

ÉTUDE DE L'ÉCONOMIE DES PIÈCES SIMPLEMENT FLÉCHIES EN BÉTON ARMÉ

(suite et fin)

par Fernand CAMPUS,

Ingénieur des Constructions civiles (A. I. Br.) et électricien (A. I. E. M.)

Directeur technique adjoint des Travaux Publics,

Chemins de fer, Postes, Télégraphes et Téléphones du Territoire de la Sarre.

11. **Quelques applications.** — Examinons les différents bétons dont il est question à l'article 6 des Instructions sur le béton armé de l'Association belge de Standardisation (A. B. S.). Le tableau suivant a été établi d'après des prix moyens pris à titre d'exemple. Les conclusions qui s'en déduisent n'ont donc rien d'absolu et peuvent se modifier si les prix varient. Les chiffres ont été calculés en admettant $m = 15$ (art. 13 des Instructions), $R_a = 1200 \text{ kg/cm}^2$ (art. 9), et en admettant $A = 80$ francs par 100 kgs d'acier mis en œuvre.

N° d'ordre	a) gravier b) plaquettes de porphyre	a) sable b) poussier de porphyre	Ci- ment (kgs)	Prix du béton par m ³	$\frac{mB}{78A-B}$	$R'b$ kg/cm ²	$\rho = \frac{R_a}{m R'b}$
1	800 litres a)	400 litres a)	300	88 frs	0,215	45	1,78
2	» »	» »	350	94 —	0,230	50	1,60
3	» »	» »	400	100 —	0,245	55	1,45
4	900 litres b)	450 litres b)	300	98 —	0,239	50	1,60
5	» »	» »	350	104 —	0,254	55	1,45
6	» »	» »	400	110 —	0,269	60	1,33

Supposons qu'il s'agisse de dalles. Dès lors $\beta = 1$, puisque le prix du coffrage est constant ; $\alpha = 1,325$ si la dalle est simplement appuyée aux deux extrémités, et $\alpha = 1,675$ s'il s'agit d'une dalle continue à plusieurs travées. D'après le tableau ci-dessus, les coordonnées des points X représentatifs des divers bétons dans les deux cas sont :

Numéro d'ordre	1	2	3	4	5	6			
ρ	= 1,78	1,60	1,45	1,60	1,45	1,33			
Dalle sur appuis	}	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\frac{mB}{78A-B}$	= 0,162	0,174	0,185	0,180	0,192	0,203
Dalle continue				»	»	= 0,128	0,137	0,146	0,143

Tous les points caractéristiques sont situés au-dessus des courbes $\mathcal{N}R_a$ et en-dessous de la courbe $\mathcal{N}R'_b$ cotée $\frac{M'}{M} = 0,40$; sauf le dernier

point $\rho = 1,33, \frac{\alpha}{\beta} \frac{mB}{78 A - B} = 0,160$, qui est légèrement en-dessous de la courbe $\mathcal{N}R_a$ cotée 1,00. Il en résulte que, quelles que soient l'importance relative du poids propre et la nature des appuis de la dalle, la solution la plus économique consiste toujours à réaliser simultanément $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$. Toutefois les points relatifs aux dalles continues sont très près de la limite en deçà de laquelle il est plus économique d'utiliser $\sigma'_b < R'_b$. Une réduction du prix du béton ou une augmentation du prix du fer pourraient entraîner cet effet d'autant plus rapidement que l'effet du poids propre serait moins considérable. On se trouve donc déjà pour les dalles à la limite de la tendance à l'accroissement de hauteur. Observons que les valeurs assez faibles de ρ prévues par le règlement de l'A. B. S. conduisent d'ailleurs à des constructions relativement peu hautes.

Examinons ensuite les Instructions de l'Administration des Ponts et Chaussées de Belgique (*Annales des Travaux Publics de Belgique*, fasc. 5 de 1923). Elles prévoient comme bétons normaux les bétons 2 ou 5 de l'A. B. S., (art. 17) pour lesquels nous envisagerons dorénavant un prix moyen de 100 frs par m³. Le prix de l'acier reste supposé égal à 80 frs, mais, comme $m = 10$ (art. 13), $\frac{mB}{78 A - B} = 0,163$.

Les taux de travail de sécurité sont réunis dans le tableau suivant.

Nature de la construction	R'_b	R_a	ρ
1) Ponts et passerelles			
a) pièces de la voie	30	750	2,50
b) autres pièces	35	900	2,57
2) Bâtiments	40	1000	2,50
3) Fondations	45	1200	2,67

Pour les dalles sur deux appuis simples, $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{mB}{78 A - B} = 0,123$.

Combinées avec cette valeur, les différentes valeurs ci-dessus de ρ donnent des points caractéristiques situés très peu au-dessous de la courbe $\mathcal{N}R'_b$ cotée 0,40 pour $\rho = 2,50$ et 2,57 et un point situé légèrement au dessus de cette même courbe pour $\rho = 2,67$. Donc, si l'on doit observer les règles des Ponts et Chaussées, il est généralement économique pour les dalles simplement armées à une seule travée d'adopter les taux de travail de sécurité. Mais une légère augmentation du prix du béton ou diminution du prix du fer fait rapidement franchir la limite à partir de laquelle il est avantageux de choisir $\sigma_a < R_a$ et

$\sigma'_b = R'_b$; cela d'autant plus que l'effet du poids propre est plus important.

Pour les dalles continues, $\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78 A - B} = 0,0975$. Pour cette valeur, tous les points caractéristiques sont dans la zone moyenne de la figure 2, donc il convient de recourir à $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$. Des variations peu étendues des prix des constituants ne sont pas susceptibles de modifier cette conclusion.

Néanmoins, nous voyons se manifester pour le règlement des Ponts et Chaussées la tendance inverse, celle de la réduction de hauteur en vue de l'économie. Cela provient de ce que les fortes valeurs de ρ prévues par le règlement donnent lieu à des constructions relativement hautes.

Il est à remarquer que pour un même béton, le règlement de l'A. B. S., donne des dalles plus économiques que le règlement des Ponts et Chaussées. Voyons l'exemple d'une dalle simple de 3,50 m. de portée chargée à 500 kgs/m², confectionnée en béton n° 2 de l'A. B. S. On trouve :

$$h = 11,65 \text{ cm. et } \Omega_a = 9,35 \text{ cm}^2 \text{ d'après l'A. B. S.,}$$

et $h = 15,8 \text{ cm. et } \Omega_a = 9,08 \text{ cm}^2 \text{ d'après les Ponts et Chaussées.}$

Les prix unitaires étant les mêmes, on voit que les dimensions des Ponts et Chaussées sont plus onéreuses.

Il n'est pas permis de déduire des exemples qui viennent d'être étudiés qu'il y a toujours avantage économique à calculer les dalles d'après les taux de travail de sécurité. La conclusion est généralement vraie, mais comme elle dépend essentiellement des valeurs conjuguées de $\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78 A - B}$ et de ρ , il peut s'en présenter qui la mettent en défaut.

Dans un article du n° 47 de la revue « *Le Constructeur de Ciment armé* » (août 1923, page 144), M. A. Feautrier considère le cas d'un béton coûtant 94,50 frs par m³, le prix de l'acier étant de 175 frs par 100 kgs. Pour ce béton, au dosage de 300 kgs de ciment, $R'_b = 45 \text{ kg/cm}^2$. D'autre part, $R_a = 1200 \text{ kg/cm}^2$ et, comme $m = 15$, $\rho = 1,78$. Enfin, $\frac{mB}{78 A - B} = 0,105$.

Pour une dalle sur deux appuis simples, $\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78 A - B} = 0,08$.

Pour une dalle continue, $\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78 A - B} = 0,063$.

Le point caractéristique du premier cas est situé peu sous la courbe σR_a cotée 0,80, celui du second cas est situé légèrement sous la courbe σR_a cotée 0,60. Or, pour les dalles continues, le rapport $\frac{M'}{M}$ est généralement supérieur à 0,70. Donc, dans les conditions de prix envisagées

par M. Feautrier, et en supposant $\frac{M'}{M} = 0,75$, la solution du minimum correspond, d'après les courbes de la figure 2, à $\theta = 2$, d'où $\sigma_a = R_a = 1200$ et $\sigma'_b = \frac{1200}{2 \times 15} = 40 < R'$.

