

NOTE  
SUR LE CALCUL ORGANIQUE  
DES PIÈCES FLÉCHIES  
EN BÉTON ARMÉ

(AVEC TABLES NUMÉRIQUES ET GRAPHIQUES)

PAR

**Fernand CAMPUS**

*Ingénieur des constructions civiles et électricien  
Sous-Directeur des Travaux Publics du Territoire de la Sarre*

---

EXTRAIT DES

ANNALES DES TRAVAUX PUBLICS DE BELGIQUE

Fascicules 1, 2 et 3 de 1924.

---

BRUXELLES

GOEMAERE, IMPRIMEUR DU ROI, ÉDITEUR

21, rue de la Limite

—  
1924

# NOTE

## SUR LE CALCUL ORGANIQUE

### DES PIÈCES FLÉCHIES

### EN BÉTON ARMÉ

(AVEC TABLES NUMÉRIQUES ET GRAPHIQUES)

PAR

**Fernand CAMPUS**

Ingénieur des constructions civiles et électricien  
Sous-Directeur des Travaux Publics du Territoire de la Sarre.

---

#### AVANT-PROPOS

En entreprenant l'étude dont cette note est le résultat, l'auteur s'était proposé de rechercher, à l'occasion d'un cas concret rencontré dans la pratique, une méthode simple de résoudre le problème de la flexion plane composée des pièces en béton armé, dont la théorie, telle que l'expose la « Circulaire ministérielle française » conduit à la solution d'une équation du 3<sup>e</sup> degré. C'est en suivant la méthode de la gradation des difficultés qu'il a été amené à développer son sujet en envisageant le problème général de tous les cas de flexion usuels.

Il ne manque pas pour cet objet de bons procédés et de nombreuses tables numériques et graphiques. Mais outre qu'ils ne sont pas toujours d'une rigueur complète et sont parfois encombrants ou presque aussi compliqués d'emploi que la théorie pure et simple, ils se basent le plus souvent sur des

hypothèses particulières qui en limitent le champ d'application et restreignent l'action du praticien.

L'auteur a voulu éviter, autant qu'il est possible, la plupart de ces écueils dans la méthode qu'il expose. Il s'est attaché à ne pas s'écarter de la rigueur de la théorie usuelle, telle qu'elle est résumée notamment dans la circulaire ministérielle française. Il a cru utile, même d'étendre ses investigations aux théories plus récentes qui tiennent compte de la résistance à l'extension du béton, offrent un intérêt théorique certain et ne sont pas dénuées de valeur pratique.

Il a évité également les hypothèses particulières et cherché au contraire à atteindre le maximum de généralité en *substituant, dans toutes les formules, aux grandeurs physiques concrètes des rapports numériques abstraits*. De cette manière, il a cru réaliser en même temps une grande simplicité d'application et réduire au minimum le nombre des tables numériques ou graphiques nécessaires. (En dernière analyse un seul abaque permettrait la solution de tous les problèmes.)

Enfin, aucune entrave ne serait plus ainsi imposée au praticien ; la méthode s'accommode de tous les règlements de sécurité et les tables conviennent pour tous les systèmes d'unités : mesures métriques, anglaises ou américaines, russes, etc...

Le procédé pourrait donc servir pour un « Règlement international ou standard du béton armé » s'il devait un jour en être établi un. On est étonné en constatant la grande diversité, atteignant souvent à la contradiction, qui existe dans les prescriptions des divers règlements nationaux. Il est cependant probable que les propriétés du béton armé ne sont pas à ce point dépendantes des circonstances géographiques. Quelques-unes intéressantes que puissent être les considérations parfois un peu trop orientées vers les détails, oiseux pour le praticien ordinaire, qui font l'objet des congrès internationaux pour les méthodes d'essai des matériaux, tel celui de New-York en 1912, elles ne peuvent avoir pour l'ingénieur les avantages de facilité et de simplification qui résulteraient de la fixation de normes internationales pour le béton armé, analogues à celles que la pratique a établies pour les constructions métalliques.

La note ne traite pas des pièces chargées debout (colonnes), l'application de la méthode n'apportant à leur étude aucun perfectionnement.

De très nombreuses applications numériques appuient l'exposé et prouvent que les tables numériques et graphiques du mémoire peuvent convenir déjà pour un usage pratique. Cependant, la note n'a nullement été établie pour constituer un ouvrage convenant à l'emploi journalier du constructeur. L'auteur n'en a eu l'intention, non plus que le loisir et les moyens d'établir les tables avec le soin qu'exigerait une telle entreprise. Il ne s'agit en réalité que d'un essai dont un ouvrage pratique pourrait prendre naissance, si l'utilité en apparaissait.

Sarrebruck, mai 1922.

F. C.

*Ouvrages consultés* : Circulaire ministérielle française du 20 octobre 1906.  
*Deutsche Bestimmungen 1916 für Ausführung von Bauwerken aus Eisenbeton.*  
*Oesterreichische Eisenbetonbestimmungen vom 22-12-1920.*  
*Schweizerische Eisenbetonbestimmungen vom 26-11-1915.*  
PROBST : *Vorlesungen über Eisenbeton.* Erster Band. Berlin 1917.  
Edt. J. Springer.  
A. MESNAGER : *Cours de béton armé.* Paris 1921. — Dunod.

## NOTATIONS.

Les notations employées seront définies dans le cours de la note par les figures ou dans le texte.

Pour les poutres doublement armées, une notation unique  $h$  sera utilisée pour désigner la distance de l'une ou l'autre armature à la face la plus éloignée de la pièce, ce qui correspond à l'hypothèse que les deux armatures sont également éloignées des faces voisines.

Afin d'éviter toute confusion, les tensions seront désignées par les caractères  $t$  munis d'indices dans les formules établies d'après l'hypothèse classique que le béton ne supporte pas de tensions de traction, par les lettres grecques  $\tau$  dans les formules tenant compte des efforts d'extension subis par le béton.

## PREMIÈRE SECTION.

Flexion plane simple des pièces à sections rectangulaires (poutres ou dalles) simplement ou doublement armées.

### CHAPITRE I.

LA RÉSISTANCE A L'EXTENSION DU BÉTON EST NÉGLIGÉE.

1) *Théorie générale et formation des tableaux.* — Les hypothèses fondamentales de cette théorie sont trop universellement connues et assez

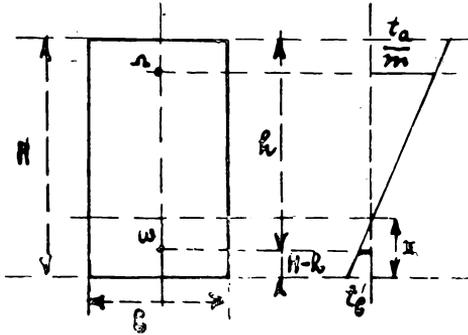


Fig. 1.

définies par la rubrique ci-dessus pour qu'il soit encore nécessaire de les rappeler. La figure l'en fournit une représentation assez compréhensible et définit en même temps les notations qui seront employées dans la suite.

L'hypothèse de proportionnalité des tensions s'exprime par les formules suivantes, dans lesquelles  $m$  représente le rapport  $\frac{E_a}{E_b}$  des modules d'élasticité du métal des armatures et du béton soumis à la compression.

$$\frac{t_a}{m t'_b} = \frac{h - x}{x} = \frac{h}{x} - 1 \quad \frac{h}{x} = 1 + \frac{t_a}{m t'_b} \quad (1)$$

Les coefficients  $C$  et  $\alpha$  sont définis par les relations :

$$\omega = C \Omega \quad H = \alpha h$$

L'équilibre de translation des actions intérieures et extérieures s'exprime par l'équation :

$$\Omega t_a - \frac{bx}{2} t'_b - m \omega t'_b \left( \frac{x - H + h}{x} \right) = 0$$

et ses transformations :

$$\frac{m\Omega t_a}{bhmt'_b} - \frac{x}{2h} - \frac{C(x - H + h)m\Omega}{bhx} = 0$$

$$\frac{m\Omega}{bh} = \frac{1}{2 \frac{h}{x} \left\{ \frac{t_a}{mt'_b} - C \left( 1 - \frac{H-h}{h} \cdot \frac{h}{x} \right) \right\}}$$

$$= \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) \left\{ \frac{t_a}{mt'_b} - C \left[ 1 - (\alpha - 1) \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) \right] \right\}}$$

Lorsque la pièce est à armature simple :  $C = 0$

$$\frac{m\Omega}{bh} = \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) \frac{t_a}{mt'_b}} = A_0 \dots \dots \dots (2)$$

Les valeurs de  $A_0$  sont inscrites au tableau I.

Lorsqu'il existe une armature comprimée :

$$\frac{m\Omega}{bh} =$$

$$= \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) \frac{t_a}{mt'_b} - 2C \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) \left[ 1 - (\alpha - 1) \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) \right]}$$

$$= \frac{A_0}{1 - C\mu} \dots \dots \dots (3)$$

expression dans laquelle

$$\mu = \frac{\left[ 1 - (\alpha - 1) \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) \right]}{\frac{t_a}{mt'_b}} \dots \dots \dots (4)$$

Le calcul des armatures comprimées aurait pu être simplifié par le choix de l'expression  $\frac{bh}{m\Omega}$  ; mais la notion du pourcentage d'armature est plus pratique et le facteur inverse aurait entraîné dans les calculs d'interpolation par le tableau I une moindre précision.

Il n'a pas semblé que ce désavantage aurait été suffisamment compensé par une légère facilité dans le calcul de l'armature comprimée, qui est d'ailleurs d'un intérêt assez exceptionnel.

Les valeurs de  $\mu$  sont inscrites au tableau II pour des valeurs quelconques de  $\alpha$ .

L'équilibre des moments des actions intérieures et extérieures conduit aux équations :

$$M = \frac{bx}{2} t'_b \left( h - \frac{x}{3} \right) + m\omega t'_b \frac{(x - H + h)}{x} (2h - H)$$

$$\frac{M}{bh^2 t'_b} = \frac{\left( 1 - \frac{1}{3} \frac{h}{x} \right)}{\frac{2}{x}} + \frac{mC\Omega}{bh} \left[ 1 - \left( \alpha - 1 \right) \frac{h}{x} \right] (2 - \alpha)$$

$$\frac{M}{bh^2 t'_b} = \frac{2 + 3 \frac{t_a}{m t'_b}}{6 \left( 1 + \frac{t_a}{m t'_b} \right)^2} + \frac{Cm\Omega}{bh} \left[ 1 - \left( \alpha - 1 \right) \left( 1 + \frac{t_a}{m t'_b} \right) \right] (2 - \alpha).$$

Si la pièce est à armature simple :  $C = 0$  et :

$$\frac{M}{bh^2 t'_b} = \frac{2 + 3 \frac{t_a}{m t'_b}}{6 \left( 1 + \frac{t_a}{m t'_b} \right)^2} = B_0 \dots \dots \dots \quad 5)$$

Les valeurs de  $B_0$  sont également données par le tableau I. Lorsqu'il existe une armature comprimée, la relation peut s'écrire :

$$\frac{M}{bh^2 t'_b} = B_0 + C\varphi \frac{m\Omega}{bh} \dots \dots \dots \quad (6)$$

expression dans laquelle :

$$\varphi = \left( 2 - \alpha \right) \left[ 1 - \left( \alpha - 1 \right) \left( 1 + \frac{t_a}{m t'_b} \right) \right] \dots \dots \dots \quad (7)$$

Les valeurs de  $\varphi$  sont inscrites au tableau II pour des valeurs quelconques de  $\alpha$ .

Le tableau I contient également les valeurs de :

$$\frac{mM}{bh^2 t_a} = \frac{M}{bh^2 t'_b} \times \frac{m t'_b}{t_a} \dots \dots \dots \quad (8)$$

2) *Prédétermination du poids propre.* — Lorsque tous les éléments de la section sont donnés et qu'il s'agit de calculer la charge admissible ou les tensions, le moment  $M$  est complètement connu à l'avance, le poids propre étant connu. Il n'en est

pas de même lorsqu'il s'agit de calculer les dimensions d'une pièce, en vue d'une certaine sollicitation. Le moment fléchissant des actions extérieures est connu, mais celui du poids propre ne l'est pas à priori. Il est possible, par les tableaux I et II de substituer un calcul exact à l'habituelle méthode, par tâtonnements ou approximations successives.

Lorsque  $H$  et  $h$  sont fixés et que la dimension à calculer est  $b$ , si  $M'$  est le moment dû aux forces extérieures et si  $p$  est le poids propre supposé uniformément réparti :

$$M = M' + kp$$

$k$  étant une fonction d'éléments géométriques connus de la pièce :

$$\frac{M}{bh^2t'_b} = \frac{M'}{bh^2t'_b} + \frac{kp}{bh^2t'_b}$$

Or  $p = bH\Delta$ ,  $\Delta$  étant le poids spécifique du béton armé. Donc :

$$\frac{M}{bh^2t'_b} = \frac{M'}{bh^2t'_b} + \frac{kH\Delta}{h^2t'_b}$$

$$\frac{M'}{bh^2t'_b} = \frac{M}{bh^2t'_b} - \frac{kH\Delta}{h^2t'_b}$$

Le premier terme du deuxième membre est donné par le tableau, le terme correctif est indépendant de l'inconnue  $b$  et facile à déterminer;  $b$  est donc directement calculable.

Si  $b$  est donné et qu'il s'agisse de calculer  $h$ , remarquons que pour un rapport donné de  $\frac{t_a}{mt'_b}$ ,  $\frac{M}{bh^2t'_b} = B_0$  est donné par le tableau.

$$\text{Donc : } M' + kbH\Delta = B_0bh^2t'_b$$

On peut se fixer :  $H - h = a$ ,  $h$  est alors racine de l'équation du second degré :  $B_0bh^2t'_b - kbh\Delta - (kba\Delta + M') = 0$ .

#### APPLICATIONS.

3) *Recherche des tensions.* — Les éléments connus du problème sont :

$$M = 800.000 \text{ kg.cm.}, h = 80 \text{ cm.}$$

$$b = 30 \text{ cm.}, \Omega = 10,18 \text{ cm. (4 barres de 18 mm. de } \Phi).$$

On impose  $m = 12$

$$\frac{m\Omega}{bh} = \frac{12 \times 10,18}{2400} = 0,0509.$$

D'après le tableau I  $\frac{t_a}{mt'_b} = 2,68$ ,  
d'où

$$\frac{M}{bh^2t'_b} = 0,1236$$

$$t'_b = \frac{800.000}{30 \times 6400 \times 0,1236} = 33,7 \text{ kg/cm}^2$$

$$t_a = 2,68 \times 12 \times 33,7 = 1090 \text{ kg/cm}^2.$$

S'il y avait une barre de 18 millimètres de  $\Phi$  dans la zone comprimée,  $C = 0,25$ . Supposons  $\alpha = 1,05$ ,  $\frac{m\Omega}{bh} = 0,0509$ .  
D'après les tableaux I et II on trouve que pour

$$\frac{t_a}{mt'_b} = 2,60, \quad \frac{m\Omega}{bh} = \frac{0,0534}{1 - 0,25 \times 0,315} = 0,058$$

$$\frac{t_a}{mt'_b} = 2,80 \quad \frac{m\Omega}{bh} = \frac{0,0470}{1 - 0,25 \times 0,289} = 0,0506.$$

L'on en déduit que  $\frac{t_a}{mt'_b} = 2,792$ .

Les tableaux I et II permettent de déterminer encore

$$\frac{M}{bh^2t'_b} = 0,1202 + 0,25 \times 0,0509 \times 0,769 = 0,1202 + 0,04 = 0,1302$$

$$t'_b = \frac{800.000}{30 \times 6400 \times 0,1302} = 32,0 \text{ kg/cm}^2$$

$$t_a = 2,792 \times 12 \times 32,0 = 1075 \text{ kg/cm}^2.$$

4) *Calcul de la sollicitation limite.* — Recherchons, par exemple, quelle sollicitation peut recevoir la pièce de l'application précédente, les tensions limites étant fixées à  $t_a = 1200 \text{ kg/cm}^2$ ,  $t'_b = 50 \text{ kg/cm}^2$ , la valeur  $m = 12$  restant imposée.

Dans le cas où il n'existe que des armatures de traction

$$\frac{m\Omega}{bh} = 0,0509 \quad \frac{t_a}{mt'_b} = 2,68.$$

A la tension limite pour l'acier  $t_a = 1200 \text{ kg/cm}^2$ , correspond une tension de compression pour le béton

$$t'_b = \frac{1200}{12 \times 2,68} = 37,3 \text{ kg/cm}^2$$

qui ne peut être dépassée.

Comme  $\frac{M}{bh^2 t'_b} = 0,1236$ , la valeur limite du moment sollicitant est

$$M = 0,1236 \times 30 \times 6400 \times 37,3 = 885\,000 \text{ kg. cm.}$$

Le même calcul effectué pour la pièce à double armature, avec  $C = 0,25$  donne  $\frac{t_a}{m t'_b} = 2,792$ .

Pour  $t_a = 1200$ ,  $t'_b = 35,8$  et  $M = 896.000 \text{ kg. cm.}$

Un supplément d'armature de 25 p. c., placé dans la zone comprimée, produit donc une augmentation de résistance de 1,25 p. c. seulement.

5) En général, il n'est pas possible d'atteindre simultanément les limites des deux tensions. Dans l'application précédente, la fatigue de traction de l'armature est déterminante ; la tension limite du béton ne peut être atteinte. Aussi l'hypothèse de l'armature comprimée est elle purement illustrative.

Cette remarque suggère la recherche de l'importance de l'armature réalisant le *maximum de résistance d'une section d'encombrement donné*, résultat qui correspond à la réalisation simultanée des deux tensions limites  $t_a = 1200$  et  $t'_b = 50$  ( $m = 12$ ). Dans ce cas,

$$\frac{t_a}{m t'_b} = 2, \quad \frac{m\Omega}{bh} = 0,0833$$

$$\Omega = \frac{30 \times 80 \times 0,0833}{12} = 16,7 \text{ cm}^2$$

$$\frac{M}{bh^2 t'_b} = 0,1481.$$

Le moment résistant maximum est donc

$$M = 0,1481 \times 30 \times 6400 \times 50 = 1.420.000 \text{ kg. cm.}$$

Par rapport au cas de sollicitation limite précédent, le gain de résistance est de 535.000 kg.cm., soit 60,4 p. c., l'accroissement d'armature est de 6,52 cm<sup>2</sup>, soit 64 p. c.

