UNIVERSITÉ DE LIÉGE

COURS DE CONSTRUCTIONS DU GENIE CIVIL

N° 2

Formules et abaques pour le calcul des pièces fléchies en béton armé

PAR FERNAND CAMPUS,
INGÉNIEUR DES CONSTRUCTIONS CIVILES ET ELECTRICIEN,
(A. I. BR., A. I. LG. ET A. I. E. M.)
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

(Mémoire présenté au 1er Congrès International du Béton et du Béton armé. Liége 1930.)

Editions " LA TECHNIQUE DES TRAVAUX
196, Rue Grétry
LIEGE

Formules et abaques pour le calcul des pièces fléchies en béton armé.

PAR FERNAND CAMPUS PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

Le premier essai relatif à ces formules a été publié en 1924, dans les « Annales des Travaux Publics de Belgique » sous le titre : « Note sur le calcul organique des pièces fléchies en béton armé (avec tables numériques et graphiques) ».

Dans l'avant propos de ce travail, daté de mai 1922, nous écrivions : « On est étonné en constatant la diversité, atteignant souvent à la contradiction, qui existe dans les prescriptions des divers règlements nationaux. Il est cependant probable que les propriétés du béton armé ne sont pas à ce point dépendantes des circonstances géographiques. » Nous éprouvons un plaisir particulier à évoquer cette observation devant le Premier Congrès international du béton et du béton armé, qui réunit les ingénieurs d'un grand nombre de pays dans le but de confronter les méthodes, d'échanger les idées, d'atteindre à une meilleure compréhension commune et vraisemblablement à plus d'unité. Nous étions loin de prévoir, il y a huit ans, qu'il nous serait permis de consacrer quelques efforts à l'organisation et à la réussite d'une telle entreprise, mais nous en appréciions déjà le besoin et nous l'appelions déjà de nos vœux.

Cette première publication fut suivie de quelques autres sur le même sujet, dans les « Annales des Travaux Publics de Belgique » (1925), dans le « Constructeur de Ciment armé » (1924 et 1925) et dans la « Technique des Travaux » (1925). Il s'agissait de variantes et de compléments, qui laissaient toutefois subsister certaines lacunes et imperfections. Depuis nous avons pu mettre la méthode au point pour les besoins de notre enseignement et l'éprouver pratiquement pendant un temps suffisant pour nous permettre de croire qu'elle a atteint sa forme définitive.

Nous ne croyons pas opportun de reproduire l'ensemble des calculs d'établissement des formules ; on en trouve les principes dans les publications précitées. Le point de départ en est d'ailleurs tout simplement la théorie classique de la résistance des pièces fléchies en béton armé, établie en ne tenant pas compte des tensions de traction du béton. Elle est donc conforme aux hypothèses de la circulaire ministérielle française de 1906 ou encore de ce que les auteurs de langue allemande appellent le stade II ou II*b*.

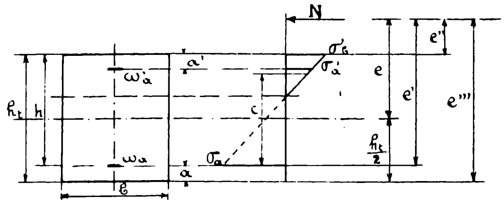
Les équations ordinaires d'équilibre des actions internes et externes sont transformées de manière à ne contenir plus que des quantités relatives sans dimensions physiques, par conséquent des nombres abstraits et absolus. Cette méthode est appliquée seulement aux sections d'usage courant, c'est-à-dire rectangulaires et en forme de T. Elle permet d'établir pour chacune de ces formes de section les formules les plus générales, relatives à la flexion plane composée d'une pièce à double armature. La seule restriction apportée à la rigueur théorique résulte du fait que, conformément à l'usage général, il n'est pas tenu compte, pour le calcul des poutres

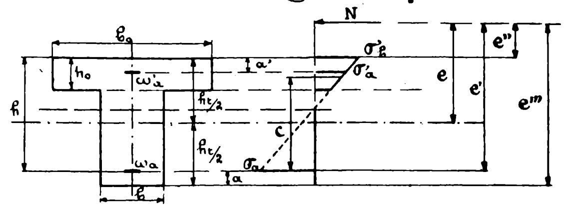
UNIVERSITÉ DE LIÈGE — FACULTÉ TECHNIQUE

Cours de constructions du génie civil.

— ABAQUES POUR LE CALCUL ORGANIQUE —
— DES PIÈCES FLÉCHIES EN BÉTON ARMÉ —

Section rectangulaire | Section T symétrique





Coefficients relatifs

$$\gamma = \frac{c}{h} \qquad \theta = \frac{\sigma_a}{m\sigma'_b}, \quad \varphi = \frac{\sigma'_a}{\sigma_a}, \quad \chi = \frac{\omega'_a}{\omega_a}, \quad \delta = \frac{h-a}{h}, \quad \delta' = \frac{h-a'}{h}, \quad \eta = \frac{h}{h_0}$$

Flexion simple, armature simple

$$\frac{m\omega_a}{bh} = \lambda, \quad \frac{M}{\omega_a\sigma_a h} = \gamma_0 \quad \frac{M}{bh^2\sigma'_b} = \mu$$

$$\frac{mM}{bh^2\sigma_a} = \mu'$$

$$\frac{m\omega_a}{b_0h_0} = \Lambda, \quad \frac{M}{\omega_a\sigma_a h} = \gamma_0, \quad \frac{M}{b_0h_0^2\sigma'_b} = \mathrm{M}$$

$$\frac{mM}{b_0h_0^2\sigma_a} = \mathrm{M}'$$

Flexion simple, armature double

$$\frac{m\omega_a}{bh} = \frac{\lambda}{1-\chi\varphi}, \quad \frac{M}{\omega_a\sigma_a h} = \gamma = \gamma_0 + \chi\varphi(\delta'-\gamma_0) = \gamma_0 + \chi\Phi$$

$$\frac{M}{bh^2\sigma'_b} = \mu + \chi\varphi\theta\delta'\frac{m\omega_a}{bh}$$

$$\frac{m\omega_a}{b_0h_0} = \frac{\Lambda}{1-\chi\varphi}, \quad \frac{M}{\omega_a\sigma_a h} = \gamma = \gamma_0 + \chi\varphi(\delta'-\gamma_0) = \gamma_0 + \chi\Phi$$

$$\frac{M}{b_0h_0^2\sigma'_b} = \mathrm{M} + \chi\varphi\theta\delta'\eta\frac{m\omega_a}{b_0h_0}$$

Flexion composée, armature simple.

$$\frac{m\omega_a}{bh} = \frac{\lambda}{1+\psi}, \quad \frac{N}{\omega_a\sigma_a} = \psi, \quad \gamma = \gamma_0$$

$$\frac{N(e+\frac{\delta}{2}h)}{bh^2\sigma'_b} = \mu$$

$$\frac{m\omega_a}{b_0h_0} = \frac{\Lambda}{1+\psi} \quad \frac{N}{\omega_a\sigma_a} = \psi, \quad \gamma = \gamma_0$$

$$\frac{N(e+\frac{\delta}{2}h)}{b_0h_0^2\sigma'_b} = \mathrm{M}$$

Flexion composée, armature double

$$\frac{m\omega_a}{bh} = \frac{\lambda}{1-\chi\varphi+\psi}, \quad \frac{N}{\omega_a\sigma_a} = \psi, \quad \gamma = \gamma_0 + \frac{\chi\varphi(\delta'-\gamma_0)}{1+\psi} = \gamma_0 + \frac{\chi\Phi}{1+\psi}$$

$$\frac{N(e+\frac{\delta}{2}h)}{bh^2\sigma'_b} = \mu + \chi\varphi\theta\delta'\frac{m\omega_a}{bh}$$

$$\frac{m\omega_a}{b_0h_0} = \frac{\Lambda}{1-\chi\varphi+\psi}, \quad \frac{N}{\omega\sigma_a} = \psi, \quad \gamma = \gamma_0 + \frac{\chi\varphi(\delta'-\gamma_0)}{1+\psi} = \gamma_0 + \frac{\chi\Phi}{1+\psi}$$

$$\frac{N(e+\frac{\delta}{2}h)}{b_0h_0^2\sigma'_b} = \mathrm{M} + \chi\varphi\theta\delta'\eta\frac{m\omega_a}{b_0h_0}$$