Il est donc utile de recourir à l'épreuve de la figure 2, chaque fois que les prix s'écartent de ceux de la pratique courante, notamment pour des projets destinés à l'étranger, aux colonies, etc.

La figure 2 permet d'étudier l'influence de la variation de m pour un dosage donné, ou bien l'influence du dosage en ciment, par le tracé des courbes lieux des points caractéristiques. On peut considérer comme un minimum absolu le point de rencontre d'un tel lieu avec la courbe $\mathcal{O}R_a$ ou $\mathcal{O}R'_b$ correspondante au cas concret, si ce point de rencontre se trouve dans les limites pratiques.

Ainsi, dans le cas de la dalle étudiée par M. Feautrier, il y aurait intérêt, en conservant les dimensions calculées, à réduire le dosage de ciment, de manière à réduire R'_b à 40 kg/cm². Mais, dès lors, $\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B}$ diminue également, de manière que pour trouver le dosage optimum, il faut tracer le lieu des points caractéristiques pour divers dosages et prendre son intersection avec la courbe $\mathcal{O}R_a$ cotée 0,75.

Le béton étudié par M. Feautrier est au dosage de 300 kgs par m³, avec $R'_b = 45$. Admettons que pour le dosage de 250 kgs, $R'_b = 40$ et pour celui de 200 kgs, $R'_b = 34$. (Voir Cours de béton armé, par A. Mesnager, éd. 1921, page 46). D'après les prix unitaires admis par M. Feautrier, les deux derniers bétons donnent respectivement pour une dalle continue :

$$B = 88 \text{ frs}, \quad \frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = 0,058 \text{ et } \rho = 2,00;$$

$$B = 81,50, \quad \frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = 0,054 \text{ et } \rho = 2,35.$$

Avec le point X relatif au dosage de 300 kgs, nous avons trois points qui permettent de tracer le lieu des points caractéristiques, dont le point de rencontre avec la courbe $\mathcal{O}R_a$ cotée 0,75 donne $\theta = 2,14$, d'où $\sigma'_b = \frac{1200}{15 \times 2,14} = 37,4 \text{ kg/cm}^2$.

Le dosage correspondant est de 230 kgs de ciment par mètre cube. Si l'influence du poids propre était plus importante, de telle sorte que $\frac{M'}{M} = 0,70$, le même lieu donnerait $\theta = 2$, ce qui correspond à $R'_b = 40$ et un dosage de 250 kg/cm².

Il est intéressant également d'étudier l'influence du prix dans l'emploi du ciment fondu. D'après M. G. Leflot, directeur de la firme Henne-

bique, on peut admettre $R'_b = 100$ pour le dosage à 300 kgs de ciment fondu, et $R'_b = 70$ pour le dosage de 200 kgs, d'après les règles de la Circulaire ministérielle française (Voir « *Le Constructeur de Ciment armé* », sept. 1923, page 164).

Ce praticien propose pour m la valeur 6, d'après les expériences faites au laboratoire de l'École des Ponts et Chaussées à Paris.

Supposons que le prix du m^3 damé soit 170 frs pour le dosage à 300 kgs et de 130 frs pour le dosage à 200 kgs. Soient, comme précédemment : $A = 80$ et $R_a = 1200$.

Pour le dosage riche : $\frac{mB}{78A - B} = 0,168$ et $\rho = 2,00$;

pour le dosage inférieur : $\frac{mB}{78A - B} = 0,127$ et $\rho = 2,86$.

Pour les dalles sur deux appuis simples, les points caractéristiques ont comme coordonnées respectivement $\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = 0,127$ et $\rho = 2,00$, et $\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = 0,096$ et $\rho = 2,86$. Ces deux points se trouvent dans la zone moyenne de la figure 2, de telle sorte qu'il y a intérêt, au point de vue économique, à calculer les dimensions d'après les taux de travail de sécurité.

Pour les dalles continues, les coordonnées deviennent :

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = 0,100 \text{ et } \rho = 2,00,$$

et $\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = 0,076 \text{ et } \rho = 2,86.$

Les conclusions sont les mêmes que pour les dalles à une travée unique.

Dans tous les exemples précédents, nous n'avons envisagé que des dalles. L'étude est identique pour les poutres, la différence porte uniquement sur la valeur de β , qui est supérieure à 1,00.

12. Cas où la pièce est doublement armée, par suite du changement de sens de la flexion. — Lorsque la flexion peut changer de sens, il est nécessaire de recourir à une armature comprimée, dont le rapport

$x = \frac{\Omega'_a}{\Omega_a}$ à l'armature étendue dépend de l'importance relative des deux moments de flexion de sens contraires.

Le prix d'un élément de longueur Δl est

$$\Delta \pi = \Delta l [bh_l \beta B + \alpha (\Omega_a + \Omega'_a) (78A - B)] + \text{constante.}$$

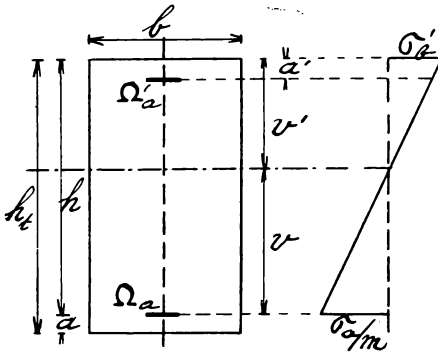


Fig. 3.

Si aucune des dimensions de la pièce n'est donnée à priori, ou si la hauteur est limitée, les conclusions des § 3 et 4 sont applicables.

L'avantage de l'augmentation de la hauteur et de la réduction de la largeur est encore plus caractérisé dans le cas présent, à cause de l'augmentation du pourcentage total d'armature provenant des barres comprimées.

Si la largeur est donnée, ce qui a lieu dans les cas pratiques les plus fréquents : parois de réservoirs cloisonnés, de cellules de silos, etc. ; l'étude se fait comme dans les § 5 et 6. La formule du prix peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \Delta \pi &= \Delta l [bh \beta B + \alpha (\Omega_a + \Omega'_a) (78 A - B)] + \text{constante}, \\ &= \Delta l [bh \beta B + \alpha (1 + \chi) \Omega_a (78 A - B)] + \text{constante} \quad (14) \end{aligned}$$

$$= \Delta l \left[bh \beta B + \alpha' (78 A - B) \frac{M}{\gamma h \sigma_a} \right] + \text{constante} \quad (14')$$

en posant $\alpha' = \alpha (1 + \chi)$

En principe, les mêmes hypothèses sont à envisager que pour la pièce simplement armée, à savoir :

$$\sigma_a = R_a, \sigma'_b < R'_b;$$

$$\sigma_a = R_a, \sigma'_b = R'_b;$$

$$\sigma_a < R_a, \sigma'_b = R'_b.$$

Les applications du § 11 montrent que la troisième hypothèse est rarement réalisée pour les pièces simplement armées, même en adoptant des conditions de sécurité favorables à ce cas, telles que celles des Ponts et Chaussées de Belgique. Cette hypothèse présente à fortiori peu d'intérêt dans le cas des pièces doublement armées. Nous n'en n'effectuerons donc pas l'étude, qui est une complication superflue.

L'hypothèse $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b \leq R'_b$ conduit à la même conclusion que le § 5 :

$$\frac{\beta}{\alpha'} \frac{mB}{78 A - B} = \lambda. \quad (15)$$

Cette formule se présente sous la même forme que la formule (3), mais λ n'est plus une fonction simple de θ , elle dépend également de

$$x = \frac{\Omega'_a}{\Omega_a} \text{ et de } a' \text{ ou du rapport } \delta' = \frac{h - a'}{h}.$$

Si l'on veut tenir compte de l'influence du poids propre, il suffit de transformer la formule comme suit :

$$\frac{\beta}{\alpha'} \frac{mB}{78 A - B} = \lambda \frac{M'}{M}.$$

Pour une valeur donnée de α et une valeur de $\beta' = \frac{h - \alpha'}{h}$, il est possible de tracer une famille de courbes $\mathcal{O}R_a$ analogue à celle de la figure 2 et d'un emploi identique. Mais ces graphiques seraient d'un usage assez limité et il en faudrait un jeu assez nombreux pour permettre de résoudre par interpolation, avec une précision suffisante, les cas qui peuvent se présenter.