Cette constatation est assez probante de l'efficacité des armatures de traction, à condition de rester dans les limites admissibles pour les tensions.

Le calcul serait également aisé pour une pièce doublement armée, en s'aidant du tableau II. Sous cette forme, le problème ne présenterait de caractère pratique que si la flexion peut

changer de sens, l'importance de l'armature comprimée dépendant de cette circonstance.

6) *Le problème rationnel de la double armature* se pose lorsque le moment sollicitant est supérieur encore au moment résistant maximum déterminé comme dans l'application précédente. La résistance voulue peut être assurée sans dépasser les limites de tension par le recours à la seconde armature.

Supposons que, les autres données étant égales d'ailleurs, le moment sollicitant soit 1.600.000 kg. cm.

$$\frac{t_a}{m t'_b} = 2, \quad \frac{M}{bh^2 t'_b} = \frac{1.600\ 000}{30 \times 6.400 \times 50} = 0,1667 = 0,1481 +$$

$$+ \frac{C \times 0,8075 \times 0,0833}{1 - C \times 0,425}.$$

$$0,0186 \left( 1 - 0,425 \times C \right) = 0,0673 C$$

$$C = \frac{0,0186}{0,0752} = 0,247 \quad \text{ou pratiquement } 25 \text{ p. c.}$$

$$\frac{m\Omega}{bh} = \frac{0,0833}{1 - 0,247 \times 0,425}$$

pour

$$\alpha = 1,05$$

$$\frac{m\Omega}{bh} = 0,0932$$

$$\text{Donc} \quad \Omega = \frac{0,0932 \times 2400}{12} = 18,64 \text{ cm}^2.$$

L'armature totale est  $1,25 \times 18,64 = 23,30 \text{ cm}^2$ , soit une augmentation d'armature de  $6,60 \text{ cm}^2$  ou 39,5 p. c. pour une augmentation de résistance de 12,7 p. c.

Si l'on voulait tenir compte de la réduction de la section par les armatures comprimées, ce qui revient à multiplier la section d'armature par  $\frac{m-1}{m}$ , il faudrait comme section brute 27 p. c. de la section des armatures de traction. Il n'y a aucune difficulté à tenir compte de la même correction dans les exemples 3) et 4).

7) La résistance peut être évidemment accrue aussi par l'augmentation de l'armature de traction; dans ce cas, il ne sera plus possible cependant de faire travailler l'armature au taux limite.

La condition est  $t'_b = 50 \text{ kg/cm}^2$ .

$$\frac{M}{bh^2t'_b} = \frac{1.600.000}{50 \times 6400 \times 50} = 0,1667, \quad \frac{t_a}{mt'_b} = 1,617$$

$$t_a = 1,617 \times 12 \times 50 = 970 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{m\Omega}{bh} = 0,1185 \quad \Omega = \frac{2.400 \times 0,1185}{12} = 23,7 \text{ cm}^2.$$

L'augmentation d'armature est de 7 cm<sup>2</sup>, soit 42 p. c., donc supérieure à celle qu'exige l'emploi de l'armature comprimée.

8) *Dimensionnement d'avant-projet d'une dalle.* — La largeur  $b$  de la section est donnée et égale à 100 centimètres. La portée est de 2<sup>m</sup>,16.

Soient  $t_a = 1000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $t'_b = 35 \text{ kg/cm}^2$ ,  $m = 15$ .

Le moment des forces extérieures est  $M = 93.500$ .

La hauteur totale de la section est  $H = h + 1,5 \text{ cm}$ .

Le poids propre par mètre courant est  $(h + 1,5) \times 24 \text{ kg}$ .

Le moment dû au poids propre est

$$\frac{(h + 1,5) \times 24}{8} \times \overline{2,16^2} \times 100$$

$$\frac{t_a}{mt'_b} = \frac{1.000}{15 \times 35} = 1,9 \quad \frac{M}{bh^2t'_b} = 0,1526$$

Donc

$$93.500 + \frac{(h + 1,5) \times 24}{8} \times \overline{2,16^2} \times 100 = 100 \times h^2 \times 35 \times 0,1526$$

$$0,1526 h^2 - 0,400 h - 27,3 = 0$$

$$h = 14,8 \text{ cm.}$$

$$H = 16,3 \text{ cm.}$$

$$\frac{m\Omega}{bh} = 0,0907$$

$$\Omega = \frac{1480 \times 0,0907}{15} = 8,95 \text{ cm}^2.$$

Si l'on avait avant calcul évalué l'épaisseur totale de la dalle à 16 cm. environ, le moment total eut été 115.900 kg. cm. et

$$h = \sqrt{\frac{115.900}{100 \times 35 \times 0,1526}} = 14,75 \text{ cm.}$$

Cette dernière méthode est généralement appliquée, elle demande des tâtonnements ou une certaine tolérance d'imprécision. Le dimensionnement rationnel que permettent les tableaux I et II de cet ouvrage est certes préférable.

9) Si la hauteur n'est pas limitée, il peut être avantageux de choisir une hauteur supérieure à la limite inférieure qui vient d'être déterminée. Dans ce cas, la section d'armature se calcule par la condition du taux de travail limite du métal. La tension extrême de compression dans le béton est toujours inférieure au taux de sécurité.

Supposons que, dans le cas précédent, nous ayons choisi

$$H = 22 \quad \text{et} \quad h = 20$$

$$M = 93.500 + \frac{22 \times 24}{8} \times 2.16^2 \times 100 = 124300 \text{ kg. cm.}$$

$$\frac{mM}{bh^2t_a} = \frac{15 \times 124.300}{100 \times 400 \times 1.000} = 0,0466$$

$$\frac{t_a}{mt'_b} = 2,67 \quad t'_b = \frac{1000}{15 \times 2,67} = 25 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{m\Omega}{bh} = 0,0511 \quad \text{d'où } \Omega = \frac{100 \times 20 \times 0,0511}{15} = 6,8 \text{ cm}^2.$$

Malgré l'augmentation sensible du poids propre, une importante économie d'armature est cependant obtenue.

10) *Dimensionnement d'avant-projet d'une pièce de hauteur limitée.* — L'intérêt de ce problème est considérable en pratique; peu de formules ou de tables pour le calcul du béton armé en facilitent cependant la solution, que les tableaux I et II rendent très aisee.

Supposons que la hauteur totale d'une poutre d'une portée de 4 mètres et sollicitée par un moment fléchissant maximum de 120.000 kgem soit limitée à 36 cm. et que  $h = 33$  cm.

$$\text{Soient } t_a = 900 \text{ kg/cm}^2 \quad t'_b = 30 \text{ kg/cm}^2 \quad m = 15$$

$$\frac{t_a}{mt'_b} = 2 \quad \frac{M}{bh^2t'_b} = 0,1481$$

$$b = \frac{120.000}{33^2 \times 30 \times 0,1481} = 24,8 \text{ cm ou } 25 \text{ cm.}$$

$$\frac{m\Omega}{bh} = 0,0833 \quad \Omega = \frac{33 \times 24,8 \times 0,0833}{15} = 4,55 \text{ cm}^2.$$

Nous avons négligé l'effet du poids propre, nous pourrions d'après ce premier calcul l'évaluer avec une approximation plus ou moins grande. Mais il est plus exact et beaucoup plus

rapide de procéder à sa détermination rationnelle simultanément avec le dimensionnement.

La formule du poids propre est  $b \times 36 \times 0,24$  kilog. par mètre courant.

Le moment total est donc

$$120\,000 + \frac{b \times 36 \times 0,24}{8} \times 4^2 \times 100 = b \times 35^2 \times 50 \times 0,1481$$

$$b = \frac{120.000}{4850 - 1728} = \frac{120.000}{3122} = 38,45 \text{ cm.}$$

$$\Omega = \frac{0,0833 \times 33 \times 38,45}{15} = 7,03 \text{ cm}^2.$$

L'hypothèse de la négligence du poids propre s'avère très grossière. Cette application a l'avantage de mettre en relief, par l'influence considérable du poids propre, les erreurs sensibles qui peuvent résulter des procédés par approximations successives, malgré le temps qu'ils exigent. La méthode rationnelle facilitée par l'emploi des tableaux I et II, paraît de toutes façons préférable.

11) *Recours à la double armature.* — Dans l'un ou l'autre des deux problèmes d'établissement, la question de la seconde armature dans la zone comprimée du béton se pose lorsque la valeur trouvée pour la dimension constituant l'inconnue du problème est trop grande ou inadmissible pour des raisons pratiques ou par suite des circonstances. Elle s'énonce toujours comme suit : Les deux dimensions de la section rectangulaire étant connues, égales aux limites imposées ; les tensions admissibles étant fixées d'autre part, déterminer les sections d'armatures étendues et comprimées nécessaire pour assurer la résistance aux actions sollicitantes.

En d'autres termes  $b$  et  $h$ ,  $t_a$ ,  $t_b$ ,  $m$  et  $M$  sont connus ; il s'agit de calculer  $\Omega$  et  $C$ .

Ce problème a déjà été examiné et résolu dans l'application du paragraphe 6, sans aucune ambiguïté ni approximation.

Comme il a été montré dans l'application du paragraphe 7, il est possible de réaliser la résistance nécessaire par un renforcement de l'armature de traction seulement. Mais, si la tension limite de compression du béton ne peut être augmentée, la tension réelle de traction dans les armatures diminue d'autant plus que leur section augmente ; l'utilisation du métal diminue et peut devenir plus mauvaise que celle des barres

comprimées. La solution de la double armature sera généralement plus économique, à condition, bien entendu, que l'on répartisse les barres de manière à serrer d'aussi près que possible les tensions de sécurité admissibles. La double armature ne peut se justifier pour des raisons de résistance dans aucun autre cas. Avant d'y recourir, il faut acquérir la certitude qu'il est impossible d'atteindre le but proposé en utilisant jusqu'à la limite de résistance du béton et de l'armature unique étendue tout l'espace disponible pour la poutre. Mais il est erroné d'en conclure que l'emploi de l'armature de compression n'est jamais recommandable. En réalité il constitue le moyen le plus économique et le plus sur de réaliser des poutres de grande résistance sous des dimensions très restreintes.

Il fournira donc une solution intéressante dans les cas précisément les plus délicats.

**TABLEAU I.**

**Flexion plane des pièces à sections rectangulaires  
à armatures simples.**

$$\frac{h}{x} = 1 + \frac{t_a}{mt'_b} (1); \quad \frac{m\Omega}{bh} = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{t_a}{mt'_b}\right) \frac{t_a}{mt'_b}} (2); \quad \frac{M}{bh^2t'_b} = \frac{2 + 3 \frac{t_a}{mt'_b}}{6 \left(1 + \frac{t_a}{mt'_b}\right)^2} (5);$$

$$\frac{mM}{bh^2t_a} = \frac{M}{bh^2t'_b} \frac{mt'_b}{t_a} (8).$$

$\frac{t_a}{mt'_b}$	$\frac{h}{x}$	$\frac{m\Omega}{bh}$ (A <sub>o</sub> )	$\frac{M}{bh^2t'_b}$ (B <sub>o</sub> )	$\frac{mM}{bh^2t_a}$
4	5	0,0250	0,0933	0,0233
3,75	4,75	0,0281	0,0979	0,0261
3,50	4,50	0,0318	0,1029	0,0234
3,25	4,25	8,0362	0,1084	0,0333
3	4	0,0417	0,1146	0,0382
2,80	3,80	0,0470	0,1200	0,0429
2,60	3,60	0,0534	0,1260	0,0485
2,40	3,40	0,0613	0,1326	0,0553
2,30	3,30	0,0659	0,1362	0,0592
2,20	3,20	0,0710	0,1400	0,0636
2,10	3,10	0,0768	0,1439	0,0685
2	3	0,0833	0,1481	0,0741
1,90	2,90	0,0907	0,1526	0,0803
1,80	2,80	0,0992	0,1573	0,0874
1,70	2,70	0,1089	0,1623	0,0955
1,60	2,60	0,1202	0,1676	0,1048
1,50	2,50	0,1333	0,1733	0,1155
1,40	2,40	0,1488	0,1794	0,1281
1,20	2,20	0,1894	0,1928	0,1607
1	2	0,250	0,2084	0,2084

**TABLEAU II.**

**Flexion plane des poutres rectangulaires et nervurées.  
Facteurs pour le calcul des armatures comprimées.**

$$\alpha = \frac{H}{h}$$

$$\mu = \frac{1 - (\alpha - 1) \left(1 + \frac{t_a}{mt'_b}\right)}{\frac{t_a}{mt'_b}} \quad (4); \quad \varphi = \left[1 - (\alpha - 1) \left(1 + \frac{t_a}{mt'_b}\right)\right] (2 - \alpha) \quad (7);$$

$$\omega = \left(1 + \frac{t_a}{mt'_b}\right) \left[1 - (\alpha - 1) \left(1 + \frac{t_a}{mt'_b}\right)\right] (2 - \alpha) = \left(1 + \frac{t_a}{mt'_b}\right) \varphi \quad (25).$$

$\frac{t_a}{mt'_b}$	$\mu$	$\varphi$	$\omega$
4,00	0,250 — 1,25 (x — 1)	1,00 + 5,00(x — 1) <sup>2</sup> — 6,00(x — 1)	5,00 + 25,00(x — 1) <sup>2</sup> — 50,00(x — 1)
3,75	0,267 — 1,267 (x — 1)	1,00 + 4,75(x — 1) <sup>2</sup> — 5,75(x — 1)	4,75 + 22,5 (x — 1) <sup>2</sup> — 27,51(x — 1)
3,50	0,283 — 1,283 (x — 1)	1,00 + 4,50(x — 1) <sup>2</sup> — 5,50(x — 1)	4,50 + 20,25(x — 1) <sup>2</sup> — 24,75(x — 1)
3,25	0,306 — 1,306 (x — 1)	1,00 + 4,25(x — 1) <sup>2</sup> — 5,25(x — 1)	4,25 + 18,00(x — 1) <sup>2</sup> — 22,51(x — 1)
3,00	0,333 — 1,333 (x — 1)	1,00 + 4,00(x — 1) <sup>2</sup> — 5,00(x — 1)	4,00 + 16,00(x — 1) <sup>2</sup> — 20,0 (x — 1)
2,80	0,357 — 1,357 (x — 1)	1,00 + 3,80(x — 1) <sup>2</sup> — 4,80(x — 1)	3,80 + 14,44(x — 1) <sup>2</sup> — 18,24(x — 1)
2,60	0,383 — 1,383 (x — 1)	1,00 + 3,60(x — 1) <sup>2</sup> — 4,60(x — 1)	3,60 + 12,96(x — 1) <sup>2</sup> — 16,56(x — 1)
2,40	0,417 — 1,417 (x — 1)	1,00 + 3,40(x — 1) <sup>2</sup> — 4,40(x — 1)	3,40 + 11,56(x — 1) <sup>2</sup> — 14,96(x — 1)
2,20	0,455 — 1,455 (x — 1)	1,00 + 3,20(x — 1) <sup>2</sup> — 4,20(x — 1)	3,20 + 10,24(x — 1) <sup>2</sup> — 14,19(x — 1)
2,00	0,476 — 1,476 (x — 1)	1,00 + 3,10(x — 1) <sup>2</sup> — 4,10(x — 1)	3,10 + 9,61(x — 1) <sup>2</sup> — 12,71(x — 1)
1,90	0,500 — 1,500 (x — 1)	1,00 + 3,00(x — 1) <sup>2</sup> — 4,00(x — 1)	3,00 + 9,00(x — 1) <sup>2</sup> — 12,00(x — 1)
1,80	0,526 — 1,526 (x — 1)	1,00 + 2,90(x — 1) <sup>2</sup> — 3,90(x — 1)	2,90 + 8,41(x — 1) <sup>2</sup> — 11,51(x — 1)
1,70	0,556 — 1,556 (x — 1)	1,00 + 2,80(x — 1) <sup>2</sup> — 3,80(x — 1)	2,80 + 7,84(x — 1) <sup>2</sup> — 11,04(x — 1)
1,60	0,588 — 1,588 (x — 1)	1,00 + 2,70(x — 1) <sup>2</sup> — 3,70(x — 1)	2,70 + 7,29(x — 1) <sup>2</sup> — 9,99(x — 1)
1,50	0,625 — 1,625 (x — 1)	1,00 + 2,60(x — 1) <sup>2</sup> — 3,60(x — 1)	2,60 + 6,76(x — 1) <sup>2</sup> — 9,56(x — 1)
1,40	0,667 — 1,667 (x — 1)	1,00 + 2,50(x — 1) <sup>2</sup> — 3,50(x — 1)	2,50 + 6,25(x — 1) <sup>2</sup> — 8,75(x — 1)
1,30	0,714 — 1,714 (x — 1)	1,00 + 2,40(x — 1) <sup>2</sup> — 3,40(x — 1)	2,40 + 5,71(x — 1) <sup>2</sup> — 8,16(x — 1)
1,20	0,855 — 1,855 (x — 1)	1,00 + 2,2 (x — 1) <sup>2</sup> — 3,20(x — 1)	2,20 + 4,81(x — 1) <sup>2</sup> — 7,04(x — 1)
1,00	1,000 — 2,00 (x — 1)	1,00 + 2,00(x — 1) <sup>2</sup> — 3,00(x — 1)	2,00 + 4,00(x — 1) <sup>2</sup> — 6,00(x — 1)

CHAPITRE II.

RECHERCHE DES TENSIONS DE TRACTION DU BÉTON.

