NOTE

sur le Calcul des pièces en béton armé à sections rectangulaires soumises à la flexion plane, simple ou composée

PAR

Fernand CAMPUS
Ingénieur des Constructions Civiles (A. I. Br.) et Electricien (A. I. E. M.)
Directeur Technique adjoint des Travaux Publics
Chemins de fer, Postes, Télégraphes et Téléphones du Territoire de la Sarre

---

Extrait du *Bulletin Scientifique et Industriel*
Nos de Mai, Juin et Juillet 1925

PRINTING Co
22, Place du Vingt Août, LIEGE
1925

Calcul des pièces en béton armé à sections rectangulaires soumises à la flexion plane, simple ou composée.

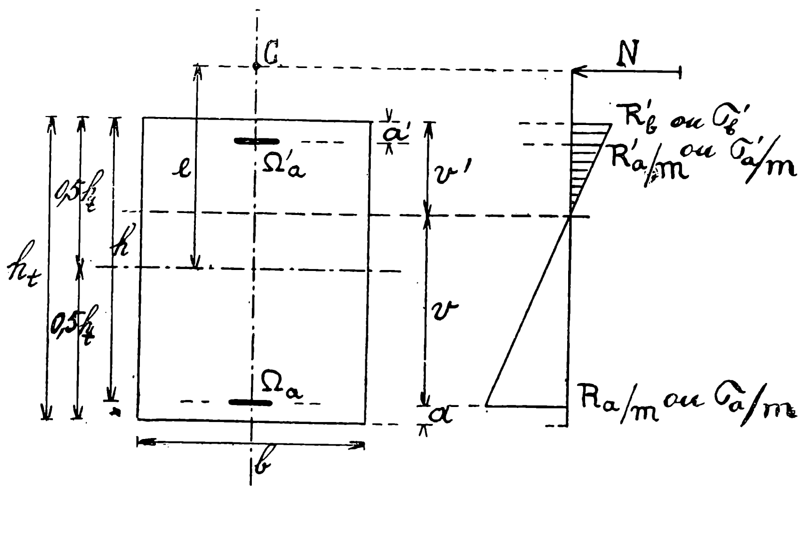
par Fernand CAMPUS,

Ingénieur des Constructions Civiles et électricien (A. I. Br et A. I. E. M.),
Directeur technique adjoint des Travaux Publics,
Chemins de fer, Postes, Télégraphes et Téléphones du Territoire de la Sarre.

Les parties principales de cette étude ont été publiées dans « *Le Constructeur de Ciment armé* » (Paris, F. Margry, édit.), n^{os} 59 à 63, d'août à décembre 1924. Les modifications suivantes ont été notamment apportées:

Les notations de la Circulaire ministérielle française de 1906 ont été remplacées par celles de l'Association belge de Standardisation, les abaques n'ont pas été reproduits parce que le format du Bulletin se prête mal à une reproduction satisfaisante; enfin les tables, primitivement établies à l'aide de la règle à calcul et des tables logarithmiques, ont été recalculées à la machine, ce qui a entraîné des corrections, d'ailleurs insignifiantes et n'affectant que la dernière décimale. J'ai supprimé également un paragraphe traitant d'une formule d'économie, qui n'appartient pas nécessairement au cadre de cet article.

(NOTE DE L'AUTEUR).



§ 1. — Préliminaires.

Les notations employées sont indiquées dans la figure ci-contre. Le symbole e désigne *l'excentricité* de l'effort normal de compression N par rapport à l'axe médian de la section. Le choix de cet élément écarte toute incertitude dans le calcul des dimensions. Cette opération n'est effectuée que lorsque tous les éléments de la sollicitation extérieure ont été déterminés. Il est donc possible de tracer la courbe des pressions, lieu des points C des différentes sections transversales. D'autre parts, la fibre médiane, support des axes médians, est généralement un des éléments donnés du problème, et qui sert d'axe pour la conception et le dessin du projet. Les valeurs de e *se mesurent,* pour toutes les sections, par les distances entre les points de percée de ces deux lignes. Les valeurs de N se déterminent par le moyen du *polygone des forces* et *de la ligne des pressions.* Il est bien évident, en dépit de l'erreur assez répandue, que l'excentricité e ne satisfait pas à la relation $e = \frac{M}{N}$, qui ne s'applique qu'au bras de levier de la force normale par rapport au centre de gravité de la partie active de la section, donc abstraction faite de la zone étendue du béton. Ce point est toujours inconnu à priori.

Nous considérerons la force N comme positive lorsqu'elle représentera une compression. L'excentricité e, qui se mesurera dans ce cas dans le sens de la partie comprimée de la section, sera également considérée comme positive. Lorsqu'il y aura traction excentrique, N et e seront négatifs.

§ 2. — Etablissement des formules.

La proportionnalité des tensions s'exprime par:

$$\theta = \frac{\sigma_a}{m\,\sigma_b{}'} = \frac{v}{v'}, \qquad \text{et} \qquad \frac{\sigma_a{}'}{m\,\sigma_b{}'} = \frac{v' - a'}{v'}.$$

La condition d'équilibre de translation des forces superficielles normales s'exprime par la relation:

$$N = \frac{b\,v'\,\sigma_b{}'}{2} + \Omega_a{}'\,\sigma_a{}' - \Omega_a\,\sigma_a\ . \tag{1}$$

La condition de l'égalité des moments de ces forces par rapport au centre de l'armature étendue s'écrit:

$$N\left(e+\frac{h_t}{2}-a\right)=\frac{b\,v'\sigma_b{}'}{2}\left(h-\frac{v'}{3}\right)+\Omega_a{}'\sigma_a{}'(h-a')\quad(2)$$

Nous désignerons par δ et δ' les rapports $\frac{h-a}{h}$ et $\frac{h-a'}{h}$ et par x le rapport $\frac{\Omega_a{}'}{\Omega_a}$. Les relations d'équilibre (1) et (2) ci-dessus peuvent être mises sous les formes qui suivent:

$$\frac{m\Omega_a}{bh}=\frac{1}{2(1+\theta)\{\theta-x[1-(1-\delta')(1+\theta)]\}}-\frac{\frac{N}{bh\sigma_b{}'}}{\theta-x[1-(1-\delta')(1+\theta)]},\qquad(3)$$

$$\frac{N\left(e+\frac{\delta}{2}h\right)}{bh^2\sigma_b{}'}=\frac{2+3\theta}{6(1+\theta)^2}+\delta' x\frac{m\Omega_a}{bh}[1-(1-\delta')(1+\theta)]\quad(4)$$

Posons :

$$\lambda=\frac{1}{2(1+\theta)\theta},\qquad(\mathrm{I})$$

$$\mu=\frac{2+3\theta}{6(1+\theta)^2},\qquad(\mathrm{II})$$

$$\varphi=\frac{1-(1-\delta')(1+\theta)}{\theta},\qquad(\mathrm{III})$$

$$\varphi'=\delta'[1-(1-\delta')(1+\theta)],\qquad(\mathrm{IV})$$

$$\psi=\frac{\frac{e}{h}+\frac{\delta}{2}-\delta'}{\frac{e}{h}+\frac{\delta}{2}};\qquad(\mathrm{V})$$

si $\delta=\delta'$ ce que nous admettrons généralement,

$$\psi=\frac{\frac{e}{h}-\frac{\delta}{2}}{\frac{e}{h}+\frac{\delta}{2}}.\qquad(\mathrm{V'})$$

L'équation (3) peut s'écrire:

$$\frac{m\Omega_a}{bh} = \frac{\lambda - \dfrac{mN}{bh\sigma_a}}{1 - x\varphi} = \frac{\lambda_c}{1 - x\psi'}, \qquad (5)$$

expression dans laquelle:

$$\lambda_c = \lambda - \frac{\mu}{\theta\left(\dfrac{e}{h} + \dfrac{\delta}{2}\right)}, \qquad \text{(VI)}$$

et

$$\psi' = \varphi\psi \qquad \text{(VII)}$$

Enfin, l'équation (4) s'écrit:

$$\frac{N(e - 0{,}5a + 0{,}5h)}{bh^2\sigma_b'} = \frac{N\left(e + \dfrac{\delta}{2}h\right)}{bh^2\sigma_b'} = \mu + x\frac{m\Omega_a}{bh}\varphi'. \qquad (6)$$

§ 3. — Divers cas d'application des formules.