Formules

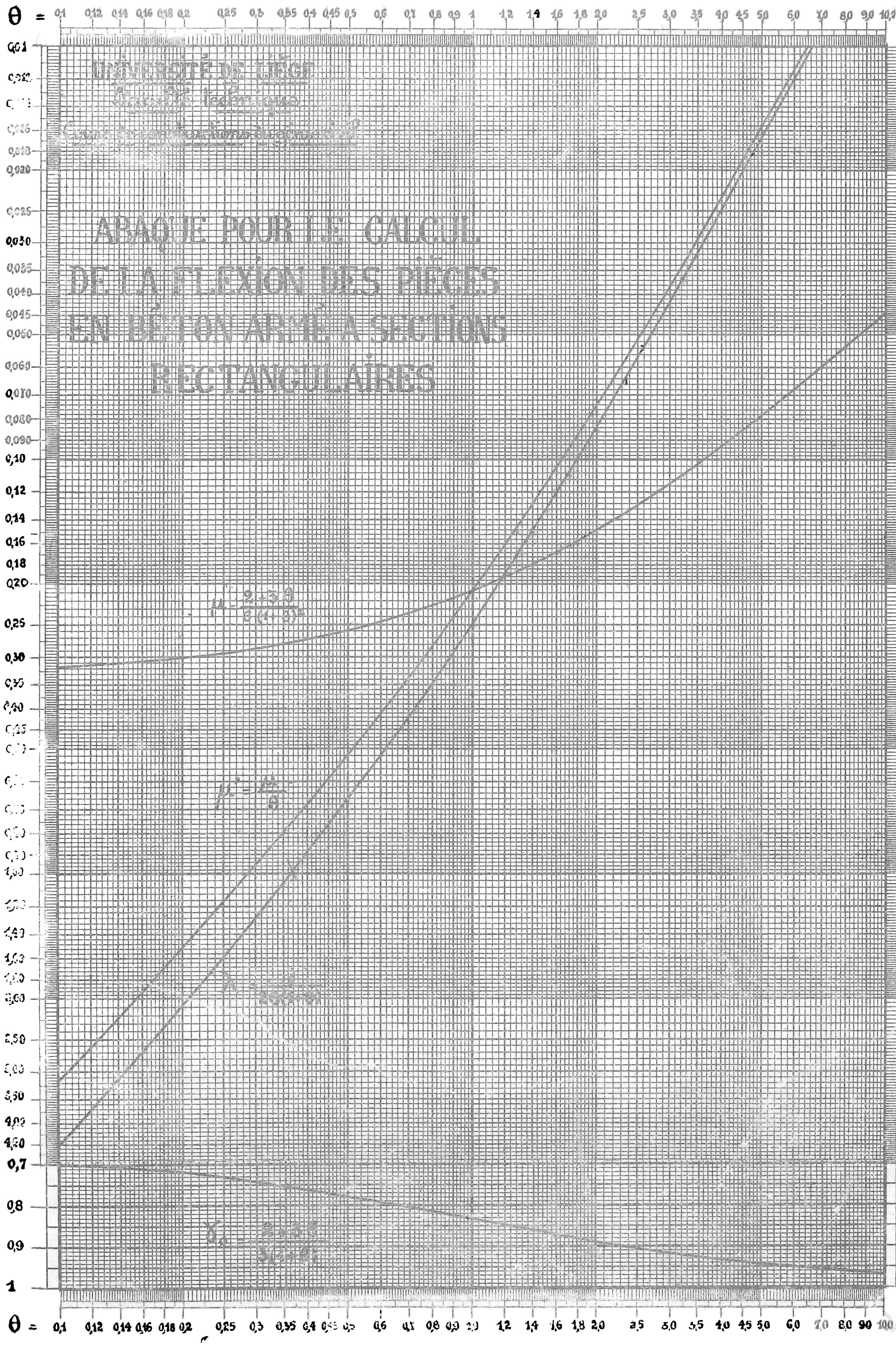
$$\lambda = \frac{1}{2\theta(1+\theta)}, \quad \mu = \frac{2+3\theta}{6(1+\theta)^2} \quad \mu' = \frac{\mu}{\theta}$$

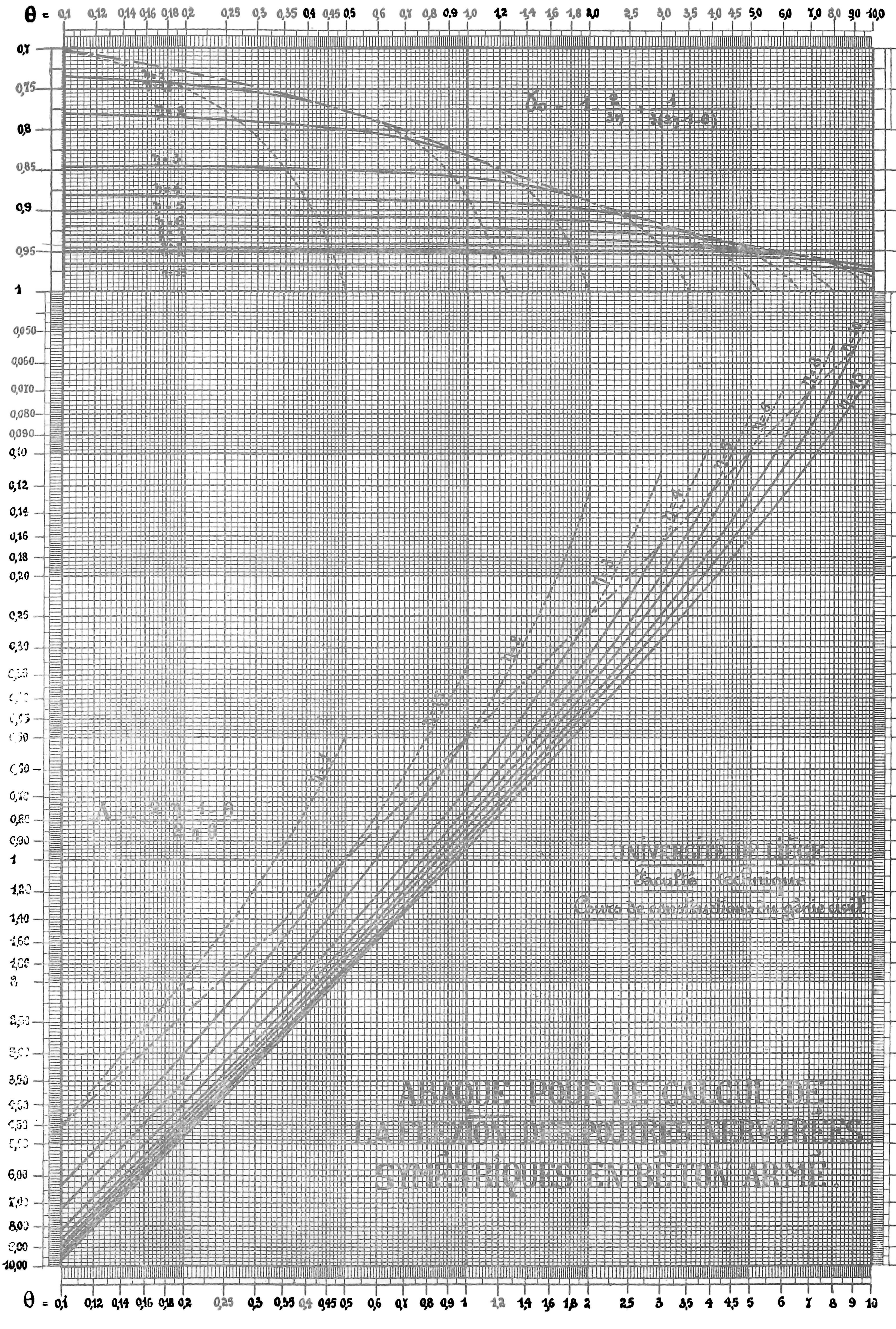
$$\gamma_0 = \frac{2+3\theta}{3(1+\theta)}$$

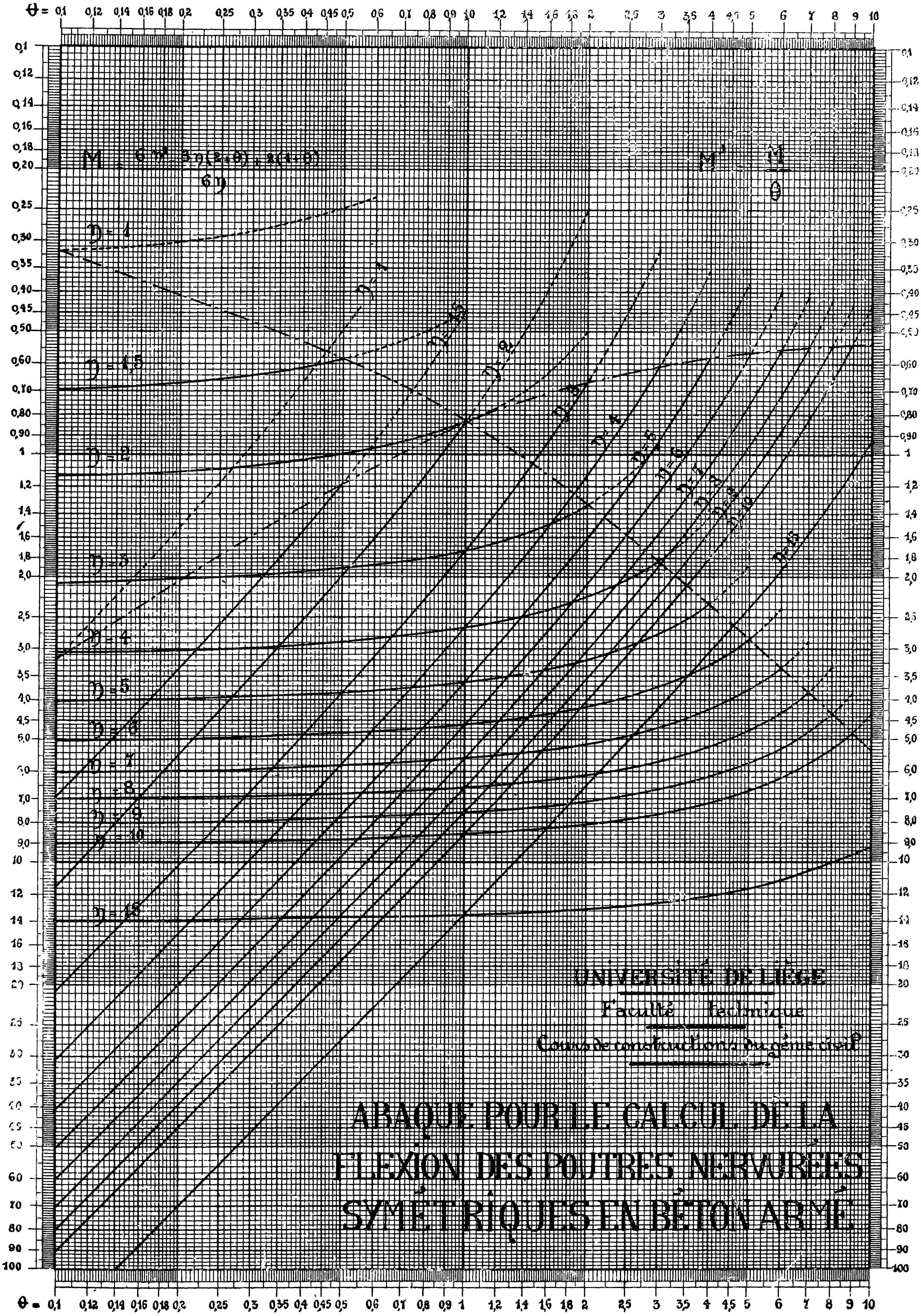
$$\Lambda = \frac{2\eta-1-\theta}{2\eta\theta}, \quad \mathrm{M} = \frac{6\eta^2-3\eta(2+\theta)+2(1+\theta)}{6\eta}$$

