La première équation d'équilibre indéfini s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} &= \frac{2 G_b}{r} (\delta_r - \delta_t) + \\ 2 G_b \frac{\partial \left[\delta_r + \frac{\mu_b (\delta_x + \delta_r + \delta_t)}{1 - 2 \mu_b} \right]}{\partial r} &= 0 \end{aligned}$$

Le système étant indéfini suivant les x , on a :

$$\xi = kx + c^{te} \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \xi}{\partial r} = 0$$

Donc :

$$\gamma = 0, \quad \tau = 0, \quad \frac{\partial (\delta_x)}{\partial r} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial r} = 0$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{\delta_r - \delta_t}{r} + \frac{\mu_b}{1 - 2\mu_b} \frac{\partial (\delta_x + \delta_r + \delta_t)}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{\rho}{r^2} + \frac{\mu_b}{1 - 2\mu_b} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\rho}{r} \right) = 0$$

ou :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\rho}{r} \right) = 0$$

La solution est :

$$\rho = \alpha r + \frac{\beta}{r},$$

équation générale des enveloppes cylindriques épaisses ; α et β sont des constantes, car : $\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$.

Donc :

$$\xi = kx + \text{cte} \quad \rho = \alpha r + \frac{\beta}{r}$$

$$\delta_x = k \quad \delta_r = \alpha - \frac{\beta}{r^2} \quad \delta_t = \alpha + \frac{\beta}{r^2}$$

$$\sigma_x = 2 G_b \left[k + \frac{\mu_b (k + 2\alpha)}{1 - 2\mu_b} \right]$$

$$\sigma_r = 2 G_b \left[\alpha - \frac{\beta}{r^2} + \frac{\mu_b (k + 2\alpha)}{1 - 2\mu_b} \right]$$

$$\sigma_t = 2 G_b \left[\alpha + \frac{\beta}{r^2} + \frac{\mu_b (k + 2\alpha)}{1 - 2\mu_b} \right]$$

$$\tau = 0.$$

Dans le cas que nous envisageons $\sigma_r = 0$ à la périphérie du cylindre, d'où :

$$\alpha - \frac{\beta}{R^2} + \frac{\mu_b (k + 2\alpha)}{1 - 2\mu_b} = 0$$

$$\beta = R^2 \left[\alpha + \frac{\mu_b (k + 2\alpha)}{1 - 2\mu_b} \right] = R^2 \frac{\alpha + \mu_b k}{1 - 2\mu_b}$$

Donc :

$$\rho = \alpha r + \frac{R^2 \alpha + \mu_b k}{r}$$

$$\sigma_x = 2 G_b \left[k + \frac{\mu_b (k + 2\alpha)}{1 - 2\mu_b} \right]$$

$$\text{Comme :} \quad G_b = \frac{E_b}{2(1 + \mu_b)}$$

cette formule peut se transformer comme suit :

$$\sigma_x = E_b k + \frac{2 E_b \mu_b (\mu_b k + \alpha)}{(1 + \mu_b)(1 - 2\mu_b)}$$

$$\sigma_r = 2 G_b \left[\alpha - \frac{R^2 \alpha + \mu_b k}{r^2} + \frac{\mu_b (k + 2\alpha)}{1 - 2\mu_b} \right] =$$

$$2 G_b \frac{\alpha + \mu_b k}{1 - 2\mu_b} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_t = 2 G_b \frac{(\alpha + \mu_b k)}{(1 - 2\mu_b)} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right)$$

Du fait de l'empêchement partiel du retrait Δ par la présence de l'armature, le béton exerce sur celle-ci, à sa périphérie, une pression normale p . Donc, pour $r = a$:

$$\sigma_r = p = 2 G_b \frac{\alpha + \mu_b k}{1 - 2\mu_b} \left(1 - \frac{R^2}{a^2} \right)$$

$$\sigma_t = p \frac{1 + \frac{R^2}{a^2}}{1 - \frac{R^2}{a^2}} = p \frac{a^2 + R^2}{a^2 - R^2} = -p \frac{R^2 + a^2}{R^2 - a^2}$$