12) *Section simplement armée. — Théorie générale.* — Nous examinerons les actions intérieures d'une pièce fléchie en béton armé par la méthode classique de la flexion des prismes élastiques homogènes. Nous désignerons respectivement par  $E_a$ ,  $E_b$  et  $E'_b$  les modules d'élasticité des armatures (indépendant du sens des tensions élastiques), du béton soumis à la traction et à la compression. Les rapports de ces modules seront désignés par :

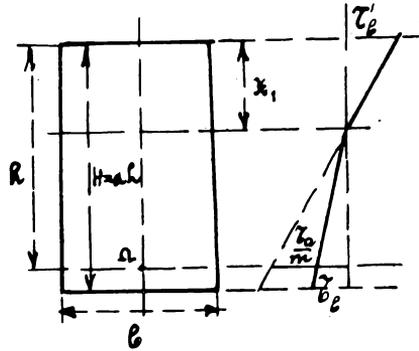


Fig. 2.

$$m = \frac{E_a}{E'_b} \quad n = \frac{E'_b}{E_b} \geq 1.$$

La proportionnalité des tensions s'exprime par :

$$\frac{H}{x_1} = 1 + n \frac{\tau_b}{\tau'_b} \quad \dots \quad (9)$$

$$\frac{\tau_a}{m\tau'_b} = \frac{h}{x_1} - 1 = \frac{1}{\alpha} - \frac{H}{x_1} - 1. \quad (\text{fig. 2})$$

L'équilibre de translation se traduit par :

$$\frac{bx_1}{2} \tau'_b = b \left( \frac{h - x_1}{2} \right) \tau_b + \Omega \tau_a$$

$$\frac{bH}{\Omega} \left[ \frac{x_1}{h} - \frac{\tau_b}{\tau'_b} - \frac{h - x_1}{h} - \frac{\tau_b}{2} \right] = \tau_a$$

$$\frac{bH}{\Omega} \left[ \frac{x_1}{h} - \frac{h - x_1}{h} - \frac{\tau_b}{\tau'_b} \right] = \frac{2\tau_a}{\tau'_b} = 2m \left( \frac{h}{x_1} - 1 \right)$$

$$\frac{bH}{m\Omega} = \frac{2 \left[ \left( 1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b} \right) \frac{1}{\alpha} - 1 \right]}{1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b} - \left[ 1 - \frac{1}{1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b}} \right] \frac{\tau_b}{\tau'_b}} = \frac{2 \left( 1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b} \right) \left[ \left( 1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b} \right) \frac{1}{\alpha} - 1 \right]}{1 - n \left( \frac{\tau_b}{\tau'_b} \right)^2}$$

$$\frac{bH}{m\Omega} = \frac{1}{\alpha} \frac{2 \left(1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b}\right)^2}{1 - n \left(\frac{\tau_b}{\tau'_b}\right)^2} - \frac{2 \left(1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b}\right)}{1 - n \left(\frac{\tau_b}{\tau'_b}\right)^2} \dots 10.$$

L'équilibre de rotation s'exprime par les équations

$$M = \frac{bx_1\tau'_b}{2} \frac{2x_1}{3} + b(H - x_1) \frac{\tau_b}{2} \cdot \frac{2}{3} (H - x_1) + \Omega\tau_a (h - x_1)$$

$$\begin{aligned} \frac{M}{bH^2\tau'_b} &= \frac{1}{3} \left(\frac{x_1}{H}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{H - x_1}{H}\right)^2 \frac{\tau_b}{\tau'_b} + \frac{\Omega}{bH} \frac{h - x_1}{H} \frac{\tau_a}{\tau'_b} \\ &= \frac{1}{3 \left(1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b}\right)^2} + \frac{1}{3} \frac{\tau_b}{\tau'_b} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b}}\right]^2 \\ &\quad + \frac{m\Omega}{bH} \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b}}\right] \left[\frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b}\right) - 1\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3 \left(1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b}\right)^2} + \frac{n^2 \left(\frac{\tau_b}{\tau'_b}\right)^3}{3 \left(1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b}\right)^2} \\ &\quad + \frac{\left[1 - n \left(\frac{\tau_b}{\tau'_b}\right)^2\right] \left[\frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b}\right) - 1\right]^2}{2 \left[\frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b}\right) - 1\right] \left[1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b}\right]^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{M}{bH^2\tau'_b} &= \frac{1}{\alpha} \frac{1 - n \left(\frac{\tau_b}{\tau'_b}\right)^2}{2 \left(1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b}\right)} \\ &\quad + \frac{1}{\left(1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b}\right)^2} \left[ \frac{1 + n^2 \left(\frac{\tau_b}{\tau'_b}\right)^3}{3} - \frac{1 - n \left(\frac{\tau_b}{\tau'_b}\right)^2}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{M}{nbH^2\tau_b} &= \frac{1}{\alpha} \frac{1 - n \left(\frac{\tau_b}{\tau'_b}\right)^2}{2 \frac{n\tau_b}{\tau'_b} \left(1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b}\right)} \\ &\quad + \frac{1}{\frac{n\tau_b}{\tau'_b} \left(1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b}\right)^2} \left[ \frac{1 + n^2 \left(\frac{\tau_b}{\tau'_b}\right)^3}{3} - \frac{1 - n \left(\frac{\tau_b}{\tau'_b}\right)^2}{2} \right] \quad (11). \end{aligned}$$

Remarquons que si  $n \left( \frac{\tau_b}{\tau'_b} \right)^2 = 1$ , c'est-à-dire si :

$\frac{\tau_b}{\tau'_b} = \sqrt{\frac{1}{n}}$ ,  $\frac{b\text{II}}{m\Omega} = \infty$ , c'est-à-dire que  $\Omega = 0$  et que la section résisterait sans le secours d'une armature. Dans ce cas :

$$\frac{\text{M}}{nb\text{II}^2\tau_b} = \frac{1 + n^2 \left( \frac{\tau_b}{\tau'_b} \right)^3}{5 \left( 1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b} \right)^2 n \frac{\tau_b}{\tau'_b}} .$$

13) *Composition du tableau III et usage.* — Le tableau III fournit les valeurs de  $\frac{\text{II}}{x_1}$ ,  $\frac{b\text{II}}{m\Omega}$  et  $\frac{\text{M}}{nb\text{II}^2\tau_b}$  pour différentes valeurs de  $\frac{\tau_b}{\tau'_b}$  et pour  $n = 1, 2$  et  $2,5$ . La valeur  $n = 1$  supposant l'égalité des modules d'élasticité, de compression et de traction du béton, correspond aux prescriptions administratives allemandes. La valeur  $n = 2,5$  répond aux règles officielles autrichiennes. Enfin, la valeur  $n = 2$  est celle qui, d'après les essais, paraît la plus exacte et est préconisée dans l'ouvrage de M. Probst pour la vérification des tensions de traction dans un état de sollicitation voisin de la fissuration de la zone étendue du béton.

Le tableau III permettrait un calcul d'établissement, mais cette méthode est peu recommandable, parce que les tensions de compression sont essentiellement différentes de celles généralement envisagées dans la méthode du chapitre I. Les taux de compression de sécurité appliqués pour ce procédé ne peuvent donc être employés pour le tableau III, mais devraient subir une réduction correspondante. La méthode de sécurité limite reste préférable.

On utilisera donc généralement les moyens fournis par le chapitre I pour les calculs d'établissement, tandis que le tableau III ne sera employé que pour vérifier si les dimensions, ainsi calculées satisfont aux conditions supplémentaires de limitation des tensions de traction du béton qui seraient imposées.

Cette dernière épreuve est prescrite par les règles allemandes, autrichiennes et suisses, pour tous les ouvrages dans lesquels la fissuration des zones étendues du béton expose les armatures de traction à une corrosion rapide (fumées de loco-

motives, gaz, acides, etc...) ou encore pour les pièces soumises à des vibrations importantes qui provoquent l'élargissement des fissures et diminuent ainsi la protection des armatures. Les limites de traction considérées dans ce calcul ne constituent donc pas des taux de travail admissibles, mais simplement des limites de sécurité à la fissuration. Une méthode de calcul étant fixée, l'observation des taux conventionnels prescrits par les règlements fournit une présomption suffisante que des fissures statiques ne se produiront pas dans les régions du béton soumises à l'extension. Le principal reproche que l'on peut faire au procédé, qui émane indubitablement d'excellentes intentions, est d'être vain, puisqu'enfin aucune garantie absolue n'est donnée qu'il ne se produira pas des fissures de retrait à la prise. Afin de les éviter autant que possible, le règlement allemand prescrit que le béton sera maintenu pendant les six premières semaines dans un état constant d'humidité et sera protégé du soleil. Il est incontestable que ces précautions constituent une sujétion dans les chantiers, d'autant plus que leur raison d'être échappe le plus souvent à la compréhension de ceux qui sont chargés de l'assurer; pratiquement, il existe donc peu de garanties de voir ces conditions optima réalisées.

Cependant, le point de vue est théoriquement intéressant et, d'ailleurs, sa consécration par les trois règlements précités lui donne incontestablement une signification pratique. C'est pourquoi, bien qu'il ne soit pas adopté ou répandu parmi les praticiens français et belges, il a paru utile de le reproduire dans cette note, et d'en faciliter l'application par des tableaux analogues à ceux qui ont été dressés pour la méthode normale.

#### APPLICATIONS.

14) *Calcul des tensions.* — a) Soient  $b = 40$  cm.,  $H = 36$ ,  $h = 33$ ,  $\alpha = \frac{H}{h} = \frac{36}{33} = \frac{36}{55}$ ,  $\Omega = 7,96$  cm<sup>2</sup> (6 barres de 13 m/m)  
 $M = 194,000$  kg. cm.,  $m = 15$ ,  $\frac{bH}{m\Omega} = 12,10$ . Choisissons  
 $n = 1$ .

$$\text{Pour } \frac{\tau_b}{\tau'_b} = 0,9 \quad \frac{bH}{m\Omega} = 14,8.$$

$$\text{Pour } \frac{\tau_b}{\tau'_b} = 0,83 \quad \frac{bH}{m\Omega} = 9,5.$$

Donc pour  $\frac{bH}{m\Omega} = 12,10$ ,  $\frac{\tau_b}{\tau'_b} = 0,85 + 0,05 \times \frac{2,8}{5,5} = 0,875$ ,

$$\frac{H}{x_1} = 1,875 \quad x_1 = \frac{56}{1,875} = 19,2 \text{ cm.},$$

$$\frac{M}{nbH^2\tau_b} = 0,0718 \times \left(\frac{1}{\alpha}\right) + 0,1425 = 0,2085.$$

$$\tau_b = \frac{194.000}{40 \times 56^2 \times 0,2085} = 17,95 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\tau'_b = \frac{17,95}{0,875} = 20,50 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\tau_a = 15 \times 20,50 \left[ \frac{35}{36} \cdot 1,875 - 1 \right] = 222 \text{ kg/cm}^2.$$

Ces résultats correspondraient aux prescriptions allemandes.

b) Appliquons ensuite la méthode autrichienne, en posant  $n = 2,5$ .

Pour  $\frac{\tau_b}{\tau'_b} = 0,40$   $\frac{bH}{m\Omega} = 5,56$ ,

$$\frac{\tau_b}{\tau'_b} = 0,50 \quad \frac{bH}{m\Omega} = 12,75.$$

Donc  $\frac{bH}{m\Omega} = 12,10$  pour  $\frac{\tau_b}{\tau'_b} = 0,491$ ,

$$\frac{H}{x_1} = 2,25 \quad x_1 = \frac{56}{2,25} = 16,10 \text{ cm.}$$

$$\frac{M}{nbH^2\tau_b} = 0,0745 \times \left(\frac{1}{\alpha}\right) + 0,0622 = 0,1504$$

$$\tau_b = \frac{194.000}{2,5 \times 40 \times 56^2 \times 0,1504} = 11,4 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\tau'_b = \frac{11,4}{0,491} = 23,2 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\tau_a = 15 \times 23,2 \left[ \frac{55}{36} \times 2,25 - 1 \right] = 566 \text{ kg/cm}^2.$$

c) L'hypothèse  $n = 2$  donnerait les résultats suivants :

Pour  $\frac{\tau_b}{\tau'_b} = 0,55$   $\frac{bH}{m\Omega} = 9,85$

$$\frac{\tau_b}{\tau'_b} = 0,60 \quad \frac{bH}{m\Omega} = 16,00.$$

Donc  $\frac{bH}{m\Omega} = 12,10$  pour  $\frac{\tau_b}{\tau'_b} = 0,583$

$\frac{H}{x_1} = 2,166$        $x_1 = \frac{36}{2,166} = 16,6 \text{ cm.}$

$\frac{M}{nb H^2 \tau_b} = 0,0736 \times \left(\frac{1}{\alpha}\right) + 0,0770 = 0,1445$

$\tau_b = \frac{194.000}{2 \times 40 \times 36^2 \times 0,1445} = 12,93 \text{ kg/cm}^2$

$\tau'_b = \frac{12,93}{0,583} = 22,2 \text{ kg/cm}^2$

$\tau_a = 15 \times 22,2 \left[ \frac{33}{36} \times 2,166 - 1 \right] = 330 \text{ kg/cm}^2.$

d) Le calcul d'après la théorie ordinaire, sans tenir compte des tensions de traction, fournit les résultats suivants :

$\frac{bh}{m\Omega} = 11,05, \frac{m\Omega}{bh} = 0,0905, \text{ d'où } \frac{t_a}{mt'_b} = 1,90$

$\frac{h}{x} = 2,90$       d'où  $x = \frac{33}{2,90} = 11,4 \text{ cm.}$

$\frac{M}{bh^2 t'_b} = 0,1526$        $t'_b = \frac{194\ 000}{0,40 \times 33^2 \times 0,1526} = 29,2 \text{ kg/cm}^2$

$t_a = 15 \times 1,90 \times 29,2 = 833 \text{ kg/cm}^2.$

Pour faciliter la comparaison, les résultats ont été rassemblés dans le tableau ci-dessous :

$n =$	1	2	2,5	$\infty$
$x_1 =$	19,2	16,6	16,10	$x = 11,4 \text{ cm}$
$\tau_a =$	222	330	366	$t_a = 833 \text{ kg/cm}^2.$
$\tau'_b =$	20,50	22,2	23,2	$t'_b = 29,2 \text{ kg/cm}^2.$
$\tau_b =$	17,95	12,93	11,4	$\text{kg/cm}^2.$

Les tensions de traction du béton calculées ci-dessus sont inférieures à toutes les limites de fissuration prescrites par les règlements allemands et suisses ( $n = 1, \tau_b = 24,25$  ou  $30 \text{ kg/cm}^2$ ) et autrichiens ( $n = 2,5, \tau_b = 25$  à  $19,5 \text{ kg/cm}^2$ ).

15) *Calcul des dimensions en vue de la résistance à la fissuration.* — La marche à suivre est absolument la même que celle qui a été exposée pour la méthode du Chapitre I, dans

les applications des §§ 8 et 10. Dans un but démonstratif, nous traiterons les mêmes exemples :

$$b = 100 \text{ cm.} \quad m = 15 \quad M' = 95.500 \text{ kg/cm.} \quad n = 1 \quad \alpha = 1,10$$

$$\tau'_s = 50 \text{ kg/cm}^2 \quad \tau_b = 24 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{\tau_b}{\tau'_b} = 0,8 \quad \frac{M}{nbH^2\tau_b} = 0,125 \times \frac{1}{1,10} + 0,125 = 0,2385$$

$$95.500 + \frac{11 \times 24}{8} \times \overline{2,16^2} \times 100 = 100 \times H^2 \times 24 \times 0,2385$$

$$H^2 - 2,44 H - 165,5 = 0, \quad H = 14,06$$

$$h = \frac{14,06}{1,1} = 12,75 \text{ cm.}$$

$$\frac{611}{m\Omega} = 18 \times \frac{1}{1,1} - 10 = 16,35 - 10 = 6,35$$

$$\Omega = \frac{1406}{15 \times 6,35} = 14,8 \text{ cm}^2 \quad \tau_a = 15 \times 30 \times \left[ \frac{1,8}{1,1} - 1 \right] = 286 \text{ kg/cm}^2.$$

Par rapport à la dalle calculée au Chapitre I et pour une tension de sécurité à la compression plus réduite (30 au lieu de 35), nous constatons donc une réduction de hauteur et un accroissement considérable d'armature. Si nous recherchons maintenant la tension  $t'_b$  par la méthode du Chapitre I, nous trouvons :

$$\frac{bh}{m\Omega} = \frac{1275}{15 \times 14,8} = 5,75, \quad \frac{m\Omega}{bh} = 0,174, \text{ d'où } \frac{t_a}{mt'_b} = 1,275$$

$$\frac{M}{bh^2t'_b} = 0,1878 \quad t'_b = \frac{115.100}{100 \times \overline{12,75^2} \times 0,1878} = 57,10 \text{ kg/cm}^2.$$

Malgré les précautions prises, la tension limite de la méthode du Chapitre I, qui constitue dans l'état actuel de la question la limite pratique de sécurité, est donc dépassée.

La fatigue du métal serait  $t_a = 15 \times 1,275 \times 37,1 = 710 \text{ kg/cm}^2$ . La méthode par limitation de traction ne représente donc aucun avantage économique.

16) Nous appliquerons au second exemple les prescriptions autrichiennes

$$H = 36 \text{ cm.}, \quad h = 33 \text{ cm.}, \quad M = 120.000 \text{ kg. cm.} \quad m = 15 \quad n = 2,5$$

$$\tau'_b = 50 \text{ kg/cm}^2 \quad \tau_b = 18 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\frac{\tau_b}{\tau'_b} = 0,6 \quad \frac{M}{nb11^2\tau_b} = 0,0155 \times \frac{33}{36} + 0,0782 = 0,0904$$

$$120.000 + \frac{b \times 36 \times 0,24}{8} \times 4^2 \times 100 = b \times 36^2 \times 18 \times 0,0904 \times 2,5$$

$$b = \frac{120000}{5250 - 1750} = \frac{120000}{3500} = 34,2 \text{ cm.}$$

$$\frac{bH}{m\Omega} = 125 \times \frac{33}{36} - 50 = 64,5$$

$$\Omega = \frac{34,2 \times 36}{15 \times 64,5} = \frac{1230}{967,5} = 1,27 \text{ cm}^2$$

$$\tau = 15 \times 30 \left[ 2,5 \times \frac{33}{36} - 1 \right] = 583 \text{ kg|cm}^2.$$

Même résultat de réduction des dimensions, réduction excessive de l'armature, accompagnée d'une sollicitation apparente déjà assez élevée de celle-ci. Il est presque superflu de faire la preuve que les tensions de sécurité de la méthode du chapitre I, sont énormément dépassées; elles sortent des limites, cependant largement conçues du tableau I. En effet,

$$\frac{bh}{m\Omega} = \frac{33 \times 34,2}{15 \times 1,27} = 59 > 40$$

Donc  $\frac{t_a}{mt'_b} > 4$  et  $\frac{M}{bh^2 t'_b} < 0,0939$

Donc  $t'_b > \frac{180000}{34,2 \times 36^2 \times 0,0939}$  ou  $> \frac{180000}{351}$   
 $t'_b \gtrsim 51,3 \text{ kg|cm}^2$

et a fortiori  $t_a > 51,3 \times 4 \times 15$  ou  $3080 \text{ kg|cm}^2$ .