Pour la *flexion plane simple*, si la section ne possède qu'une armature étendue:

$$\frac{m\Omega_a}{bh} = \lambda,$$

$$\frac{M}{bh^2\sigma_b'} = \mu,$$

ou

$$\frac{mM}{bh^2\sigma_a} = \mu/\theta = \mu' \qquad \text{(VIII)}$$

Si la section est doublement armée:

$$\frac{m\Omega_a}{bh} = \lambda_x = \frac{\lambda}{1 - x\varphi},$$

$$\frac{M}{bh^2\sigma_b'} = \mu_x = \mu + x\lambda_x\varphi' = \mu + \frac{x\lambda\varphi'}{1 - x\varphi}$$

Pour la *flexion plane composée*, si la section ne possède qu'une armature étendue:

$$\frac{m\Omega_a}{bh} = \lambda_c,$$

$$\frac{N(e-0{,}5a+0{,}5h)}{bh^2\sigma_b{}'} = \frac{N\left(e+\frac{\delta}{2}h\right)}{bh^2\sigma_b{}'} = \mu ,$$

$$\frac{mN\left(e+\frac{\delta}{2}h\right)}{bh^2\sigma_a} = \mu'.$$

Si la section est doublement armée:

$$\frac{m\Omega_a}{bh} = \lambda_{cx} = \frac{\lambda_c}{1-x\psi'},$$

$$\frac{N(e-0{,}5a+0{,}5h)}{bh^2\sigma_b{}'} =$$

$$\frac{N\left(e+\frac{\delta}{2}h\right)}{bh^2\sigma_b{}'} = \mu_{cx} = \mu + x\lambda_{cx}\varphi' = \mu + \frac{x\lambda_c\varphi'}{1-x\psi'}.$$

§ 4. — Tables.

Il est possible de résoudre tous les problèmes relatifs à la flexion plane des poutres en béton armé à sections rectangulaires par le moyen de tables représentant les valeurs numériques des coefficients λ, μ, μ', λ_c, φ, φ' et ψ en fonction de θ, $\frac{e}{h}$, δ et δ'.

Le tableau 1 donne, en fonction des valeurs de θ, les valeurs de λ, μ, μ' et λ_c, ces dernières d'après les valeurs de $\left(\frac{e}{h}+\frac{\delta}{2}\right)$. Il est spécialement établi pour l'étude de la flexion simple et de la compression excentrique.

Le tableau 2 donne, en fonction de δ' et de θ, les valeurs de φ et de φ'. Le tableau 3 donne les valeurs de ψ en fonction de δ et de $\frac{e}{h}$, d'après la formule (V'), donc dans l'hypothèse $\delta = \delta'$.

Les valeurs de ψ' s'obtiennent par le produit de φ et de ψ

Les tableaux 2 et 3 conviennent pour la traction comme pour la compression excentriques.

Le tableau 4 permet d'obtenir les valeurs de λ_c spécialement pour la traction excentrique, de la manière exposée plus loin.

§ 5. — Exemples d'application à la flexion plane simple.

a) Recherche des tensions.

Soient : $b = 30$ cm, $h = 80$ cm, $\Omega_a = 10,18$ cm^2 (4 barres de 18 mm. de diam.), $M = 800\,000$ kgcm et $m = 15$.

Il en résulte que :

$$\frac{m\Omega_a}{bh} = \lambda = \frac{15.10,18}{30.80} = 0,0635.$$

D'après le tableau 1 :

$$\theta = 2,35, \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{M}{bh^2\sigma_b'} = 0,1343.$$

Donc :

$$\sigma_b' = \frac{800.000}{30.\overline{80}^2.0,1343} = 31 \text{ kg/cm}^2,$$

et $$\sigma_a = 2,35 \times 15 \times 31 = 1092,75 \text{ kg/cm}^2.$$

S'il y avait comme armature comprimée une barre de 18 mm. de diam., on aurait $x = \frac{\Omega_a'}{\Omega_a} = 0,25$. Soit : $\delta' = 0,95$.

Comme ci-dessus :

$$\frac{m\Omega_a}{bh} = \lambda_x = 0,0635.$$

D'après les tableaux 1 et 2, pour $\theta = 2,40$: $\lambda = 0,0613$ et $\varphi = 0,346$; donc :

$$\lambda_x = \frac{0,0613}{1 - 0,25 \times 0,346} = 0,067.$$

Pour $\theta = 2,60$: $\lambda = 0,0534$ et $\varphi = 0,315$, donc :

$$\lambda_x = 0,058.$$

Par interpolation, la valeur cherchée de θ est 2,48, pour laquelle : $\mu = 0,13$ et $\varphi' = 0,785$, d'après les tableaux 1 et 2. Donc :

$$\frac{M}{bh^2\sigma_b'} = \mu_x = 0,13 + 0,25 \,.\, 0,0635 \,.\, 0,785 = 0,1425.$$

D'où : $\sigma_b' = 29,24$ kg/cm^2, et $\sigma_a = 1087,73$ kg/cm^2.

b) LIMITE DE SOLLICITATION.

Si les taux de travail de sécurité applicables à la pièce précédente sont: $R_a = 1500$ kg/cm² et $R_b' = 50$ kg/cm², comme $\theta = 2{,}35$ dans le cas où il n'y a pas d'armature comprimée, il en résulte que la résistance de la pièce est limitée par: $R_a =$ 1500 kg/m², car il correspond: $\sigma_b' = \frac{1500}{15 \,.\, 2{,}35} = 42{,}55$. La limite de sollicitation correspondante, attendu que: $\frac{M}{bh^2 \sigma_b'} = 0{,}1343$,

est: $$M = 0{,}1343 \,.\, 30 \,.\, \overline{80}^2 \,.\, 42{,}55 = 1\,097\,000 \text{ kgcm.}$$

Pour la section doublement armée examinée: $\theta = 2{,}48$, donc pour: $R_a = 1500$ kg/cm², $\sigma_b' = 1500 : 15 \,.\, 2{,}48 = 40{,}30$.

Comme:

$$\frac{M}{b\,h^2 \sigma_b'} = 0{,}1425,$$

la limite de sollicitation est:

$$M = 0{,}1425 \,.\, 30 \,.\, \overline{80}^2 \,.\, 40{,}30 = 1\,102\,600 \text{ kgcm.}$$

L'augmentation de résistance par rapport à la section simplement armée est donc très minime, malgré un supplément d'armature de 25 °/°.

c) CALCUL DES ARMATURES.

Soient: $b = 30$ cm, $h = 80$ cm, $M = 1\,200\,000$ kgcm, $R_a = 1\,500$ kg/cm², $R_b = 50$ kg/cm² et $m = 15$.

$$\frac{m\,M}{b\,h^2\,R_a} = \frac{15 \,.\, 1\,200\,000}{30 \,.\, \overline{80}^2 \,.\, 1500} = 0{,}0625.$$

D'après le tableau 1:

$$\theta = 2{,}225, \quad \text{et} \quad \frac{m\,\Omega_a}{b\,h} = \lambda = 0{,}0697,$$

d'où : $$\Omega_a = \frac{0{,}0697 \,.\, 30 \,.\, 80}{15} = 11{,}15 \text{ cm}^2,$$

et : $$\sigma_b' = \frac{1500}{15 \,.\, 2{,}225} = 44{,}94 \text{ kg/cm}^2.$$

Le maximum de résistance d'une section bh = 30.80 ne comportant qu'une armature simple correspond à la réalisation simultanée des limites :

$$R_a = 1500 \quad \text{et} \quad R_b{}' = 50. \qquad \text{Pour } \theta = \frac{R_a}{m\,R_b{}'} = 2{,}00 :$$

$\lambda = 0{,}0833$ et $\mu = 0{,}1481$, d'après le tableau 1, d'où :

$$\Omega_a = 13{,}33 \text{ cm}^2 \quad \text{et} \quad M_{max} = 1421700 \text{ kgcm}.$$

Si M était supérieur à cette limite, il ne serait plus possible d'atteindre le taux de travail de sécurité de l'acier, la compression du béton devenant excessive. Soit : M = 1 600 000. Donc :

$$\frac{M}{b\,h^2\,R_b{}'} = \frac{1\,600\,000}{30 \,.\, \overline{80}^2 \,.\, 50} = 0{,}1667.$$

D'après le tableau 1 : $\theta = 1{,}62$ et $= 0{,}118$. Il en résulte que :

$$\sigma_a = 1{,}62 \times 15 \times 50 = 1215 \text{ kg/cm}^2,$$

et :

$$\Omega_a = \frac{0{,}118 \,.\, 30 \,.\, 80}{15} = 18{,}90 \text{ cm}^2.$$

Mais il est possible d'assurer à la section une résistance suffisante en atteignant simultanément les taux de travail maxima de l'acier et du béton en ayant recours à une armature comprimée.