La dilatation relative du logement de la barre dans le béton, égale à l'empêchement de retrait, est :

$$(\delta_t)_b = \left(\frac{\rho}{r} \right)_{r=a} = \alpha + \frac{R^2 \alpha + \mu_b k}{a^2 (1 - 2\mu_b)}$$

Si $(\delta_t)_a$ est le raccourcissement de la périphérie de la barre d'acier, on a :

$$(\delta_t)_a - (\delta_t)_b = \Delta.$$

De même, k étant l'allongement relatif du béton, si l'on appelle k' le raccourcissement de la barre d'acier, on a $k' - k = \Delta$.

La sollicitation de la barre d'acier est la suivante. Elle subit un raccourcissement $\frac{\partial \xi}{\partial x} = k'$. Elle est soumise en outre à une pression normale uniforme p sur sa périphérie.

Il en résulte que :

$$\sigma_r = p \quad \sigma_t = p$$

$$\sigma_x = 2 G_a \left[k' + \frac{\mu_a (\sigma_x + 2p)}{E_a} \right],$$

car :

$$\Sigma \delta_x = \frac{1 - 2\mu_a}{E_a} \Sigma \sigma_x$$

$$\sigma_x \left(1 - \frac{2 G_a \mu_a}{E_a} \right) = 2 G_a \left(k' + \frac{2 \mu_a p}{E_a} \right)$$

Comme :

$$E_a = 2 G_a (1 + \mu_a), \text{ on a } \sigma_x = E_a k' + 2 \mu_a p.$$

Le raccourcissement périmétrique de la barre est :

$$(\delta_t)_a = \frac{1}{E_a} [p - \mu_a (p + \sigma_x)] = \frac{p}{2 G_a} (1 - 2\mu_a) - \mu_a k'.$$

Donc :

$$\frac{p}{2 G_a} (1 - 2\mu_a) - \mu_a k' - \alpha - \frac{R^2 \alpha + \mu_b k}{a^2 (1 - 2\mu_b)} = \Delta \quad (1)$$

$$k' = \Delta + k \quad (2)$$

L'équilibre des sections transversales exige que :

$$\pi a^2 [E_a k' + 2 \mu_a p] + \pi (R^2 - a^2) \left[E_b k + \frac{2 E_b \mu_b (\mu_b k + \alpha)}{(1 + \mu_b)(1 - 2\mu_b)} \right] = 0 \quad (3)$$

tandis que :

$$p = 2 G_b \frac{\alpha + \mu_b k}{1 - 2 \mu_b} \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right) \quad (4)$$

On déduit de la relation (4) :

$$\frac{\alpha + \mu_b k}{1 - 2 \mu_b} = \frac{p}{2 G_b \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)}$$

$$\alpha = \frac{(1 - 2 \mu_b) p}{2 G_b \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)} - \mu_b k.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (3), de même que la valeur de k tirée de (2), on obtient :

$$\Delta = \frac{2p(\mu_b - \mu_a)}{E_a} - \left[\frac{(R^2 - a^2) E_b}{a^2} + 1 \right] k.$$

Opérant de même dans l'équation (1), on trouve :

$$\Delta (1 + \mu_a) = (\mu_b - \mu_a) k -$$

$$p \left[\frac{1 - 2 \mu_b + \frac{R^2}{a^2}}{2 G_b \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)} - \frac{1 - 2 \mu_a}{2 G_a} \right]$$

Finalement, on obtient le système suivant de deux équations linéaires en p et en k :

$$\frac{2(\mu_a - \mu_b)}{E_a} p + \left(\frac{R^2 - a^2}{a^2 m} + 1 \right) k = -\Delta \quad (I)$$

$$\left[\frac{(1 + \mu_b) \left(1 - 2 \mu_b + \frac{R^2}{a^2}\right) m}{\left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)} - \right.$$

$$\left. (1 + \mu_a) \left(1 - 2 \mu_a\right) \right] \frac{p}{E_a} + (\mu_a - \mu_b) k = -\Delta (1 + \mu_a) \quad (II)$$

