

ÉTUDE DE L'ÉCONOMIE DES PIÈCES SIMPLEMENT FLÉCHIES EN BÉTON ARMÉ

par Fernand CAMPUS,

Ingénieur des Constructions civiles (A. I. Br.) et électricien (A. I. E. M.)
Directeur technique adjoint des Travaux Publics,
Chemins de fer, Postes, Télégraphes et Téléphones du Territoire de la Sarre.

1. **Avant-propos.** — Les règlements ou les méthodes d'application courante basent les calculs des pièces fléchies en béton armé sur les conditions de résistance, c'est-à-dire de sécurité, qui sont primordiales. Mais le nombre des paramètres est si élevé que les critères précités laissent une grande latitude dans le choix des solutions. C'est de cette circonstance que j'ai cherché à tirer parti pour étudier quelles sont les dimensions les plus économiques parmi celles qui satisfont aux conditions de sécurité.

La tentative n'est pas neuve et les littératures techniques étrangères contiennent de nombreuses contributions à cette question. Très souvent les auteurs se sont laissés emporter par le sujet et ont proposé de substituer aux formules ordinaires de résistance des formules nouvelles, généralement compliquées et peu intuitives, dans lesquelles les conditions de sécurité ne sont pas ou peu apparentes. Sans doute doivent elles à ce caractère d'avoir rencontré peu de faveur.

J'ai voulu éviter cet écueil et je conserve le principe que tout calcul doit être effectué principalement d'après les conditions de sécurité. Mais, avant de procéder à ce calcul, il est utile de rechercher les valeurs de certains éléments, soient les taux de travail, ou un élément géométrique de la section, qui procureront la solution la plus économique. Ce choix demande l'emploi de formules, tableaux ou graphiques très simples ; il se fait sans grandes peines et en peu de temps. Comme il importe moins de réaliser un minimum mathématique, d'ailleurs difficile à fixer avec précision à cause de la complexité des formules, que de ne pas trop s'éloigner de ce minimum, il est justifié de recourir dans l'exposé qui suit à des formules presque toutes approximatives, dont le degré d'erreur est d'ailleurs analysé.

J'emploie comme notations celles qui sont préconisées par le règlement de l'Association belge de Standardisation (désigné dans la suite par A. B. S.). J'ai recours en outre, pour désigner certains rapports aux symboles :

$$\lambda = \frac{m \Omega_a}{bh} \quad , \quad \lambda' = \frac{m \Omega'_a}{bh} \quad , \quad \alpha = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\Omega'_a}{\Omega_a} \quad , \quad \gamma = \frac{c}{h}$$

(voir fig. 1), $\nu = \frac{b}{b_0}$, $\tau = \frac{h}{h_0}$ (voir fig. 7), $\eta = \frac{\sigma_a}{m \sigma'_b}$ et $\rho = \frac{R_a}{m R'_b}$.

FLEXION PLANE SIMPLE DES PIÈCES RECTANGULAIRES

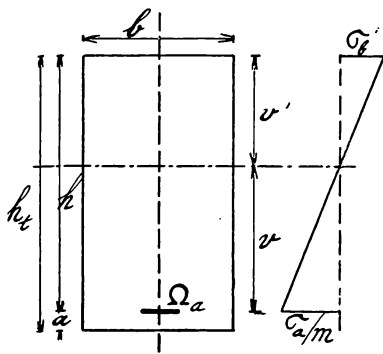


Fig. 1.

2. Prix d'une pièce de section rectangulaire constante simplement armée. — Soit un élément de longueur Δl , de hauteur constante h_t , de largeur constante b , soumis à la flexion plane simple, définie par une certaine courbe des moments fléchissants dont le maximum est M . Les conditions de sécurité sont $\sigma'_b < R'_b$ et $\sigma_a < R_a$. Désignons par c le bras de levier du couple des forces élastiques. La section maximum de l'armature étendue est

$$\Omega_a = \frac{M}{c \sigma_a}.$$

Soient : B le prix du béton par mètre cube,
 β un coefficient de majoration de ce prix applicable au cas étudié,
 A le prix de l'acier d'armatures par 100 kgs (ou 78A le prix par mètre cube),
 α un coefficient de majoration applicable à la section maximum de l'armature dans le cas examiné.

Le prix $\Delta \pi$ de l'élément de longueur Δl s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta \pi &= \Delta l [bh_t \beta B + \alpha \Omega_a (78 A - B)] + c^2 \sigma_a \\ &= \Delta l [bh_t \beta B + \frac{\alpha M}{c \sigma_a} (78 A - B)] + c^2 \sigma_a \end{aligned} \quad (1)$$

Le prix brut du béton par m³, désigné par B , s'applique aux matériaux mis en œuvre, bétonnage achevé. Il se compose du prix des constituants rendus à pied d'œuvre, des frais de mélange, de mise en place, de pilonnage et des mesures de protection éventuelles pendant la prise.

Affecté du coefficient β , ce prix devient le prix net βB qui, pour un même béton, peut varier d'après la pièce. Ce facteur est destiné à tenir compte des frais de coffrage et de décoffrage, de lissage, travail au fleuret ou toute autre dépense supplémentaire en rapport avec la périphérie et de nature à influencer sur le prix.

Ainsi, considérons deux pièces de même hauteur h_t et de largeurs différentes b_1 et b_2 , constituées d'un même béton de prix brut B . Les frais de coffrage horizontal sont proportionnels à la largeur, donc

égaux par unité de volume dans les deux cas. Au contraire, les frais des coffrages verticaux sont les mêmes pour les deux pièces. Comme ils se rapportent à des volumes différents $b_1 h_t$ et $b h_t$, ils seront inégaux par unité de volume. Le prix net sera plus élevé pour la pièce la plus mince. Si C est le prix du coffrage par mètre carré et s'il n'y a pas d'autres facteurs accessoires,

$$\beta = 1 + \frac{2C}{bB} + \frac{C}{h_t B}.$$

Le troisième terme du second membre disparaît habituellement, parce que son influence est généralement négligeable et que, la largeur étant souvent constante, le prix du coffrage horizontal peut être considéré comme englobé dans la partie constante du prix. Généralement donc :

$$\beta = 1 + \frac{2C}{bB}.$$

La même formule est applicable si C représente le prix d'un mètre carré d'enduit spécial, de taille au fleuret ou au marteau de la surface, etc.

Si le coffre de la pièce est constitué par une fouille (fondation), dont le prix au mètre cube est F :

$$\beta = 1 + \frac{F}{B}.$$

Le prix A de l'acier par 100 kgs est le prix net, fers mis en œuvre. Il comprend donc le prix des matériaux rendus à pied d'œuvre, les frais de manutention et de préparation, mise à longueur, pliage, forgeage s'il y a lieu, mise en place et ligature.