Ces limites inférieures sont déjà exagérées, mais sont certainement encore beaucoup dépassées. Il en résulte que l'emploi de la méthode du chapitre II peut conduire à des résultats absurdes. Dans l'exemple ci-dessus, ils sont mis en évidence

parce que la limite du rapport  $\frac{\tau_b}{\tau'_b}$  pour laquelle  $\frac{bH}{m\Omega} = \infty$

c'est-à-dire pour laquelle théoriquement le béton résisterait sans armature, est presque atteinte. Or, il est certain que le principe de la méthode est de ceux qui ne peuvent être étendus aux limites. Mais si l'exagération du défaut doit dans cet exemple faire rejeter aussitôt le résultat, dans des conditions moins voisines de la limite, l'erreur peut n'être plus aussi apparente et la méthode devient alors dangereuse.

17) *Vérification rapide de la sécurité à la fissuration.* — Les essais concordant avec la théorie montrent que les armatures n'interviennent que pour une faible part dans la résistance tant que les pièces essayées sont dans un état élastique. Elles jouent au contraire un rôle prépondérant dès que la sollicitation a atteint une valeur telle que la résistance à la traction du béton est dépassée et que celui-ci est fissuré, disloqué. Il est donc préférable, pour la sécurité, de calculer les dimensions des armatures par les méthodes du chapitre I, qui correspond théoriquement au stade de fissuration du béton.

Le calcul des dimensions par la méthode du chapitre II n'est pas recommandable ; il n'est d'ailleurs pas usuel et ne paraît pas devoir se répandre davantage. L'intérêt de la méthode se réduit à la présomption de certaines garanties contre la fissuration dont l'observation est prescrite par plusieurs règlements administratifs importants. La forme ordinaire du problème est ainsi celle de la vérification des conditions de résistance dont la solution suffisamment expliquée par le paragraphe 14 des présentes applications ne présente aucune difficulté.

Le calcul moins fréquent de la sollicitation maximum admissible est analogue et tout aussi aisé.

L'on remarquera que cette vérification double cependant l'importance des calculs, lorsque l'on établit d'abord les dimensions par les méthodes du chapitre I en observant certains taux de travail limites  $t_a$  et  $t'_b$ . Une simplification importante peut être réalisée grâce à la remarque suivante : si l'on désigne par  $t_a$  et  $t'_b$  les tensions calculées par les méthodes du chapitre I, par  $\tau_a$ ,  $\tau_b$  et  $\tau'_b$  celles calculées par les méthodes du chapitre II pour la même sollicitation d'une pièce, il existe entre toutes ces tensions une relation qui ne dépend que des dimensions de la section. Si cette relation est connue, à des taux de travail limite  $t_a$  et  $t'_b$  correspond une tension  $\tau_b$  déterminée. Si cette tension  $\tau_b$  doit rester inférieure à un maximum fixé, il faudra choisir en conséquence la combinaison  $t_a$ ,  $t'_b$ . La vérification à posteriori de la tension  $\tau_b$  est ainsi évitée.

Sur ce principe, M. Moersch a établi pour la Commission allemande du béton armé une formule et un tableau dressé pour les valeurs  $\alpha = \frac{1}{0,9}$  et  $n = 1$ . Par la même voie analytique que M. Moersch, mais sous une forme absolument générale et en utilisant les expressions relatives employées partout dans

la présente note, nous établirons ci-après les formules en question.

Il suffit d'égaliser les expressions du moment résistant correspondant aux hypothèses respectives des chapitres I et II. Nous conservons les notations distinctes adoptées précédemment.

$$\Omega t_a \left( h - \frac{x}{3} \right) = b (\Pi - x_1) \frac{\tau_b}{2} \times \frac{2}{3} \Pi + \Omega \left( h - \frac{x_1}{3} \right) \tau_a$$

$$\frac{\tau_a}{m\tau_b} = n \frac{h - x_1}{\Pi - x_1}$$

$$\Omega t_a \left( h - \frac{x}{3} \right) = b (\Pi - x_1) \frac{\Pi \tau_b}{3} + \Omega \left( h - \frac{x_1}{3} \right) mn \frac{h - x_1}{\Pi - x_1} \tau_b$$

$$\frac{m\Omega}{bh} \frac{t_a}{m\tau_b} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{x}{h} \right) = \left( \alpha - \frac{x_1}{h} \right) \frac{\alpha}{3}$$

$$+ \frac{m\Omega}{bh} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{x_1}{h} \right) n \frac{1 - \frac{x_1}{h}}{\alpha - \frac{x_1}{h}}$$

$$\frac{t_a}{m\tau_b} = \frac{\alpha \left( \alpha - \frac{x_1}{h} \right)^2 + \frac{m\Omega}{bh} \left( 3 - \frac{x_1}{h} \right) n \left( 1 - \frac{x_1}{h} \right)}{\frac{m\Omega}{bh} \left( 3 - \frac{x}{h} \right) \left( \alpha - \frac{x_1}{h} \right)}$$

$$\frac{t_a}{m\tau_b} = \frac{\frac{h}{x}}{3 \frac{h}{x} - 1} \left[ \frac{bh}{m\Omega} \alpha \left( \alpha - \frac{x_1}{h} \right) + n \frac{\left( 1 - \frac{x_1}{h} \right) \left( \alpha - \frac{x_1}{h} \right)}{\left( \alpha - \frac{x_1}{h} \right)} \right]$$

$$\text{Or, } \frac{h}{x} = 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \text{ et } \frac{m\Omega}{bh} = \frac{1}{2 \frac{t_a}{mt'_b} \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right)},$$

le tableau I en donne les valeurs en fonction de  $\frac{t_a}{mt'_b}$ .

$\frac{x_1}{h}$  se détermine par la relation des moments statiques des aires

$$\frac{bx_1^2}{2} = \frac{b(\Pi - x_1)^2}{2\alpha} + m\Omega(h - x_1)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{h}\right)^2 &= \frac{1}{n} \left(\alpha - \frac{x_1}{h}\right)^2 + \frac{2m\Omega}{bh} \left(1 - \frac{x_1}{h}\right) \\ \left(\frac{x_1}{h}\right)^2 (n-1) + 2 \frac{x_1}{h} \left[\frac{nm\Omega}{bh} + \alpha\right] - \left[\alpha^2 + 2n \frac{m\Omega}{bh}\right] \\ (n-1) \frac{bh}{m\Omega} \left(\frac{x_1}{h}\right)^2 + 2 \left[n + \alpha \frac{bh}{m\Omega}\right] \frac{x_1}{h} - \left[2n + \alpha^2 \frac{bh}{m\Omega}\right] &= 0 \quad (15) \\ \frac{x_1}{h} &= \frac{-\left[n + \alpha \frac{bh}{m\Omega}\right] + \sqrt{\left(n + \alpha \frac{bh}{m\Omega}\right)^2 + (n-1) \frac{bh}{m\Omega} \left(2n + \alpha^2 \frac{bh}{m\Omega}\right)}}{(n-1) \frac{bh}{m\Omega}} \\ \frac{x_1}{h} &= \frac{-\left[n + \alpha \frac{bh}{m\Omega}\right] + \sqrt{n} \sqrt{\left(1 + \alpha \frac{bh}{m\Omega}\right)^2 + (n-1) \left(1 + 2 \frac{bh}{m\Omega}\right)}}{(n-1) \frac{bh}{m\Omega}} \quad (14) \end{aligned}$$

La formule (14) permet de calculer  $\left(\frac{x_1}{h}\right)$  en fonction de  $\frac{t_a}{m't_b}$ . En reportant ensuite cette valeur dans l'expression (12), il est possible de calculer  $\frac{t_a}{m\tau_b}$  en fonction de  $\frac{t_a}{m't_b}$ .

Si  $n = 1$ , l'équation (13) devient du premier degré et s'écrit :

$$\begin{aligned} 2 \left[1 + \alpha \frac{bh}{m\Omega}\right] \frac{x_1}{h} &= 2 + \alpha^2 \frac{bh}{m\Omega} \\ \frac{x_1}{h} &= \frac{1 + \frac{\alpha^2}{2} \frac{bh}{m\Omega}}{1 + \alpha \frac{bh}{m\Omega}} \quad \dots \quad (15) \end{aligned}$$

L'emploi direct de ces formules est assez simple, puisque le tableau I fournit les valeurs de  $\frac{h}{x}$  et  $\frac{m\Omega}{bh}$  pour différentes valeurs de  $\frac{t_a}{m't_b}$ . Il est également possible de calculer les rapports  $\frac{t_a}{m\tau_b}$  par la combinaison des tableaux I et III.

A une valeur donnée de  $\frac{t_a}{mt'_b}$  correspond une valeur de  $\frac{m\Omega}{bh}$  (tableau I) et de  $\frac{mM}{bh^2t_a}$  (tableau I).

A la valeur de  $\frac{bh}{m\Omega} = \frac{1}{\frac{m\Omega}{bh}}$  correspond dans le tableau III une certaine valeur de  $\frac{M}{nbM^2\tau_b}$ . On en déduit aisément la valeur du rapport  $\frac{t_a}{m\tau_b}$ .

Le tableau IV établi par l'emploi des formules ci-dessus, donne les valeurs de  $\frac{t_a}{m\tau_b}$  pour  $n = 1\frac{2}{3}, 2$  et  $2,5$ ;  $\alpha = 1,10$  et  $1,05$  et diverses valeurs les plus usuelles de  $\frac{t_a}{mt'_b}$ . Il permet la vérification immédiate, même avant détermination des dimensions, de la sécurité à la fissuration du béton.

C'est ainsi que pour  $\alpha = 1,10$  et les couples de taux de travail fixés par le règlement allemand ( $n=1$ ), on trouve pour la tension de traction du béton les valeurs ci-contre :

$$\begin{array}{cccccc} (t_a - t'_b) = & (1200-40) & (1000-40) & (1000-35) & (935-35) & (750-50) \\ \tau_b = & 24,22 & 27,85 & \underline{21,50} & \underline{25,30} & \underline{20,90} \end{array}$$

dont les trois dernières soulignées satisfont à la condition allemande de sécurité à la fissuration, que réalise presque la première.

Pour certains couples de taux de travail extraits du règlement autrichien ( $n = 2,5$ ), l'on trouve :

$$\begin{array}{cccc} (t_a - t'_b) = & 1200 - 42 & 1200 - 37 & 1000 - 37 & 1000 - 32 \\ \tau_b = & 16,75 & 14,7 & 14,80 & 12,75 \end{array}$$

La condition de sécurité à la fissuration, telle qu'elle est fixée par le règlement en question, est satisfaite dans les quatre cas.

Le tableau IV indique que  $t_a/m\tau_b$  croît plus vite que  $t_a/mt'_b$ . Donc, si l'on conserve une valeur constante à  $t_a$  et diminue celle de  $t'_b$ ,  $\tau_b$  diminue en même temps et dans une plus grande proportion. En vue de réduire les fatigues d'extension du béton, il est favorable de réduire les fatigues de compression du béton, donc de recourir aux sections de grande hauteur relative à faible pourcentage d'armature.

18) *Cas de la double armature.* — Ainsi qu'il a été remarqué précédemment, la seconde armature n'est justifiée que lorsque l'observation simultanée des dimensions et des tensions limites ne permet pas d'assurer au moyen d'une seule armature la résistance voulue. La meilleure solution en général consisterait à établir une armature dans la zone comprimée en la proportionnant à l'armature principale de manière à serrer, d'aussi près que possible, les tensions limites admissibles.

Quelle est, dans ce cas, l'influence de la seconde armature sur la fatigue de traction du béton ?

Des développements analytiques, identiques à ceux qui précèdent, fournissent les formules :

$$\frac{t_u}{n \tau_b} = \frac{\frac{h}{x} \alpha \left( \alpha - \frac{x_1}{h} \right)}{\frac{m\Omega}{bh} \left\{ \left( 3 \frac{h}{x} - 1 \right) + \frac{C m t'_b}{t_u} \left[ 1 - 3 \left( \alpha - 1 \right) \frac{h}{x} \right] \left[ 1 - (\alpha - 1) \frac{h}{x} \right] \right\} + \frac{h}{x} \left( 3 - \frac{x_1}{h} \right) \left( 1 - \frac{x_1}{h} \right) + C \left[ \frac{x_1}{h} - (\alpha - 1) \right] \left[ \frac{x_1}{h} - 3 (\alpha - 1) \right]}{\left( \alpha - \frac{x_1}{h} \right) \left\{ \left( 3 \frac{h}{x} - 1 \right) + C \frac{m t'_b}{t_u} \left[ 1 - 3 (\alpha - 1) \frac{h}{x} \right] \left[ 1 - (\alpha - 1) \frac{h}{x} \right] \right\}} \quad (16)$$

$$\frac{x_1}{h} = \frac{- \left[ n (1 + C) + \alpha \frac{bh}{m\Omega} \right] + \sqrt{n} \sqrt{\left[ 1 + C + \alpha \frac{bh}{m\Omega} \right]^2 + (n-1) \left\{ (1 + C)^2 + \frac{2bh}{m\Omega} \left[ 1 + C (\alpha - 1) \right] \right\}}}{(n-1) \frac{bh}{m\Omega}} \quad (17)$$

pour une valeur de  $n$  quelconque, différente de 1 et

$$\frac{x_1}{h} = \frac{1 + C (\alpha - 1) + \frac{\alpha^2}{2} \frac{bh}{m\Omega}}{1 + C + \alpha \frac{bh}{m\Omega}}$$

pour  $n = 1$ .

La comparaison avec les formules précédentes permettrait de déceler que la fatigue de traction, pour des valeurs con-

stantes de  $t_a$  et  $t_b$ , croît avec le pourcentage d'armature comprimée (1), résultat conforme à la conclusion du paragraphe précédent.

La théorie du calcul des tensions de traction du béton dans une pièce doublement armée est courante, mais il n'existe pas, à la connaissance de l'auteur, de tableaux basés sur les formules. La complication résultant de l'introduction d'une inconnue supplémentaire  $C = \frac{\omega}{\Omega}$  rend l'établissement de tableaux analogues au tableau III très difficile et fastidieux. L'intérêt pratique de la question ne justifierait pas une telle entreprise.

(1) Cette constatation exige d'ailleurs à peine une démonstration. On peut s'en assurer qualitativement par le raisonnement approximatif suivant :

D'après la théorie du chapitre I (fig. 3a)

$$M = Fz \text{ et } F = \Omega t_a = \frac{bxt'_b}{2} + km\omega t'_b, \quad k < 1.$$

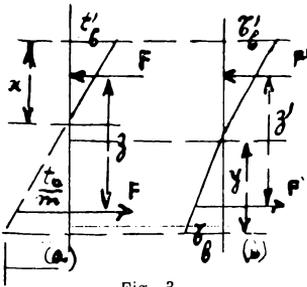


Fig. 3.

Comme  $t_a$  et  $t_b$  sont supposés constants,  $x$  est constant et  $z$  l'est très sensiblement, suffisamment pour que nous en admettions l'hypothèse. Donc, lorsque  $\omega$  croît,  $\Omega$  doit augmenter également.

D'après la théorie du chapitre II (fig. 3b),  $M = F'z'$ , nous admettrons également que  $z'$  soit constant, ce qui est une approximation, du même

ordre que la précédente. En tous cas,  $z$  et  $z'$  croissant dans le même sens,

$$M = \left[ \frac{by}{2} \tau_b + \Omega k' \tau_b mn \right] z' = \left[ \frac{bxt'_b}{2} + km\omega t'_b \right] z = \Omega t_a z,$$

$$\text{d'où } \frac{t'_b}{\tau_b} = \frac{\left( \frac{by}{2} + k'nm\Omega \right) z'}{(bx/2 + km\omega)z} \quad \text{et} \quad \frac{t_a}{m\tau_b} = \frac{z'}{z} \left[ \frac{by}{2m\Omega} + k'n \right]$$

$x$  étant constant, de même que sensiblement le rapport  $\frac{z'}{z}$  et la valeur de  $y$ , les deux dernières expressions montrent que quand  $\omega$  croît, ce qui entraîne une augmentation relative de  $\Omega$ ,  $\tau_b$  croît.

La double armature ne doit être considérée que comme une solution exceptionnelle, lorsque les dimensions dans lesquelles on est obligé de se cantonner sont insuffisantes pour assurer la résistance en observant les conditions de sécurité limite ordinaires. La condition de sécurité à la fissuration ne pourrait le plus souvent constituer qu'une aggravation des circonstances déjà difficiles et rendre ainsi le problème insoluble.

Il n'est évidemment guère plus pratique que pour les pièces à armature simple, de calculer les dimensions de la pièce en s'inspirant de la condition de sécurité à la fissuration. La vérification de cette sécurité pour une pièce dimensionnée d'après d'autres principes peut s'effectuer dans les cas isolés qui se présenteraient, soit par les formules précédentes, soit par application de la théorie ordinaire de la flexion plane simple des pièces prismatiques droites homogènes, ce qui suppose donc que l'on admette  $n = 1$ .

Pour hâter ces calculs, le tableau VIII donnant les valeurs relatives des moments et modules d'inertie pour divers pourcentages et répartitions d'armatures peut être très précieux.