La solution de ces deux équations est la suivante :

$$p = \frac{E_a \Delta \left[1 + \mu_b + \frac{R^2 - a^2}{m a^2} (1 + \mu_a) \right]}{D}$$

$$D = 2 + \frac{R^2}{a^2} (1 + \mu_b) + \frac{m(1 + \mu_b) \left(1 - 2 \mu_b + \frac{R^2}{a^2}\right)}{\frac{R^2}{a^2} - 1} +$$

$$\frac{\frac{R^2}{a^2} - 1}{m} (1 + \mu_a) (1 - 2 \mu_a) - 4 \mu_a \mu_b - \mu_a - \mu_b$$

$$k = -\frac{\Delta}{D} \left[\frac{(1 + \mu_b) \left(1 - 2 \mu_b + \frac{R^2}{a^2}\right) m}{\frac{R^2}{a^2} - 1} + \right. \\ \left. (1 + \mu_a) (1 - 2 \mu_b) \right]$$

Si :

$$R = \infty \quad p = \frac{\Delta}{\frac{1 + \mu_b}{E_b (1 + \mu_a)} + \frac{1 - 2 \mu_a}{E_a}}$$

formule qui diffère de celle du cas plan par l'influence des tensions longitudinales. Naturellement $k = 0$, ce qui résulte uniquement des hypothèses faites.

Dans les plans radiaux, il existe des tensions d'extension :

$$\sigma_l = -p \frac{(R^2 + r^2) a^2}{(R^2 - a^2) r^2} =$$

$$-E_a \Delta \left[1 + \mu_b + \frac{R^2 - a^2}{m a^2} (1 + \mu_a) \right] \times \frac{(R^2 + r^2) a^2}{(R^2 - a^2) r^2}$$

En admettant :

$$\mu_b = 0, \quad \mu_a = 0,30,$$

$$D = m \frac{\frac{R^2}{a^2} + 1}{\frac{R^2}{a^2} - 1} + \frac{0,52}{m} (R^2 - 1) + \frac{R^2}{a^2} + 1,70$$

$$1 + \frac{1,30}{m} (R^2 - 1)$$

$$p = E_a \Delta \frac{\frac{R^2}{a^2} + 1}{m \frac{\frac{R^2}{a^2} + 1}{\frac{R^2}{a^2} - 1} + \frac{0,52}{m} (R^2 - 1) + \frac{R^2}{a^2} + 1,70}$$

$$k = -\Delta \frac{\frac{R^2}{a^2} + 1}{\frac{R^2}{a^2} - 1} m + 130$$

$$k = -\Delta \frac{\frac{R^2}{a^2} + 1}{m \frac{\frac{R^2}{a^2} + 1}{\frac{R^2}{a^2} - 1} + \frac{0,52}{m} (R^2 - 1) + \frac{R^2}{a^2} + 1,70}$$

Les formules se simplifient beaucoup en supposant $\mu_a = \mu_b = 0$. Les équations (I) et (II) en p et k ne comportent alors chacune qu'une inconnue et donnent :

$$p = \frac{\Delta E_a}{1 + m \frac{\frac{R^2}{a^2} + 1}{\frac{R^2}{a^2} - 1}}$$

$$k = -\Delta \frac{1}{\frac{R^2}{a^2} - 1} = -\Delta \frac{\frac{m a^2}{R^2 - a^2}}{1 + \frac{m a^2}{R^2 - a^2}}$$

Cette dernière formule est identique à une formule élémentaire assez fréquemment employée.

Les hypothèses faites pour l'obtenir montrent qu'elle néglige les effets du coefficient de Poisson et qu'elle n'est valable que pour des pièces de grande longueur, à grande distance des extrémités et en admettant que les sections transversales restent planes.