En effet, pour $\theta = \dfrac{R_a}{m\,R_b{}'} = 2{,}00$, d'après les tableaux 1 et 2 :

$\lambda = 0{,}0833$, $\mu = 0{,}1481$, $\varphi = 0{,}425$ et $\varphi' = 0{,}8075$ (pour $\delta' = 0{,}95$)

On peut écrire :

$$\mu_x = \frac{M}{b\,h^2\,R_b} = \frac{1\,600\,000}{30 \,.\, \overline{80}^2 \,.\, 50} = 0{,}1667 = \mu + \varphi\, x \frac{m\,\Omega_a}{b\,h}$$

Or :

$$\frac{m\,\Omega_a}{b\,h} = \frac{\lambda}{1 - x\,\varphi} = \frac{0{,}0833}{1 - 0{,}425\,x},$$

donc :

$$0{,}1667 = 0{,}1481 + 0{,}8075 \frac{0{,}0833}{1 - 0{,}425\,x}\,x.$$

La racine de cette équation du 1er degré en x est x = 0,25.

Donc :

$$\frac{m\,\Omega_a}{b\,h} = \frac{0{,}0833}{1 - 0{,}425 \,.\, 0{,}25} = \frac{0{,}0833}{0{,}894} = 0{,}0932,$$

d'où : $\Omega_a = 14{,}9\ \text{cm}^2$, $\Omega_a' = 0{,}25 \times 14{,}9 = 3{,}73$ cm,

et $\Omega_a + \Omega_a' = 18{,}63\ \text{cm}^2$.

La section totale des deux armatures est à peu près la même que celle de l'armature unique assurant la même résistance.

d) CALCUL DES DIMENSIONS.

L'influence du poids propre est généralement importante, il est donc intéressant de la prédéterminer. Si la largeur de la section est donnée, ce qui est le cas général des dallages, on procède comme suit:

Soient: $b = 100$ cm, $a = 1{,}5$ cm, $R_a = 1000\ \text{kg/cm}^2$,

$R_b = 35\ \text{kg/cm}^2$ et $m = 15$.

Le moment maximum dû aux actions extérieures est 93 500 kgcm. La portée entre appuis simples est 2,16 m. La densité du béton est 2400 kg. Le poids propre de la dalle par m² est 24 h_t kgs. Le moment dû au poids propre est:

$$M' = \frac{24\ h_t}{8}\ \overline{2{,}16}^2\ .\ 100\ \text{kgcm}.$$

Comme:

$$\theta = \frac{R_a}{m\,R_b'} = \frac{1000}{15\ .\ 35} = 1{,}9,$$

d'après le tableau 1:

$$\lambda = 0{,}0907 \quad \text{et} \quad \mu = 0{,}1526 = \frac{93500 + M'}{b\,(h_t - 1{,}5)^2\,R_b}$$

Donc : $93500 + \dfrac{24\ h_t}{8}\ \overline{2{,}16}^2\ .\ 100 = 0{,}1526\ .\ 100\ (h_t - 1{,}5)^2\ .\ 35,$

équation du second degré dont la racine est: $h_t = 16{,}3$ cm.

$$\Omega a = \frac{100\,(16{,}3 - 1{,}5)\ .\ 0{,}0907}{15} = 8{,}95\ \text{cm}^2.$$

Si la hauteur n'est pas limitée, il peut être avantageux de choisir une épaisseur de dalle plus forte que celle calculée ci-dessus. L'armature se calcule par la limitation du taux de travail de l'acier, de la manière ci-après indiquée. Soient: $h_t = 22$ cm et $a = 2$ cm.

Le moment total devient 124 300 kgcm.

On peut écrire:

$$\frac{m\,M}{b\,h^2\,R_a} = \frac{15\;.\;124\,300}{100\;.\;400\;.\;1000} = 0{,}0466 = \mu'.$$

Daprès le tableau 1: $\theta = 2{,}667$ et $\lambda = 0{,}0512$, d'où:

$$\sigma_b' = 25 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{et} \quad \Omega_a = 6{,}8 \text{ cm}^2 .$$

Si la hauteur est fixée à priori, il est facile de calculer la largeur minimum en tenant compte du poids propre. Soient: $h_t = 36$ cm, $a = 3$cm, $R_a = 1200$ kg/cm², $R_b' = 40$ kg/cm² et $m = 15$. Le moment fléchissant des forces extérieures est 120 000 kgcm. La portée de la pièce entre appuis simples est 4 mètres. le moment total est:

$$M = 120\,000 + \frac{b\;.\;36\;.\;0{,}24}{8}\;.\;4^2\;.\;100 \text{ kgcm.}$$

Or, comme $\theta = \dfrac{R_a}{m R_b'} = 2{,}00$, d'après le tableau 1:

$$\lambda = 0{,}0833 \quad \text{et} \quad \mu = \frac{M}{b\,h^2\,R_b'} = 0{,}1481.$$

Donc : $$120\,000 + \frac{b\;.\;36\;.\;0{,}24}{8} \cdot 4^2\;.\;100 = 0{,}1481\;.\;\overline{33}^2\;.\;40\;.\;b,$$

d'où : $$b = \frac{120\,000}{4723} = 25{,}4 \text{ cm},$$

et : $$\Omega_a = \frac{0{,}0833\;.\;33\;.\;25{,}4}{15} = 4{,}66 \text{ cm}^2 .$$

§ 6. — Exemples d'application à la compression excentrique.

a) RECHERCHE DES TENSIONS.

Soient: $b = 50$ cm, $h_t = 97$ cm, $a = a' = 7$ cm, $\delta = \delta' = 0{,}925$, $\Omega_a = 15{,}21$ cm² et $\Omega'_a = 7{,}605$ cm² d'où: $\gamma = 0{,}50$; $N = 20\,000$ kgs et $e = 90$ cm, enfin $m = 15$.

Donc: $$\lambda_{cx} = \frac{m\,\Omega_a}{b\,h} = 0{,}0507,$$

et : $$\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} = 1{,}4625, \qquad \frac{e}{h} = 1.00.$$

D'après le tableau 3: $\psi = 0{,}368$,

donc $$\lambda_{cx} = \frac{\lambda_c}{1 - 0{,}5\,.\,0{,}368\,.\,\varphi} = \frac{\lambda_c}{1 - 0{,}184\,\varphi} = 0{,}057.$$

D'après les tableaux 1 et 2, pour $\theta = 1{,}70$: $\lambda_c = 0{,}0434$ et $\varphi = 0{,}47$, d'où: $\lambda_{cx} = 0{,}0475$.

Pour $\theta = 1{,}60$: $\lambda_c = 0{,}0482$ et $\varphi = 0{,}504$, d'où: $\lambda_{cx} = 0{,}0531$

Il en résulte que: $\theta = 1{,}643$, $\lambda_c = 0{,}0461$, $\varphi = 0{,}49$,

$\mu = 0{,}1654$ et $\varphi' = 0{,}742$ (voir tableaux 1 et 2).

Donc : $$\frac{N\left(e+\frac{\delta}{2}\,h\right)}{b\,h^2\sigma_b{}'} = \mu + x\,\varphi'\lambda_{cx} = 0{,}184,$$

d'où : $$\sigma_b{}' = \frac{20\,000\ .\ 1{,}4625}{50\ .\ 90\ .\ 0{,}184} = 35{,}30\ \text{kg/cm}^2.$$

et : $$\sigma_a = 1{,}643\ .\ 15\ .\ 35{,}30 = 870{,}70\ \text{kg/cm}^2.$$

Si l'armature était simple, comme: $\frac{m\,\Omega_a}{b\,h} = \lambda_c = 0{,}0507$,

d'après le tableau 1: $\theta = 1{,}56$ et $\mu = N\frac{\left(e+\frac{\delta}{2}\,h\right)}{b\,h^2\sigma_b{}'} = 0{,}17.$

$$\text{Donc : } \sigma_b{}' = \frac{20\,000\ .\ 1{,}4625}{50\ .\ 90\ .\ 0{,}17} = 38{,}20\ \text{kg/cm}^2,$$

et : $$\sigma_a = 1{,}56.\ 15.\ 38{,}20 = 894\ \text{kg/cm}^2.$$

b) On conçoit qu'il est aisément possible de déterminer, comme pour la flexion simple, *les limites de sollicitation.* Elles peuvent consister dans le calcul de *N* maximum, la valeur de *e* étant donnée, ou inversément, de *e* maximum, la valeur de *N* étant donnée. Ces problèmes sont plus théoriques que pratiques, c'est pourquoi nous ne les détaillerons pas davantage.

c) CALCUL DES ARMATURES.