Pour ces raisons, il est préférable de recourir dans chaque cas concret à une autre formule, analogue à (3'), et que l'on déduit de la condition du minimum, c'est

$$h = \sqrt{\frac{\alpha'}{\beta} \cdot \frac{78 A - B}{B} \cdot \frac{1}{\gamma R_a}} \sqrt{\frac{M}{b}}, \quad (16)$$

formule qui ne tient pas compte de l'influence du poids propre. Si l'on en tient compte, la formule s'écrit :

$$h = \sqrt{\frac{\alpha'}{\beta} \cdot \frac{78 A - B}{B} \cdot \frac{1}{\gamma R_a}} \sqrt{\frac{M'}{b}}. \quad (16')$$

Remarquons que, dans le cas qui nous occupe, il n'y a généralement pas lieu de tenir compte de l'influence du poids propre. Il s'agit le plus souvent de parois verticales et le poids propre n'intervient pas dans la flexion, que l'on considère comme simple, en négligeant les efforts longitudinaux de la sollicitation. Il n'y aurait que le cas de dalles horizontales pouvant supporter des sous-pressions qui permettrait de tenir compte des effets du poids propre.

Les formules (16) et (16') ne se distinguent de celles relatives à la section simplement armée que par $\alpha' > \alpha$. Pour les dalles à une ou plusieurs travées, on peut admettre

$$\alpha' = 1,325 (1 + \alpha),$$

à condition que $\alpha \geq 0,25$. Pour les poutres, il faut déterminer α' d'après les considérations du § 8 et en tenant compte de α .

Ayant calculé h d'après la formule (16) ou (16'), on calcule Ω_a d'après la formule (15) ou d'après les méthodes habituelles, et on vérifie ensuite si $\sigma'_b \leq R'_b$.

Si l'on trouvait $\sigma'_b > R'_b$, c'est que la hauteur h est trop petite, il faut alors calculer les dimensions d'après les conditions $\sigma_a = R_a$ et $\sigma' = R'_b$.

A titre d'exemple, nous avons représenté à la figure 4 un diagramme qui permet de vérifier sans calculs la condition $\sigma'_b \leq R'_b$ dans les hypo-

thèses suivantes. Nous supposons un béton des compositions 2 ou 4 de l'A. B. S., pour lequel $R'_b = 50 \text{ kg/cm}^2$. Nous supposons que son prix moyen soit de 100 frs par m^3 et celui de l'acier de 80 frs par 100 kgs. Enfin, $R_a = 1200 \text{ kg/cm}^2$ et $m = 15$.

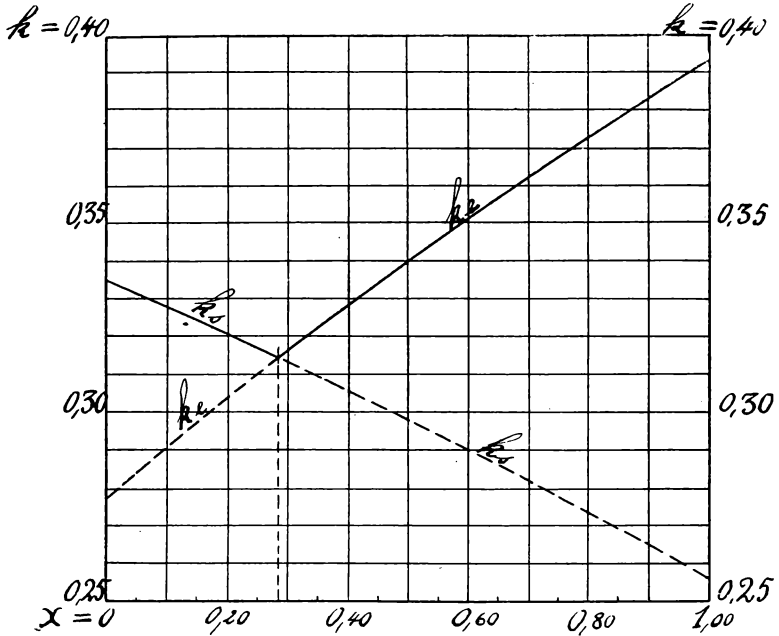


Fig. 4.

Nous admettons $\gamma = 0,88$, $\beta = 1$, ⁽¹⁾ puisqu'il s'agit de dalles, et
 $\alpha' = 1,325 (1 + \alpha)$.

La formule (16) devient :

$$h = 0,238 \sqrt{1,325 (1 + \alpha)} \sqrt{\frac{M}{b}} = k_e \sqrt{\frac{M}{b}}$$

D'autre part, en supposant que l'armature comprimée se trouve au centre d'action de la résultante des tensions de compression du béton, c'est-à-dire au tiers supérieur de v' , pour que les tensions $R_a = 1200$ et $R'_b = 50$ soient simultanément réalisées, il faut :

⁽¹⁾ S'il s'agit de dalles verticales, il faudrait théoriquement tenir compte du prix du terrain. Si H est la hauteur verticale en mètres de la paroi, T le prix du terrain par mètre carré, il faudrait employer $\beta = 1 + \frac{T}{BH}$. La correction est rarement importante.

$$h = 0,153 \sqrt{4,80 - 2x} \times \sqrt{\frac{M}{b}} = k_s \sqrt{\frac{M}{b}}$$

Pour que, dans l'hypothèse de l'emploi de la formule (16), σ'_b soit plus petite que R'_b , il faut et il suffit que $k_e > k_s$. La figure 4 montre que cette condition est satisfaite pour toutes les valeurs de x supérieures à 0,28.

Seules les parties utiles des courbes de k_s et k_e sont tracées en trait plein. On calculera $h = k_s \sqrt{\frac{M}{b}}$ pour les valeurs de x inférieures à 0,28, et il y correspondra $\sigma'_b = R'_b$.

Pour les valeurs de x supérieures à 0,28, on calculera

$h = k_e \sqrt{\frac{M}{b}}$, à quoi correspondra $\sigma'_b < R'_b$. On pourra, dans ce cas, calculer λ par la formule (15).

Considérons l'exemple concret d'une dalle ayant à supporter dans les deux sens le moment fléchissant de 2000 kgm par mètre de largeur. Il faut donc $x = 1$ et d'autre part :

$$\sqrt{\frac{M}{b}} = \sqrt{2000} = 44,7.$$

Le calcul ordinaire ($\sigma'_b = R'_b$) par la méthode approchée $\left(a' = \frac{v'}{3}\right)$ donne :

$$h = 0,256 \times 44,7 = 11,5 \text{ cm} \quad \text{et} \quad \lambda = 0,206,$$

$$\text{d'où : } \Omega_a = \Omega'_a = \frac{0,206 \times 100 \times 11,5}{15} = 15,8 \text{ cm}^2.$$

Le prix de la dalle par m² est

$$0,115 \times 100 + 2 \times 1,325 \times 6140 \times 0,00158 + c^{te} = 37,35 \text{ frs} + c^{te}.$$

Le calcul d'après la solution la plus économique donne :

$$h = 0,393 \times 44,7 = 17,55 \text{ cm.},$$

et, d'après la formule (15), $\lambda = 0,0925$.

$$\text{Donc : } \Omega_a = \Omega'_a = \frac{0,0925 \times 100 \times 17,55}{15} = 10,80 \text{ cm}^2.$$

Le prix par m² est

$$0,1755 \times 100 + 2 \times 1,325 \times 6140 \times 0,00108 + \text{constante} = 35,10 \text{ frs} + \text{constante}.$$

La différence de prix, de plus de 6%, s'accroîtrait encore si l'on réduisait le dosage de ciment, comme le permet le taux réduit de compression du béton. Pour résoudre facilement ce dernier problème, il suffirait de tracer dans le diagramme de la figure 4 les courbes de k_s et de k_e pour différents dosages, dont on peut connaître les valeurs de R'_b et de B, les éléments relatifs à l'acier ne changeant pas.

Il suffit d'indiquer le principe, la présentation d'un tel graphique sortirait du cadre de cette note. Les bureaux d'études ne peuvent rencontrer aucune difficulté à en établir d'après les prix qui leur sont habituels. Encore faut-il remarquer qu'en période économique instable, il faut vérifier de temps en temps si le rapport $\frac{A}{B}$ n'a pas varié sensiblement.