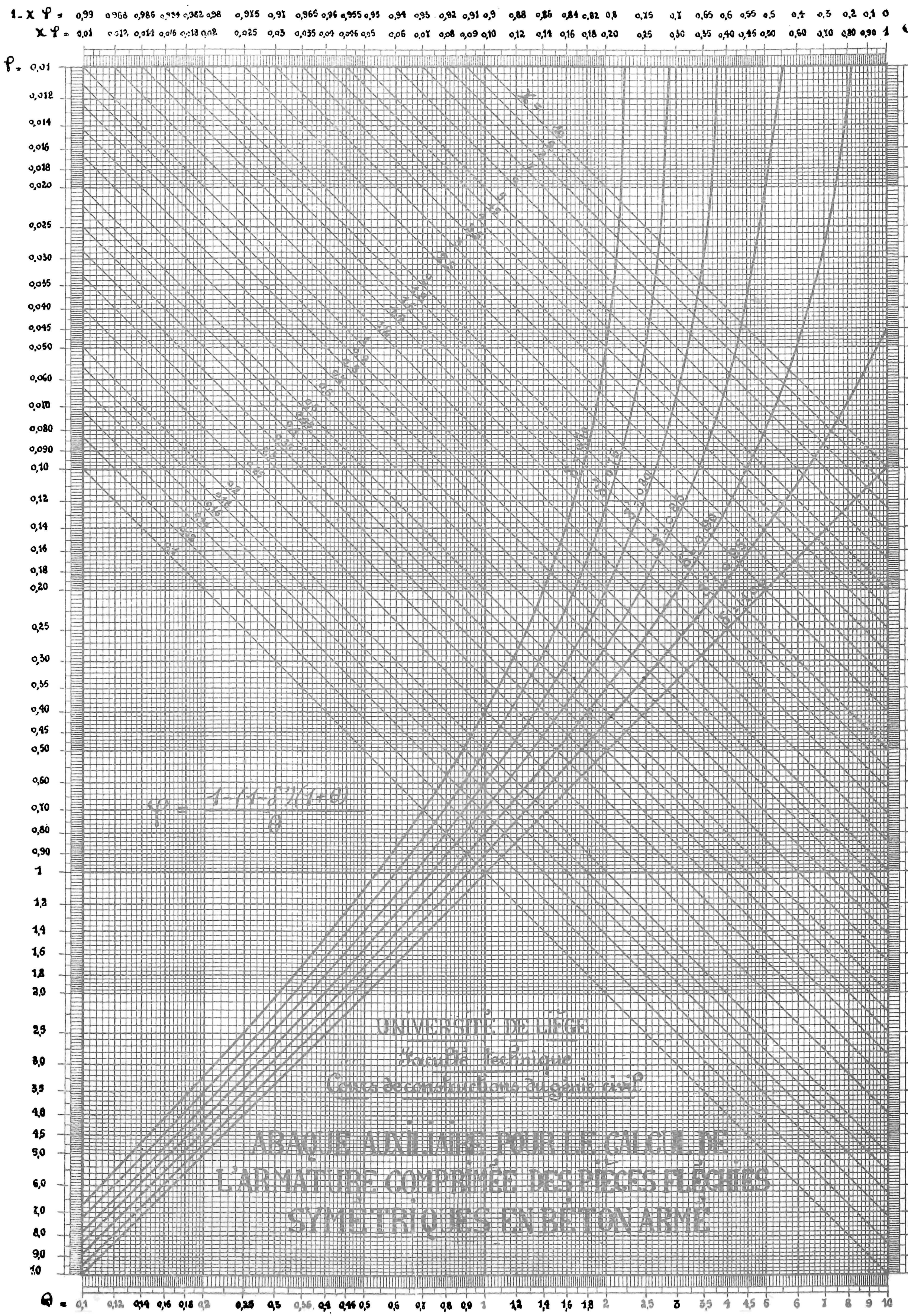
$$\mathrm{M}' = \frac{\mathrm{M}}{\theta}, \quad \gamma_0 = 1 - \frac{1}{2\eta} + \frac{1+\theta}{6\eta(2\eta-1-\theta)}$$

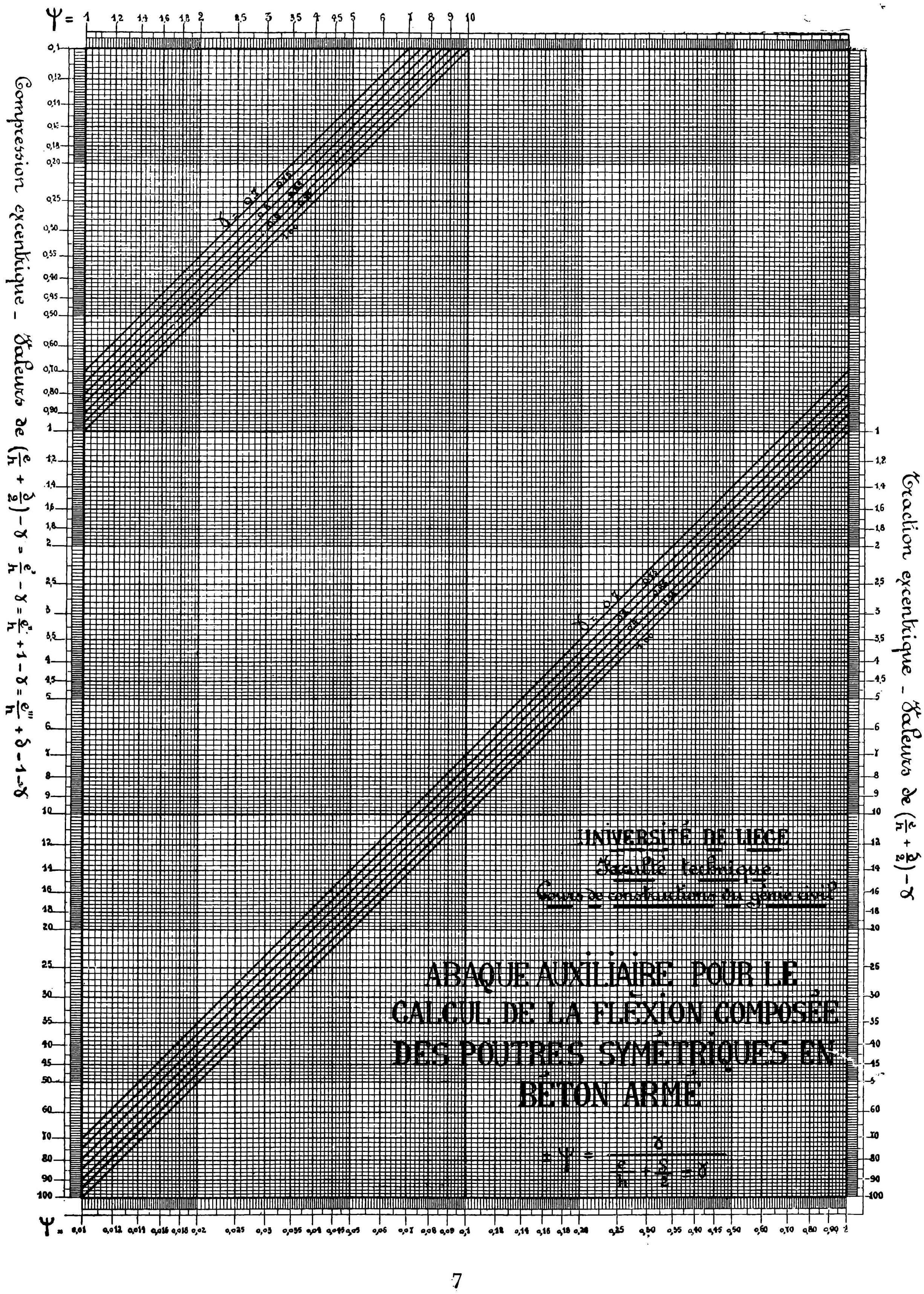
$$\varphi = \frac{1-(1-\delta')(1+\theta)}{\theta} \qquad \psi = \frac{\gamma}{\frac{e}{h}+\frac{\delta}{2}-\gamma} = \frac{\gamma}{\frac{e'}{h}-\gamma} = \frac{\gamma}{\frac{e''}{h}+1-\gamma} = \frac{\gamma}{\frac{e'''}{h}+\delta-1-\gamma}$$


UNIVERSITÉ DE LIÈGE
Faculté technique
Cours de constructions du génie civil
ABAQUE POUR LE CALCUL
DE LA FLEXION DES PIÈCES
EN BÉTON ARMÉ A SECTIONS
RECTANGULAIRES
θ =


ABAQUE POUR LE CALCUL DE
LA FLEXION DES POUTRES NERVURÉES
SYMÉTRIQUES EN BÉTON ARMÉ


M' = M/θ
UNIVERSITÉ DE LIÈGE
Faculté technique
Cours de constructions du génie civil
ABAQUE POUR LE CALCUL DE LA
FLEXION DES POUTRES NERVURÉES
SYMÉTRIQUES EN BÉTON ARMÉ


UNIVERSITÉ DE LIÈGE
Faculté technique
Cours de constructions du génie civil
ABAQUE AUXILIAIRE POUR LE CALCUL DE L'ARMATURE COMPRIMÉE DES PIÈCES FLÉCHIES SYMÉTRIQUES EN BÉTON ARMÉ


Compression excentrique - Valeurs de (e/h + δ/2) − γ
Traction excentrique - Valeurs de (e/h + δ/2) − γ
UNIVERSITÉ DE LIÉGE
Faculté technique
Cours de constructions du génie civil
ABAQUE AUXILIAIRE POUR LE CALCUL DE LA FLEXION COMPOSÉE DES POUTRES SYMÉTRIQUES EN BÉTON ARMÉ
Ψ = γ / (e/h + δ/2 − γ)

nervurées, des compressions existant dans la nervure, entre l'axe neutre et les ailes. Nous exposons plus loin un moyen de correction.