Le coefficient α n'affecte pas le prix de l'acier, mais bien la section maximum d'armature. La section d'armature varie tout le long de la pièce, et il y a lieu d'ajouter à la section théorique des suppléments pour tenir compte des crochets, jonctions, barres obliques, étriers, armatures accessoires ou comprimées, etc. C'est donc un coefficient tel que le volume total d'armatures ait pour expression $\alpha \Omega_a \Delta l$. Nous verrons plus loin comment on le détermine.

3. Discussion de la formule (1) lorsque aucun élément de la section n'est donné a priori (cas des poutres). — b et h_t sont donc complètement indéterminés. D'après la formule (1), il paraît avantageux de réduire b autant que possible. Mais il y a des limites provenant de la résistance à opposer aux efforts tranchants et de la répartition convenable des barres dans la section du béton.

La seconde condition n'est pas susceptible d'une interprétation mathématique aisée. La première s'exprime par :

$$\sigma''_b = \frac{T_{max}}{c b} \leq R''_b ,$$

d'où :

$$b \geq \frac{T_{max}}{c R''_b}$$

En considérant la valeur limite, la formule (1) devient

$$\Delta \pi = \Delta l \left[\frac{T_{max} h_t}{c R''_b} \beta B + \frac{\alpha M}{c \sigma_a} (78 A - B) \right] + c^{te}.$$

Cette fonction n'a pas de minimum si l'on considère que α et β sont constants. Elle décroît d'une manière continue lorsque h_t et c croissent. Théoriquement, il semble donc qu'il y aurait avantage à donner à la pièce la plus grande hauteur possible, la largeur décroissant en conséquence. Des considérations pratiques limitent toutefois l'augmentation de h_t et la réduction de b , notamment, pour cette dernière, la répartition des barres.

Il existe d'ailleurs un minimum théorique, qui provient de ce que β n'est pas constant. En effet, si C est le prix d'un mètre carré de coffrage vertical simple, compte tenu de l'enduit ou de toute autre circonstance analogue :

$$\beta = 1 + \frac{2 C}{b B}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \Delta \pi &= \Delta l \left[\frac{B T_{max} h_t}{c R''_b} + \frac{2 C T_{max} h_t}{b c R''_b} + \frac{\alpha M}{c \sigma_a} (78 A - B) \right] + c^{te}, \\ &= \Delta l \left[\frac{B T_{max} h_t}{c R''_b} + 2 C h_t + \frac{\alpha M}{c \sigma_a} (78 A - B) \right] + c^{te}. \end{aligned}$$

En admettant que a soit constant et en remarquant que le terme $\frac{B T_{max}}{c R''_b} a$ est négligeable lorsque la hauteur est grande, enfin en posant

$$\frac{c}{h} = \gamma = c^{te} :$$

$$\Delta \pi = \Delta l \left[\frac{B T_{max}}{\gamma R''_b} + 2 C h + (78 A - B) \frac{\alpha M}{\gamma h \sigma_a} \right] + c^{te}.$$

Cette fonction est susceptible d'un minimum lorsque :

$$h^2 = \frac{78 A - B}{2 C} \frac{\alpha M}{\gamma \sigma_a} = \frac{78 A - B}{2 C} \alpha \Omega_a h,$$

d'où :

$$c = \gamma h = \sqrt{\frac{78 A - B}{2 C}} \gamma^\alpha \sqrt{\frac{M}{\sigma_a}},$$

et

$$\Omega_a = \frac{\sqrt{\frac{M}{\sigma_a}}}{\sqrt{\frac{78 A - B}{2 C}} \gamma^\alpha},$$

Observons que ces résultats ne sont pas influencés par le poids propre. Le volume utile du béton est en effet $bh = \frac{T_{max}}{\gamma R'_b}$, il est donc constant, de même que son poids.

Le minimum théorique que nous venons de déterminer sort des limites pratiques. En effet, B peut varier de 0,8 à 2 A , tandis que $C = 0,1 A$ environ. Il en résulte que $\frac{78 A - B}{2 C}$ peut varier de 380 à 386, ce qui donne environ $c = \gamma h = 19,5 \sqrt{\frac{M}{\sigma_a}}$.

Donc, pour $\sigma_a = 1200 \text{ kg/cm}^2$, $c = \gamma h = 0,56 \sqrt{M}$.

Il en résulte que la valeur de h serait plus de 10 fois plus élevée que la valeur normale.

Il ne peut donc être établi de critère théorique formel. Il faut retenir qu'il y a intérêt à augmenter la hauteur autant que possible et à réduire la largeur. Pratiquement, on recherchera quelle est la plus grande hauteur que permettent les circonstances ou les sujétions quelconques ; éventuellement on se servira de proportions empiriques par rapport à d'autres éléments de la pièce (portée, etc.) On calculera ensuite la largeur et l'armature étendue en tenant compte des taux de travail de sécurité R_a et R'_b et on vérifiera si la largeur trouvée est suffisante pour permettre le placement des barres et pour assurer la résistance aux effets des efforts tranchants.

Si ces conditions ne sont pas satisfaites, on élargira la pièce de la quantité voulue. Si cet élargissement est important, et que c'_b devienne beaucoup plus petit que R'_b , il y aura lieu de rechercher si, pour la nouvelle valeur choisie de b , il n'existe pas une valeur de h , inférieure à la limite choisie, donnant le maximum d'économie. Nous examinerons ce cas dans la suite.

En toute occurrence, il apparaît défavorable, sauf circonstances spéciales, de partir du choix de b . La question de l'influence du poids propre ne se pose guère, attendu qu'il résulte des variations inverses de h et de b que leur produit, auquel le poids est proportionnel, varie peu.

4. Cas des poutres dont la hauteur est imposée. — Ce cas est résolu par les conclusions du § précédent. Si la hauteur est imposée par des

sujétions quelconques, la formule (1) indique qu'il n'existe pas de minimum mathématique, mais que $\Delta\pi$ est d'autant plus petit que b est plus réduit. On prendra donc pour b la plus petite valeur qui satisfasse aux quatre conditions :

$$\sigma_a \leq R_a, \quad \sigma'_b \leq R'_b, \quad \sigma''_b \leq R''_b$$

et « $b >$ espace nécessaire pour permettre la répartition convenable des barres ». Eventuellement, il pourrait être utile de vérifier si, pour la valeur choisie de b , il n'existe pas une valeur plus économique de h_t , inférieure à la valeur imposée.