On calculera :

$$\tau_b = \frac{\frac{M}{bH^2}}{\frac{I}{v}} = \frac{M}{bH^2} \frac{v}{I}$$

#### APPLICATION.

$$h = 55, \quad H = 56, \quad b = 20, \quad M = 120000 \text{ kgcm}, \quad \Omega = 4,52$$

(4 barres de 10  $m/m$ )  $\omega = 1,51$  (3 barres de 8  $m/m$ ), donc  $\alpha = 1,09$

$$\text{et } C = 0,55. \quad \frac{m\Omega}{bH} = \frac{15 \times 4,52}{20 \times 56} = 0,094.$$

L'on trouve par le tableau VIII (voir chap. VII)

$$\frac{I/v}{bH^2} = 0,222$$

$$\text{Comme } \frac{M}{bH^2} = \frac{120\,000}{20 \times 56^2} = 4,63.$$

$$\tau_b = \frac{4,63}{0,222} = 20,9 \text{ kg/cm}^2.$$

TABLEAU III. Flexion plane simple des pièces à sections rectangulaires.  
Calcul des tensions de traction du béton.

$$\frac{H}{x_1} = 1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b}; \quad \frac{bH}{m\Delta} = \frac{1}{\alpha} \frac{2 \left(1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b}\right)^2}{1 - n \left(\frac{\tau_b}{\tau'_b}\right)^2};$$

$$\frac{M}{nbH^2\tau_b} = \frac{1}{\alpha} \frac{1 - n \left(\frac{\tau_b}{\tau'_b}\right)^2}{2 \frac{n\tau_b}{\tau'_b} \left(1 + \frac{n\tau_b}{\tau'_b}\right)} + \frac{1}{\alpha} \frac{\left[1 + n^2 \left(\frac{\tau_b}{\tau'_b}\right)^3\right] \left[1 - n \left(\frac{\tau_b}{\tau'_b}\right)^2\right]}{5}; \quad \alpha = \frac{H}{h}.$$

$\frac{\tau_b}{\tau'_b}$	$n = 1$		$n = 2$		$n = 2,5$	
	$\frac{H}{x_1}$	$\frac{bH}{m\Delta}$	$\frac{H}{x_1}$	$\frac{bH}{m\Delta}$	$\frac{H}{x_1}$	$\frac{bH}{m\Delta}$
0,50	1,80	9,55 × (1/α)	1,75	7,90 × (1/α)	1,75	7,90 × (1/α)
0,40	2,00	16,00 × (1/α)	2,00	11,55 × (1/α)	2,00	11,55 × (1/α)
0,30	2,10	25,35 × (1/α)	2,25	27,00 × (1/α)	2,25	27,00 × (1/α)
0,25	2,20	34,57 × (1/α)	2,35	46,28 × (1/α)	2,35	46,28 × (1/α)
0,20	2,25	46,28 × (1/α)	2,50	68,96 × (1/α)	2,50	125,00 × (1/α)
0,15	2,50	68,96 × (1/α)	2,50	68,96 × (1/α)	2,50	125,00 × (1/α)
0,65	1,65	9,45 × (1/α) - 5,71	1,65	9,45 × (1/α) - 5,71	1,65	9,45 × (1/α) - 5,71
0,70	1,70	11,55 × (1/α) - 6,67	1,70	11,55 × (1/α) - 6,67	1,70	11,55 × (1/α) - 6,67
0,80	1,80	18,00 × (1/α) - 10,00	1,80	18,00 × (1/α) - 10,00	1,80	18,00 × (1/α) - 10,00
0,85	1,85	24,67 × (1/α) - 15,55	1,85	24,67 × (1/α) - 15,55	1,85	24,67 × (1/α) - 15,55
0,90	1,90	35,00 × (1/α) - 20,00	1,90	35,00 × (1/α) - 20,00	1,90	35,00 × (1/α) - 20,00
0,92	1,92	48,00 × (1/α) - 25,00	1,92	48,00 × (1/α) - 25,00	1,92	48,00 × (1/α) - 25,00
0,94	1,94	64,67 × (1/α) - 35,55	1,94	64,67 × (1/α) - 35,55	1,94	64,67 × (1/α) - 35,55

**TABLEAU IV. — Flexion plane simple des poutres rectangulaires.**  
 Vérification rapide de la sécurité à la fissuration du béton.

$\frac{t_a}{m t'_b}$	$n = 1$				$n = 2,5$			
	$\alpha = 1,10$		$\alpha = 1,05$		$\alpha = 1,10$		$\alpha = 1,05$	
	$\frac{x_1}{h}$	$\frac{t_a}{m \tau_b}$						
2,60	0,5744	4,725	0,5479	4,437	0,4661	6,755	0,4501	6,479
2,40	0,5739	4,217	0,5512	3,973	0,4733	6,119	0,4551	5,920
2,20	0,5773	3,741	0,5553	3,538	0,4783	5,551	0,4626	5,389
2,00	0,5817	3,298	0,5600	3,137	0,4866	5,008	0,4711	4,907
1,80	0,5874	2,887	0,5658	2,776	0,4961	4,511	0,4821	4,447
1,60	0,5943	2,144	0,5739	2,420	0,5086	4,003	0,4917	4,048

## DEUXIÈME SECTION

### Flexion plane simple des poutres à nervures

(section T)

simplement ou doublement armées.

### CHAPITRE III.

LA RÉSISTANCE A L'EXTENSION DU BÉTON EST NÉGLIGÉE.

19) *Remarques générales.* — La complication de la section de la poutre en T, en comparaison du rectangle rend malaisée la constitution de tableaux généraux. Dans le calcul des dimensions de la section rectangulaire n'interviennent que trois facteurs, dont deux inconnues. Pour la section T, il faut envisager cinq facteurs. Sans doute trois de ceux-ci sont-ils en général déterminés à l'avance ou fixés par d'autres conditions que celles de la résistance de la poutre ; ces facteurs sont  $B$ ,  $b$  et  $d$  (voir fig. 4). Mais la difficulté pour l'établissement des tableaux est de tenir compte de l'infinité des rapports différents de ces grandeurs. Il y a en somme, par rapport au cas du rectangle, deux éléments supplémentaires,  $d$  et  $b$ , désignant respectivement l'épaisseur de la dalle et la largeur de la nervure. Il n'est pas possible d'écarter  $d$  qui joue un rôle essentiel. Force est de tenir compte des valeurs relatives possibles de ce facteur par rapport aux autres dimensions. Quant à  $b$ , on peut le faire disparaître des calculs si l'on néglige les tensions de compression du béton dans l'étendue de la nervure, pour ne tenir compte que des compressions dans la dalle.

Cette hypothèse est d'ailleurs couramment admise pour la simplification des calculs. Nous pourrions vérifier que, dans la majorité des cas pratiques, elle est justifiée et que, dans les calculs d'établissement, elle est même plutôt favorable.

Cependant pour certaines poutres à nervures de grande hauteur relative, comme il peut s'en présenter dans les ponts et parois de soutènement, les divergences par rapport à la théorie exacte peuvent être sensibles. Il est intéressant alors de tenir compte des tensions de compression dans la nervure et le facteur  $b$  reparaît. Or, le résultat a été obtenu de trouver

des facteurs de correction très simples, applicables à la théorie approximative, de manière que l'établissement de tableaux supplémentaires a pu être évité.

Ces coefficients de correction confirment que l'erreur est en général négligeable; leur connaissance a cependant l'utilité de permettre l'estimation du degré de cette erreur dans tous les cas.

Enfin, le problème de la double armature a pu être traité également, comme dans la première partie, par le moyen des facteurs de correction. Il a été ainsi possible de condenser, tout en facilitant les calculs, la théorie générale des poutres en T, simplement et doublement armées.

20) *Théorie approximative, les tensions de compression dans la nervure étant négligées.* — Épuisons d'abord définitivement le cas où l'axe neutre théorique est situé dans la hauteur de la dalle. La théorie de la section rectangulaire est alors applicable et les calculs se font par application des tableaux de la première partie.

La condition analytique est  $x \leq d$  ou  $\frac{x}{d} \leq 1$ , l'égalité constituant le cas limite.

Nous n'envisagerons plus dans la suite que les cas où l'axe neutre est situé dans la hauteur de la nervure, c'est-à-dire où  $\frac{x}{d} > 1$ .

Entre le bord inférieur de la dalle et l'axe neutre existe une petite zone de la nervure soumise à compression. Peu importante en général par rapport à l'étendue de la dalle, nous la négligerons dans les calculs. Les formules s'établissent comme suit, comme dans le chapitre I.

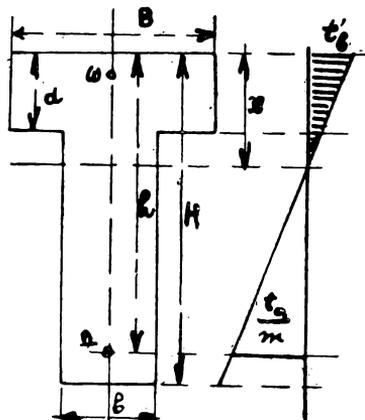


Fig. 4.

$$\frac{t_a}{mt'_b} = \frac{h-x}{x}; \quad \frac{h}{x} = 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{Bdt'_b}{2} \left( 1 + \frac{x-d}{x} \right) + C\Omega mt'_b \left( \frac{x-H+h}{x} \right) = \Omega t_a.$$

$$M = \frac{Bd't'_b}{2} \left(1 + \frac{x-d}{x}\right) \frac{2}{5} \frac{d^2 + 5x^2 - 5xd}{2x-d} + C\Omega mt'_b \frac{(x-H+h)^2}{x} + \Omega t_a (h-x)$$

La formule précédente peut s'écrire :

$$\left(1 + \frac{x-d}{x}\right) = \frac{2m\Omega}{Bd'} \left[ \frac{t_a}{mt'_b} - C \left(1 - \frac{H-h}{x}\right) \right].$$

$$\text{Posons } \Pi = \alpha h, \frac{m\Omega}{Bd'} = \frac{2 \frac{x}{d} - 1}{2 \left\{ \frac{t_a}{mt'_b} - C \left[ 1 - (\alpha-1) \left( \frac{t_a}{mt'_b} + 1 \right) \right] \right\}} \frac{x}{d}.$$

S'il n'y a qu'une armature simple,  $C = 0$

$$\frac{m\Omega}{Bd'} = \frac{2 \frac{x}{d} - 1}{2 \frac{t_a}{mt'_b} \frac{x}{d}} = A_0 \quad . . . . . (19)$$

Lorsqu'il y a double armature

$$\frac{m\Omega}{Bd'} = \frac{A_0}{1 - C\mu} \quad . . . . . (20)$$

avec  $\mu = \frac{\left[ 1 - (\alpha-1) \left( \frac{t_a}{mt'_b} + 1 \right) \right]}{\frac{t_a}{mt'_b}}$  (4), expression iden-

tique à celle trouvée pour les poutres rectangulaires et dont les valeurs sont reproduites au tableau II.

$$\begin{aligned} \text{Enfin } \frac{M}{Bd^2t'_b} &= \frac{1}{5} \left(1 + \frac{x-d}{x}\right) \frac{d^2 + 5x^2 - 5xd}{d(2x-d)} + \\ &\frac{m\Omega}{Bd'} \left[ \frac{t_a}{mt'_b} \frac{h-x}{d} + C \frac{(x-H+h)^2}{xd} \right] = \\ &\frac{1}{5} \left(2 \frac{x}{d} - 1\right) \frac{\left(\frac{x}{d} - 1\right) \frac{x}{d} + 1}{\left(2 \frac{x}{d} - 1\right) \frac{x}{d}} + \frac{\left(2 \frac{x}{d} - 1\right) \left\{ \left(\frac{t_a}{mt'_b}\right)^2 + C \left[ 1 - (\alpha-1) \left(1 + \frac{t_a}{mt'_b}\right) \right] \right\}}{2 \left\{ \frac{t_a}{mt'_b} - C \left[ 1 - (\alpha-1) \left(1 + \frac{t_a}{mt'_b}\right) \right] \right\}} \\ &= \left(\frac{x}{d} - 1\right) + \frac{1}{5} \frac{x}{d} + \frac{2 \frac{x}{d} - 1}{2} \frac{\left(\frac{t_a}{mt'_b}\right)^2 + C \left[ 1 - (\alpha-1) \left(1 + \frac{t_a}{mt'_b}\right) \right]^2}{\frac{t_a}{mt'_b} - C \left[ 1 - (\alpha-1) \left(1 + \frac{t_a}{mt'_b}\right) \right]} \end{aligned}$$

Lorsque  $C = 0$ , armature simple,

$$\frac{M}{Bd^2t'_b} = \left( \frac{x}{d} - 1 \right) + \frac{1}{\frac{3}{5} \frac{x}{d}} + \frac{\frac{2}{3} \frac{x}{d} - 1}{2} \frac{t_a}{mt'_b} = D_0 \quad (21)$$

Lorsque  $C > 0$ , qu'il y a double armature,

$$\frac{M}{Bd^2t'} = D_0 + \frac{\left( \frac{2}{3} \frac{x}{d} - 1 \right) \left\{ \left( \frac{t_a}{mt'_b} \right)^2 + C \left[ 1 - (\alpha - 1) \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) \right]^2 \right\}}{2 \left\{ \frac{t_a}{tm'_b} - C \left[ 1 - (\alpha - 1) \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) \right] \right\}} - \frac{t_a}{mt'_b} \left. \right\}$$

$$= D_0 + \frac{C \varphi m \Omega}{Bd} \frac{x}{d} \dots \dots \dots (22)$$

$$\varphi = \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) (2 - \alpha) \left[ 1 - (\alpha - 1) \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) \right] = \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) \varphi \quad (23)$$

Le tableau V, établi pour les cas de l'armature simple, traduit les formules (19) et (22) et donne en fonction de diverses valeurs de  $\frac{x}{d}$  et de  $\frac{t_a}{mt'_b}$  les valeurs de  $\frac{h}{x}$ ,  $\frac{h}{d}$ ,  $\frac{m\Omega}{Bd}$ ,  $\frac{M}{Bd^2t'_b}$  et  $\frac{mM}{Bd^2t_a} = \frac{M}{Bd^2t'_b} \times \frac{1}{\frac{t_a}{mt'_b}}$ .

Le tableau II donne les coefficients de correction  $\mu$  et  $\psi$  en fonction des mêmes valeurs de  $\frac{t_a}{mt'_b}$  et pour des valeurs quelconques de  $\alpha$ .

21) *Corrections à effectuer pour tenir compte des tensions de compression du béton dans la nervure.* — Si l'on tient compte de ces tensions, les formules s'écrivent en utilisant la notation

$$\beta = \frac{b}{B}$$

$$\frac{Bdt'_b}{2} \left( 1 + \frac{x-d}{x} \right) + \frac{\beta B (x-d)^2}{2x} t'_b + C\Omega mt'_b \frac{(x - \Pi + h)}{x} = \Omega t_a$$

$$\frac{Bdt'_b}{2} \left( 1 + \frac{x-d}{x} \right) \frac{2}{3} \frac{d^2 + 3x^2 - 3xd}{2x-d} + \frac{\beta B (x-d)^2 t'_b}{2x} \frac{2}{3} (x-d) +$$

$$C\Omega mt'_b \left( \frac{x - \Pi + h}{x} \right) + \Omega t_a (h - x) = M$$

$$\frac{t_a}{mt'_b} - C \left[ 1 - \frac{H-h}{x} \right] = \frac{1}{2} \frac{Bd}{m\Omega} \left[ 1 + \frac{x-d}{x} + \beta \frac{(x-d)^2}{xd} \right]$$

$$\frac{m\Omega}{Bd} = \frac{\left( 2 \frac{x}{d} - 1 \right) + \beta \left( \frac{x}{d} - 1 \right)^2}{2 \left\{ \frac{t_a}{mt'_b} - C \left[ 1 - (\alpha - 1) \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) \right] \right\} \frac{x}{d}}$$

$$\frac{m\Omega}{Bd} = \frac{A_o}{1 - C\mu A_o} \left[ 1 + \beta \frac{\left( \frac{x}{d} - 1 \right)^2}{2 \frac{x}{d} - 1} \right] = \left[ 1 + \beta\gamma \right] \frac{A_o}{1 - C\mu} \quad (24)$$

Dans cette formule,  $\gamma$  représente l'expression

$$\frac{\left( \frac{x}{d} - 1 \right)^2}{2 \frac{x}{d} - 1} = \gamma \quad \dots \quad (25)$$

Donc, toutes choses égales d'ailleurs, si l'on tient compte des tensions de compression du béton dans la nervure, la section d'armature calculée par la méthode approximative doit être multipliée par le facteur  $(1 + \beta\gamma)$ .

Pour ce qui concerne les moments :

$$\frac{M}{Bd^2t'_b} = \left( \frac{x}{d} - 1 \right) + \frac{1}{5} \frac{x}{d} + \frac{\beta (x-d)^3}{5xd^2} +$$

$$+ \frac{\left( \frac{t_a}{mt'_b} \right)^2 + C \left[ 1 - (\alpha - 1) \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) \right]^2}{2 \left\{ \frac{t_a}{mt'_b} + C \left[ 1 - (\alpha - 1) \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) \right] \right\}} \left[ \left( 2 \frac{x}{d} - 1 \right) + \beta \left( \frac{x}{d} - 1 \right)^2 \right] =$$

$$D_o + \frac{x}{d} \frac{C\psi A_o}{1 - C\mu} + \beta \frac{\left( \frac{x}{d} - 1 \right)^2}{\frac{x}{d}} \left\{ \frac{\left( \frac{x}{d} - 1 \right)}{5} + \frac{\left( \frac{t_a}{mt'_b} \right)^2 + C \left[ 1 - (\alpha - 1) \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) \right]^2}{\frac{t_a}{mt'_b} + C \left[ 1 - (\alpha - 1) \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) \right]} \right\}$$

$$= \left[ D_o + \frac{x}{d} \frac{C\psi A_o}{1 - C\mu} \right] \left[ 1 + \beta \frac{\left( \frac{x}{d} - 1 \right)^2}{2 \frac{x}{d} - 1} \right] - \frac{\beta}{5} \frac{\left( \frac{x}{d} - 1 \right)^2}{2 \frac{x}{d} - 1} \frac{x}{d}$$

$$\frac{M}{Bd^2t'_b} = \left[ D_o + \frac{x}{d} \frac{C\psi A_o}{1 - C\mu} \right] (1 + \beta\gamma) - \beta\delta \quad (26)$$

$$\text{Dans cette formule, } \delta = \frac{\left(\frac{x}{d} - 1\right)^2 \frac{x}{d}}{3 \left(2 \frac{x}{d} - 1\right)} \quad . \quad (27)$$

Le plus souvent le terme  $\beta\delta$  sera négligeable et, sous cette condition, l'on peut écrire

$$\frac{M}{Bd^2t'_b} = (1 + \beta\gamma) \left[ D_o + \frac{x}{d} \frac{C\psi A_o}{1 - C\mu} \right] \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Les conclusions ci-dessus exprimées pour  $\Omega$  s'appliquent alors également à M.