Les formules relatives aux divers cas possibles de flexion de pièces à armatures simples ou doubles se déduisent des formules les plus générales par des simplifications appropriées. La planche I ci-dessus reproduit, outre la définition des notations employées, l'ensemble des formules particulières pour tous les cas possibles. Il montre d'un premier coup d'œil l'unité de ces formules, qui constitue l'un des buts qu'elles cherchent à réaliser. Les coefficients numériques qui facilitent l'usage des formules sont représentés avec une précision suffisante en cinq abaques (planches II à VI) dont le dernier n'est même pas indispensable. Ils servent pour tous les cas de telle sorte qu'ils sont également familiers pour le calculateur, qu'il s'agisse d'un cas courant de flexion simple de pièce à armature simple ou d'un cas plus complexe de flexion composée de pièce à armature double.

Nous avons indiqué ci-dessus que les formules précédentes ont été établies en négligeant pour les poutres nervurées l'effet des compressions s'exerçant sur la partie de la nervure située entre l'axe neutre et les ailes. Ceci suppose toutefois que l'axe neutre soit en dehors des ailes et coupe la nervure. Il faut pour cela que $\frac{v'}{h_0} > 1$ ou $\frac{\eta}{1 + \theta} > 1$ ou $\eta > 1 + \theta$. Lorsque $\eta < 1 + \theta$ les poutres nervurées se calculent comme des poutres rectangulaires, puisque l'axe neutre est dans l'étendue des ailes. La limite d'emploi des abaques II et III relatifs aux poutres nervurées correspond à $\eta = 1 + \theta$ et est représentée sur ces abaques par une ligne frontière tracée en trait —·—·— Les parties utiles des courbes sont en trait plein, elles sont prolongées au delà de la frontière par des parties en trait interrompu en vue de servir aux interpolations.

Lorsque $\frac{v'}{h_0}$ est > 1, il y a lieu d'apporter éventuellement une correction aux formules précédentes p[illegible] tenir compte de la région comprimée de la nervure. Cette correction est d'autant plus importante que l'excès de $\frac{v'}{h_0}$ par rapport à l'unité est plus grand et ne devient sensible que lorsque la nervure est relativement large et pour des valeurs très élevées de η ou des valeurs très faibles de θ (notamment en cas de compressions excentriques). Ces cas sont donc peu fréquents. Les formules corrigées sont :

$$\frac{m\omega_a}{b^0 h_0} = \frac{\Lambda}{1 - \chi\varphi + \psi}(1 + \nu\varepsilon),$$

$$\frac{M}{b_0 h_0^2 \sigma_b'} \text{ ou } \frac{N(e + 0{,}5\delta h)}{b_0 h_0^2 \sigma_b'} = \left(\mathbf{M} + \chi\varphi\delta'\theta\eta\frac{m\omega_a}{b_0 h_0}\right)(1 + \nu\varepsilon) - \nu\varepsilon'$$

en posant

$$\nu = \frac{b}{b_0}, \qquad \varepsilon = \frac{\left(\frac{v'}{h_0} - 1\right)^2}{2\frac{v'}{h_0} - 1} = \frac{(\eta - 1 - \theta)^2}{(1 + \theta)(2\eta - 1 - \theta)},$$

$$\varepsilon' = \frac{\left(\frac{v'}{h_0} - 1\right)^2 \frac{v'}{h_0}}{3\left(\frac{2v'}{h_0} - 1\right)} = \varepsilon\frac{\eta}{3(1 + \theta)}.$$

On peut également obtenir la valeur corrigée de

$$\gamma\,\text{corr} = \gamma - \nu\left[\frac{\varepsilon'}{\Lambda\eta\theta(1 + \nu\varepsilon)(1 + \psi)} - \frac{\chi\varphi}{1 + \psi}\delta'\varepsilon\right]$$

En règle générale, le terme de correction est très faible. La table ci-après, extraite d'une note publiée dans les « Annales des Travaux Publics de Belgique » en octobre 1925, donne les valeurs des coefficients de correction ε et ε' en fonction de $\frac{v'}{h_0}$.

$\frac{v'}{ho}$	ε	ε'	$\frac{v'}{ho}$	ε	ε'
1.00	0.000	0.000	2.60	0.610	0.528
1.10	0.008	0.003	2.70	0.657	0.591
1.20	0.029	0.011	2.80	0.704	0.657
1.30	0.056	0.024	2.90	0.752	0.727
1.40	0.089	0.041	3.00	0.800	0.800
1.50	0.125	0.063	3.10	0.848	0.876
1.60	0.164	0.087	3.20	0.896	0.956
1.70	0.204	0.116	3.30	0.945	1.039
1.80	0.246	0.148	3.49	0.993	1.126
1.90	0.289	0.183	3.50	1.042	1.215
2.00	0.333	0.222	3.60	1.090	1.308
2.10	0.378	0.265	3.70	1.139	1.405
2.20	0.424	0.311	3.80	1.188	1.505
2.30	0.469	0.360	3.90	1.237	1.608
2.40	0.516	0.413	4.00	1.286	1.714
2.50	0.563	0.469	4.20	1.384	1.937

S'il est possible ainsi, moyennant une complication généralement superflue, de perfectionner les formules afin de leur donner dans le cas des poutres nervurées toute la rigueur que comportent les hypothèses de résistance, il sera souvent considéré comme plus utile de pouvoir simplifier l'usage des formules en vue de leur application rapide à la détermination de dimensions d'avant projet. Nous examinerons ci-après en commentant les divers cas d'emploi, quelles approximations sont licites à cette fin. On peut d'ailleurs établir des formules expéditives en se basant sur les hypothèses suivantes.

Pour les sections rectangulaires, on admet que :

$$\delta' = \gamma_0 = \frac{2 + 3\theta}{3(1+\theta)}$$

dans ces conditions $\gamma = \gamma_0$ et $\varphi = \frac{2}{3\theta}$

Donc, *en cas de flexion simple et d'armature double :*

$$\frac{m\omega_a}{bh} = \frac{\lambda}{1 - \frac{2\chi}{3\theta}} \quad , \quad \frac{M}{\omega_a \sigma_a h} = \gamma_0$$

En cas de flexion composée et d'armature double :

$$\frac{m\omega_a}{bh} = \frac{\lambda}{1 - \frac{2\chi}{3\theta} + \psi} \qquad \frac{M}{\omega_a \sigma_a} = \psi \quad , \quad \gamma = \gamma_0$$

Pour les sections nervurées, on observe que l'on peut mettre l'expression de γ_0 sous la forme :

$$\gamma_0 = 1 - \frac{1}{2\eta} + \frac{1+\theta}{6\eta\,(2\eta - 1 - \theta)}$$

Comme $\eta > 1 + \theta$, le troisième terme du second membre est toujours relativement faible et l'on peut, sans très grande erreur, écrire :

$$\gamma_0 = 1 - \frac{1}{2\eta}$$

ce qui revient à supposer que la résultante des tensions de compression du béton passe par le milieu de l'aile. Nous admettons en outre que $\delta' = \gamma_0$ Il en résulte que $\gamma = \gamma_0$ et

$$\varphi = \frac{2\eta - (1+\theta)}{2\eta\theta} = \Lambda$$

Dès lors, les formules deviennent :

1. — *Flexion simple, armature simple*

$$\frac{m\omega_a}{b_0 h_0} = \Lambda, \quad M = \omega_a \sigma_a \,(h - 0{,}5\ h_0)$$

2. — *Flexion simple, armature double*

$$\frac{m\omega_a}{b_0 h_0} = \frac{\Lambda}{1 - \chi\Lambda}, \quad M = \omega_a \sigma_a (h - 0{,}5\ h_0)$$

3. — *Flexion composée, armature simple.*

$$\frac{m\omega_a}{b_0 h_0} = \frac{\Lambda}{1 + \psi}, \quad N\,(e - 0{,}5\ h_t + 0{,}5\ h_0) =$$

$$\omega_a\ \sigma_a\ (h - 0{,}5\ h_0), \ \gamma_0 = \frac{2\eta - 1}{2\eta}$$

4. — *Flexion composée, armature double.*

$$\frac{m\omega_a}{b_0 h_0} = \frac{\Lambda}{1 - \chi\Lambda + \psi}, \quad N\,(e - 0{,}5 h_t + 0{,}5\ h_0) =$$

$$\omega_a\ \sigma_a (h - 0{,}5 h_0), \quad \gamma = \gamma_0 = \frac{2\eta - 1}{2\eta}$$

L'abaque II suffit pour tous les cas possibles.