Soient: $b = 100$ cm, $h_t = 100$ cm, $a = 9$ cm, $\delta = 0{,}90$ $e = 237{,}5$ cm, $N = 8550$ kgs, $R'_b = 30$ kg/cm², $R_a = 600$ kg/cm², $m = 15$ et $x = 0$.

Donc: $\frac{e}{h} = 2{,}61$ et $\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} = 3{,}06$;

$$\frac{N\left(\frac{e}{h}+\frac{\delta}{2}\right)}{b\,h\,R_b{}'} = \frac{8550\ .\ 3{,}06}{100 . 91\ .\ 30} = 0{,}0958 = \mu.$$

D'après le tableau 1: $\theta = 3{,}86$ et $\sigma_a > 600$. Il faut donc recourir à la relation:

$$\frac{m\,N\left(\frac{e}{h}+\frac{\delta}{2}\right)}{b\,h\,R_a} = 0{,}0719 = \mu'.$$

D'après le tableau 1: $\theta = 2{,}04$ et $\alpha_c = 0{,}057$, d'où:

$$\sigma_b' = \frac{600}{15 \cdot 2{,}04} = 19{,}62 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\frac{m\,\Omega_a}{b\,h} = \alpha_c = 0{,}057, \quad \text{donc}: \Omega_a = \frac{100 \cdot 91 \cdot 0{,}057}{15} = 34{,}6 \text{ cm}^2.$$

Supposons que dans l'exemple qui vient d'être traité, pour une raison quelconque, notamment la possibilité d'un changement de sens du moment fléchissant, l'on se fixe un certain pourcentage d'armature comprimée, par exemple $x = 0{,}50$. On suppose que $\delta' = \delta$. D'après le tableau 3: $\psi = 0{,}705$.

On peut écrire:

$$\frac{m\,N\left(\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2}\right)}{b\,h\,R_a} = \mu' + \frac{0{,}5\,\varphi'}{\theta}\,\frac{\alpha_c}{1 - 0{,}5 \cdot 0{,}705 \cdot \varphi} = 0{,}0719.$$

D'après les tableaux 1 et 2,
pour $\theta = 2{,}10$: $\mu' = 0{,}0685$, $\varphi' = 0{,}621$, $\alpha_c = 0{,}0543$, $\varphi = 0{,}329$, d'où :

$$\frac{m\,N\left(\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2}\right)}{b\,h\,R_a} = 0{,}0776,$$

pour $\theta = 2{,}20$: $\mu' = 0{,}0636$, $\varphi' = 0{,}612$, $\alpha_c = 0{,}05$ et $\varphi = 0{,}309$, d'où:

$$\frac{m\,N\left(\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2}\right)}{b\,h\,R_a} = 0{,}0713.$$

Donc: $\theta = 2{,}19$, $\alpha_c = 0{,}0504$ et $\varphi = 0{,}311$.

$$\sigma_b' = \frac{600}{15 \cdot 2{,}19} = 18{,}25 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\frac{m\,\Omega_a}{b\,h} = \frac{0{,}0504}{1 - 0{,}5 \cdot 0{,}705 \cdot 0{,}311} = 0{,}0566,$$

$$\Omega_a = \frac{100 \cdot 91 \cdot 0{,}0566}{15} = 34{,}34 \text{ cm}^2, \; \Omega_a' = 0{,}5\,\Omega_a = 17{,}17 \text{ cm}^2,$$

$$\Omega_a + \Omega_a' = 51{,}51 \text{ cm}^2.$$

Bien que la section totale d'armature soit considérablement augmentée par rapport au cas précédent, les fatigues de l'acier restant les mêmes, la compression du béton n'est que très peu diminuée. Les effets de l'armature comprimée sont donc peu sensibles. Il n'en faudrait pourtant pas conclure qu'elle est toujours désavantageuse, car dans l'exemple que nous venons d'examiner, la présence de cette armature n'était justifiée que par des circonstances étrangères au cas de sollicitation étudié. Dans les exemples traités précédemment, les valeurs de N étaient faibles et les excentricités assez élevées, l'armature comprimée était peu opportune. Son rôle peut devenir prépondérant par contre lorsque la sollicitation principale est la compression et que la flexion est relativement peu importante.

Le problème le plus habituel de la flexion plane composée, après celui du calcul des tensions, est celui où les dimensions de la section sont données et où il s'agit de calculer les armatures Ω_a et Ω'_a en tenant compte des taux de travail de sécurité R_a et R'_b.

Soient: $b = 30$ cm, $h_t = 24$ cm, $a = a' = 4$ cm, $N = 12\,000$ kg, $e = 15$ cm, $\delta = \delta' = 0{,}80$, $m = 15$, $R'_b = 50$ kg/cm² et $R_a = 1\,200$ kg/cm². Comme $h = 20$ cm: $\frac{e}{h} = 0{,}75$ et

$$\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} = 1{,}15. \qquad \text{Pour } \theta = \frac{R_a}{m R_b'} = 1{,}60,$$

d'après le tableau 1: $\mu = 0{,}1677$ et $\lambda_c = 0{,}0279$,
d'après le tableau 2: $\varphi = 0{,}300$ et $\varphi' = 0{,}384$,
d'après le tableau 3: $\psi = 0{,}303$.

$$\mu_x = \frac{N\left(e + \frac{\delta}{2} h\right)}{b h^2 R_b'} = \frac{12\,00 \times 23}{30 \cdot \overline{20}^2 \cdot 20} = 0{,}46.$$

Or : $$\mu_x = \mu + \varphi' x \frac{m \Omega_a}{b h} = \mu + \varphi' \frac{m \Omega'_a}{b h} = 0{,}46.$$

Donc : $$\frac{m \Omega'_a}{b h} = \frac{\mu_x - \mu}{\varphi'} = \frac{0{,}46 - 0{,}1677}{0{,}384} = 0{,}763,$$

et : $$\Omega'_a = \frac{30 \cdot 20 \cdot 0{,}763}{15} = 30{,}5 \text{ cm}^2.$$

D'autre part:

$$\frac{m \Omega_a}{b h} = \lambda_{cx} = \frac{\lambda_c}{1 - x \varphi \psi} = \frac{0{,}0279}{1 - x \cdot 0{,}300 \cdot 0{,}303} = \frac{0{,}763}{x}.$$

Donc :
$$x = \frac{0,763}{0,0972} = 7,85,$$

$$\Omega_a = \frac{30,5}{7,85} = 3,9 \text{ cm}^2$$

et:
$$\Omega_a + \Omega'_a = 3,9 + 30,5 = 34,4 \text{ cm}^2.$$

d) CALCUL DES DIMENSIONS.

Généralement le poids propre constitue un élément évalué de la sollicitation, la prédétermination est peu pratique. Soient: $h_t = 105$ cm, $a = 5$ cm, $\delta = 0,95$, $N = 20\,000$ kg, $e = 200$ cm, $m = 15$, $R_a = 900$ kg/cm² et $R'_a = 30$ kg/cm².