Il est remarquable que les coefficients de correction s'écrivent aussi aisément en fonction de  $\frac{x}{d}$ . Leur calcul est aisé et leurs valeurs sont inscrites au tableau V, qui n'en est nullement rendu plus compliqué. Cette juxtaposition permet dans chaque cas d'apprécier d'un coup d'œil le degré de l'erreur systématique commise en négligeant les tensions de compression du béton dans la nervure.

#### APPLICATIONS.

##### 22) *Remarques générales sur l'emploi des tableaux II et V.*

Les tableaux prennent comme point de départ  $\frac{x}{d} = 1$ . Il est ainsi aisé de déceler tous les cas où  $\frac{x}{d} < 1$ , qui sont à résoudre par les tableaux I et II.

Nous avons, comme d'usage, négligé les renforcements biais de la jonction de la nervure à la dalle. La largeur B et l'épaisseur  $d$  sont en général prédéterminées; la largeur  $b$  également, ou bien, n'intervenant pas dans les calculs, elle se fixe après coup par des conditions de construction.

Les inconnues dans le calcul des dimensions sont donc  $h$ ,  $\Omega$  et éventuellement C, s'il y a double armature. Encore se fixera-t-on souvent  $h$  à l'avance, pour des raisons d'économie, par exemple. Au sujet du poids mort, il est à remarquer que, si  $h$  est donné, il est complètement connu à l'avance.

Si  $h$  est inconnu, le poids propre de la nervure est seul indéterminé. Le poids connu de la dalle étant en général prépondérant, ainsi que surtout l'effet des forces extérieures, l'erreur commise en négligeant le poids de la nervure, ou en

l'appréciant approximativement, ne peut être considérable. Un calcul exact de  $h$  englobant la prédétermination du poids de la nervure par l'équation :

$$\frac{M' + kh + k'}{Bd^2t'_b} = \text{constante}$$

est moins aisé que pour la section rectangulaire et ne peut s'effectuer que par tâtonnements ; il n'est pas recommandable.

Les calculs de vérification de pièces établies ou de force portante sont absolument analogues à ceux qui ont été effectuées pour la section rectangulaire.

23) *Pièces à armatures simples. — Vérification des tensions.*  
Les dimensions de la poutre sont :

$$d = 10 \text{ cm} \quad H = 60 \text{ cm}, \quad B = 120 \quad b = 20 \text{ cm},$$

$$\Omega = 15,27 \text{ cm}^2 \quad \text{et} \quad h = 56. \quad \text{Donc} \quad \frac{h}{d} = 5,60.$$

Le moment sollicitant est  $M = 800.000 \text{ kgcm}$ .

$$\frac{m\Omega}{Bd} = \frac{15 \times 15,27}{120 \times 10} = 0,191.$$

D'après le tableau V, pour  $\frac{h}{d} = 5,60$  et pour  $\frac{x}{d} = 1,25$  :

$$\frac{m\Omega}{Bd} = 0,172, \quad \frac{M}{Bd^2t'_b} = 3,127;$$

pour  $\frac{x}{d} = 1,50$  :

$$\frac{m\Omega}{Bd} = 0,244, \quad \frac{M}{Bd^2t'_b} = 3,455;$$

d'où pour  $\frac{m\Omega}{Bd} = 0,191, \quad \frac{x}{d} = 1,316, \quad \frac{M}{Bd^2t'_b} = 3,214.$

Donc  $x = 13,16 \text{ cm}$ . et  $t'_b = \frac{800000}{120 \times 100 \times 3,214} = 20,75 \text{ kg/cm}^2,$

$$t_a = m \left( \frac{h}{x} - 1 \right) t'_b = 15 \times \left( \frac{5,60}{1,316} - 1 \right) \times 20,75 = 1010 \text{ kg/cm}^2.$$

Ces résultats sont obtenus par application directe des facteurs du tableau V, c'est-à-dire dans l'hypothèse de la négligence des tensions du béton dans la nervure. Les corrections pour tenir compte de ces tensions s'appliquent comme suit :

pour  $\frac{x}{d} = 1,25, \quad \frac{m\Omega}{Bd} = 0,172 \left( 1 + 0,167 \times 0,0417 \right) = 0,173.$

$$\frac{M}{Bd^2t'_b} = 3,127 \times 1,007 - 0,167 \times 0,0174 = 3,146;$$

pour  $\frac{x}{d} = 1,5$ ,  $\frac{m\Omega}{Bd} = 0,244 \times \left[ 1 + 0,167 \times 0,125 \right] = 0,249$ ,

$$\frac{M}{Bd^2t'_b} = 3,455 \times 1,021 - 0,167 \times 0,0625 = 3,517;$$

d'où  $\frac{x}{d} = 1,509$  et  $\frac{M}{Bd^2t'_b} = 3,254$ .

Donc  $x = 13,09$  cm.  $t'_b = \frac{800000}{120 \times 100 \times 3,254} = 20,55$  kg/cm<sup>2</sup>,

$$t_a = 15 \left[ \frac{5,60}{1,509} - 1 \right] \times 20,55 = 1007 \text{ kg/cm}^2.$$

L'influence des corrections est donc pratiquement négligeable.

24) *Vérification de la force portante.*

a) Les dimensions de la pièce sont  $B = 100$ ,  $d = 23$ ,  $h = 133$ ,  $b = 25$ ,  $\Omega = 38$  cm<sup>2</sup>; les tensions limites admissibles sont  $t'_a = 1000$  kg/cm<sup>2</sup> et  $t'_b = 20$  kg/cm<sup>2</sup>.

Donc  $\frac{h}{d} = \frac{133}{23} = 5,80$  et  $\frac{m\Omega}{Bd} = \frac{15 \times 38}{100 \times 23} = 0,248$ .

Pour  $\frac{h}{d} = 5,80$  et  $\frac{x}{d} = 1,50$ ,  $\frac{m\Omega}{Bd} = 0,233$  et  $\frac{M}{Bd^2t'_b} = 3,589$ .

Pour  $\frac{h}{d} = 5,80$  et  $\frac{x}{d} = 1,75$ ,  $\frac{m\Omega}{Bd} = 0,308$  et  $\frac{M}{Bd^2t'_b} = 3,853$ .

D'où pour  $\frac{m\Omega}{Bd} = 0,248$ ,  $\frac{x}{d} = 1,5625$  et  $\frac{M}{Bd^2t'_b} = 3,650$ .

Comme  $\frac{h}{x} = \frac{5,80}{1,5625} = 3,71$ ,  $\frac{t_a}{mt'_b} = 2,71$

et, pour  $t'_b = 20$ ,  $t_a = 15 \times 20 \times 2,71 = 815$  kg/cm<sup>2</sup>.

Donc  $t'_b = 20$  kg/cm<sup>2</sup> indique la limite réelle des tensions; le moment maximum admissible est alors

$$M = 3,650 \times 100 \times \frac{23^2}{2} \times 20 = 3860000 \text{ kg cm.}$$

b) Si, pour les mêmes dimensions, les tensions limites étaient fixées à  $t_a = 1000$  et  $t'_b = 35$ , la limite acceptable serait alors la tension maximum de l'armature  $t_a = 1000$  kg/cm<sup>2</sup>.

Pour cette valeur  $t'_b = \frac{1000}{15 \times 2,71} = 24,6$  kg/cm<sup>2</sup>.

Donc  $M = 3,650 \times 100 \times \overline{23}^2 \times 24,6 = 4,750,000 \text{ kg.cm.}$

Ici encore la correction serait négligeable, parce que la valeur de  $\frac{x}{d}$  est réduite et que  $\beta = 0,25$ .

c) Supposons  $B = 150$ ,  $d = 10$ ,  $h = 36$ ,  $b = 25$  et  $\Omega = 14,72$ ,  $t_a = 1000$  et  $t'_b = 30$ .

$$\frac{h}{d} = 3,6 \text{ et } \frac{m\Omega}{Bd} = \frac{15 \times 14,72}{150 \times 10} = 0,1472;$$

ce qui, en comparant aux valeurs du tableau V, montre que  $\frac{x}{d} < 1$  et qu'il faut recourir aux méthodes de la première section, tableau I

$$\frac{m\Omega}{Bh} = \frac{15 \times 14,72}{150 \times 36} = 0,0409,$$

$$\text{d'où } \frac{t^a}{mt'b} = 3,036, \quad \frac{h}{x} = 4,036, \quad \text{d'où } x = \frac{36}{4,036} = 8,9 \text{ cm}$$

$$\text{Pour } t_a = 1000 \quad t'_b = \frac{1000}{15 \times 3,036} = 22 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\frac{M}{Bh^2t'_b} = 0,1157, \text{ d'où } M = 150 \times \overline{36}^2 \times 22 \times 0,1157 = 488000 \text{ kg.cm.}$$

#### CALCUL DES DIMENSIONS.

25) *La hauteur n'est pas définie ou limitée.*

Soient  $B = 150$ ,  $b = 30$ ,  $d = 8$ ,  $t'_b = 40 \text{ kg/cm}^2$  et  $t_a = 1000$ , le moment sollicitant étant égal à  $1400000 \text{ kgcm.}$

$$\frac{t_a}{mt'_b} = 1 \text{ 667}$$

$$\frac{M}{Bd^2t'_b} = \frac{1400000}{150 \times 64 \times 40} = 3,650.$$

$$\text{Pour } \frac{x}{d} = 2,00, \quad \frac{M}{Bd^2t'_b} = 3,667, \quad \frac{m\Omega}{Bd} = 0,452.$$

$$\text{Pour } \frac{x}{d} = 1,75, \quad \frac{M}{Bd^2t'_b} = 3,025, \quad \frac{m\Omega}{Bd} = 0,450.$$

$$\text{Donc } \frac{x}{d} = 1,994, \quad \frac{m\Omega}{Bd} = 0,4514;$$

$$\frac{h}{x} = 1 + \frac{t_a}{mt'_b} = 2,667, \quad h = 2,667 \times 1,994 \times 8 = 42,5 \text{ cm,}$$

$$\Omega = \frac{150 \times 8}{15} \times 0,4514 = 56,1.$$

La correction serait dans ce cas-ci plus sensible, à cause de la valeur assez élevée de  $\frac{x}{d}$

$$\beta = \frac{30}{150} = 0,20.$$

$$\text{Pour } \frac{x}{d} = 2,00, \frac{M}{Bd^2t'_b} = 3,667 (1 + 0,20 \times 0,333) - 0,20 \times 0,222 = 3,667 \times 1,067 - 0,0444 = 3,87;$$

$$\frac{m\Omega}{Bd} = 0,457 \times 1,067 = 0,482.$$

$$\text{Pour } \frac{x}{d} = 1,75, \frac{M}{Bd^2t'_b} = 3,023 \times 1,045 - 0,026 = 3,13;$$

$$\frac{m\Omega}{Bd} = 0,450 \times 1,045 = 0,450.$$

$$\text{Donc } \frac{x}{d} = 1,925, \quad h = 1,925 \times 2,667 \times 8 = 41,2 \text{ cm.}$$

$$\frac{m\Omega}{Bd} = 0,4725, \quad \Omega = \frac{150 \times 8 \times 0,4725}{15} = 37,8 \text{ cm}^2.$$

La correction est en somme plutôt désavantageuse puisqu'elle conduit à une réduction de hauteur et une augmentation d'armature.

26) Nous allons constater par un autre exemple l'avantage qu'il peut y avoir, au contraire, à augmenter la hauteur.

Soient  $B = 160$ ,  $d = 10$ ,  $m = 15$ ,  $t'_b = 30$ ,  $t_a = 900$ ,  $b = 25$  et  $M = 1\,182\,000$ .

$$\frac{t_a}{mt'_b} = 2,00 \quad \text{et} \quad \frac{M}{Bd^2t'_b} = \frac{1\,182\,000}{160 \times 100 \times 30} = 2,46.$$

$$\text{Donc } \frac{x}{d} = 1,407 \quad \text{et} \quad \frac{m\Omega}{Bd} = 0,521.$$

$$\text{Donc } h = 5 \times 1,407 \times 10 = 42,21 \text{ cm.}$$

$$\Omega = \frac{160 \times 10}{15} \times 0,521 = 54,25 \text{ cm}^2.$$

Supposons que l'on puisse choisir  $h = 60$ , auquel cas, par augmentation du poids de la poutre  $M = 1233700 \text{ kg cm}$

$$\frac{h}{d} = 6,00$$

La tension d'armature restant égale au taux limite admissible, la tension du béton diminuera.

$$\frac{mM}{Bd^2t_a} = \frac{15 \times 1\,255\,700}{160 \times 100 \times 900} = 1,285.$$

$$\text{Pour } \frac{x}{d} = 1,50, \quad \frac{mM}{Bd^2t_a} = 1,241, \quad \frac{m\Omega}{Bd} = 0,222.$$

$$\text{Pour } \frac{x}{d} = 1,75, \quad \frac{mM}{Bd^2t_a} = 1,6375, \quad \frac{m\Omega}{Bd} = 0,295.$$

$$\text{Donc } \frac{x}{d} = 1,528, \quad \frac{m\Omega}{Bd} = 0,230.$$

$$\text{Donc } \Omega = \frac{160 \times 10 \times 0,230}{15} = 24,55 \text{ cm}^2;$$

$$\frac{t_a}{mt'_b} = \frac{6}{1,528} - 1 = 2,93;$$

$$t'_b = \frac{900}{15 \times 2,93} = 20,45 \text{ kg/cm}^2.$$

27) *Calcul de la résistance maximum.* — Le cas peut se présenter où l'espace disponible est à ce point limité que toutes les dimensions sont déterminées a priori. Le problème qui se pose alors est de rechercher si, en observant les taux de travail limites, il est possible d'obtenir au moyen d'une armature simple une résistance suffisante.

Cela revient à déterminer la résistance maximum dont la section est capable avec armature simple, les tensions limites étant simultanément réalisées.

Soient  $B = 160$ ,  $h = 150$ ,  $d = 20$ ,  $b = 60$ ,  $t_a = 1000$ ,  
et  $t'_b = 35$ .

$$\frac{h}{d} = 6,5, \quad \beta = 0,375, \quad \frac{t_a}{mt'_b} = 1,9.$$

$$\text{Donc } \frac{h}{x} = 2,9 \text{ et } \frac{x}{d} = \frac{6,5}{2,9} = 2,24.$$

$$\text{Pour } \frac{t_a}{mt'_b} = 2,00, \quad \frac{m\Omega}{Bd} = 0,388, \quad \frac{M}{Bd^2t'_b} = 4,869.$$

$$\text{Pour } \frac{t_a}{mt'_b} = 1,80, \quad \frac{m\Omega}{Bd} = 0,431, \quad \frac{M}{Bd^2t'_b} = 4,521.$$

$$\text{Pour } \frac{t_a}{mt'_b} = 1,9, \quad \frac{m\Omega}{Bd} = 0,410, \quad \frac{M}{Bd^2t'_b} = 4,695.$$

$$\text{Donc } \Omega = \frac{160 \times 20 \times 0,410}{15} = 87,5 \text{ cm}^2$$

$$\text{et } M_{\max} = 160 \times 400 \times 35 \times 4,695 = 10.500.000 \text{ kg.cm.}$$

La correction aurait dans le cas présent un effet assez sensible, parce que  $\frac{x}{d}$  et  $\beta$  sont importants.

$$\text{En effet, } \gamma = 0,4415, \quad \delta = 0,3505$$

$$\text{Donc } \frac{m\Omega}{Bd} = 0,410 [1 + 0,4415 \times 0,375] = 0,410 \times 1,165 = 0,478;$$

$$\Omega = \frac{160 \times 20 \times 0,478}{15} = 102 \text{ cm}^2.$$

$$\frac{M}{Bd^2t'_b} = 4,695 \times 1,165 - 0,375 \times 0,3505 = 5,475 - 0,125 = 5,55;$$

$$M = 160 \times 400 \times 35 \times 5,55 = 12.000.000 \text{ kgcm.}$$

Si le moment sollicitant était encore supérieur, et que les tensions  $t_a$  et  $t'_b$  ne pussent être accrues, il n'existerait plus que la ressource de recourir à une armature dans la zone de compression.

28) *Pièces à doubles armatures.* — La remarque précédente énonce le *problème rationnel de la double armature*, dont l'emploi n'est théoriquement justifié que dans ce cas.

Supposons que la pièce dont les dimensions ont été données dans l'exemple précédent ait à supporter un moment de 16.000.000 kgcm.

$$\text{Supposons } \alpha = 1,10 \quad \text{donc } \alpha - 1 = 0,10.$$

$$\text{Pour } \frac{h}{d} = 6,5 \text{ et } \frac{t_a}{mt'_b} = 1,9, \quad \frac{h}{x} = 2,9 \text{ et } \frac{x}{d} = 2,24.$$

$$\text{D'après le tableau V, } A_o = 0,410,$$

$$D_o = 4,695.$$

$$\text{D'après le tableau II, } \mu = 0,374,$$

$$\psi = 1,85.$$

$$\frac{M}{Bd^2t'_b} = \frac{16.000.000}{160 \times 400 \times 35} = 7,15 = 4,695 + \frac{C \times 1,85 \times 0,410 \times 2,24}{1,00 - C \times 0,374}.$$

$$\text{D'où } 2,455 = C [0,410 \times 4,165 + 0,374 \times 2,455],$$

$$C = \frac{2,455}{2,65} = 0,955.$$

$$\text{Dès lors, } \frac{m\Omega}{Bd} = \frac{0,410}{1,00 - 0,955 \times 0,374} = 0,65,$$

$$\text{d'où} \quad \Omega = \frac{160 \times 20 \times 0,65}{15} = 154,5 \text{ cm}^2.$$

La section totale des deux armatures est

$$(1 + C) \Omega = 1,955 \times 154,5 = 261 \text{ cm}^2.$$

Le résultat se modifie comme suit si l'on tient compte des tensions de compression du béton dans la nervure,

$$\frac{M}{Ba^2 t_b} = 7,15 = \left[ 4,695 + \frac{C \times 2,24 \times 1,85 \times 0,410}{1,00 - C \times 0,374} \right] 4,165 - 0,125$$

$$\frac{7,275}{4,165} = 4,095 + \frac{C \times 4,165 \times 0,410}{1,00 - C \times 0,374} = 6,245,$$

$$1,55 [1,00 - C \times 0,374] = 0,410 \times 4,165 C,$$

$$C = \frac{1,55}{2,29} = 0,675.$$

$$\text{D'où} \quad \frac{m\Omega}{Bd} = \frac{0,410}{1,00 \times 0,675 \times 0,374} \times 4,165 = 0,64,$$

$$\Omega = \frac{160 \times 20 \times 0,64}{15} = 156,5 \text{ cm}^2.$$

La section totale des 2 armatures est

$$(1 + C) \Omega = 1,675 \times 156,5 = 229 \text{ cm}^2.$$

Par rapport au calcul approximatif, une économie de 32 cm<sup>2</sup> est réalisée, soit  $100 \times \frac{32}{261} = 12,25$  p. c.