L'étude et l'exemple précédents justifient la remarque faite au sujet de l'improbabilité du cas $\sigma_a < R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$.

13. Cas de la double armature pour insuffisance de hauteur. — En outre du cas où le moment fléchissant peut changer de sens, une double armature peut se justifier lorsque l'espace dont on dispose en hauteur pour la pièce est insuffisant pour permettre la résistance aux actions sollicitantes par le moyen d'une armature simple, en réalisant simultanément les tensions de sécurité.

Il est possible, pour la hauteur donnée, de calculer une valeur de x qui assure à la pièce la résistance voulue, en observant simultanément les taux de travail de sécurité R_a et R'_b . La méthode est exposée dans le Chapitre I de ma « Note sur le calcul organique des pièces fléchies en béton armé » (*Annales des Travaux Publics de Belgique*, fascicule 1, février 1924).

La condition qui caractérise un tel cas est

$$\frac{M}{bh^2R'_b} > \frac{2 + 3\rho}{6(1 + \rho)^2},$$

ou, approximativement,

$$\frac{M}{bh^2R'_b} > \frac{\gamma}{2(1 + \rho)}.$$

Recherchons si les tensions R_a et R'_b correspondent à un minimum. Les dimensions b et h étant données, c'est le minimum de la section totale d'armatures que nous devons rechercher. D'après la figure 5, et en supposant $a' = \frac{v'}{3}$:

$$M = \left(\frac{2}{3} \Omega'_a m \sigma'_b + \frac{bv'\sigma'_b}{2} \right) \gamma h = \Omega_a \sigma_a \gamma h.$$

Il en résulte que :

$$\Omega_a + \Omega'_a = \frac{M}{\gamma h} \left(\frac{1}{\sigma_a} + \frac{3}{2m\sigma'_b} \right) - \frac{3bv'}{4m}.$$

Si nous éliminons σ'_b de cette formule par la relation $\theta = \frac{h}{v'} - 1$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Omega_a + \Omega'_a &= \frac{M}{\gamma h \sigma_a} \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{h}{v'} - 1 \right) \right] - \frac{3bv'}{4m} \\ &= \frac{3}{2} \frac{M}{\gamma v' \sigma_a} - \frac{3bv'}{4m} - \frac{M}{2\gamma h \sigma_a} \end{aligned}$$

En remplaçant σ_a par R_a , cette formule devient :

$$\Omega_a + \Omega'_a = \frac{3}{2} \frac{M}{\gamma v' R_a} - \frac{3bv'}{4m} - \frac{M}{2\gamma h R_a}$$

Cette fonction de v' n'a pas de minimum mathématique réel.

Éliminons maintenant σ_a de la formule primitive et substituons R'_b à σ'_b . Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Omega_a + \Omega'_a &= \frac{M}{\gamma hm R'_b} \left(\frac{1}{\theta} + \frac{3}{2} \right) - \frac{3bv'}{4m} \\ &= \frac{M}{\gamma hm R'_b} \left(\frac{3}{2} + \frac{v'}{h-v'} \right) - \frac{3bv'}{4m} \end{aligned}$$

La condition du minimum est

$$\frac{d(\Omega_a + \Omega'_a)}{dv'} = \frac{M}{\gamma hm R'_b} \left[\frac{1}{h-v'} + \frac{v'}{(h-v')^2} \right] - \frac{3b}{4m} = 0,$$

ou

$$\frac{M}{\gamma (h-v')^2 m R'_b} = \frac{3b}{4m},$$

d'où :

$$h-v' = 2 \sqrt{\frac{M}{3\gamma b R'_b}}$$

Or :

$$h-v' = h \left(1 - \frac{v'}{h} \right) = h \frac{\theta}{1+\theta}$$

Donc, la condition s'écrit finalement :

$$\frac{\theta}{1+\theta} = 2 \sqrt{\frac{M}{3\gamma bh^2 R'_b}} = \xi. \quad (17)$$

Il en résulte que :

$$\theta = \frac{\xi}{1-\xi}$$

Considérons un exemple concret, dont les données soient : $b = 30$ cm.,

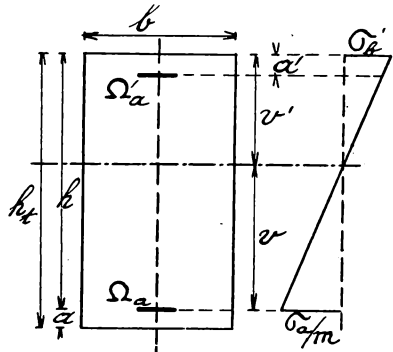


Fig. 5.

$h = 80$ cm., $M = 1.800.000$ kg/cm., $R'_b = 50$, $R_a = 1200$ et $m = 15$.
Admettons $\gamma = 0,85$.

$$\frac{M}{bh^2 R'_b} = 0,1875 > \frac{\gamma}{2(1+\rho)} (= 0,163).$$

Nous sommes donc en présence d'un cas d'application de la formule (17) qui donne :

$$\xi = 2 \sqrt{\frac{0,1875}{2,55}} = 0,542.$$

Il en résulte que : $\eta = 1,18$, et que :
 $\sigma_a = 1,18 \times 15 \times R'_b = 886 < R_a$.

Ce minimum théorique n'est pas réalisable, car on trouve qu'il correspond à une valeur négative de α . En effet, la condition pour qu'il corresponde à une valeur positive de α est

$$\frac{M}{bh^2 R'_b} > \frac{\gamma}{2(1+\eta)}.$$

Or, pour $\eta = 1,18$:

$$\frac{\gamma}{2(1+\eta)} = 0,195 > \frac{M}{bh^2 R'_b}.$$

La figure 6 représente un diagramme basé sur les conditions de sécurité de l'A. B. S. pour les bétons 2 ou 4, savoir : $R_a = 1200$, $R'_b = 50$ et $m = 15$, une valeur moyenne 0,85 de γ et l'hypothèse $a' = \frac{v'}{3}$. Il indique, pour différentes valeurs de $\frac{M}{bh^2 R'_b}$ portées en abscisses, les valeurs de η calculées d'après la formule (17) et les valeurs correspondantes de $\frac{\gamma}{2(1+\eta)}$ et de α . Il est complété par une droite à 45° tracée de l'origine, et dont les ordonnées représentent $\frac{M}{bh^2 R'_b}$.

Il montre que, dans les conditions envisagées, α est négatif pour toutes les valeurs de $\frac{M}{bh^2 R'_b}$ inférieures à 0,1925 ; que η donnant la solution minimum est inférieur à $\rho = 1,60$ pour toutes les valeurs de $\frac{M}{bh^2 R'_b}$ inférieures à 0,2415, et que dans cet intervalle $\frac{M}{bh^2 R'_b}$ est entre 0,1925 et 0,2415, α varie de 0 à 0,78. C'est dans cet intervalle seulement que la solution du minimum est admissible.

Pour les valeurs de $\frac{M}{bh^2 R'_b}$ supérieures à 0,2415, η_{\min} est supérieur

à ρ , c'est-à-dire que le minimum théorique n'est pas acceptable et que la solution pratique la plus avantageuse consiste à prendre $\theta = \rho$, c'est-à-dire $\sigma_a = R_a$. Les valeurs de x qui y correspondent sont données par la courbe en trait plein, elles sont inférieures à celles qui donnent le minimum.