5. Cas de la pièce de largeur constante (Dallage). Etude approximative sans tenir compte de l'effet du poids propre. — La largeur b étant constante et en admettant l'hypothèse très plausible de la constance de a , la formule (1) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \Delta\pi &= \Delta l [bh^2\beta B + \alpha \Omega_a (78A - B)] + c^{te}, \\ &= \Delta l \left[bh^2\beta B + \frac{\alpha M}{c\sigma_a} (78A - B) \right] + c^{te}. \end{aligned} \quad (2)$$

L'approximation que nous introduisons dans l'étude de la fonction $\Delta\pi$ consiste à admettre la constance du rapport $\gamma = \frac{c}{h}$. Donc :

$$\Delta\pi = \Delta l \left[bh^2\beta B + \frac{\alpha M}{\gamma h\sigma_a} (78A - B) \right] + c^{te} \quad (2')$$

Cette fonction est susceptible d'un minimum, correspondant à une valeur optimum de la variable indépendante h . Pour que cette solution soit admissible, il faut qu'elle satisfasse aux conditions $\sigma_a \leq R_a$ et $\sigma'_b \leq R'_b$. Ces deux conditions doubles permettent quatre combinaisons. L'une d'elles toutefois est incompatible avec le minimum, c'est la combinaison $\sigma_a < R_a$ et $\sigma'_b < R'_b$. Car, pour la même hauteur h , une des solutions :

$$\sigma_{1a} = R_a \quad \text{et} \quad R'_b > \sigma'_{1b} > \sigma'_b,$$

ou $R_a > \sigma_{1a} > \sigma_a$ et $\sigma'_{1b} = R'_b$,

donnerait une valeur de $\Delta\pi$ plus petite que celle correspondant à σ_a et σ'_b . Sont seules compatibles avec la solution du minimum les combinaisons :

$$\sigma_a = R_a, \quad \sigma'_b < R'_b;$$

$$\sigma_a < R_a, \quad \sigma'_b = R'_b;$$

et $\sigma_a = R_a, \quad \sigma'_b = R'_b$.

La dernière est généralement considérée à priori comme étant la plus avantageuse, parce qu'elle réalise apparemment la meilleure utilisation de la matière. Mais cette apparence peut-être en défaut,

à cause de la constitution hétérogène de la pièce étudiée. Nous verrons qu'elle n'est vraie que pour certaines valeurs relatives des prix des constituants béton et acier.

Examinons comme première hypothèse : $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b < R'_b$.

La formule (2') s'écrit :

$$\Delta\pi = \Delta l \left[bh\beta B + \frac{\alpha M}{\gamma h R_a} (78 A - B) \right] + c^{te}.$$

La condition du minimum, aisée à en déduire, s'écrit :

$$bh\beta B = \frac{\alpha M (78A - B)}{\gamma h R_a} = \alpha \Omega_a (78 A - B).$$

Rappelons les notations λ , θ et ρ désignant les rapports $\frac{m \Omega_a}{bh}$, $\frac{\sigma_a}{m \sigma'_b}$ et $\frac{R_a}{m R'_b}$ (voir § 1). La condition ci-dessus peut s'écrire :

$$\lambda = \frac{\beta}{\alpha} \frac{m B}{78 A - B}, \quad (3)$$

ou encore :

$$h = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{78 A - B}{B} \cdot \frac{1}{\gamma R_a}} \sqrt{\frac{M}{b}}, \quad (3')$$

Pour que cette solution soit acceptable, il faut que $\sigma_b \leq R'_b$; pour cela il faut et il suffit que :

$$h \geq \frac{(R_a + m R'_b) \sqrt{6m}}{m R'_b \sqrt{(3R_a + 2m R'_b)}} \sqrt{\frac{M}{b}},$$

ou encore que :

$$\lambda \leq \frac{1}{2\rho(1+\rho)}. \quad (4)$$

Comme $\lambda = \frac{1}{2\theta(1+\theta)}$ (Voir ma Note sur le calcul organique des pièces fléchies en béton armé. — *Annales des Travaux Publics de Belgique*, fasc. 1 de 1924), il est possible de représenter le premier membre de l'équation (3) en fonction de θ . Comme c'est en fait $\frac{\beta}{\alpha} \frac{m B}{78 A - B}$ qui constitue la variable indépendante, nous porterons ses valeurs en abscisses et celles de θ en ordonnées, pour obtenir une représentation graphique de la condition (3). C'est la courbe désignée par le symbole $\mathfrak{M}R_a$ dans la planche de la figure 2.

L'étude du minimum se fait très simplement par le moyen de cette

courbe. En effet, α , β , A et B sont connus, ainsi donc que $\frac{\beta}{\alpha} \times \frac{mB}{78A-B}$.

D'autre part, les tensions de sécurité sont données, leur rapport est ρ . Ces deux nombres expriment les coordonnées d'un point X du graphique de la figure 2, qui est caractéristique du problème. La condition (4) est satisfaite si le point X est situé entre l'axe des ordonnées et la courbe σR_a , c'est à dire à gauche et en-dessous de cette courbe. Si tel est le