Le problème qui vient d'être résolu avec aisance, rapidité et précision est bien un des cas les plus complexes qui puissent se présenter au constructeur. Par l'exigüité imposée des dimensions et l'importance des efforts sollicitants, la question est épineuse et délicate. Les méthodes peu rigoureuses, qui laissent par leur imprécision un doute au sujet de la résistance, entraînent naturellement un surcroît de précautions presque toujours onéreux. La méthode préconisée, tout en étant des plus expéditives, en ne s'écartant pas de la théorie la plus sévère, permet d'assurer à la fois la sécurité et l'économie.

**TABLEAU V. — Flexion plane des poutres à nervures (section en T). (Théorie approximative et corrections.) Armatures simples.**

$$\left(\frac{m\Omega}{Bd}\right)_o = A_o = \frac{2 \frac{x}{d} - 1}{2 \frac{t_a}{mt'_b} \frac{x}{d}} \quad (19)$$

$$\left(\frac{M}{Bd^2t'_b}\right)_o = D_o = \left(\frac{x}{d} - 1\right) + \frac{1}{5 \frac{x}{d}} + \frac{2 \frac{x}{d} - 1}{2} \frac{t_a}{mt'_b} \quad (21)$$

$$\left(\frac{m\Omega}{Bd}\right)_c = \frac{A_o}{1 - C\mu} \quad (20)$$

$$\left(\frac{M}{Bd^2t'_b}\right)_c = D_o + \frac{C \psi A_o \frac{x}{d}}{1 - C\mu} \quad (22)$$

Voir tableau II  
les valeurs de  $\mu$  et de  $\psi$

$$\frac{mM}{t a^2 t_a} = \frac{M}{Bd^2 t'_b} \times \frac{1}{\frac{t_a}{mt'_b}}$$

$$\left(\frac{m\Omega}{Bd}\right)_{\text{exact}} = (1 + \gamma\beta) \frac{A_o}{1 - C\mu} \quad (24) \quad \gamma = \frac{\left(\frac{x}{d} - 1\right)^2}{2 \frac{x}{d} - 1} \quad (25)$$

$$\left(\frac{M}{Bd^2t'_b}\right)_{\text{exact}} = \left[ D_o + \frac{x}{d} \frac{C\psi A_o}{1 - C\mu} \right] (1 + \beta\gamma) - \beta\delta \quad (26) \quad \delta = \frac{\left(\frac{x}{d} - 1\right)^2 \frac{x}{d}}{3 \left(\frac{x}{d} - 1\right)} \quad (27)$$

$\frac{t_a}{mt'_b}$	4,00	3,50	3,25	3,00	2,80	2,60	2,40	2,20	2,00	1,80	1,60	1,40	1,20	1,00	$\gamma$	$\delta$
$h/c$	5,00	4,50	4,25	4,00	3,80	3,60	3,40	3,20	3,00	2,80	2,60	2,40	2,20	2,00		
$\frac{x}{d} = 1,00$	$h/d$ 0,125 2,333 0,583	4,50 0,143 2,033 0,595	4,25 0,154 1,958 0,602	4,00 0,167 1,833 0,611	3,80 0,179 1,733 0,619	3,60 0,192 1,633 0,628	3,40 0,208 1,533 0,639	3,20 0,227 1,433 0,651	3,00 0,250 1,333 0,667	2,80 0,278 1,233 0,685	2,60 0,3125 1,133 0,708	2,40 0,357 1,033 0,738	2,20 0,417 0,933 0,778	2,00 0,500 0,833 0,833	0	0
$\frac{x}{d} = 1,25$	$h/d$ 0,150 3,517 0,879	5,625 0,171 3,142 0,898	5,3125 0,185 2,955 0,909	5,00 0,200 2,767 0,922	4,75 0,214 2,617 0,935	4,50 0,231 2,467 0,949	4,25 0,250 2,317 0,965	4,00 0,273 2,167 0,985	3,75 0,300 2,017 1,009	3,50 0,333 1,867 1,037	3,25 0,375 1,717 1,073	3,00 0,429 1,567 1,119	2,75 0,500 1,417 1,181	2,50 0,600 1,267 1,267	0,0417	0,0174
$\frac{x}{d} = 1,50$	$d^o$ 0,167 4,722 1,1825	6,75 0,190 4,222 1,206	6,375 0,205 3,972 1,222	6,00 0,222 3,722 1,241	5,70 0,238 3,522 1,258	5,40 0,256 3,322 1,278	5,10 0,278 3,122 1,301	4,80 0,303 2,922 1,328	4,50 0,333 2,722 1,361	4,20 0,370 2,522 1,401	3,90 0,417 2,322 1,451	3,60 0,476 2,122 1,516	3,30 0,556 1,922 1,602	3,00 0,667 1,722 1,722	0,125	0,0625
$\frac{x}{d} = 1,75$	$d^o$ 0,179 5,940 1,485	7,875 0,204 5,315 1,519	7,4375 0,220 5,0025 1,539	7,00 0,238 4,690 1,563	6,65 0,255 4,440 1,571	6,30 0,275 4,190 1,611	5,95 0,296 3,940 1,642	5,60 0,325 3,690 1,677	5,25 0,357 3,440 1,720	4,90 0,397 3,190 1,772	4,55 0,446 2,940 1,8375	4,20 0,510 2,690 1,921	3,85 0,595 2,440 2,033	3,50 0,714 2,190 2,190	0,225	0,13125
$\frac{x}{d} = 2,00$	$d^o$ 0,1875 7,167 1,792	9,00 0,214 6,417 1,834	8,50 0,231 6,042 1,859	8,00 0,250 5,667 1,889	7,60 0,268 5,367 1,917	7,20 0,288 5,067 1,949	6,80 0,3125 4,767 1,986	6,40 0,341 4,467 2,030	6,00 0,375 4,167 2,084	5,60 0,417 3,867 2,148	5,20 0,469 3,567 2,229	4,80 0,536 3,267 2,334	4,40 0,625 2,967 2,473	4,00 0,750 2,667 2,667	0,333	0,222
$\frac{x}{d} = 2,25$	$d^o$ 0,194 8,398 2,067	10,125 0,222 7,523 2,149	9,5625 0,239 7,086 2,180	9,00 0,259 6,648 2,216	8,55 0,278 6,298 2,249	8,10 0,299 5,948 2,288	7,65 0,324 5,598 2,333	7,20 0,354 5,248 2,372	6,75 0,389 4,898 2,449	6,30 0,432 4,548 2,527	5,85 0,486 4,198 2,624	5,40 0,556 3,848 2,749	4,95 0,648 3,498 2,915	4,50 0,778 3,148 3,148	0,446	0,335
$\frac{x}{d} = 2,50$	$d^o$ 0,246 8,133 2,503	10,625 0,246 8,133 2,503	10,00 0,267 7,633 2,544	9,50 0,286 7,233 2,583	9,00 0,308 6,833 2,628	8,50 0,333 6,433 2,680	8,00 0,364 6,033 2,742	7,50 0,400 5,633 2,817	7,00 0,444 5,233 2,907	6,50 0,500 4,833 3,020	6,00 0,571 4,443 3,166	5,50 0,667 4,033 3,361	5,00 0,800 3,633 3,633	0,5625	0,469	
$\frac{x}{d} = 2,75$	$d^o$ 0,273 8,621 2,874	11,00 0,273 8,621 2,874	10,45 0,292 8,171 2,918	9,90 0,315 7,721 2,970	9,35 0,341 7,271 3,030	8,80 0,372 6,821 3,100	8,25 0,409 6,371 3,186	7,70 0,455 5,921 3,289	7,15 0,511 5,471 3,419	6,60 0,584 5,021 3,586	6,05 0,682 4,571 3,809	5,50 0,818 4,121 4,121	0,680	0,624		
$\frac{x}{d} = 3,00$	$d^o$ 0,321 8,611 3,312	10,80 0,321 8,611 3,312	10,20 0,347 8,111 3,380	9,60 0,378 7,611 3,460	9,00 0,417 7,111 3,556	8,40 0,463 6,611 3,673	7,80 0,521 6,111 3,820	7,20 0,595 5,611 4,008	6,60 0,694 5,111 4,259	6,00 0,833 4,611 4,611	0,800	0,800				

## CHAPITRE IV.

### LIMITATION DES TENSIONS DE TRACTION DU BÉTON. SÉCURITÉ A LA FISSURATION.

29. *Remarques générales.* — Le chapitre II a conclu à l'inopportunité du calcul des dimensions principales d'une poutre en béton armé de section rectangulaire par la limitation des tensions de traction du béton. Ces conclusions ont un caractère assez général pour pouvoir être appliquées sans plus ample examen aux poutres qui font l'objet du présent chapitre. Il est donc entendu que les dimensions ou la résistance d'une poutre nervurée seront déterminées en ordre principal par la méthode du chapitre précédent qui est la plus certaine et la plus efficace. En aucun cas, des calculs faits par d'autres procédés ne pourront entraîner un dépassement des tensions de sécurité utilisées dans la méthode du chapitre III; ils ne seront, au contraire, admissibles que pour vérifier ou assurer des sécurités supplémentaires.

C'est ce résultat que visent les calculs de limitation des tensions de traction du béton, en vue d'assurer la sécurité à la fissuration prescrite par les règlements les plus récents. Ils sont fondés par le souci d'éviter une corrosion des armatures de traction par l'accès de certains agents chimiques atmosphériques s'insinuant dans les fissures du béton environnant. Les ouvrages les plus exposés sont ceux qui sont soumis à l'action de gaz industriels (usines chimiques, gaz de combustion), qui doivent être en contact avec des liquides actifs (réservoirs, bateaux), ou qui sont spécialement exposés à des fissurations, par exemple, du fait de charges mobiles accompagnées de chocs, qui entraînent des ouvertures et fermetures successives des fissures et leur développement. C'est même de cette dernière circonstance seule que le règlement allemand du 13 janvier 1916 semble tenir compte.

Il prescrit (partie II, § 17, al. 5) que pour les ponts sous rails, parcourus par des locomotives de voies principales, les règles suivantes seront appliquées pour éviter la formation des fissures : tout en respectant les valeurs  $t_a \leq 750 \text{ kg/cm}^2$  et  $\tau_b = 24 \text{ kg/cm}^2$ , pour les poutres nervurées simplement fléchies, dont la largeur de dalle est définie par  $B = \alpha b$ , la proportion d'armature  $\varphi = \frac{\Omega}{b(H-d)}$ , c'est-à-dire le rapport de

la section d'armature à la section de nervure ne peut dépasser la valeur établie d'après un graphique joint au règlement. Ce graphique a été conçu par MM. Moersch et Hager. Le règlement établit donc, pour un cas très spécial, une méthode particulière. Il conserve la valeur habituelle de  $m = 15$  et fixe  $n = 1$ .

Le règlement autrichien du 15 juin 1911 ne définit pas de cas spécial mais envisage d'une manière générale le calcul des tensions de traction dans les pièces fléchies par application des coefficients  $m = 15$ ,  $n = 2,5$  et de taux de sécurité de traction du béton variables avec le type de construction.

Les dispositions les plus rationnelles semblent être celles du règlement suisse du 26 novembre 1915, qui dit :

« Les tensions de traction du béton des pièces fléchies sont à vérifier pour les ponts, passerelles et jetées, ainsi que pour les constructions exposées aux gaz de combustion ou analogues. On fera à cet effet l'hypothèse que l'armature et le béton résistent simultanément et que le coefficient d'élasticité du béton est le même à la traction qu'à la compression ( $m = 20$ ,  $n = 1$ ). La tension de traction du béton ainsi calculée ne peut dépasser  $25 \text{ kg/cm}^2$  pour les ponts de chemins de fer,  $30 \text{ kg/cm}^2$  pour les autres constructions. »

Les règlements autrichien et suisse, tout à fait généraux, n'envisagent aucune théorie particulière. Ils impliquent donc l'application des principes classiques de la théorie de la flexion qui, employés rigoureusement, donnent lieu à des calculs assez compliqués.

Bien que les derniers règlements en date prévoient donc des limitations des tensions de traction du béton, le point de vue dont ils s'inspirent est loin d'être universellement reconnu comme les principes établis par la Commission française du béton armé. L'objection fondamentale est que ces méthodes n'envisagent que les fissures de charge, qui ne deviennent sensibles en réalité que pour des fatigues atteignant la limite de sécurité dans les constructions habituelles. Plus fréquentes sont, en général, les fissures dues au retrait, plus difficiles aussi à prévenir. A leur sujet, les règlements ne peuvent formuler que quelques vagues recommandations à observer dans l'exécution des bétonnages.

Presque tous les auteurs et praticiens sont d'accord pour reconnaître qu'un enrobage suffisant des armatures dans le

béton (3 à 4 cm.) assure une protection efficace du fer, si aucun vice de construction n'expose celui-ci à la corrosion. En réalité, des cas frappants n'ont pas été cités, à l'exception de constructions en béton détruites par l'action sur le ciment d'eaux sulfureuses et d'un cas fortuit de poutres en béton dans des usines à zinc, détruites par corrosion des armatures.

Un argument théorique capital est que le principe du béton armé est d'associer le fer comme élément résistant à la traction et le béton pour résister à la compression. Compter sur le béton pour la résistance à la traction, même dans une proportion réduite, est imprudent, car c'est se fier à un élément incertain.

Quoi qu'il en soit, des règlements prévoyant la condition de sécurité à la fissuration et le point de vue étant d'ailleurs intéressant, nous allons examiner la théorie des poutres nervurées simplement armées, en tenant compte des tensions de traction et dans le but de vérifier la résistance à la fissuration.

La méthode allemande de Moersch-Hager calcule l'armature par le moyen du chapitre III et ensuite, pour éviter de dépasser la tension de traction limite du béton, détermine en conséquence la largeur  $b$  de la nervure qui, dans la plupart des cas pratiques, deviendra très grande.

L'auteur propose, au contraire, de limiter la grandeur de  $b$  à une valeur normale et d'assurer la sécurité à la fissuration du béton par une armature suffisante. Il s'attachera à justifier son point de vue par des exemples concrets.

30. *Théorie de la flexion des poutres nervurées à simple armature, en tenant compte des tensions de traction du béton.* — La proportionnalité des tensions s'exprime par

$$\frac{\tau'_b}{n\tau_b} = \frac{x_1}{H - x_1} = \frac{\frac{x_1}{H}}{1 - \frac{x_1}{H}} \dots \dots \dots (29)$$

$$\frac{\tau_a}{mn\tau_b} = \frac{h}{H - x_1} = \frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{x_1}{H}}{1 - \frac{x_1}{H}} \dots \dots \dots (30)$$

par emploi du coefficient habituel

$$\alpha = \frac{H}{h} .$$

Les significations de  $m$  et de  $n$  sont les mêmes qu'au chapitre II. L'équation des moments des aires partielles autour de l'axe neutre s'écrit :

$$Bd \left( x_1 - \frac{d}{2} \right) + b \frac{(x_1 - d)^2}{2} = \frac{b}{n} \frac{(H - x_1)^2}{2} + m\Omega \left( \frac{H}{\alpha} - x_1 \right),$$

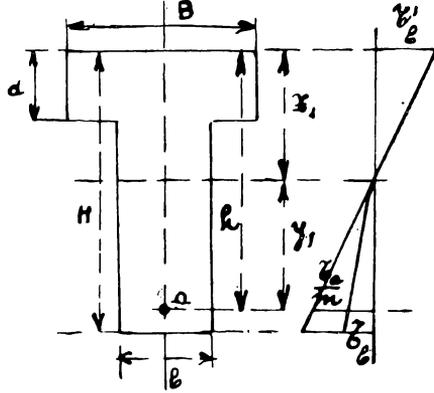


Fig. 5.

$$\frac{d}{H} \left( x_1 - \frac{1}{2} \frac{d}{H} \right) + \frac{b}{B} \frac{\left( \frac{x_1}{H} - \frac{1}{2} \frac{d}{H} \right)^2}{2} = \frac{b}{nB} \frac{\left( 1 - \frac{x_1}{H} \right)^2}{2} + \frac{m\Omega}{BH} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{x_1}{H} \right),$$

$$\text{d'où } \frac{m\Omega}{BH} = \frac{2 \frac{d}{H} \left( \frac{x_1}{H} - \frac{1}{2} \frac{d}{H} \right) + \frac{b}{B} \left[ \left( \frac{x_1}{H} - \frac{d}{H} \right)^2 - \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{x_1}{H} \right)^2 \right]}{2 \left[ \frac{1}{\alpha} - \frac{x_1}{H} \right]},$$

$$\frac{m\Omega}{BH} = \frac{\frac{d}{H} \left( \frac{x_1}{H} - \frac{1}{2} \frac{d}{H} \right)}{\frac{1}{\alpha} - \frac{x_1}{H}} - \beta \frac{\frac{1}{n} \left( 1 - \frac{x_1}{H} \right)^2 - \left( \frac{x_1}{H} - \frac{d}{H} \right)^2}{2 \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{x_1}{H} \right)}, \quad (31)$$

en désignant comme au chapitre précédent par  $\beta$  le rapport  $\frac{b}{B}$ , Si  $n=1$ ,

$$\frac{m\Omega}{BH} = \frac{\frac{d}{H} \left( \frac{x_1}{H} - \frac{1}{2} \frac{d}{H} \right)}{\left( \frac{1}{\alpha} - \frac{x_1}{H} \right)} - \beta \frac{\left( 1 - \frac{d}{H} \right) \left( 1 + \frac{d}{H} - 2 \frac{x_1}{H} \right)}{2 \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{x_1}{H} \right)} \quad (31')$$