Il s'agit de calculer b. D'après ces données: $\frac{e}{h} = 2,00$,

$$\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} = 2,475 \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{R_a}{m\,R'_b} = 2,00.$$

D'après le tableau 1:

$$\mu = 0,148 = \frac{N\left(\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2}\right)}{b\,h\,R'_b}, \quad \alpha_c = 0,052 = \frac{m\,\Omega_a}{b\,h}.$$

Donc :
$$b = \frac{N\left(\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2}\right)}{\mu\,h\,R'_b} = \frac{20\,000\,.\,2,475}{0,148\,.\,100\,.\,30} = 111,4,$$

$$\Omega_a = \frac{0,052\,.\,100\,.\,111,4}{15} = 38,70 \text{ cm}^2.$$

Si la largeur est donnée, la hauteur se calcule comme suit. Soient: $b = 40$ cm, $N = 20\,000$ kg, $e = 90$ cm, $a = 4$ cm, $x = 0$, $m = 15$, $R_a = 1\,200$ kg/cm², $R'_b = 40$ kg/cm². Il en résulte que: $\theta = \frac{R_a}{m\,R'_b} = 2,00$, et, d'après le tableau 1:

$$\mu = 0,148 = \frac{N\,(e - 0,5\,a + 0,5\,h)}{b\,h^2\,R'_b}.$$

Donc:
$$40.\,40.\,0,148h^2 - 20\,000.\,0,500.\,h - 20\,000.\,88 = 0,$$
$$236,96\,h^2 - 10\,000\,h - 1\,760\,000 = 0,$$

ou:
$$h^2 - 42,20\,h - 7430 = 0.$$

La racine de cette équation du second degré est : $h = 109{,}75$ cm.

Il en résulte que : $\delta = 0{,}955$ et $\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} = 1{,}297$ et que,

d'après le tableau 1 : $\lambda_c = 0{,}026 = \frac{m\,\Omega_a}{b\,h}$.

Donc : $$\Omega_a = \frac{40 \,.\, 109{,}75 \,.\, 0{,}026}{15} = 7{,}62 \text{ cm}^2.$$

Normalement, le calcul de la hauteur se fera dans l'hypothèse $x = 0$, on ne recourera à une armature comprimée que lorsque la hauteur ainsi trouvée sera trop considérable ou inadmissible. Si cependant, on se proposait de résoudre ce problème, x étant supérieur à zéro, l'équation du second degré se déduirait de la formule suivante, résultant des équations (5) et (6) :

$$\frac{N\left(e + \frac{\delta}{2} h\right)}{b\,h^2\,R'_b} = \mu + \frac{x\,\varphi'}{1 - x\,\varphi}\left(\lambda - \frac{m\,N}{b\,h\,R_a}\right).$$

R_a et R'_b étant connus, ainsi que δ', λ, μ, φ et φ' le sont également. La résolution s'effectue comme ci-dessus.

§ 7. — Méthode simplifiée pour les cas d'armature double.

La simplification consiste à admettre que l'armature comprimée se trouve au niveau de la résultante des tensions de compression du béton, c'est-à-dire au tiers supérieur de la zone comprimée. Les formules qui en découlent donnent des résultats exacts si, dans la construction, les barres comprimées sont réellement disposées conformément à l'hypothèse faite.

Leurs résultats ne sont qu'approximatifs dans les autres cas. Pratiquement, l'erreur normale est peu considérable et l'approximation est susceptible de fournir de bons résultats pour tous les avant-projets.

L'hypothèse correspond, pour les valeurs usuelles de θ, à des valeurs de δ' variant de 0,87 à 0,94, ce qui est l'intervalle normal de variation de ce coefficient. Il ne peut y avoir d'écarts sensibles que pour les pièces de très petites dimensions, fortement armées, où δ' peut être notablement inférieur à 0,87. Les formules ci-après ne conviennent pas pour ces cas très spéciaux, non plus que pour les très faibles valeurs de θ.

Pour les établir, il suffit d'introduire dans les formules générales précédemment examinées l'hypothèse : $a' = \frac{v'}{3}$.

Il en résulte que: $\delta' = \dfrac{h - \dfrac{v'}{3}}{h} = 1 - \dfrac{3(1+\theta)}{l} =$

$$\frac{2+3\theta}{3(1+\theta)} = 2\mu(1+\theta);$$

$$1 - \delta' = \frac{1}{3(1+\theta)}.$$

Donc: $\varphi = \dfrac{1 - \dfrac{1}{3(1+\theta)} \times (1+\theta)}{\theta} = \dfrac{2}{3\theta}.$

$$\varphi' = \frac{2+3\theta}{3(1+\theta)}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\,\frac{2+3\theta}{3(1+\theta)}.$$

Donc: $\lambda_x = \dfrac{\lambda}{1 - \dfrac{2x}{3\theta}} = \lambda\,\dfrac{3\theta}{3\theta - 2x};$

$$\mu_x = \mu + \frac{2}{3}\,x\,\frac{2+3\theta}{3(1+\theta)}\,\lambda\,\frac{3\theta}{3\theta - 2x} = \mu\left(1 + \frac{3\theta - 2x}{2x}\right),$$

$$\mu_x = \mu\,\frac{3\theta}{3\theta - 2x}.$$

Pour la flexion composée, d'après la formule (V),,

$$\psi = \frac{\dfrac{e}{h} + \dfrac{\delta}{2} - \delta'}{\dfrac{e}{h} + \dfrac{\delta}{2}} = \frac{\dfrac{e}{h} + \dfrac{\delta}{2} - 2\mu(1+\theta)}{\dfrac{e}{h} + \dfrac{\delta}{2}} =$$

$$1 - \frac{2\mu(1+\theta)}{\dfrac{e}{h} + \dfrac{\delta}{2}} = \Psi,$$

$$\lambda_c = \lambda - \frac{\mu}{\theta\left(\dfrac{e}{h} + \dfrac{\delta}{2}\right)} = \lambda\left[1 - \frac{\mu}{\lambda\theta\left(\dfrac{e}{h} + \dfrac{\delta}{2}\right)}\right] =$$

$$\lambda\left[1 - \frac{2\mu(1+\theta)}{\dfrac{e}{h} + \dfrac{\delta}{2}}\right],$$

$$\lambda_c = \Psi\lambda.$$

Donc :

$$\lambda_{cx} = \frac{\lambda_c}{1 - x\Psi'} = \frac{\lambda_c}{1 - x\varphi\Psi} = \frac{\Psi\lambda}{1 - \Psi x \frac{2}{3\theta}} = \Psi\lambda \frac{3\theta}{3\theta - 2x\Psi}.$$

$$\mu_{cx} = \mu + x\lambda_{cx}\varphi' = \mu + \frac{4}{3}(1+\theta)\,\mu\, x\,\Psi\lambda\, \frac{3\theta}{3\theta - 2x\Psi'},$$

$$\mu_{cx} = \mu\left[1 + \frac{4x\Psi\lambda\theta(1+\theta)}{3\theta - 2x\Psi}\right] = \mu\left[1 + \frac{2x\Psi}{3\theta - 2x\Psi}\right],$$

$$\mu_{cx} = \mu\,\frac{3\theta}{3\theta - 2x\Psi}.$$

Nous pouvons donc condenser les résultats en trois formules générales.

$$\frac{m\Omega_a}{bh} = \lambda\Psi\,\frac{3\theta}{3\theta - 2x\Psi}, \tag{IX}$$

$$\frac{M}{bh^2\sigma'_b} \text{ ou } \frac{N\left(e + \frac{\delta}{2}h\right)}{b\,h^2\sigma'_b} = \overset{\mu}{\cancel{M}}\,\frac{3\theta}{3\theta - 2x\Psi}, \tag{X}$$

$$\Psi = 1 - \frac{2\mu(1+\theta)}{\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2}}. \qquad \text{(XI}$$

Ces formules peuvent être utilisées également en cas d'armature simple, *elles sont alors rigoureuses.*

Dans les cas de flexion simple, $\Psi = 1$. Pour la flexion composée, Ψ est inférieur à 1 pour la compression excentrique et supérieur à 1 pour la traction excentrique. Pour faciliter l'usage de ces formules très expéditives, j'ai établi le tableau succint n° 4, qui convient pour la flexion simple, la compression et la traction excentriques.

§ 8. — Exemples d'application de la méthode simplifiée.

a) REPRENONS L'EXEMPLE DE CALCUL DES ARMATURES DE L'APPLICATION DU § 5 *c*).

Les données sont : $b = 30$ cm, $h = 80$ cm, $M = 1\,600\,000$ kgcm, $R_a = 1\,500$ kg/cm², $R'_b = 50$ kg/cm², $m = 15$. Les inconnues sont : Ω_a et Ω'_a.

$$\frac{M}{bh^2\sigma'_b} = \frac{1\,600\,000}{30\,.\,\overline{80}^2\,.\,50} = 0,1667 = \mu_x = \mu\,\frac{3\theta}{3\theta - 2x}.$$

Comme $\vartheta = \frac{R_a}{m\,R'_b} = 2$: $\mu = 0,1481$ et $\lambda = 0,0833$, d'après le tableau 4.