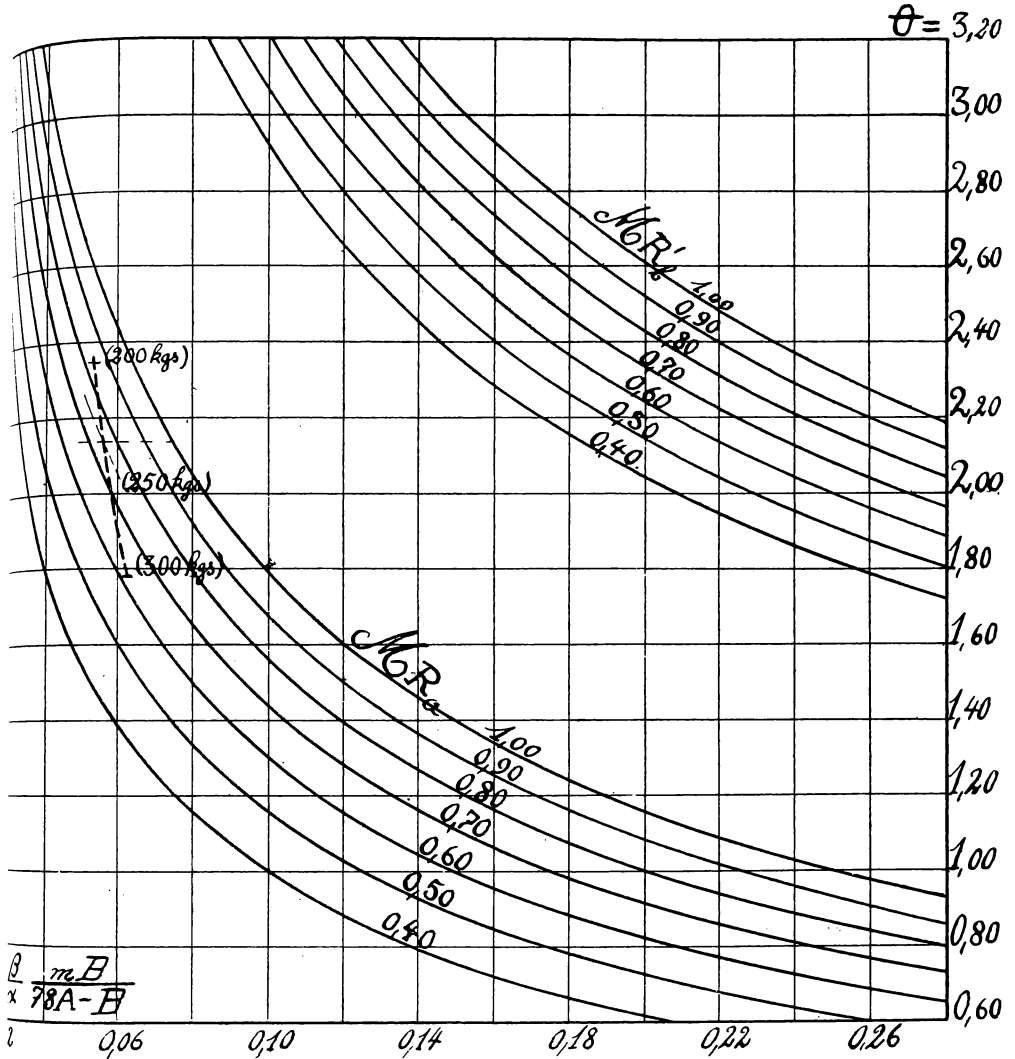


Fig. 2.

cas, il existe un minimum, défini par le point Y de la courbe $\mathcal{O}K R_a$ ayant même abscisse que X. Son ordonnée détermine la valeur du rapport $\frac{R_a}{m \sigma'_b}$. Il est évident que $\sigma'_b < R'_b$.

Si le point X est situé sur la courbe $\mathcal{O}K R_a$, le minimum correspond à ce point même et aux tensions R_a et R'_b .

Si X est au-dessus et à droite de la courbe, la condition (4) n'est pas satisfaite et le minimum ne correspond pas à $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b < R'_b$.

Examinons ensuite la seconde hypothèse $\sigma_a < R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$.

Nous étudierons la première expression de la formule (2) :

$$\Delta \pi = \Delta l [bh\beta B + \alpha \Omega_a (78 A - B)] + c^t e.$$

La condition du minimum s'écrit :

$$b\beta B + \alpha (78 A - B) \frac{d\Omega_a}{dh} = 0.$$

Comme σ_a varie avec h , tandis que σ'_b est constante et égale à R'_b , nous devons établir une expression de Ω_a qui soit indépendante de σ_a .

$$\Omega_a \sigma_a = \frac{bv'}{2} \sigma'_b = \frac{M}{\gamma h},$$

donc :

$$\Omega_a = \frac{bv'}{2} \frac{\sigma'_b}{\sigma_a}.$$

D'autre part :
$$\frac{\sigma_a}{m\sigma'_b} = \eta = \frac{h}{v'} - 1.$$

De la combinaison des deux dernières égalités résulte :

$$\Omega_a = \frac{bv'^2}{2m(h - v')}.$$

Or
$$v' = \frac{2M}{b\gamma h \sigma'_b}, \quad \text{d'où finalement :}$$

$$\Omega_a = \frac{2M^2}{m\gamma h (\gamma bh^2 \sigma'_b - 2M) \sigma'_b}, \quad \text{et}$$

$$\frac{d\Omega_a}{dh} = \frac{-2M^2}{m^2 \gamma^2 h^2 (\gamma bh^2 \sigma'_b - 2M)^2 \sigma'_b{}^2} \left[m\gamma (\gamma bh^2 \sigma'_b - 2M) \sigma'_b + 2m \gamma^2 bh^2 \sigma'_b{}^2 \right],$$

$$\frac{d\Omega_a}{dh} = -\frac{\Omega_a}{h} \frac{(3\gamma bh^2 \sigma'_b - 2M)}{(\gamma bh^2 \sigma'_b - 2M)},$$

$$= -\frac{\Omega_a}{h} \frac{3h - v'}{h - v'} = -\frac{\Omega_a}{h} \frac{2 + 3\theta}{\eta}.$$

La condition du minimum s'écrit dès lors :

$$b\beta B - \alpha(78A - B) \frac{\Omega_a}{h} \frac{2 + 3\theta}{\theta} = 0,$$

d'où :

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = \lambda \frac{2 + 3\theta}{\theta}. \quad (5)$$

Le second membre de cette équation est exclusivement fonction de θ . Elle peut donc se représenter graphiquement de la même manière que (3). La courbe correspondante, désignée dans la figure 2 par le symbole $\mathcal{O}\mathcal{L}R'_b$, est située au-dessus et à droite de la courbe $\mathcal{O}\mathcal{L}R_a$.

Pour que le minimum soit admissible, il faut que $\sigma_u \leq R_a$, ce qui exige que :

$$\lambda \frac{2 + 3\theta}{\theta} \geq \frac{1}{2\rho(1 + \rho)} \frac{2 + 3\rho}{\rho}. \quad (5')$$

Cette condition signifie que le point caractéristique X du problème doit se trouver au-dessus et à droite de la courbe $\mathcal{O}\mathcal{L}R'_b$. La solution du minimum est dans ce cas définie par le point Z de la courbe $\mathcal{O}\mathcal{L}R'_b$ ayant même abscisse que X. Son ordonnée détermine le rapport $\frac{\sigma_a}{mR'_b}$, d'où il résulte que $\sigma_a < R_a$.

Si le point X était situé sur la courbe $\mathcal{O}\mathcal{L}R'_b$, il correspondrait au minimum, qui aurait donc lieu pour $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$.

Enfin, il apparait maintenant clairement que si le point X se trouve entre les deux courbes $\mathcal{O}\mathcal{L}R_a$ et $\mathcal{O}\mathcal{L}R'_b$, le minimum théorique est inadmissible, mais que la solution la plus économique correspond à $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$.