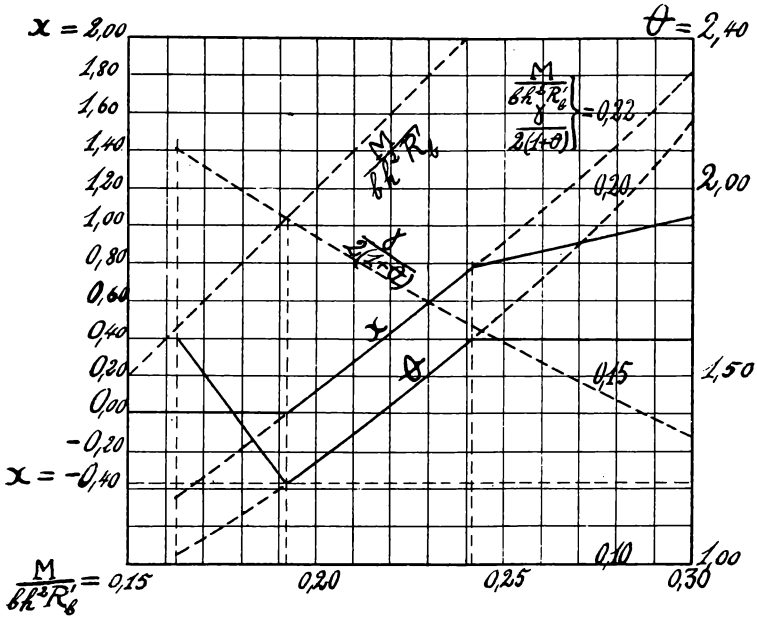


Fig. 6.

Le cas concret que nous avons examiné plus haut est situé entre la limite $\frac{M}{bh^2 R'_b} = \frac{\gamma}{2(1+\epsilon)} = 0,163$, à partir de laquelle une armature comprimée peut se justifier, et la limite $\frac{M}{bh^2 R'_b} = 0,1925$, à partir de laquelle elle devient économique. Dans cet intervalle, la valeur de x correspondant au minimum est négative. Il en résulte que la solution pratique la plus avantageuse consiste dans l'emploi de l'armature unique, travaillant à un taux $\sigma_a < R_a$. Le calcul de cette armature et de la tension σ_a correspondante est élémentaire.

La condition à réaliser est $\sigma'_b = R'_b$. Désignons l'armature simple par Ω_{a1} . Sa valeur est donnée par la formule :

$$\Omega_{a1} = \frac{M}{\gamma h \sigma_a} = \frac{M}{\gamma h m R'_b \eta}$$

Nous avons montré au § 5 que :

$$\eta = \frac{\gamma bh^2 R'_b}{2M} - 1.$$

Comparons à cette armature simple l'armature totale qu'il faudrait à l'extension et à la compression pour que $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$. Il a été établi au début de ce paragraphe que :

$$\Omega_a + \Omega'_a = \frac{M}{h R'_b} \frac{2 + 3\rho}{2\gamma\rho} - \frac{3}{4(1+\rho)}$$

Nous pouvons écrire :

$$\frac{m \Omega_{a1}}{bh} = \frac{M}{bh^2 R'_b} \frac{1}{\gamma\theta}$$

Or : $\frac{m \Omega_{a1}}{bh} = \frac{1}{2\theta(1+\theta)}$, il en résulte que : $\frac{M}{bh^2 R'_b} = \frac{\gamma}{2(1+\theta)}$,

expression dont il a déjà été fait usage ci-dessus.

Donc :

$$\frac{m(\Omega_a + \Omega'_a)}{bh} = \frac{M}{bh^2 R'_b} \frac{2 + 3\rho}{2\gamma\rho} - \frac{3}{4(1+\rho)} = \frac{2 + 3\rho}{4\rho(1+\theta)} - \frac{3}{4(1+\rho)}$$

$$\frac{m(\Omega_a + \Omega'_a)}{bh} = \frac{2 + 3\rho^2 + 2\rho - 3\rho\theta}{4(1+\theta)(1+\rho)\rho}$$

La condition pour que l'armature simple soit plus économique s'écrit :

$$\frac{2 + 3\rho^2 + 2\rho - 3\rho\theta}{4(1+\theta)(1+\rho)\rho} \geq \frac{1}{2\theta(1+\theta)}$$

d'où : $(\theta - \rho)(2 + 2\rho - 3\rho\theta) \geq 0$.

Le premier membre est une fonction du second degré, dont les racines sont $\theta = \rho$ et $\theta = \frac{2}{3} \frac{1+\rho}{\rho}$. Cela signifie que pour ces deux valeurs de θ , $\Omega_{a1} = \Omega_a + \Omega'_a$, ce qui est évident pour la première racine. De plus, dans l'intervalle $\theta \equiv \frac{2}{3} \frac{1+\rho}{\rho}$ à ρ , $\Omega_{a1} < \Omega_a + \Omega'_a$. A la seconde valeur de θ correspond $\frac{M}{bh^2 R'_b} = \frac{\gamma}{2(1+\rho)} = 0,163$, d'après les hypothèses de la figure 6.

La première valeur de θ est $\frac{2}{3} \times \frac{2,60}{1,60} = 1,08$. La valeur de $\frac{M}{bh^2 R'_b}$ qui y correspond est $0,204 > 0,1925$.

On peut conclure que dans la région comprise entre $\frac{M}{bh^2 R'_b} = 0,163$ et $\frac{M}{bh^2 R'_b} = 0,1925$, il y a intérêt à recourir à l'armature simple,

donc $x = 0$, θ variant de 1,60 à 1,216, suivant une hyperbole. Le diagramme de la figure 6, dont les courbes utiles sont tracées en trait

plein, donne donc, dans les circonstances et hypothèses exposées ci-dessus, c'est-à-dire $R_a = 1200$, $R'_b = 50$, $m = 15$ (bétons 2 et 4 de l'A. B. S.), $\gamma = 0,85$ (valeur moyenne), et $a' = \frac{v'}{3}$, les valeurs les plus économiques de θ et de α , d'après les différentes valeurs du moment réduit $\frac{M}{bh^2 R'_b}$, lorsque ce dernier est supérieur à la valeur qui correspond à la réalisation simultanée des taux de travail de sécurité dans une pièce à armature simple.

Le diagramme de la figure 6 n'est qu'approximatif, à cause des hypothèses $\gamma = 0,85$ et principalement $a' = \frac{v'}{3}$. L'erreur commise est cependant peu importante ; elle est susceptible de modifier les limites indiquées dans la figure, mais non d'infirmer les conclusions générales qui en ont été déduites.

Une propriété remarquable du diagramme est que la valeur de θ calculée d'après la formule (17) pour $\alpha = 0$ est constante, quel que soit le béton envisagé. En effet, la condition pour que $\alpha = 0$ est

$$\frac{M}{bh^2 R'_b} = \frac{\gamma}{2(1+\theta)}$$

La formule (17) devient, compte tenu de cette condition :

$$\frac{\theta}{1+\theta} = 2 \sqrt{\frac{1}{6(1+\theta)}}$$

d'où :

$$3\theta^2 - 2\theta - 2 = 0.$$

La racine positive de cette équation est $\theta = 1,216$.

14. Dalles à armatures croisées. — Dans le calcul de ces dalles, la largeur est toujours connue d'avance, le problème d'économie ne peut donc se poser que comme dans les § 5 et 6, c'est-à-dire consister dans la recherche de la hauteur la plus favorable. La solution est la même que dans les § précédents, seule la valeur de α diffère.

Si la plaque est rectangulaire, la sollicitation est à répartir entre les deux directions selon une formule appropriée. Les moments maxima M_1 et M_2 relatifs à des bandes de 100 cm. de largeur dans les deux directions sont ainsi déterminés, en tenant compte ou non du poids propre. Bien que, par suite de leur superposition, les deux armatures croisées ne soient pas pratiquement au même niveau, on admettra que $\frac{\Omega_{a1}}{\Omega_{a2}} = \frac{M_1}{M_2}$. Il est d'ailleurs loisible de tenir compte d'un facteur de correction, ou d'envisager une hauteur moyenne. La plus grande des hauteurs pratiques h_1 et h_2 correspondra à la plus grande sollicitation, que nous supposons être M_1 .

Le coefficient α se détermine pour chacune des deux armatures d'après les considérations du § 8, en tenant compte de la suppression de l'armature de répartition. On calcule ensuite un coefficient α global par la relation

$$\alpha \Omega_{a1} = \alpha_1 \Omega_{a1} + \alpha_2 \Omega_{a2},$$

d'où :

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\Omega_{a2}}{\Omega_{a1}} = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{M_2}{M_1}.$$

On applique ensuite les formules du minimum au calcul de la résistance à la sollicitation dans la direction 1, d'après les § 5 et 6 et en employant le coefficient σ ci-dessus calculé.

Si la plaque est carrée, $M_1 = M_2$ et $\alpha = 2 \alpha_1$.