Donc: $2x = 6 - \frac{6 \times 0,1481}{0,1667} = 0,67$, et $x = 0,335$.

$$\frac{m\,\Omega_a}{b\,h} = 0,0833 \times \frac{6}{6 - 0,67} = 0,0937,$$

$$\Omega_a = \frac{0,0937 \times 30 \times 80}{15} = 15\text{ cm}^2,$$

$\Omega'_a = 0,335 \times 15 = 5\text{ cm}^2$ et $\Omega_a + \Omega'_a = 20\text{ cm}^2$.

L'erreur d'environ 7 °/° sur l'armature totale affecte uniquement Ω'_a .

b) Reprenons l'exemple du § 6, *a)*. Les données sont: $b = 50$ cm, $h = 90$ cm, $\delta = \delta' = 0,925$, $\Omega_a = 15,21$ et

$\Omega'_a = 7,605$, d'où $x = 0,50$;

$N = 20\,000$ kg, $e = 90$ cm et $m = 15$.

Donc: $\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} = 1,4625$, et

$\frac{m\,\Omega_a}{b\,h} = 0,0507 = \Psi\lambda\frac{3\,\theta}{3\,\theta - \Psi}$. On recherche les tensions.

Pour $\vartheta = 1,60$, d'après le tableau 4: $\lambda = 0,12$, $\Psi = 0,40$ et $\mu = 0,1677$.

Donc:

$$\lambda_{cx} = 0,4 \times 0,12\,\frac{4\,.\,80}{4\,.\,80 - 0,40} = 0,0524, \text{ et } \mu_x = 0,183.$$

Pour $\vartheta = 1,80$: $\lambda = 0,0992$, $\Psi = 0,394$ et $\mu = 0,1573$, d'où:

$$\lambda_{cx} = 0,394 \times 0,0992\,\frac{5,40}{5,40 - 0,394} = 0,0421, \text{ et } \mu_x = 0,17.$$

Donc $\vartheta = 1{,}633$, et $\mu_x = 0{,}181$, d'où :

$$\sigma'_b = \frac{20\,000 \,.\, 1{,}4625}{50 \,.\, 90 \,.\, 0{,}181} = 35{,}90 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_a = 1{,}633 .\, 15 .\, 35{,}90 = 880 \quad \text{kg/cm}^2.$$

c) Examinons un cas de calcul d'armature en compression excentrique. Soient : $h = 50$ cm, $b = 30$ cm, $N = 10\,000$ kg. $e = 50$ cm, $a = a' = 5$ cm, d'où $\delta = \delta' = 0{,}90$; enfin $m = 15$, $R'_b = 30$ kg/cm² et $R_a = 720$ kg/cm².

Donc : $\theta = \dfrac{R_a}{mR'_b} = 1{,}60$, d'où, d'après le tableau 4 :

$\lambda = 0{,}12$, $\mu = 0{,}1677$ et $\Psi = 0{,}395$, puisque $\dfrac{e}{h} + \dfrac{\delta}{2} = 1{,}45$.

$$\mu_x = \mu \frac{3\,\theta}{3\,\theta - 2\,x\,\Psi} = 0{,}1677 \frac{4{,}80}{4{,}80 - 0{,}790\,x}\,.$$

Or : $$\mu_x = \frac{N\left(\dfrac{e}{h} + \dfrac{\delta}{2}\right)}{b\,h\,R'_b} = \frac{10\,000 \,.\, 1{,}450}{30 \,.\, 40 \,.\, 50} = 0{,}242.$$

Donc : $$x = \frac{4{,}80}{0{,}79}\left[1 - \frac{0{,}1677}{0{,},242}\right] = 1{,}855,$$

et : $$\lambda_{cx} = 0{,}395 \,.\, 0{,}12 \,.\, \frac{4{,}80}{4{,}80 - 0{,}79 \,.\, 1{,}855} = 0{,}0684\,;$$

d'où : $$\Omega_a = \frac{0{,}0684 \quad 30 \,.\, 50}{15} = 6{,}84 \text{ cm}^2,$$

et : $$\Omega'_a = 1{,}855 \,.\, 6{,}84 = 12{,}65 \text{ cm}^2.$$

§ 9. — **Traction excentrique.**

Ce cas de sollicitation est peu fréquent en béton armé et rarement étudié dans les traités. Toutes les formules établies précédemment conviennent pour cette étude, il suffit de sonsi-dérer *N* et *e* comme négatifs.

Le tableau 1 n'a pas été étendu aux valeurs négatives de $\dfrac{e}{h} + \dfrac{\sigma}{2}$ correspondant à la traction excentrique. Par contre, le tableau 4 contient les données numériques nécessaires. Il suffit pour l'étude des cas pratiques, car dans les pièces soumises à une telle sollicitation, l'armature comprimée, si elle existe, n'exerce qu'une très faible influence. L'emploi des formules approximatives est donc très suffisant. Si toutefois on voulait appliquer des formules exactes, on calculerait λ_c par la formule $\Psi\lambda$, qui est rigoureuse et pour laquelle le tableau 4 donne les éléments voulus.

On rechercherait ensuite φ et φ par le tableau 2, ψ par le tableau 3 ou la formule (V).

Nous examinons ci-après un exemple de traction excentrique. Soient: $b = 30$ cm, $h = 50$ cm, $\Omega_a = 18{,}85$ cm² $\Omega'_a = 9{,}42$ cm², d'où $x = 0{,}5$; $N = -5\,000$ kg. et $e = -125$ cm; enfin $a = a' = 4{,}5$ cm, d'où $\delta = \delta' = 0{,}91$, et $m = 15$. Il s'agit de calculer les fatigues.

$$\frac{m\,\Omega_a}{b\,h} = \frac{15\,.\,18{,}85}{30\,.\,50} = 0{,}1885 = \lambda_{cx} = \Psi\lambda\,\frac{3\theta}{3\theta - \Psi}$$

$$\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} = -\,2{,}50 + 0{,}455 = -\,2{,}045.$$

Pour $\vartheta = 1{,}80$, d'après le tableau 4: $\lambda = 0{,}0992$, $\mu = 0{,}1573$ et $\Psi = 1{,}445$,

d'où : $$\lambda_{cx} = 1{,}445\,.\,0{,}0992\,.\,\frac{5{,}40}{5{,}40 - 1{,}445} = 0{,}195,$$

$$\mu_x = 0{,}1573\,\frac{5{,}40}{5{,}40 - 1{,}445} = 0{,}215.$$

Pour $\vartheta = 2{,}00$: $\lambda = 0{,}0833$, $\mu = 0{,}1481$ et $\Psi = 1{,}45$, d'où:

$$\lambda_{cx} = 1{,}45\,.\,0{,}0833\,\frac{6{,}00}{6{,}00 - 1{,}45} = 0{,}159,$$

$$\mu_x = 0{,}1481\,\frac{6{,}00}{4{,}55} = 0{,}195.$$

Il en résulte que: $\vartheta = 1{,}835$, et $\mu_x = 0{,}2115$.

$$\frac{N\left(\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2}\right)}{b\,h\,\sigma'_b} = \frac{5000\,.\,2{,}045}{30.50\,.\,\sigma'_b} = 0{,}2115.$$

$$\sigma'_b = 32{,}30 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_a = 1{,}835\,.\,15\,.\,32{,}30 = 889 \text{ kg/cm}^2.$$

La même pièce, identiquement armée à l'extension, mais sans armature comprimée donnerait :

$$\text{pour } \theta = 1{,}60 : \lambda = 0{,}12, \ \mu = 0{,}1677, \ \Psi = 1{,}44,$$

$$\text{donc : } \lambda_c = 1{,}44 \ . \ 0{,}12 = 0{,}173 ;$$

$$\text{pour } \theta = 1{,}40 : \lambda = 0{,}1488, \ \mu = 0{,}1794, \ \Psi = 1{,}435,$$

$$\text{donc : } \lambda_c = 1{,}435 \ . \ 0{,}1488 = 0{,}2135$$

Donc : $\theta = 1{,}52$ et $\mu = 0{,}1722$, d'où $\sigma'_b = 39{,}5 \text{ kg/cm}^2$ et

$$\sigma_a = 1{,}52 \ . \ 15 \ . \ 39{,}5 = 902 \text{ kg/cm}^2.$$

§ 10. — Observation générale.