Les deux courbes $\mathcal{O}\mathcal{L}R_a$ et $\mathcal{O}\mathcal{L}R'_b$ divisent donc le quadrant en trois zones, dont les deux extrêmes admettent des minima mathématiques satisfaisant aux conditions :

$$\begin{aligned} \sigma_a = R_a \text{ et } \sigma'_b < R'_b & \text{ pour l'inférieure, et} \\ \sigma_a < R_a \text{ et } \sigma'_b = R'_b & \text{ pour la supérieure.} \end{aligned}$$

La zone intermédiaire n'admet pas de minimum théorique, mais bien une solution optimum correspondant dans tous les cas à $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$.

Pour résoudre un problème quelconque, il suffit de repérer le point X sur la figure 2. La solution la plus économique correspond, selon le cas, aux intersections Y ou Z de l'ordonnée du point X avec les courbes $\mathcal{O}\mathcal{L}R_a$ ou $\mathcal{O}\mathcal{L}R'_b$, ou au point X lui-même. On repère sur l'axe des ordonnées la valeur de θ correspondant aux points Y, Z ou X; ils donnent les rapports $\frac{R_a}{m\sigma'_b}$, $\frac{\sigma_a}{mR'_b}$ ou $\frac{R_a}{mR'_b}$ à adopter pour le calcul

de la pièce, qui s'effectue ensuite par les méthodes ordinaires. Pratiquement, la recherche du minimum n'exige donc aucun calcul supplémentaire.

6. Correction à apporter à l'étude précédente pour tenir compte des effets du poids propre. — Nous avons admis dans l'étude précédente que M était indépendant de h , ce qui n'est pas exact si l'on met en évidence l'effet du poids propre. La partie du moment due au poids propre peut s'écrire :

$$M_p = K bh_l = Kbh + Kba,$$

K étant une fonction d'éléments géométriques constants de la pièce
Si M_e désigne le moment des actions extérieures :

$$M = M_e + M_p = M_e + Kbh + Kba.$$

En admettant la constance de a , on peut écrire :

$$M = M' + Kbh,$$

M' étant indépendant de h .

La formule (2') devient :

$$\Delta \pi = \Delta l \left[bh\beta B + \frac{\alpha M' (78A - B)}{\gamma h \sigma_a} + \frac{\alpha Kb (78A - B)}{\gamma \sigma_a} \right] + \text{cte.} \quad (6)$$

La condition du minimum de cette fonction, dans le cas où $\sigma_a = R_a$ = constante et $\sigma'_b < R'_b$, est

$$bh\beta B = \frac{\alpha M' (78A - B)}{\gamma h R_a}, \quad (7)$$

d'où :

$$h = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{78A - B}{B} \cdot \frac{1}{\gamma R_a}} \sqrt{\frac{M'}{b}}. \quad (7')$$

Pour que cette solution soit admissible, il faut et il suffit, comme au §5, que

$$h \leq \frac{(R_a + mR'_b) \sqrt{6m}}{mR'_b \sqrt{(3R_a + 2mR'_b)}} \sqrt{\frac{M}{b}}.$$

Mais la formule (7) peut s'écrire :

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = \frac{mM'}{\gamma bh^2 \sigma_a} = \frac{mM}{\gamma bh^2 \sigma_a} \left(1 - \frac{Kbh}{M} \right),$$

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = \lambda \left(1 - \frac{Kbh}{M} \right). \quad (8)$$

Donc, pour une valeur déterminée de $\frac{K bh}{M} = \frac{M - M'}{M}$, la courbe ϖR_a voit ses abscisses réduites dans le rapport $\frac{M'}{M}$, ce qui donne une nouvelle courbe située à gauche et en-dessous de la première tracée sur la figure 2.

En d'autres termes, nous pouvons considérer une famille de courbes ϖR_a , cotées en valeurs décroissantes de $\frac{M'}{M}$, par exemple 1,00 ; 0,90 ; 0,80 ; ... 0,50 et 0,40.

Il en résulte que lorsque l'influence du poids propre augmente, la zone correspondante à l'hypothèse $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b < R'_b$ diminue, ce qui est évident a priori.

La hauteur étant inconnue, l'importance relative du poids propre n'est pas prédéterminée et il faut procéder par tâtonnements. La solution est cependant quasi-directe, par suite de la simplicité du diagramme. Observons également que c'est généralement commettre une erreur négligeable que de substituer M_c à M' .

Examinons ensuite l'influence du poids propre dans l'hypothèse $\sigma_a < R_a$ et $\sigma'_b = R'_b =$ constante.

Nous avons établi que la condition du minimum est

$$b\beta B + \alpha (78 A - B) \frac{d\Omega_a}{dh} = 0,$$

et que :

$$\Omega_a = \frac{2 M^2}{m \gamma h (\gamma bh^2 \sigma'_b - 2 M) \sigma'_b} = \frac{2 M^2}{m \gamma \varphi \sigma'_b},$$

en posant

$$\varphi = h (\gamma bh^2 \sigma'_b - 2 M).$$

$$\text{Dès lors : } \frac{d\Omega_a}{dh} = \frac{4 M \frac{dM}{dh}}{m \gamma \varphi \sigma'_b} - \frac{2 M^2 \frac{d\varphi}{dh}}{m \gamma \varphi^2 \sigma'_b}.$$

$$\text{Comme } \frac{dM}{dh} = K b :$$

$$\frac{d\Omega_a}{dh} = \frac{4 M K b}{m \gamma \varphi \sigma'_b} - \frac{\Omega_a}{\varphi} \frac{d\varphi}{dh}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dh} &= 3 \gamma bh^2 \sigma'_b - 2M - 2h \frac{dM}{dh}, \\ &= 3 \gamma bh^2 \sigma'_b - 2M - 2h K b, \\ &= \frac{\varphi}{h} + 2 \gamma bh^2 \sigma'_b - 2 K bh. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{d \Omega_a}{dh} &= \frac{4 M K b}{m \gamma \varphi \sigma'_b} - \frac{\Omega_a}{\varphi} \left[\frac{\varphi}{h} + 2 \gamma b h^2 \sigma'_b - 2 K b h \right], \\ &= 2 K b \left(\frac{2 M}{m \gamma \varphi \sigma'_b} + \frac{\Omega_a h}{\varphi} \right) - \frac{\Omega_a}{h} - \frac{2 \Omega_a}{\varphi} \gamma b h^2 \sigma'_b, \\ &= \frac{2 K b \Omega_a}{M} \left(1 + \frac{h M}{\varphi} \right) - \frac{\Omega_a}{h} \left(1 + \frac{2 \gamma b h^3 \sigma'_b}{\varphi} \right), \end{aligned}$$