Mais, dans le problème considéré, k n'est qu'une inconnue auxiliaire, déterminée en vertu de conditions assez arbitraires et qui ne se rapporte qu'indirectement à l'étude des tensions et déformations transversales. Si l'on tenait compte du coefficient de Poisson du béton, en admettant $\mu_b = 0,20$, on aurait :

$$p = E_a \Delta \frac{1,20 + \left(\frac{R^2}{a^2} - 1\right) \frac{1,30}{m}}{1,20 m \frac{\frac{R^2}{a^2} + 0,60}{\frac{R^2}{a^2} - 1} + \frac{0,52}{m} \left(\frac{R^2}{a^2} - 1\right) + 1,20 \frac{R^2}{a^2} + 1,26}$$

et :

$$k = -\Delta \frac{1,20 \left(\frac{R^2}{a^2} + 0,60\right) m}{\frac{R^2}{a^2} - 1} + 0,78$$

$$1,20 m \frac{\frac{R^2}{a^2} + 0,60}{\frac{R^2}{a^2} - 1} + \frac{0,52}{m} \left(\frac{R^2}{a^2} - 1\right) + 1,20 \frac{R^2}{a^2} + 1,26$$

Pour :

$$r \equiv (a, R)$$

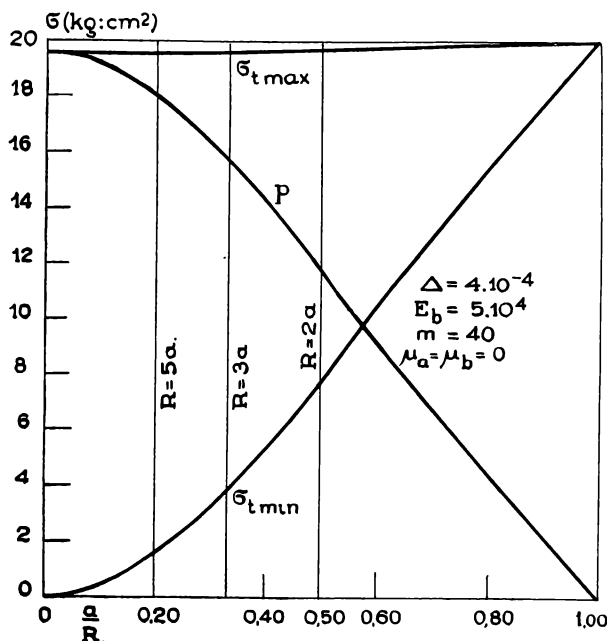


Fig. 9.

$$\sigma_r = p \frac{R^2 - r^2}{R^2 - a^2} \times \frac{a^2}{r^2}, \quad \sigma_t = -p \frac{R^2 + r^2}{R^2 - a^2} \times \frac{a^2}{r^2}$$

La valeur maximum de σ_t est :

$$(\sigma_t)_a = -p \frac{R^2 + a^2}{R^2 - a^2}$$

Soient $a = 1$ cm, $R = 5$ cm, $E_b = 50.000$ kg/cm², $m = 40$, $\Delta = 4.10^{-4}$.

Supposons : $\mu_a = \mu_b = 0$; $p = 18,05$ kg/cm²; $\sigma_{t_{\max}} = -19,55$ kg/cm²; $\sigma_{t_{\min}} = -1,505$ kg/cm²; $k = -0,625$ $\Delta = -2,5 \cdot 10^{-4}$.

Supposons : $\mu_b = 0$; $\mu_a = 0,30$; $p = 20,25$ kg/cm²; $\sigma_{t_{\max}} = -21,95$ kg/cm²; $\sigma_{t_{\min}} = -1,69$ kg/cm²; $k = 0,635$ $\Delta = -2,54 \cdot 10^{-4}$.

Supposons enfin : $\mu_b = 0,20$, $\mu_a = 0,30$; $p = 19,15$ kg/cm²; $\sigma_{t_{\max}} = -20,75$ kg/cm²; $\sigma_{t_{\min}} = -1,60$ kg/cm²; $k = -0,628$ $\Delta = -2,51 \cdot 10^{-4}$.