Nous avons dans l'étude qui précède défini la position de l'effort normal résultant N par sa distance *e* à l'axe médian de la section, mesurée positivement dans le sens de la zone comprimée, négativement en sens inverse.

Certains opérateurs préfèrent déterminer autrement cette situation, notamment par la distance *e'* de N à la face la plus voisine de la pièce. Cette manière peut même s'imposer dans certains cas, par exemple lorsqu'il s'agit de piliers supportant de charges excentriques par l'intermédiaire de consoles.

Il est indifférent de se servir de *e* ou de *e'* dans tous les problèmes où les hauteurs h et h_t sont données d'avance, car l'une de ces distances permet de calculer aisément l'autre. Les formules précédentes, établies en foncion de *e*, sont donc toujours applicables.

Il n'en est pas de même lorsque la hauteur h est précisément l'inconnue du calcul. La relation entre *e* et *e'*, qui dépend de h, n'est pas connue d'avance. Si *e'* est l'élément donné du problème, il n'est pas possible de déterminer la valeur correspondante de *e* et les formules précédentes ne sont plus applicables directement.

Mais il suffit d'y substituer à *e* l'une des expressions suivantes, en cas de compression :

$$e = e' + 0{,}5\, h_t = e' + 0{,}5\, h + 0{,}5\, a = e' + \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) h \quad ,$$

en cas de traction :

$$e = e' - 0{,}5\, h_t = e' - 0{,}5\, h - 0{,}5\, a = e' - \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) h \ ;$$

moyennent la convention de signes suivante.

En cas de compression, N est considéré comme positif et e' se mesure *positivement à partir de l'arête la plus comprimée vers l'extérieur.*

En cas de traction, N est considéré comme négatif et e' se mesure *négativement à partir de l'arrête la plus étendue vers l'extérieur.*

Toutes les formules sont algébriques, c'est-à-dire que les signes des grandeurs dont elles expriment les relations sont *implicites.*

Le lecteur effectuera aisément les substitutions dans les formules précédentes.

La manière de s'en servir pour le calcul de h n'est en rien modifiée.

Les tables sont également applicables. Toutefois, dans les tableaux 1 et 4, il faut substituer à $\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2}$ les valeurs de $\frac{e'}{h} + 1$ ou $\frac{e'}{h} + \delta - 1$, selon qu'il s'agit d'une compression ou d'une traction. Pour l'usage du tableau 3, il faut substituer à $\frac{e}{h}$ respectivement $\frac{e'}{h} + \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)$ ou $\frac{e'}{h} - \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)$.

Pour le tableau 2, aucun changement.

Tableau 1.

θ	$\frac{h}{v'}$	μ	μ'	(λ) $\frac{e}{h}+\frac{\delta}{2}=\infty$	λ_c $\frac{e}{h}+\frac{\delta}{2}=10$	$\frac{e}{h}+\frac{\delta}{2}=5$	$\frac{e}{h}+\frac{\delta}{2}=3$	$\frac{e}{h}+\frac{\delta}{2}=2$	$\frac{e}{h}+\frac{\delta}{2}=1{,}50$	$\frac{e}{h}+\frac{\delta}{2}=1{,}25$	$\frac{e}{h}+\frac{\delta}{2}=1{,}00$	$\frac{e}{h}+\frac{\delta}{2}=0{,}90$	$\frac{e}{h}+\frac{\delta}{2}=0{,}80$	$\frac{e}{h}+\frac{\delta}{2}=0{,}70$
4,00	5,00	0,0933	0,0233	0,0250	0,0227	0,0203	0,0172	0,0133	0,0095	0,0063	0,0017	— 0,0009		
3,75	4,75	0,0979	0,0261	0,0281	0,0255	0,0229	0,0194	0,0150	0,0107	0,0072	0,0020	— 0,0009		
3,50	4,50	0,1029	0,0294	0,0317	0,0288	0,0258	0,0219	0,0170	0,0121	0,0082	0,0023	— 0,0010		
3,25	4,25	0,1084	0,0334	0,0362	0,0329	0,0295	0,0251	0,0195	0,0139	0,0095	0,0028	— 0,0009		
3,00	4,00	0,1146	0,0382	0,0417	0,0379	0,0341	0,0290	0,0226	0,0162	0,0111	0,0035	— 0,0008		
2,80	3,80	0,1200	0,0429	0,0470	0,0427	0,0384	0,0327	0,0256	0,0184	0,0127	0,0041	— 0,0006		
2,60	3,60	0,1260	0,0485	0,0534	0,0486	0,0437	0,0372	0,0292	0,0211	0,0146	0,0049	— 0,0004		
2,40	3,40	0,1326	0,0553	0,0613	0,0558	0,0502	0,0429	0,0337	0,0244	0,0171	0,0060	— 0,0001		
2,30	3,30	0,1362	0,0592	0,0659	0,0600	0,0541	0,0462	0,0363	0,0264	0,0185	0,0067	+ 0,0001	— 0,0081	
2,20	3,20	0,1400	0,0636	0,0710	0,0646	0,0583	0,0498	0,0392	0,0286	0,0201	0,0074	0,0003	— 0,0085	
2,10	3,10	0,1439	0,0685	0,0768	0,0699	0,0631	0,0540	0,0425	0,0311	0,0220	0,0083	0,0007	— 0,0089	
2,00	3,00	0,1481	0,0741	0,0833	0,0759	0,0685	0,0586	0,0463	0,0339	0,0241	0,0092	0,0010	— 0,0093	
1,90	2,90	0,1526	0,0803	0,0907	0,0827	0,0746	0,0639	0,0505	0,0372	0,0265	0,0104	0,0015	— 0,0097	
1,80	2,80	0,1573	0,0874	0,0992	0,0905	0,0817	0,0701	0,0555	0,0409	0,0293	0,0118	0,0021	— 0,0100	
1,70	2,70	0,1623	0,0955	0,1089	0,0994	0,0898	0,0771	0,0612	0,0453	0,0325	0,0134	0,0028	— 0,0104	
1,60	2,60	0,1677	0,1048	0,1202	0,1097	0,0992	0,0853	0,0678	0,0503	0,0364	0,0154	0,0038	— 0,0108	
1,50	2,50	0,1733	0,1156	0,1333	0,1217	0,1102	0,0948	0,0755	0,0563	0,0409	0,0177	0,0049	— 0,0111	
1,40	2,40	0,1794	0,1281	0,1488	0,1360	0,1232	0,1061	0,0847	0,0634	0,0463	0,0207	0,0064	— 0,0114	
1,20	2,20	0,1928	0,1607	0,1894	0,1733	0,1573	0,1358	0,1091	0,0823	0,0608	0,0287	0,0108	— 0,0115	
1,00	2,00	0,2083	0,2083	0,2500	0,2292	0,2083	0,1806	0,1458	0,1111	0,0834	0,0417	0,0186	— 0,0104	
0,90	1,90	0,2170	0,2411	0,2924	0,2683	0,2442	0,2120	0,1719	0,1317	0,0995	0,0513	0,0245	— 0,0090	
0,80	1,80	0,2263	0,2829	0,3472	0,3189	0,2906	0,2529	0,2058	0,1586	0,1209	0,0643	0,0329	— 0,0064	
0,70	1,70	0,2364	0,3378	0,4202	0,3864	0,3526	0,3076	0,2513	0,1950	0,1500	0,0824	0,0449	— 0,0021	
0,60	1,60	0,2474	0,4123	0,5208	0,4796	0,4383	0,3834	0,3146	0,2459	0,1910	0,1085	0,0627	+ 0,0054	— 0,0682
0,50	1,50	0,2593	0,5185	0,6667	0,6148	0,5630	0,4938	0,4074	0,3210	0,2519	0,1482	0,0905	0,0185	— 0,0741
0,45	1,45	0,2656	0,5901	0,7663	0,7073	0,6483	0,5696	0,4712	0,3729	0,2942	0,1762	0,1106	0,0286	— 0,0768
0,40	1,40	0,2721	0,6803	0,8929	0,8249	0,7568	0,6661	0,5528	0,4394	0,3487	0,2126	0,1370	0,0425	— 0,0790
0,35	1,35	0,2789	0,7969	1,0582	0,9785	0,8988	0,7926	0,6597	0,5269	0,4207	0,2613	0,1728	0,0621	— 0,0802
0,30	1,30	0,2860	0,9533	1,2821	1,1868	1,0914	0,9643	0,8054	0,6466	0,5194	0,3288	0,2229	0,0905	— 0,0798

Tableau 2.