Or :

$$1 + \theta = \frac{h}{v'} = \frac{\gamma b h^2 \sigma'_b}{2 M}, \quad \text{d'où :} \quad \theta = \frac{\gamma b h^2 \sigma'_b}{2 M} - 1 = \frac{\varphi}{2 h M}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{d \Omega_a}{dh} &= \frac{2 K b \Omega_a}{M} \left(1 + \frac{1}{2 \theta} \right) - \frac{\Omega_a}{h} \left[1 + \frac{4 M (1 + \theta) h}{\varphi} \right] \\ \frac{d \Omega_a}{dh} &= \frac{K b \Omega_a}{M} \frac{2 \theta + 1}{\theta} - \frac{\Omega_a}{h} \left[1 + 2 \frac{1 + \theta}{\theta} \right], \\ &= \frac{K b \Omega_a}{M} \frac{1 + 2 \theta}{\theta} - \frac{\Omega_a}{h} \frac{2 + 3 \theta}{\theta}. \end{aligned}$$

Donc, la condition du minimum s'écrit enfin :

$$b B \beta + \alpha (78 A - B) \left(\frac{K b \Omega_a}{M} \frac{1 + 2 \theta}{\theta} - \frac{\Omega_a}{h} \frac{2 + 3 \theta}{\theta} \right),$$

ou

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{m B}{78 A - B} = \lambda \left(\frac{2 + 3 \theta}{\theta} - \frac{K b h}{M} \frac{1 + 2 \theta}{\theta} \right). \quad (9)$$

La comparaison de la formule (9) avec la formule (5) montre que pour une valeur déterminée de $\frac{K b h}{M} = \frac{M - M'}{M}$, la courbe $\mathcal{N}R'_b$ voit ses abscisses réduites, donnant lieu à une nouvelle courbe située à gauche et en-dessous de la première tracée sur la figure 2. Il y a donc aussi une famille de courbes $\mathcal{N}R'_b$, que nous coterons en valeurs décroissantes de $\frac{M'}{M}$ comme pour les courbes $\mathcal{N}R_a$. Pour une même valeur de $\frac{M'}{M}$, la réduction des abscisses de $\mathcal{N}R_a$ est proportionnellement plus importante que celle des abscisses de $\mathcal{N}R'_b$, mais les valeurs absolues des réductions sont au contraire plus élevées pour les abscisses de $\mathcal{N}R'_b$ que pour celles de $\mathcal{N}R_a$. Quand $\frac{M'}{M}$ diminue, c'est-à-dire quand l'influence du poids propre augmente, la zone du quadrant relative à l'hypothèse

$\sigma_a < R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$ augmente. L'espace de la zone correspondant à $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b = R'_b$ ne varie guère et ne fait, en somme, que se déplacer.

7. Recherche du degré d'approximation de la formule (3). — L'inexactitude introduite dans l'établissement de la formule (3) est celle de la constance du rapport $\gamma = \frac{c}{h}$. Pour déterminer le degré d'erreur, nous établirons la formule exacte.

En adoptant v' comme variable indépendante, la condition exacte du minimum de $\Delta \pi$ s'écrit :

$$\beta B b \frac{dh}{dv'} + \alpha (78A - B) \frac{d\Omega_a}{dv'} = 0.$$

$$\text{Or : } \Omega_a = \frac{M}{\left(h - \frac{v'}{3}\right) \sigma_a} \quad \text{et} \quad h = (1 + \theta) v'.$$

$$\text{Donc : } \frac{dh}{dv'} = 1 + \theta + v' \frac{d\theta}{dv'},$$

$$\text{et} \quad \frac{d\Omega_a}{dv'} = - \frac{M}{\left(h - \frac{v'}{3}\right)^2 \sigma_a} \left(\frac{dh}{dv'} - \frac{1}{3} \right).$$

Pour éliminer $\frac{d\theta}{dv'}$ de ces expressions, nous recourrons à une relation auxiliaire, que nous obtiendrons comme suit.

$$\text{Observons que} \quad M = \frac{bv'}{2} \left(h - \frac{v'}{3} \right) \sigma'_b,$$

$$\text{d'où : } h = \frac{2M}{bv' \sigma'_b} + \frac{v'}{3} = \frac{2m M \theta}{bv' \sigma_a} + \frac{v'}{3} = v' (1 + \theta).$$

Donc :

$$2m M \theta = bv'^2 \left(\frac{2}{3} + \theta \right) \sigma_a.$$

Dérivons aux deux membres, en observant que $\sigma_a = R_a = \text{constante}$.

$$2m M \frac{d\theta}{dv'} = 2bv' \left(\frac{2}{3} + \theta \right) \sigma_a + bv'^2 \sigma_a \frac{d\theta}{dv'},$$

d'où :

$$\frac{d\theta}{dv'} = \frac{2bv' \left(\frac{2}{3} + \theta \right) \sigma_a}{2m M - bv'^2 \sigma_a}.$$

Donc :

$$\frac{dh}{dv'} = \frac{2m M (1 + \theta) + bv'^2 \left(\frac{1}{3} + \theta \right) \sigma_a}{2m M - bv'^2 \sigma_a},$$

et

$$\frac{d\Omega_a}{dv'} = -M \frac{\frac{2}{3} + \theta}{\left(h - \frac{v'}{3} \right)^2 \sigma_a} \frac{2m M + bv'^2 \sigma_a}{2m M - bv'^2 \sigma_a}.$$

La condition du minimum devient :

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{B}{78A - B} = - \frac{\frac{d\Omega_a}{dv'}}{\frac{dh}{dv'}} = \frac{M \left(\frac{2}{3} + \theta \right) (2m M + bv'^2 \sigma_a)}{b \left(h - \frac{v'}{3} \right)^2 \sigma_a \left[2m M (1 + \theta) + bv'^2 \left(\frac{1}{3} + \theta \right) \sigma_a \right]}$$

ou

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = \frac{m\Omega_a}{b} \frac{\left(\frac{2}{3} + \theta \right) (2m M + bv'^2 \sigma_a)}{\left(h - \frac{v'}{3} \right) \left[2m M (1 + \theta) + bv'^2 \left(\frac{1}{3} + \theta \right) \sigma_a \right]}.$$

Or :

$$h - \frac{v'}{3} = h \left(1 - \frac{1}{3} \frac{v'}{h} \right) = h \left[1 - \frac{1}{3(1 + \theta)} \right] = \frac{\frac{2}{3} + \theta}{1 + \theta} h.$$

Donc, la condition ci-dessus peut s'écrire :

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = \lambda \frac{2m M + bv'^2 \sigma_a}{2m M + bv'^2 \sigma_a} \frac{1 + 3\theta}{3(1 + \theta)}.$$