Soient : $a = 1$ cm; $R = \infty$; $\mu_a = \mu_b = 0$, les valeurs de E_a , m et Δ étant les mêmes que ci-dessus, alors :

$$\sigma_{t_{\max}} = -p = -\frac{20}{1,025} = -19,50 \text{ kg/cm}^2.$$

Soient : $a = 1$ cm.; $R = 2$ cm, les valeurs de E_a , m et Δ étant les mêmes que ci-dessus, alors, si $\mu_a = \mu_b = 0$

$$p = 11,80 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_{t_{\max}} = -19,70 \text{ kg/cm}^2; \\ \sigma_{t_{\min}} = -7,87 \text{ kg/cm}^2.$$

Si :

$$\mu_b = 0; \mu_a = 0,30; p = 12,10 \text{ kg/cm}^2; \\ \sigma_{t_{\max}} = -20,20 \text{ kg/cm}^2; \\ \sigma_{t_{\min}} = -8,10 \text{ kg/cm}^2.$$

Ces résultats sont représentés en diagrammes aux figures 9 et 10; ils montrent :

1° Que l'étreinte de la barre d'acier sous l'effet du retrait latéral du béton croît à mesure que l'épaisseur de l'enveloppe de béton augmente, mais tend assez rapidement vers une valeur limite.

2° Que les tensions maxima d'extension du béton au contact de l'armature ne varient guère en fonction de l'épaisseur du béton et sont du même ordre de grandeur lorsque l'enveloppe est mince que lorsqu'elle est épaisse. Cette tension maximum est sensiblement équivalente à celle qui résulte de l'empêchement total du retrait.

3° Que les tensions d'extension du béton décroissent rapidement lorsque la distance de l'armature

augmente. Elles sont minima à la surface libre du cylindre en béton et ces valeurs minima, de même que les valeurs moyennes, sont d'autant plus faibles

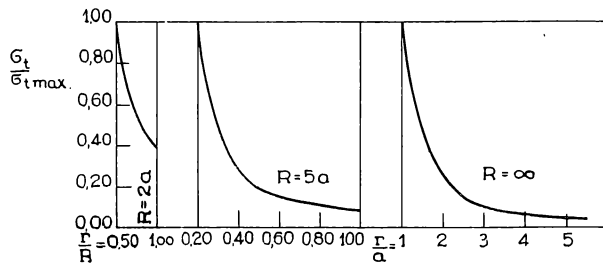


Fig. 10.

que l'épaisseur de l'enveloppe est plus grande, c'est-à-dire que la décroissance de σ_l est d'autant plus rapide que $\frac{R}{a}$ est plus grand. On a d'ailleurs :

$$\int_a^R \sigma_l dr = -pa \text{ et } \sigma_{l\text{moy}} = -\frac{pa}{R-a}.$$

4^o L'influence du coefficient de Poisson de l'acier

est appréciable et correspond à une augmentation de l'étreinte et des tensions d'extension. L'influence du coefficient de Poisson du béton, dont la grandeur est mal connue, est moindre et compense partiellement celle du coefficient de Poisson de l'acier.

Les tensions internes maxima développées par l'empêchement de retrait dû aux armatures sont considérablement plus grandes dans le sens transversal que dans le sens longitudinal, mais très localisées au voisinage de l'armature. Les exemples traités ci-dessus font comprendre le grand danger de formation de fissures apparentes parallèlement aux barres voisines des surfaces libres, d'autant plus que l'enveloppe de béton est plus mince. L'adhérence n'empêche pas ces fissures ; elle ne peut intervenir que pour s'opposer à des fissurations transversales par rapport aux barres. Les tensions internes dans le sens longitudinal sont moins grandes que dans le sens transversal, mais plus réparties et plus générales. La fissuration est fortement influencée par les forces d'adhérence et les glissements, elle n'est pas localisée.

(A suivre).