θ	φ					φ'				
	$\delta' = 0,80$	$\delta' = 0,85$	$\delta' = 0,90$	$\delta' = 0,95$	$\delta' = 1,00$	$\delta' = 0,80$	$\delta' = 0,85$	$\delta' = 0,90$	$\delta' = 0,95$	$\delta' = 1,00$
4,00	0,000	0,0625	0,125	0,1875	0,250	0,000	0,2125	0,450	0,7125	1,000
3,75	0,013	0,077	0,140	0,203	0,267	0,040	0,244375	0,4725	0,724375	»
3,50	0,029	0,093	0,157	0,221	0,286	0,080	0,27625	0,495	0,73625	»
3,25	0,046	0,112	0,177	0,242	0,308	0,120	0,308125	0,5175	0,748125	»
3,00	0,067	0,133	0,200	0,267	0,333	0,160	0,340	0,540	0,760	»
2,80	0,086	0,154	0,221	0,289	0,357	0,192	0,3655	0,558	0,7695	»
2,60	0,108	0,177	0,246	0,315	0,385	0,224	0,391	0,576	0,779	»
2,40	0,134	0,204	0,275	0,346	0,417	0,256	0,4165	0,594	0,7885	»
2,30	0,148	0,220	0,291	0,363	0,435	0,272	0,42925	0,603	0,79325	»
2,20	0,164	0,236	0,309	0,382	0,455	0,288	0,442	0,612	0,798	»
2,10	0,181	0,255	0,329	0,402	0,476	0,304	0,45475	0,621	0,80275	»
2,00	0,200	0,275	0,350	0,425	0,500	0,320	0,4675	0,630	0,8075	»
1,90	0,221	0,297	0,374	0,450	0,526	0,336	0,48025	0,639	0,81225	»
1,80	0,244	0,322	0,400	0,478	0,556	0,352	0,493	0,648	0,817	»
1,70	0,271	0,350	0,429	0,509	0,588	0,368	0,50575	0,657	0,82175	»
1,60	0,300	0,381	0,463	0,544	0,625	0,384	0,5185	0,666	0,8265	»
1,50	0,333	0,417	0,500	0,583	0,667	0,400	0,53125	0,675	0,83125	»
1,40	0,371	0,457	0,543	0,629	0,714	0,416	0,544	0,684	0,836	»
1,20	0,467	0,558	0,650	0,742	0,833	0,448	0,5695	0,702	0,8455	»
1,00	0,600	0,700	0,800	0,900	1,000	0,480	0,595	0,720	0,855	»
0,90	0,689	0,794	0,900	1,006	1,111	0,496	0,60775	0,729	0,85975	»
0,80	0,800	0,913	1,025	1,138	1,250	0,512	0,6205	0,738	0,8645	»
0,70	0,943	1,064	1,186	1,307	1,429	0,528	0,63325	0,747	0,86925	»
0,60	1,133	1,267	1,400	1,533	1,667	0,544	0,646	0,756	0,874	»
0,50	1,400	1,550	1,700	1,850	2,000	0,560	0,65875	0,765	0,87875	»
0,45	1,578	1,739	1,900	2,061	2,222	0,568	0,665125	0,7695	0,881125	»
0,40	1,800	1,975	2,150	2,325	2,500	0,576	0,6715	0,774	0,8835	»
0,35	2,086	2,279	2,471	2,664	2,857	0,584	0,677875	0,7785	0,885875	»
0,30	2,467	2,683	2,900	3 117	3,333	0,592	0,68425	0,783	0,88825	»

Tableau 3.

$\frac{e}{h}$	ψ		
	$\delta = \delta' = 0,80$	$\delta = \delta' = 0,90$	$\delta = \delta' = 1,00$
— ∞	1,000	1,000	1,000
— 10,00	1,083	1,094	1,105
— 5,00	1,174	1,198	1,222
— 3,00	1,308	1,353	1,400
— 2,50	1,381	1,439	1,500
— 2,00	1,500	1,581	1,667
— 1,80	1,571	1,667	1,769
— 1,60	1,667	1,783	1,909
— 1,40	1,800	1,947	2,111
— 1,20	2,000	2,200	2,429
— 1,00	2,333	2,636	3,000
— 0,90	2,600	3,000	3,500
— 0,80	3,000	3,571	4,333
— 0,70	3,667	4,600	6,000
— 0,60	5,000	7,000	11,000
— 0,50	9,000	19,000	∞
+ 0,15	— 0,455	— 0,500	— 0,538
0,20	— 0,333	— 0,385	— 0,429
0,25	— 0,231	— 0,286	— 0,333
0,30	— 0,143	— 0,200	— 0,250
0,35	— 0,067	— 0,125	— 0,176
0,40	0,000	— 0,059	— 0,111
0,45	0,059	0,000	— 0,053
0,50	0,111	0,053	0,000
0,60	0,200	0,143	0,091
0,70	0,273	0,217	0,167
0,80	0,333	0,280	0,231
0,90	0,385	0,333	0,286
1,00	0,429	0,379	0,333
1,10	0,467	0,419	0,375
1,20	0,500	0,455	0,412
1,30	0,529	0,486	0,444
1,50	0,579	0,538	0,500
1,75	0,628	0,591	0,556
2,00	0,667	0,633	0,600
2,50	0,724	0,695	0,667
3,00	0,765	0,739	0,714
4,00	0,818	0,798	0,778
5,00	0,852	0,835	0,818
6,00	0,875	0,860	0,846
8,00	0,905	0,893	0,882
10,00	0,923	0,914	0,905
15,00	0,948	0,942	0,935
20,00	0,961	0,956	0,951
30,00	0,974	0,970	0,967
50,00	0,984	0,982	0,980
∞	1,000	1,000	1,000

Tableau 4.

θ	$\frac{e}{h}+\frac{\delta}{2}=$		∞	10	5	3	2	1,50	1,20	1,00	0,80	0	−0,20	−0,40	−0,60	−0,80	−1,00	−2	−5	−10
	λ	μ	Ψ																	
3,00	0,0417	0,1146	1,000	0,9083	0,8167	0,6945	0,5416	0,3889	0,2361	0,0833	—0,1458	∞	5,583	3,292	2,528	2,1458	1,9167	1,4583	1,1833	1,0917
2,60	0,0534	0,1260	»	0,9093	0,8185	0,6975	0,5463	0,3951	0,2438	0,0926	—0,1343	»	5,537	3,269	2,512	2,1343	1,9074	1,4537	1,1815	1,0907
2,40	0,0613	0,1326	»	0,9098	0,8196	0,6993	0,5490	0,3987	0,2484	0,0980	—0,1275	»	5,510	3,255	2,503	2,1275	1,9020	1,4510	1,1804	1,0902
2,20	0,0710	0,1400	»	0,9104	0,8208	0,7014	0,5521	0,4028	0,2535	0,1042	—0,1198	»	5,479	3,240	2,493	2,1198	1,8958	1,4479	1,1792	1,0896
2,00	0,0833	0,1481	»	0,9111	0,8222	0,7037	0,5556	0,4074	0,2593	0,1111	—0,1111	»	5,444	3,222	2,482	2,1111	1,8889	1,4444	1,1778	1,0889
1,80	0,0992	0,1573	»	0,9119	0,8238	0,7063	0,5595	0,4127	0,2659	0,1190	—0,1012	»	5,405	3,202	2,468	2,1012	1,8810	1,4405	1,1762	1,0881
1,60	0,1202	0,1677	»	0,9128	0,8256	0,7094	0,5641	0,4188	0,2735	0,1282	—0,0898	»	5,359	3,180	2,453	2,0898	1,8718	1,4359	1,1744	1,0872
1,40	0,1488	0,1794	»	0,9139	0,8278	0,7130	0,5694	0,4259	0,2824	0,1389	—0,0764	»	5,306	3,153	2,435	2,0764	1,8611	1,4306	1,1722	1,0861
1,20	0,1894	0,1928	»	0,9152	0,8303	0,7172	0,5758	0,4343	0,2929	0,1515	—0,0606	»	5,242	3,121	2,414	2,0606	1,8485	1,4242	1,1697	1,0848
1,00	0,2500	0,2083	»	0,9167	0,8333	0,7222	0,5833	0,4444	0,3056	0,1667	—0,0417	»	5,167	3,083	2,389	2,0417	1,8333	1,4167	1,1667	1,0833