D'après la relation auxiliaire :

$$2m M = bv'^2 \sigma_a \left(1 + \frac{2}{3\theta} \right),$$

donc :

$$2m M + bv'^2 \sigma_a = 2bv'^2 \sigma_a \left(1 + \frac{1}{3\theta} \right) = 2bv'^2 \sigma_a \frac{1 + 3\theta}{3\theta},$$

et

$$2m M + bv'^2 \sigma_a \frac{1 + 3\theta}{3(1 + \theta)} = 2bv'^2 \sigma_a \frac{1 + 3\theta(1 + \theta)}{3(1 + \theta)\theta}.$$

La condition du minimum devient donc :

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = \lambda \frac{(1 + 3\theta)(1 + \theta)}{1 + 3\theta(1 + \theta)} = \lambda \frac{1 + 3\theta(1 + \theta) + \theta}{1 + 3\theta(1 + \theta)}$$

La formule exacte à substituer à la formule (3) s'écrit donc finalement :

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = \lambda \left[1 + \frac{\theta}{1 + 3\theta(1 + \theta)} \right]$$

Donc, lorsque $\theta = 1, \quad 2, \quad 3, \quad \text{etc.},$

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{mB}{78A - B} = \frac{8}{7} \lambda, \quad \frac{21}{19} \lambda, \quad \frac{40}{37} \lambda, \quad \text{etc.}$$

L'erreur par rapport à la formule approximative (3) est donc pour chaque cas :

$$\frac{1}{7} \lambda, \quad \frac{2}{19} \lambda, \quad \frac{3}{37} \lambda, \quad \text{etc.},$$

soit $14,3\%, \quad 10,5\%, \quad 8,1\%, \quad \text{etc.}$

La courbe $\mathcal{M}R_a$ exacte serait donc située au-dessus et à droite de celle qui est tracée dans la figure 2 ; la zone vraie correspondant à l'hypothèse $\sigma_a = R_a$ et $\sigma'_b < R'_b$ est donc plus grande que ne l'indique cette figure.

L'erreur est voisine de 10% pour les valeurs pratiques de θ . On pourrait la compenser empiriquement en augmentant de 10% la valeur de $\frac{M'}{M}$ utilisée pour tenir compte de l'effet du poids propre dans l'emploi du graphique de la figure 2. Mais ce procédé n'a rien de rationnel et l'on peut se contenter des courbes approximatives de ce tableau, puisque les variations de la fonction $\Delta \pi$ sont très faibles aux environs du minimum. La valeur de $\Delta \pi$ calculée d'après la formule (3) sera peu différente du minimum exact, elle donnera une solution suffisante du problème et plus satisfaisante que celle qui résulterait d'un choix arbitraire de θ .

Tous les raisonnements et conclusions des § 5, 6 et 7 s'appliquent intégralement aux poutres dont la largeur serait imposée, notamment dans les cas des remarques finales analogues des § 3 et 4.

8. Détermination du coefficient α et constitution de l'armature. — Toutes les formules précédentes sont établies d'après la section théorique maximum Ω_a de l'armature étendue, qui correspond à la valeur maximum M des moments fléchissants et à une certaine tension d'extension σ_a de l'acier dans la section dangereuse.

Si l'armature était partout la même et qu'il n'y eût pas de suppléments accessoires, le volume d'acier de la pièce étudiée serait $\Omega_a \Delta l$.

Mais M varie tout le long de la pièce, ainsi que la section de l'armature. De plus, les crochets, les barres obliques, les étriers etc., constituent autant de suppléments. C'est pour tenir compte de ces faits que nous utilisons un coefficient α dans l'expression $\alpha \Omega_a \Delta l$ du volume total d'armatures. Cela équivaut à supposer pour la longueur Δl de l'élément considéré une section moyenne totale d'armature égale à $\alpha \Omega_a$.

Cette hypothèse est justifiée, car l'armature totale d'une pièce est réellement conformée d'après le nombre de barres, de certaines dimensions, choisi pour réaliser la section théorique maximum Ω_a . Les suppléments pour les crochets, les joints, les barres obliques sont directement proportionnels à la section maximum d'armature. D'autres éléments, tels que les étriers, les armatures de répartition, etc., en dépendent moins nécessairement, mais peuvent cependant être considérés comme proportionnels. Il est en tous cas commode de les envisager comme tels.

Il appartient aux bureaux d'étude de déterminer, d'après leur pratique courante, les valeurs convenables de α . Elles varient d'après la nature des appuis, l'ancrage des armatures ; d'après l'emploi, pour résister aux efforts tranchants, d'étriers ou de barres obliques ou des deux dispositifs réunis ; d'après la distance et l'importance des armatures de répartition ; généralement donc d'après le système de construction.

Remarquons que nous avons raisonné sur un élément de pièce de longueur Δl , qu'il ne faut pas confondre avec la portée. Pour une pièce à deux appuis, Δl sera généralement pris égal à la longueur entre abouts de la pièce. Si la pièce est à plusieurs travées, on considérera pour chaque travée la distance entre axe des appuis voisins, sauf pour les travées extrêmes, pour lesquelles on mesurera jusqu'à l'about.

Dans les pièces de dimensions moyennes, ce qui est généralement le cas des dalles, toutes les barres de la section maximum règnent le plus souvent sur toute la longueur de la pièce. Pour les poutres de grandes dimensions, il n'en est pas de même, ce qui influe évidemment sur la valeur de α .

Le coefficient α , purement pratique, n'est donc qu'approximatif. L'erreur ne peut être considérable cependant et l'hypothèse présente l'avantage de permettre la solution satisfaisante d'un problème qui serait très compliqué sans cet artifice. D'après ce qui précède, il n'est pas possible de donner des valeurs universelles de α . Le tableau ci-dessous donne les valeurs partielles relatives aux divers éléments de l'armature, et dont la somme donne α . Elles sont citées à titre d'exemple seulement et en supposant que toutes les barres soient prolongées jusqu'aux extrémités de la pièce.

Des chiffres de ce tableau résultent les valeurs moyennes :

pour une dalle sur deux appuis simples	$\alpha = 1,325$;
pour une dalle continue	$\alpha = 1,675$;
pour une poutre sur deux appuis simples	$\alpha = 1,27$;
pour une poutre continue	$\alpha = 1,80$;

Elément d'armature	Coefficient partiel correspondant	Observations particulières
Section théorique	1,00	
Supplément pour la section pratique	0,04 à 0,05	Poutres. Dalles.
Crochets et ancrages	0,06 — 0,07 à 0,11 et 0,30	2 appuis simples. Dalle continue à plus. travées Poutres " "
Barres relevées obliquement...	0,015 à 0,03	Dalles. Poutres.
Armature supérieure	0,30	Poutres et dalles continues.
Etriers	0,13	Poutres.
Armatures de répartition	0,20	Dalles.