Ainsi que nous l'avons montré dans l'article publié dans la « Technique des Travaux » en 1925, l'approximation de ces formules très simples est toujours très satisfaisante en pratique ; en outre les faibles erreurs commises sont favorables à la sécurité dans tous les cas usuels. L'approximation est d'autant meilleure que η est plus grand et que θ est plus petit, seulement c'est également dans ces cas que la correction relative à la zone comprimée de la nervure est la plus grande. Par conséquent, on peut admettre que l'approximation vraie de la méthode simplifiée est à peu près la même en toutes circonstances, sauf lorsque η devient voisin de $1 + \theta$. Car alors la résultante des compressions se rapproche du tiers supérieur de l'épaisseur des ailes et, à la limite, on doit se reporter aux formules simplifiées des sections rectangulaires établies plus haut.

* * *

FLEXION SIMPLE, ARMATURE SIMPLE

Les formules relatives à ce cas de sollicitation pour les pièces à section rectangulaire établissent la propriété de similitude statique de ces sections, qui peut s'exprimer comme suit :

A une même valeur de $\theta = \frac{\sigma_a}{m\sigma'_b}$ correspondent

pour toutes les sections des valeurs égales de

$$\frac{m\omega_a}{bh} = \lambda, \ \frac{M}{\omega_a \sigma_a} = \gamma_0, \ \frac{M}{bh^2\sigma'_b} = \mu \quad \text{et} \quad \frac{mM}{bh^2\sigma_a} = \mu',$$

λ, γ_0, μ et μ' n'étant fonctions que de θ.

Il suffit de connaître l'un des éléments θ, λ, γ_0, μ et μ' pour pouvoir déterminer tous les autres. L'abaque I permet d'obtenir ce résultat avec une précision suffisante sans aucun calcul.

Il en résulte que tous les problèmes quelconques relatifs à un cas de flexion simple de pièce à section rectangulaire simplement armée sont immédiatement résolus.

Exemple : $b = 30$ cm, $h = 80$ cm., $\omega_a = 18.84$ cm^2 (6 barres de 20 m/m).

M = 1.500.000 Kgcm et m = 15.

$$\frac{m\omega_a}{bh} = 0{,}1175 = \lambda, \quad \text{d'où} \quad \theta = 1{,}625, \quad \gamma_0 = 0{,}87$$

$$\sigma_a = \frac{1.500.000}{18{,}84 \times 0{,}87 \times 0{,}80} = 1145 \text{ kg./cm}^2,$$

$$\sigma'_b = \frac{1145}{15 \times 1{,}625} = 47 \text{ kg./cm}^2.$$

Pour les pièces à section nervurée, la même propriété existe pour toutes les sections ayant même valeur du rapport $\eta = \frac{h}{h_0}$ de la hauteur théorique de la poutre à la hauteur des ailes. C'est-à-dire que Λ, γ_0, $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$ ne sont pas seulement fonctions de θ mais aussi de η.

Les abaques II et III représentent les courbes de ces éléments en fonction de θ pour diverses valeurs de η inscrites en cotes.

Il en résulte que les problèmes relatifs aux cas de flexion simple des pièces nervurées à armature simple sont aussi résolument immédiatement par l'emploi des abaques II et III.

Il se peut que l'on connaisse d'avance les dimensions extérieures de la poutre. Cette situation est fréquente. La hauteur du hourdis formant les ailes est connue. La hauteur de la nervure est imposée par l'espace disponible, ou choisie en proportion de la portée ou en vertu de considérations d'économie. (1)

La marche à suivre est alors identique à celle que l'on adopte si la pièce est à section rectangulaire, avec la seule différence que la cotation des courbes en valeurs de η étant discontinue, il faut apprécier par interpolation le point correspondant à la valeur de η du cas concret. On se rend compte, d'après les abaques, que la précision reste satisfaisante. Mais η est inconnu si le problème à résoudre est celui de déterminer la hauteur de la nervure c'est-à-dire h, σ^a, σ'_b, et m étant connus, ce qui définit θ. Le problème peut encore se résoudre directement, grâce à l'abaque III. On calcule la valeur de

$$\frac{M}{b_0 h_0^2 \sigma'_b} = \mathbf{M}$$

Comme on connaît θ, cela détermine un point de l'abaque des valeurs de $\mathbf{M}$, dont on apprécie la valeur correspondante de η d'après les cotes des courbes tracées sur l'abaque. On en déduit :

$$h = \eta h_0,$$

Si l'on estimait la précision de cette opération insuffisante, on procéderait par interpolation numérique.

Exemple : $b_0 = 100$ cm. $b = 30$ cm, $h_0 = 10$ cm, M = 1.000.000 kgcm, $m = 15$, $\sigma_a = 1200$ kg/cm^2 et $\sigma'_b = 50$ kg/cm^2. Donc $\theta = 1{,}60$

$$\frac{M}{b h_0{}^2 \sigma'_b} = \frac{1.000.000}{100 \times 100 \times 50} = 2 = \mathbf{M}$$

D'après l'abaque III, $\eta = 3.55$, d'où $h = 35.5$ cm.

D'après l'abaque II, $\Lambda = 0.391$ d'où $\omega_a = \frac{0.391 \times 100 \times 10}{15} = 26.1$ cm^2.

Observons que, d'après ces valeurs, $\frac{v'}{h_0} = 1{,}365$, donc $\varepsilon = 0{,}075$.

Comme $\nu = \frac{b}{b_0} = 0{,}30$, le facteur $(1 + \nu\varepsilon)$ est égal à 1.023.

On se rend compte de la faible importance de la correction relative à la mise en compte de la zone comprimée du béton. Cette correction serait d'ailleurs plutôt désavantageuse, car on obtiendrait une valeur plus faible de h et plus élevée de ω_a.

Il importe d'attirer l'attention sur l'utilité des courbes des fonctions μ, μ', $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$, qui servent principalement à permettre la solution du problème suivant :

Les dimensions extérieures de la pièce fléchie ainsi que sa sollicitation extérieure étant connues, calculer l'armature nécessaire en respectant les limites imposées R_a et R'_b de σ_a et σ_b. D'après ce que nous avons dit de la propriété de similitude

(1) Voir notamment : F. CAMPUS. « Etude de l'économie des pièces simplement fléchies en béton armé. *(Revue universelle des Mines, 1 et 15 décembre 1924)* et « Nouvelle étude sur le calcul économique du béton armé » *(idem, 1er novembre 1925)*.

statique des sections, il n'y a qu'une seule valeur du moment qui permette, pour une section donnée, la réalisation simultanée de R_a et R'_b ; c'est $M_r = \mu_r bh^2 R'_b$, ou $\mathbf{M}_r\ b_0 h_0^2 R'_b$. Cette valeur se déduit directement de l'abaque I ou III selon le cas.

Si le moment fléchissant M est $< M_r$, on pourra réaliser la limite R_a, mais σ'_b sera inférieure à sa limite. C'est l'inverse si M est $> M_r$.

Si M est $< M_r$, on calculera $\frac{mM}{bh^2R_a} = \mu'$ ou $\frac{mM}{b_0h_0^2R_a} = \mathbf{M}'$

on en déduira de l'abaque I ou III la valeur de θ qui est supérieure à

$$\theta_r = \frac{R_a}{mR'_b}\text{, d'où } \sigma'_b = \frac{R_a}{m\theta} < R'_b$$

D'autre part, λ ou Λ permettent de déterminer ω_a.

Si M est $\leq M'$, on calcule $\frac{M}{bh^2R'_b} = \mu$ ou $\frac{M}{b_0h_0^2R'_b} = \mathbf{M}$.

On en déduit comme ci dessus θ qui est $< \theta_r$. Par conséquent $\sigma_a = \theta m R'_b < R_a$.

On calcule enfin aisément ω_a.

Exemples. I. *Section rectangulaire.*

$b = 30$ cm., $h = 80$ cm., $R_a = 1500$ kg/cm², $R'_b = 50$ kg/cm², $m = 15$

M = 1.600.000 Kgcm.

Donc $\theta_r = 2$, $\mu_r = 0{,}148$ et $M_r = 0.148 \times 30 \times 6400 \times 50 = 1.420.000$ Kgcm.

Donc $M > M_r$ et $\sigma'_b = R'_b$.

$$\frac{M}{bh^2\sigma'_b} = \frac{1.6000.000}{30 \times 6400 \times 50} = 0{,}1667 = \mu.$$

D'après l'abaque I, $\theta = 1.62$ et $\lambda = 0{,}118$

$\sigma^a = 15 \times 1.62 \times 50 = 1215$ Kg/cm² < 1500

$$\omega^a = \frac{0{,}118 \times 30 \times 80}{15} = 18.90 \text{ cm}^2.$$

II. *Section à nervure.*

$b_0 = 100$ cm, $h_0 = 10$ cm, $h = 50$ cm, $m = 15$.

$R_a = 1200$ kg/cm²

$R'_b = 50$ kg/cm², M = 1.000.000 kg/cm.

$\theta_r = 1{,}60$, $\eta = 5$, $\mathbf{M}_r = 2{,}10$

$M_r = 2.10 \times 100 \times 100 \times 50 = 1.050.000$ kg/cm.

Donc $M < M_r$ et $\sigma_a = R_a$

$$\frac{mM}{b_0h_0^2R_a} = \frac{15 \times 1.000.000}{100 \times 100 \times 1200} = 1.25 = \mathbf{M}'$$

D'après l'abaque III,

$$\theta = 2.44, \quad \sigma'_b = \frac{1200}{15 \times 2.44} = 32{,}8 \text{ kg/cm}^2.$$

D'après l'abaque II

$$\Lambda = 0{,}27 \quad \text{et} \quad \omega_a = \frac{0{,}27 \times 100 \times 10}{15} = 18 \text{ cm}^2$$

Constatons enfin qu'en cas de flexion simple et d'armature simple, il n'y aurait aucun avantage à employer les formules approximatives, sauf éventuellement pour les poutres nervurées lorsque h est connu d'avance. Mais l'augmentation de rapidité du calcul est vraiment insignifiante. Lorsque h est inconnu, il faut se servir de $\mathbf{M}$, les formules approximatives ne s'emploient donc pas dans ce cas.