Si les appuis sont simples, dans un pareil cas, α peut être égal, par exemple, à 2,25. Si la dalle est continue dans les deux directions, α pourrait être égal à 2,95, par exemple. En tous cas, les valeurs de α peuvent être beaucoup supérieures à celles qui ont été envisagées dans les applications du § 11.

Examinons le cas de l'emploi du béton 6 de l'A. B. S. pour une plaque carrée simplement appuyée sur tout le pourtour, les éléments caractéristiques du béton ayant les valeurs indiquées au § 11, notamment $R'_b = 60$.

Comme $\beta = 1$ et $\alpha = 2,25$: $\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78 A - B} = 0,120$ et $\rho = 1,33$.

Le point caractéristique X ainsi défini est situé entre les courbes \mathcal{NR}_a cotées 0,70 et 0,80 de la figure 2.

Si la dalle est continue, ce qui correspond à une valeur plus élevée de α , le point X se trouve franchement sous les courbes \mathcal{NR}_a usuelles, c'est-à-dire donc dans la zone où l'économie exige $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b < R'_b$, et de grandes hauteurs relatives.

Il est donc intéressant pour le calcul des dalles à armatures croisées de chercher les valeurs optima de σ_a et σ'_b par la figure 2 avant de calculer les dimensions. Il arrivera fréquemment que $\sigma'_b < R'_b$ et il pourra être utile de rechercher, comme il a été montré au § 11, le dosage le plus économique. Il y aura généralement intérêt à employer un dosage assez riche.

FLEXION PLANE SIMPLE DES POUTRES NERVURÉES

15. Formules générales pour une pièce de section constante à armature simple. — Les éléments de la section sont définis par la figure 7. Les dimensions des ailes, largeur b_o et épaisseur h_o , sont généralement connues d'avance, d'après les résultats du calcul du dallage. Leur volume, leur poids et leur prix sont donc constants. Seuls, les prix du béton de la nervure et de l'armature sont variables. Le prix d'un élément de longueur Δl s'écrit donc :

$$\Delta \pi = \Delta l [b (h_l - h_o) \beta B + \alpha \Omega_a (78 A - B)] + \text{constante}.$$

Que b soit variable ou non, les variations du prix de l'épaisseur a de béton recouvrant l'armature sont toujours négligeables, ce qui fait que la formule précédente peut s'écrire :

$$\Delta \pi = \Delta l [b (h - h_0) \beta B + \alpha \Omega_a (78A - B)] + \text{constante. (18)}$$

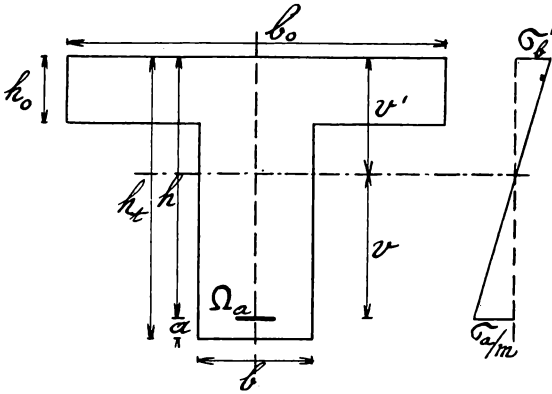


Fig. 7.

Cette formule est tout à fait analogue aux formules (1) et (2). Lorsque aucun des éléments $(h - h_0)$ et b de la nervure n'est donné a priori, la discussion est en tous points semblable à celle du § 3 et conduit aux mêmes conclusions. Il y a donc intérêt à choisir pour la nervure la plus

grande hauteur possible, pourvu que l'on puisse réduire la largeur en conséquence. On détermine tout d'abord la plus grande hauteur que permettent les circonstances ou sujétions diverses et on calcule la valeur correspondante Ω_a de la section d'armature, travaillant à la tension $\sigma_a = R_a$. Ensuite on calcule la largeur b par la condition de la résistance au plus grand effort tranchant, et on vérifie si cette largeur est suffisante pour permettre le placement des armatures. Sinon, on l'élargit de la quantité nécessaire, et la solution obtenue, sans constituer un minimum théorique, est cependant la plus avantageuse.

Si le choix de h est illimité, il faut se référer à des rapports empiriques, en fonction de la portée, de la largeur des ailes ou de la nervure, etc., en prenant h aussi grand que possible. Des auteurs allemands ont développé des calculs basés sur des relations empiriques entre b et h , parfois très compliquées. C'est à elles que s'applique surtout la remarque du § 1 au sujet du caractère peu intuitif de certaines formules particulières. Cette voie ne paraît donc pas recommandable. Les conclusions générales ci-dessus sont des guides suffisants. L'avantage des grandes hauteurs est bien plus flagrant pour les poutres nervurées que pour les pièces rectangulaires.

16. Cas de la nervure de grande largeur. — J'entends par nervure de grande largeur celle qui est plus large que le minimum indiqué au § précédent et qui est déterminé par la résistance au plus grand effort tranchant ou par l'espace nécessaire pour la disposition des armatures.

Le cas doit être considéré a priori comme désavantageux, mais l'in-

térêt de la recherche de la valeur la plus économique de h est d'autant plus grand. Les mêmes solutions peuvent se présenter que dans l'étude de la dalle (§ 5), à savoir :

$$\sigma_a = R_a \text{ et } \sigma'_b < R'_b,$$

$$\sigma_a = R_a \text{ et } \sigma'_b = R'_b,$$

$$\sigma_a < R_a \text{ et } \sigma'_b = R'_b.$$

Examinons le premier cas, qui correspond aux nervures relativement hautes. Généralement v' est plus grand que h_0 et l'on peut, sans erreur importante, recourir à l'approximation usuelle $c = h - \frac{h_0}{2}$.

Comme :

$$\Omega_a = \frac{M}{c \sigma_a} = \frac{M}{\left(h - \frac{h_0}{2}\right) R_a},$$

la formule (18) devient :

$$\Delta \pi = \Delta l \left[b (h - h_0) \beta B + (78 A - B) \frac{\alpha M}{\left(h - \frac{h_0}{2}\right) R_a} \right] + \text{cte.} \quad (18')$$

Cette fonction $\Delta \pi$ possède un minimum régi par la condition :

$$b \beta B = \frac{(78 A - B) \alpha M}{\left(h - \frac{h_0}{2}\right)^2 R_a},$$

d'où :

$$c = h - \frac{h_0}{2} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{78 A - B}{B} \times \frac{1}{R_a}} \sqrt{\frac{M}{b}}, \quad (19)$$

et

$$\frac{m_a}{b \left(h - \frac{h_0}{2}\right)} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78 A - B} \quad (19')$$

Ces relations sont analogues à celles qui ont été établies pour les sections rectangulaires. Elles ne permettent cependant pas une interprétation graphique aussi simple, car $\frac{m \Omega_a}{b \left(h - \frac{h_0}{2}\right)}$ n'est pas uniquement une

fonction de la variable indépendante $\frac{\sigma_a}{m \sigma'_b}$, mais aussi de h_0 et de b_0

Aussi la formule (19') ne peut elle être que d'utilité secondaire, la formule (19) étant essentielle. Elle peut s'écrire :

$$c = h - \frac{h_0}{2} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{78 A - B}{B} \times \frac{b_0}{b R_a}} \sqrt{\frac{M}{b_0}}$$

Elle est comparable à la formule (3') des sections rectangulaires transformée comme suit :

$$c = \gamma h = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{78 A - B}{B} \times \frac{\gamma}{R_a}} \sqrt{\frac{M}{b}}$$

Les deux formules ne diffèrent que par le coefficient γ , (0,83 à 0,90), que contient l'une, et le rapport $\frac{b_0}{b}$ que contient l'autre. Or, normalement,

$\frac{b_0}{b}$ est voisin de 4. Il en résulte que la valeur la plus économique du bras de levier c du couple résistant, pour un même taux de travail de l'armature et même valeur du moment fléchissant par unité de largeur, est moyennement double pour une poutre nervurée par rapport à une poutre rectangulaire. Cette conclusion est approximativement vraie pour la hauteur théorique h . Elle sous-entend peu de différence entre les valeurs de $\frac{\alpha}{\beta}$ dans les deux cas, ce qui est pratiquement vrai.