Il est utile de répéter que ces valeurs ne constituent que des exemples, et non des normes, et que la valeur de α devra toujours être déterminée avec opportunité, d'après une analyse basée sur la pratique particulière du calculateur. On pourrait objecter qu'une telle latitude dans le choix de α permet d'obtenir tel résultat que l'on veut. Cette observation n'a guère d'importance cependant, puisque nous ne recherchons nullement un minimum absolu, mais seulement un minimum relatif, dans les limites fixées par les conditions réglementaires de sécurité, par les habitudes locales ou particulières, les buts architecturaux, etc. L'essentiel est que le coefficient α soit concordant avec les dispositions réellement appliquées dans la construction. Le défaut critiqué paraît donc plutôt être un avantage de souplesse de la méthode.

Le coefficient α étant déterminé, on peut calculer la valeur de $\alpha \frac{mM}{378 A - B}$. Connaissant $\rho = \frac{R_a}{m R'_b}$, il est possible de repérer le point X dans la figure 2. On en déduira, par le moyen des courbes $\mathcal{O}R_a$ ou $\mathcal{O}R'_b$, selon les cas, et en tenant compte du poids propre s'il y a lieu, les valeurs de $\sigma_a \leq R_a$ et $\sigma'_b \leq R'_b$ qui donnent le prix minimum, de la manière exposée aux § 5 et 6. On calculera les valeurs correspondantes de h et Ω_a par les méthodes habituelles. De la même manière, on procédera à la répartition de Ω_a en barres et à la composition de l'ossature métallique de la pièce sur toute sa longueur, par le diagramme en gradins des moments résistants, qui doit être extérieur partout au diagramme des moments sollicitants. Ces diagrammes et celui des efforts tranchants permettent également de déterminer l'emplacement des barres obliques, des étriers, etc.

Remarquons au sujet du diagramme en gradins des moments résistants que si la solution du minimum correspond à $\sigma_a = R_a$, cette dernière tension est utilisée sur toute la longueur de la pièce. Si le minimum correspond à $\sigma_a < R_a$, Ω_a doit être calculé d'après cette valeur

de σ_a , mais les longueurs de certaines barres peuvent éventuellement être calculées en adoptant la valeur de R_a , pour autant qu'il n'en résulte pas de tension de compression du béton supérieur à R'_b . Il peut en résulter une légère économie d'armature. Nous verrons que le cas est d'ailleurs peu probable.

9. Pièces à sections rectangulaires variables. — Pour de telles pièces, la formule (1) du prix devient :

$$\begin{aligned} \Delta \pi &= \beta B \int_0^{\Delta l} b h_t dl + (78 A - B) \alpha \Omega_a \Delta l + c^{te}, \\ &= \Delta l \left[\beta B \frac{\int_0^{\Delta l} b h_t dl}{\Delta l} + (78 A - B) \alpha \Omega_a \right] + c^{te}. \quad (11) \end{aligned}$$

Etudier le minimum de cette fonction est généralement une impossibilité pratique. L'analogie de la fonction (11) avec la fonction (1) permet d'admettre une généralisation des conclusions de l'étude des pièces à sections constantes.

Une simplification usuelle provient de la constance de la largeur. La formule (11) devient alors :

$$\Delta \pi = \Delta l \left[\beta B b \frac{\int_0^{\Delta l} h_t dl}{\Delta l} + (78 A - B) \alpha \Omega_a \right] + c^{te},$$

où, en admettant comme au § 5 que a soit constant :

$$\begin{aligned} \Delta \pi &= \Delta l \left[\beta B b \frac{\int_0^{\Delta l} h dl}{\Delta l} + (78 A - B) \alpha \Omega_a \right] + c^{te} \quad (12) \\ &= \Delta l [\beta B b h_{moy.} + (78 A - B) \alpha \Omega_a] + c^{te}. \end{aligned}$$

Si l'on connaît d'avance la loi de variation des hauteurs de la pièce, on peut concevoir que l'on raisonne sur la hauteur moyenne comme pour une pièce de hauteur constante, à condition que cette hauteur moyenne soit dans un rapport constant avec la hauteur maximum, qui doit correspondre elle-même à la section dangereuse et à la section maximum d'armature Ω_a .

L'étude d'un tel problème ne paraît pas impossible, elle est évidemment complexe, à cause de la détermination de $h_{moy.}$ de α , etc. Il serait oiseux de s'étendre sur ce sujet ; les considérations des § précédents contiennent toutes les directives qui seraient à appliquer pour l'étude directe d'un cas concret de pièce de hauteur variable.

10. Profil le plus économique d'une pièce de largeur constante. — Une autre forme du problème, plutôt théorique d'ailleurs, consiste à rechercher le profil de la pièce la plus économique, la largeur étant donnée.

A cet effet, envisageons dans la pièce un élément de longueur dl , de hauteur constante h , le moment M et la section Ω_a étant constants dans cet élément. Son prix est

$$d\pi = dl [\beta Bbh + (78 A - B) \alpha \Omega_a] + c^te. \quad (13)$$

Cette fonction est identique à la fonction (2) et possède les mêmes minima, qui peuvent se déterminer à l'aide de la figure (2). A chaque élément, c'est-à-dire à chaque valeur de M , correspondent une hauteur et une section d'armature économiques. On peut admettre que la pièce la plus économique est celle ainsi réalisée, c'est-à-dire dont le profil correspond pour chaque section à la hauteur la plus économique.

Il y a cependant certaines difficultés à surmonter dans cette voie :

1° La section d'armature ne peut pratiquement pas varier d'une section à une autre infiniment voisine, mais doit forcément rester constante sur une certaine longueur. Il en résulte une augmentation d'armature par rapport à la solution du minimum, augmentation qui influe sur ce minimum par le facteur α .

2° Le facteur α n'est plus un facteur moyen pour toute une pièce, mais un facteur local, qui varie d'un élément à l'autre. Il est minimum dans la section dangereuse et augmente vers les appuis. Théoriquement, dans une pièce à deux appuis simples, il tend vers l'infini dans le voisinage des appuis.

3° La variation de hauteur constitue une complication qui augmente le prix du coffrage et influe ainsi sur β .

Ces observations sont suffisantes pour prouver qu'il ne serait nullement pratique de résoudre le problème à la lettre. Il est préférable de diviser la pièce en zones de diverses hauteurs moyennes, correspondant à des valeurs échelonnées de α , et qui peuvent conduire à des profils continus ou discontinus, résolvant approximativement le problème ci-dessus posé.

(A suivre)