* * *

Influence de l'armature comprimée.

L'armature comprimée trouble la propriété de similitude des sections de la même manière que la nervure, c'est-à-dire qu'elle introduit un facteur indépendant de similitude supplémentaire, qui est le rapport $\chi = \frac{\omega'_a}{\omega_a}$ de l'armature comprimée à l'armature étendue. Par conséquent pour qu'il y ait similitude, il faut des valeurs communes de θ, de η et de χ ainsi que de δ', qui fixe la position de l'armature comprimée. Il nous a paru qu'il serait très complexe de tracer des abaques à quatre variables indépendantes, d'autant plus que l'influence du facteur χ s'exprime d'une manière très simple par rapport aux formules établies pour le cas d'armature simple. En fait, il faut plutôt considérer le facteur

$$\chi\varphi = \frac{\omega'_a}{\omega_a\sigma_a}$$

fonction lui-même de χ, δ', et θ

Nous avons jugé préférable de tracer un abaque IV de courbes de $\varphi = \frac{\sigma'_a}{\sigma_a}$ en fonction de θ et côtées en valeurs de δ'.

Nous y avons ajouté un nomogramme de multiplication (1) qui, grâce à l'emploi des coordonnées logarithmiques, se compose d'un réseau de droites parallèles côtées en valeur de $\chi = \frac{\omega'_a}{\omega_a}$ et qui permet de lire immédiatement sur l'échelle horizontale supérieure les valeurs de $\chi\varphi$ et de $(1 - \chi\varphi)$.

Le résultat le plus satisfaisant de cette méthode est que l'influence de l'armature comprimée s'exprime de la même manière dans tous les cas de flexion, ce qui fait que l'abaque auxiliaire IV s'emploie en combinaison avec I pour les pièces à section rectangulaire, comme avec II et III pour les poutres nervurées. C'est un avantage appréciable tant pour l'assimilation de la méthode que pour son usage.

Au point de vue des applications, il faut distinguer deux cas. Dans le premier χ est connu, soit par raison de construction (par ex. armature double symétrique) ou bien à cause d'alternance de flexion.

Dans ce cas, on déterminera par exemple χ en vertu de la règle sommaire :

$$\chi = \frac{\omega'_a}{\omega_a} = \frac{M'}{M}.$$

δ' est généralement connu ou choisi d'avance. Dans ces conditions, les problèmes qui se posent peuvent être résolus directement au moyen des abaques, à condition de connaître θ sans autre condition pour les sections rectangulaires et à condition de connaître η pour les sections nervurées. Les inconnues de ces problèmes sont par exemple ω_a et b, ω_a et h, ω_a et M, etc., ou ω_a et h_0, ω_a et M, (poutres nervurées) etc. Mais la résolution n'est plus directe lorsque θ n'est pas connu à priori, soit que les inconnues soient σ_a et σ'_b ou que l'une des inconnues soit σ_a ou σ'_b l'autre étant généralement h.

Dans ces cas, il faut recourir à la méthode des fausses solutions. On choisit deux valeurs de θ encadrant la solution et on interpole numériquement entre ces valeurs. Ces calculs ne sont pas très laborieux, néanmoins on s'aidera avantageusement des formules approximatives, qui donnent des résultats souvent satisfaisants par eux-mêmes, mais aussi qui guident avec certitude dans le choix des fausses solutions et évitent ainsi les tâtonnements superflus.

D'ailleurs la rapidité des calculs par les formules complètes peut aussi être augmentée en première approximation par les artifices suivants : δ' et γ_0 sont en général peu différents, on les admet égaux et $\gamma = \gamma_0$; pour une valeur définie de δ', si χ est inférieur à 1, l'influence de la variation de $\chi\varphi$ est généralement négligeable si la fourchette des fausses solutions de θ est assez serrée.

Exemple. Section rectangulaire $b = 30$ cm., $h = 80$ cm., $\omega_a = 10.18$ cm², $\omega'_a = 5{,}09$ cm², $M = 1.000.000$ kgcm, $m = 15$, $\delta' = 0{,}95$.

Donc $\chi = 0.5$ et $\frac{m\omega_a}{bh} = 0.0636$

D'après les formules approximatives

$$0.0636 = \frac{\lambda}{1 - \frac{1}{3\theta}}$$

$$\lambda = 0.0636 - \frac{0.0212}{\theta}$$

Pour $\theta = 2.50$

$$\lambda = 0.0565 > 0.0551 = 0.0636 - \frac{0.0212}{2.5}$$

Pour $\theta = 2.60$

$$\lambda = 0.0530 < 0.554 = 0.0636 - \frac{0.0212}{2.6}$$

On en déduit que $\theta = 2.54$ et $\lambda = 0.0552$

$$\gamma_0 = 0.908 \quad \sigma_a = \frac{M}{\omega_a \gamma_o h} = 1332 \text{ kg./cm}^2$$

$$\sigma'_b = \frac{1332}{15 \times 2.54} = 35.5 \text{ kg./cm}^2$$

Par les formules complètes, on trouve

$$\lambda = 0.0636\ (1 - \chi\varphi)$$

Pour $\theta = 2.50 \quad \lambda = 0.0565, \quad \varphi = 0.325$

$$(1 - \chi\varphi) = 0.8375$$

$$0.0636\ (1 - \chi\varphi) = 0.0532 < 0.0565.$$

Pour $\theta = 2.60, \quad \lambda = 0.0530, \quad \varphi = 0.315$

$$(1 - \chi\varphi) = 0.8425$$

$$0.0636\ (1 - \chi\varphi) = 0.0535 > 0.0530.$$

On trouve cette fois $\theta = 2.59$, $\lambda = 0.0535$

$$\lambda_o = 0.91 \quad \gamma = \gamma_o + \chi\varphi\ (\delta' - \gamma_0) =$$

$$0.91 + 0.158 \times 0.04 = 0{,}916.$$

---

(1) Plus exactement, l'initiative en revient à notre assistant M. R. SPRONCK, qui a bien voulu se charger de tracer les abaques d'après les anciennes tables numériques, étendues par le calcul de nouvelles valeurs. Il a apporté à cette occasion un concours très utile à notre travail.

$$\sigma_a = \frac{M}{\omega_a \gamma_0 h} = 1340 \text{ Kg./cm}^2$$

$$\sigma'_b = \frac{1340}{15 \times 2.59} = 35.5 \text{ kg/cm}^2$$

Cet exemple, approfondi à dessein, justifie toutes les observations générales précédentes et montre que, moyennant quelqu'entrainement dans l'emploi de la méthode, le calcul peut devenir quasi direct.

Dans l'autre cas, χ est inconnu. Il s'agit en général du problème suivant : étant donnée une pièce dont la hauteur est faible par rapport à la sollicitation, de telle sorte qu'il est impossible au moyen d'une armature unique de réaliser $\sigma_a = R_a$ sans que σ'_b dépasse R'_b, calculer les armatures ω_a et ω'_a nécessaires pour que l'on ait simultanément $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$.

θ est donc connu et, ainsi que nous allons le montrer par un exemple, le problème se résout directement par une équation du 1^er degré.

Soit un pont de chemin de fer à poutres sous voies, tel que

$b_0 = 160$ cm, $h = 130$ cm, $h_0 = 20$ cm, $b = 60$ cm, $R_a = 1000$ kg./cm² $R'_b = 35$ kg./cm², $m = 15$. Donc $\theta = 1.9$. Supposons $\delta' = 0.90$ et soit $M = 16.000.000$ Kgcm.

Comme $\eta = 6.5$, $\Lambda = 0.410$ $\gamma_0 = 0.95$ d'après l'abaque II.

D'après l'abaque IV $\varphi = 0.375$

Or $\dfrac{m\omega_a}{b_0 h_0} = \dfrac{\Lambda}{1 - x\varphi}$ et $\dfrac{M}{\omega_a \sigma_a h} = \gamma_0 + x\varphi(\delta' - \gamma_0)$

d'où $\dfrac{mM\ (1 - x\varphi)}{b_0 h_0 h \sigma_a \Lambda} = \gamma_0 + \chi\varphi\ (\delta' - \gamma_0)$

ou $\chi = \dfrac{mM - b_0 h_0 h \sigma_a \Lambda \gamma_0}{\varphi[mM + b_0 h_0 h \sigma_a \Lambda(\delta' - \gamma_0)]} = 0.926$

$$\frac{m\omega_a}{b_0 h_0} = \frac{0.410}{1 - 0.375 \times 0.926} = 0.629 \quad \omega_a = 134.20 \text{ cm}^2$$

$$\omega'_a = 0.926 \times 134.20 = 124.30 \text{ cm}^2$$

$$\omega_a + \omega'_a = 258{,}50 \text{ cm}^2$$

Notons que dans ce cas, $\dfrac{v'}{h_0} = 2.24$, d'où $\varepsilon = 0.442$. D'autre part,

$$\nu = \frac{60}{160} = 0.375, \text{ donc } (1 + \nu\varepsilon) = 1{,}1655$$

Il en résulte que l'influence de la compression de la zone supérieure de la nervure est assez sensible. Si l'on effectue le calcul on trouve que $\chi = 0.675$ et que $\omega_a + \omega'_a = 229$ cm², ce qui constitue une économie de métal assez appréciable.