Il en résulte que la hauteur la plus économique est généralement supérieure à celle qui correspond à la réalisation simultanée des tensions R_a et R'_b . Donc, le cas le plus fréquent est $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b < R'_b$, et à la limite $\sigma'_b = R'_b$. Cette conclusion n'a rien de surprenant, d'après la remarque finale du § précédent. Elle reste exacte si v' est plus petit que h_0 ; c est alors différent de $h - \frac{h_0}{2}$, mais peut s'exprimer cependant par une relation analogue. Ce cas est d'ailleurs improbable.

L'influence du poids propre est faible, puisque sa majeure partie, qui provient de la dalle, est connue d'avance. On en tiendrait compte en substituant dans les formules au moment total M , le moment M' de toutes les actions autres que le poids de la nervure.

La troisième hypothèse, $\sigma_a < R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$, ne doit pas être retenue. Il résulte du § 11 que, même dans les circonstances les plus favorables, cette éventualité est presque impossible pour les sections rectangulaires. Il en est ainsi a fortiori pour les poutres nervurées. Aussi n'examinons-nous pas le cas, pour lequel les formules, mêmes approximatives, sont d'ailleurs très compliquées.

L'étude de la variation de hauteur de la poutre en vue d'un profil de plus grande économie présente également peu d'intérêt, tout au moins pour les portées moyennes. Par suite de l'étroitesse relative de la nervure, il faut toujours au droit des appuis donner une hauteur considérable à la poutre, en vue de résister aux efforts tranchants. Elle peut-être supérieure à celle qu'exige la résistance au plus grand

moment fléchissant. La possibilité de variation de hauteur est donc minime et peu intéressante.

17. — **Détermination de la valeur de α .** — Les considérations générales du § 8 s'appliquent au cas actuel. A titre d'exemple, le tableau ci-dessous donne les valeurs élémentaires de α pour les poutres nervurées.

Eélément d'armature	Coefficient partiel correspondant	Observations particulières.
Section théorique	1,00	
Supplément pour la section pratique ...	0,04	
Crochets et ancrages	0,08 à 0,30	2 appuis simples. poutres continues.
Supplément pour les barres obliques ..	0,03	
Armature supérieure	0,30	poutres continues.
Etriers	0,13	

Il en résulterait pour les poutres sur deux appuis simples : $\alpha = 1,28$,
et pour les poutres continues : $\alpha = 1,80$.

18. **Applications.** — Supposons une poutre continue en béton n° 4 de l'A. B. S. (voir § 11), pour lequel $R_a = 1200$, $R'_b = 50$, $m = 15$ ($\rho = 1,60$), et soient : $B = 94$, $A = 80$, d'où $\frac{78 A - B}{B} = 65,4$ environ. Enfin $\alpha = 1,80$. La formule (19) s'écrit :

$$h - \frac{h_0}{2} = \sqrt{\frac{1,80 \times 65,40}{1200}} \sqrt{\frac{M}{\beta b}} = 0,313 \sqrt{\frac{M}{\beta b}}$$

Soient : $M = 18.000$ kgm., $b_0 = 150$ cm., $h_0 = 15$ cm., et supposons $b = 30$ cm. Si le prix du mètre carré de coffrage vertical des nervures peut être fixé à 10 frs, pour la largeur $b = 30$ cm. :

$$\beta = 1 + \frac{2 C}{b B} = 1 + \frac{2 \times 10}{0,30 \times 94} = 1,71.$$

Donc :
$$h - \frac{h_0}{2} = 0,0437 \sqrt{M}.$$

Si l'on néglige l'influence du poids propre, $M = 1.800.000$, donc :
 $h - \frac{h_0}{2} = 0,0437 \times 1341 = 57,5$ cm., d'où : $h = 57,5 + 7,5 = 65$ cm.

Si l'on tient compte du poids de la nervure, et que le moment correspondant soit 150.000 kgcm, $M' = 1.650.000$ kgcm et :

$$h - \frac{h_0}{2} = 0,0437 \times 1283 = 56,25 \text{ cm.}, \text{ d'où : } h = 63,75 \text{ cm.}$$

Si l'on calculait la valeur de h pour $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_a$, on trouverait $h = 37,8$ cm. Enfin, pour compléter la comparaison, nous examinerons encore les cas :

$$\begin{aligned} \sigma_a = R_a, \quad \sigma'_b = 40 < R'_b, & \quad \text{pour lequel} \quad h = 45 \text{ cm.}, \quad \text{et} \\ \sigma_a = R_a, \quad \sigma'_b = 33,33 < R'_b, & \quad \text{pour lequel} \quad h = 52 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Les différentes dimensions, les tensions et les prix correspondants des nervures sont réunis dans le tableau ci-dessous.

h cm	Ω_a cm ²	σ_a kg/cm ²	σ'_a kg/cm ²	Prix par mètre courant (sans l'é- paisseur a de bé- ton de recouvrem- ent). frs	en % du minimum	Observations
65	25,1	1200	25,5	51,90	—	hauteur optimum. id, compte tenu du poids propre.
63,75	25,8	»	26,10	52,10	—	
52	31,75	»	33,33	52,95	102 %	hauteur minimum.
45	37,50	»	40	56,00	107,75 %	
37,8	45,4	»	50	61,20	117,9 %	

Pour la largeur b de 30 cm., qui correspond à $0,20 \times b_0$, l'économie réalisable sur le prix d'un mètre courant de nervure, par rapport à la hauteur minimum, atteint 15% environ. Le tableau montre que l'accroissement de prix par rapport au minimum est très faible pour des variations assez importantes de hauteur en deçà de la valeur optimum, ce qui résulte de la propriété que les variations d'une fonction sont faibles aux environs du minimum. Il est à remarquer que les résultats du tableau ont été obtenus en partant d'une même valeur de 1.800.000 kgcm du moment total M . En réalité, par suite des variations du poids de la nervure, M aurait dû décroître du premier au dernier cas, ce qui aurait légèrement atténué les différences mises en évidence.

Dans un avant projet, la hauteur h étant inconnue, le moment total M ne peut être connu exactement. Au contraire, M' est exactement déterminé et permet de calculer la valeur optimum de h , compte tenu de l'influence du poids propre. Dès lors, le poids propre est entièrement déterminé, ainsi que la valeur exacte de M , et les dimensions de la pièce peuvent se calculer exactement. Cette manière de procéder est plus rationnelle que celle qui a été appliquée ci-dessus, dans un but purement comparatif.

Bien qu'il soit avantageux de faire travailler le béton en dessous de la limite de sécurité, il n'y a pas toutefois grand intérêt à augmenter la hauteur jusqu'à la valeur optimum, un résultat satisfaisant peut être obtenu avec une hauteur plus faible. C'est à quoi les circonstances conduisent généralement ; des nervures de trop grande hauteur peuvent.

présenter des inconvénients pour le coffrage, le placement des armatures, le damage etc., qui compensent leurs avantages de rigidité et de sécurité. Il est néanmoins intéressant de calculer la hauteur optimum et la hauteur minimum, afin de choisir à bon escient la valeur convenable de h .

Observons que dans l'exemple qui fait l'objet du tableau précédent, la largeur $b = 30$ cm., est suffisante pour le logement des barres pour $h = 65$ cm. et $h = 63,75$ cm. et qu'elle peut encore à la rigueur convenir pour $h = 52$ cm., bien qu'un léger élargissement soit déjà préférable. Par contre, pour $h = 45$ et $h = 37,8$ cm., la largeur de b est insuffisante et il faut, pour le dernier cas, envisager $b = 42$ cm. Alors, le prix par mètre courant correspondant à la hauteur minimum devient 63,80 frs, soit 123% du prix minimum. Si, pour la poutre de 52 cm., de hauteur on adopte $b = 33$ cm., le prix devient 54,35 frs, soit 104,5% du prix minimum ⁽¹⁾.

Tous ces résultats sont calculés par les formules usuelles rigoureuses ; seules les hauteurs optima sont calculées par la formule approximative (19), dont la valeur pratique est ainsi établie.