Si l'on étudiait l'armature unique correspondante, on trouverait

$\dfrac{M}{b_0 h_0^2 R'_b} = 7.14$. Comme $\eta = 6.5$ l'abaque III donne pour $\mathbf{M} = 7.14$: $\theta = 0.73$ et $\Lambda = 1.18$ (abaque II)

Donc $\omega_a = 252$ cm² et $\sigma_a = 384$ kg./cm².

En tenant compte de la zone comprimée de la nervure, la double armature parait donc plus économique. Elle évite également la concentration excessive de métal sur une face de la poutre et réduit ainsi les tensions initiales, notamment celles dues au retrait. De telle sorte que dans un pareil cas, la double armature peut constituer une solution convenable. L'armature comprimée travaille à un taux aussi élevé (375 kg./cm²) que l'armature étendue lorsque celle-ci existe seule. (384 kg./cm².)

En toute autre circonstance, l'armature double ne paraît pas recommandable au point de vue de l'utilisation rationnelle de la matière. Car en effet, en admettant par approximation que $\gamma = \gamma_0$ pour une valeur donnée de σ_a et de σ'_b donc de θ, on voit que

$$\frac{m\omega_a}{bh} = \frac{\lambda}{1 - \chi\varphi}$$

et $$M = \omega_a\, \sigma_a\, \gamma_0\, h$$

Pour une section donnée, la quantité d'acier est multipliée par $1 - \chi\varphi$ en cas d'armature double, tandis que le moment résistant n'est guère multiplié que par $\dfrac{1 + \chi}{1 - \chi\varphi}$.

Si l'on considère b, h et ω_a constants, comme γ varie très peu et diffère peu de γ_0, on voit que l'influence d'une armature comprimée sur σ_a. est insignifiante.

Par contre, comme $\dfrac{m\omega_a}{bh} = \dfrac{\lambda}{1 - \chi\varphi}$

on voit que λ doit diminuer lorsque $\chi\varphi$ augmente, donc θ diminue et par conséquent aussi σ'_b.

Les formules mettent donc bien en relief le rôle des armatures comprimées.

* * *

Prédétermination du poids propre des pièces simplement fléchies

La question présente particulièrement d'intérêt pour les dalles et les poutres parallélipipèdiques. Les dimensions des poutres nervurées étant le plus souvent choisies à priori, le poids est connu.

Considérons une pièce à section rectangulaire de dimensions $b \times (h + a)$. Le poids par unité de longueur est $b\,(h + a)\,\Delta$, en désignant par Δ le poids spécifique du béton armé. Le moment fléchissant résultant du poids propre peut s'exprimer par $K\Delta b\,(h + a)$, K étant un coefficient numérique dépendant de la portée, des conditions d'appui et de l'emplacement de la section envisagée. Désignons par M′ le moment des forces extérieures Le moment total est :

$$M = M' + K\Delta b\,(h + a) = \omega_a \sigma_a\, \gamma h.$$

On s'impose généralement σ_a, σ_b' et χ (le cas échéant) et l'une des dimensions de la section, soit $(h + a)$ pour les poutres ou b, notamment pour les dalles. Comme on connaît θ, on déduit des abaques les valeurs de λ, γ et φ, d'où

$$\frac{m\omega_a}{bh} = \frac{\lambda}{1 - \chi\varphi}$$

En éliminant ω_a entre cette équation et la précédente, on obtient une équation du 1$^{\text{er}}$ degré en b, si b est l'inconnue, ou du second degré en h. On détermine ensuite ω_a.

Cette manière de procéder est particulièrement commode pour les dalles d'assez grande portée, dont le poids propre est souvent important en comparaison de la surcharge.

* * *

Flexion plane composée.

Il n'est pas nécessaire de modifier beaucoup les formules précédentes pour les rendre applicables à la flexion plane composée. Les mêmes coefficients, donnés par les mêmes abaques et employés de la même manière que précédemment conduisent aux résultats, avec le même degré d'exactitude. Il n'y a qu'un coefficient de plus, dont l'abaque V donne les valeurs. Mais ainsi que nous l'avons fait observer au commencement, cet abaque n'est même pas nécessaire, son utilité se borne à orienter plus rapidement dans les calculs de recherche préalables à l'établissement des avant-projets.

Un point important nous paraît être celui de bien définir les éléments de la flexion composée d'une pièce en béton armé, calculée sans tenir compte de la zone étendue du béton. Beaucoup d'auteurs se réfèrent au moment fléchissant M et à l'effort normal N. Selon la théorie classique de la flexion des pièces isotropes, le moment se rapporte à la fibre neutre. Or, même si les dimensions et les armatures sont connues, la fibre neutre correspondant à l'hypothèse de calcul précitée varie d'après le rapport de M à N. Cette manière d'envisager la question introduit une véritable inexactitude dans la théorie et donne lieu à des erreurs de calculs. Il est nécessaire de calculer les moments par rapport à un axe invariable et celui-ci peut être quelconque. En effet, la position de l'axe est indifférente pour le calcul des moments dus à des forces ou composantes agissant perpendiculairement par rapport à une pièce droite.

Pour ce qui est des forces ou composantes agissant suivant la longueur d'une telle pièce ou encore de la sollicitation des arcs, il importe uniquement de définir exactement la position du point d'action de la résultante des actions extérieures rapportées à une section, ce qui peut se faire par l'indication de ses coordonnées par rapport à des axes quelconques, mais invariablement liés à la section considérée.

Certains auteurs ont, très judicieusement donc, défini M par rapport à l'alignement de l'armature de traction. Théoriquement exacte, cette définition n'est pas toujours commode. Dans le calcul des systèmes hyperstatiques notamment, les lignes de pressions définissent les excentricités des efforts normaux par rapport à des axes schématisant la construction et qui ne correspondent certes pas à l'alignement des armatures principales étendues. Puisque le calcul hyperstatique se fait généralement en tenant compte de la zone étendue du béton, on pourrait faire coïncider ces axes avec les fibres neutres des pièces en béton armé déterminées en tenant compte de tout le béton. Mais ces fibres ne sont connues qu'après l'achèvement des calculs et elles ne sont pas rectilignes, sauf en cas de symétrie complète ; elles sont alors confondues avec les fibres médianes. Pratiquement et par raison de simplicité, on rapporte presque toujours les calculs hyperstatiques aux fibres médianes.

C'est la raison pour laquelle, dans nos formules, nous définissons principalement l'excentricité de N par rapport à la fibre médiane, c'est la distance e. Mais les formules permettent sans aucun changement d'envisager les excentricités e' par rapport à l'armature principale de traction, e'' par rapport à la fibre du béton la plus comprimée, e''' par rapport à la fibre extrême de la zone étendue du béton.

Entre ces quantités existent en effet les relations :

$$e + \frac{\delta}{2} h = e' = e'' + h = e''' + (\delta - 1)h$$

Il reste à distinguer la compression excentrique de la traction excentrique, ce qui se fait par une convention de signes très simple.

En cas de compression excentrique, N et e, e' e'' ou e''' sont positifs. En cas de traction excentrique, N, e, e' e'' ou e''' sont négatifs.

Comme les formules sont établies dans l'hypothèse que le béton ne résiste pas à l'extension et que l'armature ω_a est seule soumise à traction, elles ne sont valables que dans les limites suivantes :

en cas de compression excentrique :

$$\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} = \frac{e'}{h} = \frac{e''}{h} + 1 = \frac{e'''}{h} + \delta - 1 > \gamma;$$

en cas de traction excentrique :

$$\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} = \frac{e'}{h} = \frac{e''}{h} + 1 = \frac{e'''}{h} + \delta - 1 < 0$$

L'observation de ces règles toutes simples et logiques évite toute erreur. Pour diminuer les chances d'inattention à ces règles, l'abaque V porte une graduation spéciale pour les valeurs positives de $\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} - \gamma$ (compression excentrique) et pour les valeurs négatives (traction excentique) En outre la formule

$$\pm \psi = \frac{\gamma}{\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} - \gamma}$$

rappelle que ψ est positif ou négatif selon les cas. Si

$$0 < \frac{e}{h} + \frac{2}{\delta} = \frac{e'}{h} = \frac{e''}{h} + 1 = \frac{e'''}{h} + \delta - 1 < \gamma,$$

les formules ne sont plus applicables. En cas de compression excentrique, il faut porter en compte toute la section du béton (1) ; en cas de traction excentrique, il faut une double armature étendue.

Le tableau de la page 2 reproduit toutes les formules relatives à la flexion plane composée, établies d'après les considérations qui précèdent et en suivant la même voie que pour les formules de flexion simple. Elles sont exactes sous la seule réserve que, pour les poutres nervurées, elles ne tiennent pas compte de la zone comprimée de la nervure. Seulement les mêmes coefficients de correction que pour la flexion simple donnent la solution exacte, c'est-à-dire :

$$\frac{m\omega_a}{b_0 h_0} = \frac{\Lambda}{1 - \chi\varphi + \psi}(1 + \nu\varepsilon), \qquad \frac{N}{\omega_a \sigma_a} = \psi$$

$$\frac{N(e + 0{,}5\delta h)}{b_0 h_0^2 \sigma_b'} = \left(\mathbf{M} + \chi\varphi\delta'\theta\eta \frac{m\omega_a}{b_0 h_0}\right)(1 + \nu\varepsilon) - \nu\varepsilon'$$

$$\gamma \text{ corr.} = \gamma - \nu\left[\frac{\varepsilon'}{\Lambda\eta\theta(1 + \nu\varepsilon)(1 + \psi)} - \frac{\chi\varphi}{1 + \psi}\delta'\varepsilon\right]$$

L'importance généralement négligeable de la correction appelle les mêmes observations qu'à la page 8.

Au lieu de rechercher la rigueur absolue des formules, les praticiens seront souvent plus satisfaits de pouvoir se servir de formules approximatives plus simples. Ces formules et les hypothèses qui y conduisent ont été suffisamment exposées à la page 9 pour que nous puissions nous dispenser d'y revenir. Leur degré d'approximation est très satisfaisant. Il faut bien entendu tenir compte dans leur emploi de la convention de signes définie précédemment.

Exemples d'application

1. — SECTION RECTANGULAIRE. ARMATURE DOUBLE, TRACTION EXCENTRIQUE

$b = 30$ cm $h = 50$ cm, $\omega_a = 18.85$ cm², $\omega_b' = 9.42$ cm² $\chi = 0.5$ N $= 7000$ kg. et $e = -125$ cm, $a = a' = 4.5$ cm, $\delta = \delta' = 0.91$ $m = 15$. On demande de calculer σ_a et σ_b'

$$\frac{m\omega_a}{bh} = \frac{15 \times 18.85}{30 \times 50} = 0.1885 = \frac{\lambda}{1 - 0.5\varphi + \psi}$$

$$\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} = -2.50 + 0.455 = -2.045$$

(1) Pour le calcul dans ces conditions, voir « Note sur le calcul organique des pièces fléchies en béton armé » par F. CAMPUS *Annales des Travaux Publics de Belgique*, fasc. 1, 2 et 3 de 1924.

Solution approximative. $\frac{m\omega_a}{bh} = \frac{\lambda}{1 - \frac{1}{3\theta} + \psi} = 0{,}1885$, $\gamma = \gamma_0$.

Pour $\theta = 1.80$, $\lambda = 0{,}099$, $\gamma_0 = 0{,}88$,

$\psi = \frac{0{,}88}{-2.045 - 0{,}88} = -0{,}30$ $\frac{m\omega_a}{bh} = \frac{0{,}099}{0{,}515} = 0{,}1925$

On est donc très près de la solution.

Pour $\theta = 2.00$ $\lambda = 0{,}084$ $\gamma_0 = 0{,}89$,

$\psi = \frac{0{,}89}{-2{,}935} = -0{,}303$ $\frac{m\omega_a}{bh} = \frac{0{,}084}{0{,}53} = 0{,}158$

On en déduit que $\theta = 1.823$ $\psi = -0.3004$,

$$\sigma_a = \frac{7000}{18{,}85 \times 0{,}3004} = 1235 \text{ kg./cm}^2$$

$$\sigma'_b = \frac{1235}{15 \times 1{,}823} = 45{,}20 \text{ kg./cm}^2.$$

Solution exacte.

Pour $\theta = 1.80$ $\lambda = 0.099$ $\gamma_0 = 0.88$ $\varphi = 0.415$, $\gamma = 0{,}88 + 0{,}2075 \times 0{,}03 = 0{,}886$

$$\psi = \frac{0{,}886}{-2{,}045 - 0{,}886} = -0{,}302,$$

$$\frac{m\omega_a}{bh} = \frac{0{,}099}{1 - 0{,}2075 - 0{,}302} = 0{,}202$$

Pour $\theta = 2.00$ $\lambda = 0.084$ $\gamma_0 = 0.89$ $\varphi = 0{,}365$, $\gamma = 0{,}89 + 0{,}1825 \times 0{,}02 = 0{,}894$

$$\psi = \frac{0{,}894}{-2{,}045 - 0{,}894} = -0.304,$$

$$\frac{m\omega_a}{bh} = \frac{0{,}084}{1 - 0{,}1825 - 0{,}304} = 0{,}164$$

Donc $\theta = 1{,}87$, $\psi = -0{,}303$,

$$\sigma_a = \frac{7000}{18{,}85 \times 0{,}303} = 1225 \text{ kg. /cm}^2$$

$$\sigma'_b = \frac{1225}{15 \times 1{,}87} = 43{,}6 \text{ kg. /cm}^2$$

On voit donc :

1) que la méthode approximative donne des résultats très satisfaisants et favorables à la sécurité ;

2) que la valeur de ψ varie très peu, ce qui facilite et oriente les calculs et donne une grande certitude au sujet de la valeur de σ_a ou de ω_a.

II. — Poutre nervurée, compression excentrique, armature double

$b_0 = 150$ cm, $h_0 = 10$ cm, $h = 40$ cm, $a = a' = 5$ cm, $\delta = \delta' = 0.875$, $R'_b = 50$ kg/cm², $R_a = 1200$ kg./cm², $m = 15$ $\theta = 1.60$

$$N = 30.000 \text{ kg.} \qquad e = 60 \text{ cm.}$$

Comme $\eta = 4$, il résulte de l'abaque II que $\Lambda = 0.42$ $\gamma_0 = 0.89$

$$\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} = 1{,}50 + 0{,}4375 = 1.9375$$

On se rend compte que, comme $\delta' - \gamma_0 = -0{,}015$, γ est sensiblement égal à γ_0. D'ailleurs ψ varie peu et vaut $\frac{0{,}89}{1{,}9375 - 0{,}89} = 0{,}85$

Donc $\omega_a = \frac{N}{\psi\sigma_a} = \frac{30.000}{1200 \times 0{,}85} = 29{,}4$ cm²

D'après l'abaque IV, $\varphi = 0.42$

Donc $\frac{m\omega_a}{b_0 h_0} = \frac{15 \times 29{,}4}{150 \times 10} = \frac{\Lambda}{1 - \chi\varphi + \psi} = \frac{0{,}42}{1 - 0{,}42\,\chi + 0{,}85}$,

d'où $\chi = \frac{1{,}85}{0{,}42} - \frac{1}{0{,}294} = 1$. Donc $\omega'_a = \omega_a$

On aurait trouvé une solution rigoureuse en éliminant ω_a et ψ entre les relations :

$$\frac{m\omega_a}{b_0 h_0} = \frac{\Lambda}{1 - x\varphi + \psi}, \quad \frac{N}{\omega_a \sigma_a} = \psi$$

et $$\frac{N\left(\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2}\right)}{bh\sigma'_b} = \mathbf{M} + \chi\varphi\theta\delta'\eta\,\frac{m\omega_a}{b_0 h_0}$$

Mais par suite de la variation insignifiante de ψ et de γ_0, cette solution ne diffère pas de la précédente pour la valeur de ω_a et de 1 % à peine pour la valeur de χ.

Remarquons que les formules approximatives donnent

$$\gamma_0 = 1 - \frac{1}{2\eta} = 0{,}875 = \delta', \quad \text{d'où } \gamma = \gamma_0$$

$$\Lambda = \varphi = 0{,}42, \qquad \psi = \frac{0{,}875}{1{,}9375 - 0{,}875} = 0{,}825,$$

$\omega_a = 30{,}3$ cm² et $\chi = 1{,}05$.

La méthode approximative donne des résultats un peu plus forts, c'est-à-dire favorables à la sécurité.

Quant à la correction destinée à tenir compte de la zone comprimée de la nervure, elle est peu sensible, car $\frac{v'}{h_0} = \frac{\eta}{1 + \theta} = 1{,}54$, d'où $\varepsilon = 0.141$.

Comme $\nu = \frac{b}{b_0} = 0{,}25$, $1 + \nu\varepsilon = 1{,}035$.

Cette correction affecte à peine γ_0, par conséquent γ et φ pas davantage.

Donc ω_a est conservé, $\omega_a' = 29.4$ cm²

$$\text{Mais } \chi = \frac{1{,}85}{0.42} - \frac{1{,}035}{0{,}294} = 0{,}88$$

donc $\omega_a' = 0{,}88 \times 29{,}4 = 25{,}85$ cm².

La correction entraîne donc une réduction de 12 % de l'armature comprimée, soit 6 % de l'armature totale.

On sait qu'il existe pour les pièces de section rectangulaire comprimées excentriquement un minimum d'armature totale $(\omega_a + \omega'_a)$ qui correspond à $\sigma_b' = R'_b$ et $\sigma_a < R_a$ lorsque la compression est très forte et peu excentrique, c'est-à-dire lorsque la flexion n'est pas prédominante. Dans ces cas, l'utilité de l'armature comprimée peut l'emporter sur celle de l'armature de traction, mais d'une manière indirecte, parce qu'elle fait diminuer l'excentricité par rapport au centre de gravité de la section fictive.

Il est possible d'établir à partir des formules générales une expression de $(1 + \chi)\frac{m\omega_a}{bh}$ qui ne soit plus fonction que de θ, en supposant toutefois $\sigma'_b = R'_b$. On pourrait en déduire la valeur de θ correspondant au minimum rigoureux, mais c'est très complexe comme tous les calculs de ce genre.

Il existe des formules approximatives du minimum (1). Elles donnent parfois des écarts assez considérables par rapport au minimum exact.

Guidé éventuellement par ces formules, il sera souvent plus expédiant de rechercher des valeurs approximatives du minimum en essayant quelques valeurs convenablement choisies de θ, les calculs correspondants étant peu longs, grâce aux abaques.

* * *

On voudra bien noter que les formules et abaques sont absolument généraux, ne dépendent d'aucune valeur particulière de m, σ_a et σ'_b et sont par conséquent utilisables en toutes circonstances quelconques, sans restriction aucune. Grâce à l'emploi de graduations logarithmiques, les échelles ont été développées en dehors du domaine usuel afin de permettre le calcul même dans les cas de dimensions exceptionnelles, qui se rencontrent d'ailleurs en pratique.

(1) Voir notamment F. CAMPUS « Nouvelle étude sur le calcul économique du béton armé » *Revue universelle des Mines*, 1er *novembre* 1925. Voir également « *Le Constructeur de Ciment armé* » *N° 62, novembre* 1924.