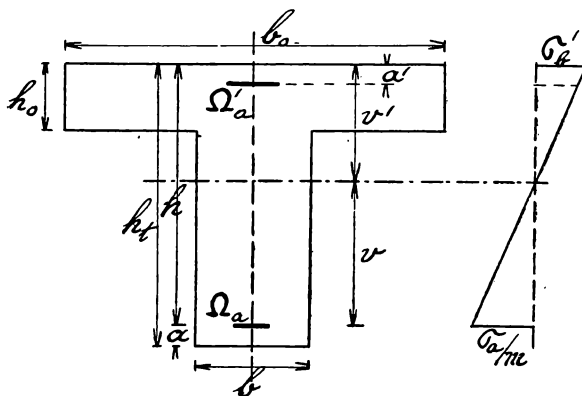


Fig. 8.

teur insuffisante de la pièce. La première hypothèse ne demande aucun développement nouveau. Il suffit de tenir compte de l'armature comprimée dans la détermination de α , comme il a été indiqué au § 12. Pour les poutres de hauteur relativement faible, il arrive que pour $\sigma_a = R_a$, $\sigma'_b > R'_b$. Il existe trois moyens de donner à σ'_b une valeur admissible :

1° Augmenter Ω_a et réduire σ_a à une valeur inférieure à R_a , tandis que $\sigma'_b = R'_b$;

2° Renforcer la zone de compression, en vue d'augmenter R'_b , par

⁽¹⁾ Dans ces corrections, il est tenu compte des changements de β , mais non des variations du poids propre. M est toujours supposé égal à 1.800.000 kgcm.

19. Poutres nervurées à double armature. —

Il faut distinguer entre les cas où la seconde armature est nécessaire pour travailler à l'extension lors de changements de sens de la flexion, ou bien pour travailler à la compression en cas de hauteur

frettage, enrichissement du dosage en ciment, emploi de ciments spéciaux, etc.

3° Armer la zone comprimée, de manière à réaliser $\sigma_a \leq R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$.

Le premier moyen est peu efficace pour les poutres nervurées, à ailes et nervures d'épaisseurs normales. En effet, la zone active de compression est presque limitée aux ailes, la zone comprimée de la nervure joue un rôle très restreint. Même en réduisant σ_a dans de grandes proportions, pour abaisser l'axe neutre, la résultante des tensions de compression du béton n'augmente guère, tandis que le bras de levier du couple résistant diminue. De ce fait, et surtout par suite de la diminution de σ_a , Ω_a augmente considérablement. Pour une pièce fortement chargée, la solution est généralement impraticable.

Les deux autres moyens constituent des renforcements efficaces de la zone de compression. Le premier d'entre eux, qui recherche l'augmentation de la résistance du béton à la compression par frettage, etc., n'est pas à étudier spécialement. Il rentre dans le cadre des § précédents, car il se caractérise simplement par des valeurs spéciales de R'_b et de βB .

Le dernier moyen, que nous étudierons plus en détail, consiste à augmenter la section fictive de la zone comprimée par l'emploi d'armatures longitudinales, sans augmenter R'_b .

Nous supposons que l'armature comprimée se trouve à hauteur de la résultante des tensions de compression du béton et qu'elle soit au milieu de la hauteur de la dalle. L'équilibre de translation des actions intérieures exige que :

$$\Omega_a \sigma_a = (b_o h_o + m \Omega'_a) \left(1 - \frac{h_o}{2 v'}\right) \sigma'_b.$$

Posons $\frac{h}{h_o} = \eta$. Comme $v' = \frac{h}{1 + \theta}$:

$$b_o h_o + m \Omega'_a = \frac{m \Omega_a \sigma_a}{\left[1 - \frac{1}{2 \eta} (1 + \theta)\right] m \sigma'_b} = m \Omega_a \frac{\theta}{1 - \frac{1}{2 \eta} (1 + \theta)}$$

Donc :
$$\Omega'_a = \Omega_a \frac{\theta}{1 - \frac{1}{2 \eta} (1 + \theta)} - \frac{b_o h_o}{m},$$

$$\begin{aligned} \Omega_a + \Omega'_a &= \Omega_a \left[1 + \frac{\theta}{1 - \frac{1}{2 \eta} (1 + \theta)}\right] - \frac{b_o h_o}{m} \\ &= \Omega_a \frac{(1 + \theta) \left(1 - \frac{1}{2 \eta}\right)}{1 - \frac{1}{2 \eta} (1 + \theta)} - \frac{b_o h_o}{m}. \end{aligned}$$

$$\text{Comme : } \Omega_a = \frac{M}{\left(h - \frac{h_0}{2}\right) \sigma_a} = \frac{M}{h \left(1 - \frac{1}{2\eta}\right) \sigma_a},$$

$$\Omega_a + \Omega'_a = \frac{M(1 + \theta)}{h \left[1 - \frac{1}{2\eta}(1 + \theta)\right] \sigma_a} - \frac{b_0 h_0}{m}.$$

En supposant σ_a invariable, la fonction ci-dessus de θ n'a pas de minimum pour une valeur finie de θ . La solution $\sigma_a = R_a$ n'est donc pas susceptible d'un minimum. Substituons σ'_b à σ_a .

$$\Omega_a + \Omega'_a = \frac{M(1 + \theta)}{h \left[1 - \frac{1}{2\eta}(1 + \theta)\right] \theta m \sigma'_b} - \frac{b_0 h_0}{m}.$$

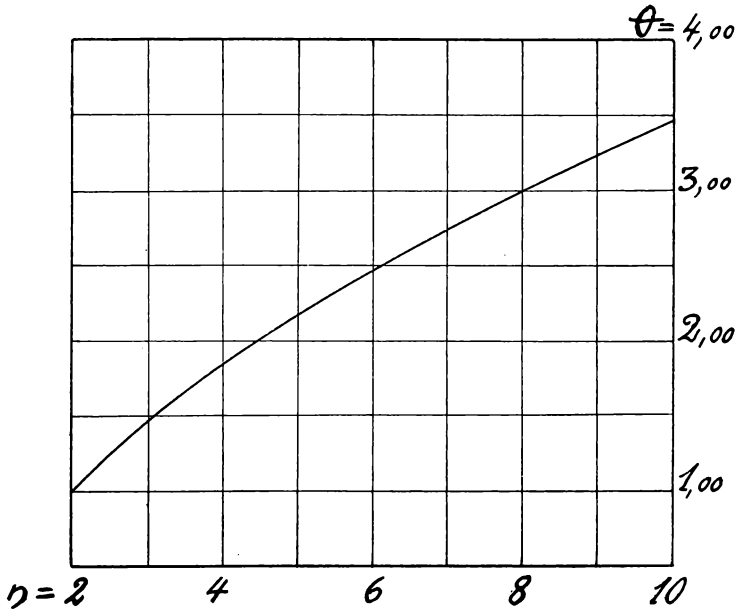


Fig. 9.

Supposons σ'_b invariable et égal d'ailleurs à R'_b ; cette fonction de θ admet un minimum, conditionné par la relation :

$$\left[1 - \frac{1}{2\eta}(1 + \theta)\right] \theta - (1 + \theta) \left[1 - \frac{1}{2\eta} - \frac{\theta}{\eta}\right] = 0,$$

d'où :

$$\theta(2 + \theta) = 2\eta - 1,$$

et

$$\theta = -1 + \sqrt{2\eta}.$$

On en déduit les valeurs de θ en fonction de $\eta = \frac{h}{h_0}$; elles sont représentées par le graphique de la figure 9.

Pour que ces solutions soient admissibles, il faut que $\sigma^a < R_a$, donc que les valeurs de θ soient inférieures à ρ . Avec les valeurs usuelles de ρ , cette condition n'est réalisée que pour les valeurs faibles de η , c'est-à-dire les poutres à nervures peu ou moyennement hautes. Pour des nervures plus élevées, si la valeur optimum de θ est supérieure à ρ , cela signifie que la solution pratiquement la plus avantageuse correspond à $\theta = \rho$, c'est-à-dire à $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$.

Le calcul ci-dessus n'est qu'approximatif, mais il est susceptible cependant de donner des indications utiles et de guider dans le choix de θ . Cela fait, le calcul des armatures s'effectue par les méthodes habituelles et il y a grand intérêt, surtout pour les valeurs réduites de θ , de faire ce calcul en tenant compte de la zone comprimée de la nervure (Voir « Note sur le calcul organique des pièces fléchies en béton armé ». *Annales des Travaux Publics de Belgique*, fasc. 2, 1924, § 28).