L'équation des moments des forces extérieures s'écrit

$$M = \frac{Bx_1\tau'_b}{2} \times \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3} \frac{(B-b)}{2} \tau'_b \frac{(x_1-d)^3}{x_1} + \frac{2}{3} \frac{(H-x_1)^2}{2} b\tau_b + \Omega\tau_a \left( \frac{\Pi}{\alpha} - x_1 \right)$$

$$M = \frac{Bx_1^2}{3} \frac{\frac{x_1}{H}}{1 - \frac{x_1}{H}} n\tau_b - \frac{(B-b)(x_1-d)^3}{3} \frac{\frac{x_1}{H}}{1 - \frac{x_1}{H}} n\tau_b +$$

$$+ \frac{(H-x_1)^2}{3} b\tau_b + \Omega \left( \frac{H}{\alpha} - x_1 \right) \frac{\left( \frac{1}{\alpha} - \frac{x_1}{\Pi} \right)}{1 - \frac{x_1}{H}} mn\tau_b.$$

$$\frac{M}{nBH^2\tau_b} = \frac{\left( \frac{x_1}{H} \right)^3}{3 \left( 1 - \frac{x_1}{H} \right)} - \frac{\left( 1 - \frac{b}{B} \right) \left( \frac{x_1-d}{H} \right)^3}{3} \frac{1}{1 - \frac{x_1}{H}} +$$

$$+ \frac{\left( 1 - \frac{x_1}{H} \right)^2}{3n} \frac{b}{B} + \frac{m\Omega}{BH} \frac{\left( \frac{1}{\alpha} - \frac{x_1}{H} \right)^2}{1 - \frac{x_1}{H}}$$

$$\frac{1}{3 \left( 1 - \frac{x_1}{H} \right)} \left\{ \left( \frac{x_1}{\Pi} \right)^3 - \left( \frac{x_1-d}{\Pi} \right)^3 + \frac{b}{B} \left[ \left( \frac{x_1-d}{\Pi} \right)^3 + \frac{\left( 1 - \frac{x_1}{\Pi} \right)^2}{n} \right] \right\}$$

$$+ \frac{\left( \frac{1}{\alpha} - \frac{x_1}{\Pi} \right)^2}{\left( 1 - \frac{x_1}{\Pi} \right)} \frac{m\Omega}{BH},$$

$$\frac{M}{nBH^2\tau_b} = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{x_1}{\Pi} \right)^3 - \left( \frac{x_1-d}{\Pi} \right)^3 \right] + \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{x_1}{\Pi} \right) \frac{d}{\Pi} \left( \frac{x_1}{H} - \frac{1}{2} \frac{d}{\Pi} \right)$$

$$\frac{1}{\left( 1 - \frac{x_1}{\Pi} \right)}$$

$$- \frac{3}{4 - \frac{x_1}{H}} \left\{ \frac{1}{\alpha} - \frac{x_1}{H} \left[ \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{x_1}{H} \right)^2 - \left( \frac{x_1-d}{H} - \frac{d}{H} \right)^2 \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{x_1}{\Pi} \right)^3 + \left( \frac{x_1-d}{\Pi} - \frac{d}{\Pi} \right)^3 \right\} \dots (52)$$

La variable auxiliaire  $\frac{x_1}{H}$  a été conservée pour la facilité des calculs. Le tableau VI donne les valeurs de  $\frac{m\Omega}{BH}$  et de  $\frac{M}{nBH^2\tau_b}$ , sous les formes  $K_1 + \beta K'_1$  et  $K_2 + \beta K'_2$ , pour différentes valeurs usuelles de  $\frac{d}{H}$  et de  $\frac{x_1}{H}$ , ainsi que pour  $n = 1$  (règlements allemand et suisse) et  $n = 2,5$  (règlement autrichien).

Pour  $\alpha$ , une valeur moyenne égale à 1,075, a été choisie, d'où  $\frac{1}{\alpha} = 0,93$ . Une telle hypothèse était nécessaire pour que l'établissement de tableaux ou d'abaques fut pratiquement possible.

Des corrections pour tenir compte d'une valeur quelconque de  $\alpha$ , sont d'ailleurs aisées à appliquer d'après les formules :

$$\left( \frac{m\Omega}{BH} \right)_{\text{corr.}} = \frac{m\Omega}{BH} \frac{\left( 0,93 - \frac{x_1}{H} \right)}{\left[ \frac{1}{\alpha_1} - \frac{x_1}{H} \right]} \dots \dots \dots (33)$$

$$\left( \frac{M}{nBH^2\tau_b} \right)_{\text{corr.}} = \frac{M}{nBH^2\tau_b} + \frac{1}{1 - \frac{x_1}{H}} \left[ \left( \frac{1}{\alpha_1} - \frac{x_1}{H} \right)^2 \left( \frac{m\Omega}{BH} \right)_{\text{corr.}} - \left( 0,93 - \frac{x_1}{H} \right)^2 \frac{m\Omega}{BH} \right] \dots (34)$$

Mais on remarquera qu'aucune hypothèse de simplification théorique n'a été faite, les formules restent parfaitement générales et les tableaux permettent le calcul pour toute valeur de  $\beta$ .

Remarquons aussi que, toutes choses égales d'ailleurs,  $\frac{m\Omega}{BH}$  n'est positif que pour des valeurs de  $\beta$  inférieures à la limite

$$\beta = \frac{2 \frac{d}{H} \left( \frac{x_1}{H} - \frac{1}{2} \frac{d}{H} \right)}{\frac{1}{n} \left( 1 - \frac{x_1}{H} \right)^2 - \left( \frac{x_1}{H} - \frac{d}{H} \right)^2}$$

Au delà de cette limite, la poutre résisterait, d'après cette théorie, sans armature. Les valeurs limites de  $\beta$  se déduisent

très simplement du tableau VI; elles sont souvent plus grandes que l'unité, c'est-à-dire incompatibles avec la forme de la poutre nervurée. L'absurdité pratique des conclusions limites de la théorie doit inspirer la méfiance pour tous les états voisins de ces limites, c'est-à-dire des poutres à nervures épaisses et peu armées.

Pour  $\beta$  constant,  $\frac{m\Omega}{\text{III}}$  n'est positif que pour des valeurs de  $\frac{x_1}{\text{II}}$  supérieures à celles déduites de l'équation

$$2 \frac{d}{\text{II}} \frac{x_1}{\text{II}} + \beta \left( \frac{x_1}{\text{II}} - \frac{d}{\text{H}} \right)^2 = \left( \frac{d}{\text{H}} \right)^2 + \beta \frac{\left( 1 - \frac{x_1}{\text{II}} \right)^2}{n},$$

c'est-à-dire que, pratiquement, il faut que la tension de compression maximum du béton reste assez élevée.

Avant de passer aux applications, ajoutons que dans la méthode particulière de Moersch-Hager, les hypothèses suivantes ont été faites :

1° Le point d'application de la résultante des tensions de compression du béton est à mi-épaisseur de la dalle

$$2^\circ \quad h - d = 0,92 (\text{II} - d)$$

$$3^\circ \quad t_a = 750 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{et} \quad \tau_b = 24 \text{ kg/cm}^2, \quad m = 15 \quad \text{et} \quad n = 1.$$

D'autres abaques plus généraux ont été établis par M. Leuprecht de Bâle (1917) en utilisant les hypothèses suivantes :

1) Le point d'application de la résultante des tensions de compression du béton est distant de la face supérieure de la dalle de  $\frac{x_1}{4}$  (distant de l'axe neutre de  $\frac{3x_1}{4}$ )

$$2) \quad h = 0,94\text{H}$$

$$3) \quad n = 1, \quad m \text{ est quelconque.}$$

Cette dernière méthode est donc plus générale, mais la première hypothèse réduit sa rigueur théorique. Au surplus, l'abaque est établi pour toutes les valeurs de  $\frac{b}{\text{B}}$  et ne représente, comme la présente étude, que des rapports absolus de grandeurs d'égales dimensions physiques.

Le même résultat peut être atteint par la présente méthode et avec l'avantage d'une rigueur théorique complète. Toutes



En tenant compte de la compression dans la nervure,

$$t'_b = 23,4 \text{ kg/cm}^2 \text{ et } t_a = 505 \text{ kg/cm}^2.$$

b) Si nous appliquons la méthode de *Moersch-Hager*, préconisée par le règlement allemand, nous trouverons  $b = 56$ , d'où un poids propre de la poutre égal à 2.250 kilogrammes, pour une section de celle-ci de 0,936 mètres carrés. Le moment fléchissant devient ainsi

$$M = \frac{9.750 \times 8^2}{8} = 78.000 \text{ kgm. ou } 7.800.000 \text{ kg.cm.}$$

$$\text{D'après cette méthode, } \Omega = \frac{7.800.000}{(101,2 + 10) 750} = 93,5 \text{ cm}^2,$$

$$b = 56 \text{ cm.}$$

Pour ces dimensions, à l'aide du tableau V, par les méthodes du chapitre III, et sans tenir compte des tensions de compression dans la nervure, on calcule les tensions :

$$t'_b = 28,3 \text{ kg/cm}^2, \quad t_a = 751 \text{ kg/cm}^2.$$

En tenant compte des compressions dans la nervure :

$$t'_b = 26,1 \text{ kg/cm}^2, \quad t_a = 765 \text{ kg/cm}^2.$$

Les calculs d'après le tableau VI conduisent à des résultats assez différents :

$$\text{Pour } b = 56, \quad \beta = \frac{56}{160} = 0,35; \text{ d'autre part } \frac{d}{H} = \frac{20}{130} = 0,154.$$

$$\text{Pour } \frac{\alpha_1}{H} = 0,48 \text{ et } \frac{d}{H} = 0,154, \quad \frac{M}{nBH^2\tau_b} = 0,116, \quad \frac{m\Omega}{BH} = 0,0738;$$

$$\text{Pour } \frac{\alpha_1}{H} = 0,50 \text{ et } \frac{d}{H} = 0,154, \quad \frac{M}{nBH^2\tau_b} = 0,130, \quad \frac{m\Omega}{BH} = 0,098.$$

$$\text{Or, } \frac{M}{nBH^2\tau_b} = \frac{7.800.000}{160 \times 130^2 \times 24} = 0,120.$$

$$\text{Donc } \frac{m\Omega}{BH} = 0,0807, \quad \Omega = \frac{160 \times 130 \times 0,0807}{15} = 112 \text{ cm}^2.$$

La section d'armature nécessaire, malgré la valeur élevée de  $\beta$ , serait donc d'après les calculs basés sur une théorie exacte, peu différente de celle calculée à l'exemple précédent et supérieure à celle calculée par la méthode *Moersch-Hager*. Cela provient de ce que, pour des valeurs de  $\frac{\alpha_1}{H}$  et de  $\frac{d}{H}$  voisines

de 0,50 et de 0,15 et des valeurs de  $\beta = 0,35$ , c'est une très grosse approximation que contient cette méthode en supposant la résultante des tensions de compression à mi-hauteur de la dalle.

c) Appliquons la méthode de l'auteur et les prescriptions réglementaires suisses :  $m = 20$ ,  $n = 1$  et  $\tau_b = 25$ .

$$\text{Alors } \frac{M}{nBH^2\tau_b} = \frac{7\,440\,000}{160 \times 150^2 \times 25} = 0,110$$

$$\text{et } \frac{d}{H} = 0,154.$$

$$\text{Pour } \frac{x_1}{H} = 0,46 \quad \text{et} \quad \frac{d}{H} = 0,154, \quad \frac{M}{nBH^2\tau_b} = 0,101$$

$$\text{et } \frac{m\Omega}{BH} = 0,073.$$

$$\text{Pour } \frac{x_1}{H} = 0,48 \quad \text{et} \quad \frac{d}{H} = 0,154, \quad \frac{M}{nBH^2\tau_b} = 0,112$$

$$\text{et } \frac{m\Omega}{BH} = 0,092.$$

$$\text{Pour } \frac{d}{H} = 0,154 \quad \text{et} \quad \frac{M}{nBH^2\tau_b} = 0,110, \quad \frac{m\Omega}{BH} = 0,0885$$

$$\Omega = \frac{160 \times 150 \times 0,0885}{20} = 92 \text{ cm}^2.$$

En adoptant  $m = 20$ , pour une telle section d'armature, le tableau V fournit les valeurs suivantes, en négligeant les tensions de compression dans la nervure

$$t'_b = 26 \text{ kg/cm}^2 \quad t_a = 728 \text{ kg/cm}^2.$$

En tenant compte des tensions de compression dans la nervure,

$$t'_b = 23,9 \text{ kg/cm}^2 \quad t_a = 745 \text{ kg/cm}^2.$$

d) Examinons enfin l'application du règlement autrichien par la méthode de l'auteur :

$$m = 15, \quad n = 2,5, \quad \tau_b = 18,8 \text{ kg/cm}^2,$$

pour un béton à 350 kilogrammes de ciment par mètre cube

$$\frac{M}{nBH^2\tau_b} = \frac{7\,440\,000}{2,5 \times 160 \times 150^2 \times 18,8} = 0,0585,$$

$$\text{et } \frac{d}{H} = 0,154.$$

$$\text{Pour } \frac{x_1}{H} = 0,34, \quad \frac{M}{nBH^2\tau_b} = 0,0525 \quad \text{et} \quad \frac{m\Omega}{BH} = 0,039.$$

Pour  $\frac{x_1}{H} = 0,56$ ,  $\frac{M}{nBH^2\tau_b} = 0,060$  et  $\frac{m\Omega}{BH} = 0,050$ .

Dans le cas présent,  $\frac{m\Omega}{BH} = 0,048$ ,

$$\Omega = \frac{160 \times 130 \times 0,048}{15} = 66,5 \text{ cm}^2.$$

En négligeant ou non les tensions de compression dans la nervure, le tableau V fournit pour une telle section d'armature les tensions

$$t'_b = 28,70 \text{ kg/cm}^2 \text{ ou } 27,6, \quad t_a = 1005 \text{ kg/cm}^2 \text{ ou } 1007.$$

La première de ces tensions est admissible, la seconde dépasse la limite de  $900 \text{ kg/cm}^2$  fixée par le règlement autrichien. Le calcul par la méthode ordinaire du tableau V conduirait donc à une section d'armature supérieure à celle qui est nécessaire pour satisfaire à la condition de sécurité à la fissuration.

Le tableau ci-contre résume les résultats des applications de *a*) à *d*) :

Méthode.	RÈGLEMENT ET COEFFICIENTS.	$\frac{b}{B}$	$\Omega$ cm <sup>2</sup>	Section totale de la poutre. (m <sup>2</sup> )	En négligeant les tensions de compression de la nervure.		Compte tenu des tensions de compression de la nervure.	
					$l'_b$	$l_a$	$l'_b$	$l_a$
					<p>Moersch.</p> <p>Hager.</p>	<p>Règlement allemand 1916.</p> <p><math>m = 45, l_a = 750, \tau b = 24,</math> <math>n = 4.</math></p>	<p>0,35</p>	<p>93,5</p>
<p>Méthode</p> <p>de</p> <p>l'auteur.</p>	<p>Règlement suisse 1915,</p> <p><math>m = 20, l_a = 800, \tau b = 25,</math> <math>n = 4.</math></p> <p>Règlement autrichien 1914,</p> <p><math>m = 45, l_a = 900, \tau b = 1,8,</math> <math>n = 2,5.</math></p>	<p>0,25</p>	<p>135</p>	<p>0,76</p>	<p>25,60</p>	<p>498</p>	<p>23,40</p>	<p>505</p>
		<p>0,25</p>	<p>92</p>	<p>0,76</p>	<p>26,00</p>	<p>728</p>	<p>23,90</p>	<p>745</p>
		<p>0,25</p>	<p>66,5</p>	<p>0,76</p>	<p>28,70</p>	<p>1005</p>	<p>27,60</p>	<p>1007</p>

32) *Discussion des résultats obtenus.* — La diversité des résultats d'après les hypothèses réglementaires permet les conclusions suivantes :

1° Qu'il y aurait intérêt à se mettre d'accord sur des hypothèses uniques se rapprochant le plus possible de la réalité des propriétés générales du béton armé ;

2° Que, sous réserve de la confiance qui peut leur être accordée, certaines hypothèses (celles des règlements autrichiens et suisses) n'exigent au point de vue de la sécurité à la fissuration du béton aucun renforcement des dimensions calculées par la méthode classique, partant, aucune dépense supplémentaire ;

3° Que, ainsi qu'il a été énoncé précédemment déjà, il semble inopportun et même imprudent par suite de l'incertitude des hypothèses différentes de tenir compte de la résistance du béton à la traction pour les calculs d'établissement. Même si des coefficients de sécurité incontestables étaient établis, il paraît probable que les résultats auxquels ils conduiraient seraient tellement peu différents, pour les cas pratiques, de ceux calculés par la méthode classique de la Circulaire ministérielle française de 1906, qu'il n'y aurait pas de raison réelle pour préférer la nouvelle méthode à l'ancienne.

Les considérations au sujet de la résistance à la traction du béton et de la sécurité à la fissuration sont-elles alors uniquement d'intérêt théorique ? Il serait inexact de l'affirmer. Le principal argument en leur faveur est que les règlements allemand, suisse et autrichien qui en tiennent compte ne s'y sont attachés précisément que dans un but pratique. Leur efficacité à ce propos est cependant douteuse ; mais l'idée est néanmoins intéressante et utile, parce qu'elle met en relief la fonction d'un élément négligé précédemment, qui est la nervure. Si l'incertitude de la méthode ne permet pas de déterminer les dimensions de sécurité de cet élément, ce qui n'est d'ailleurs pas indispensable, il est important cependant d'avoir qualitativement établi son rôle. Il est utile de connaître que la nervure n'est pas seulement un organe encombrant, alourdissant et coûteux, mais qu'il peut y avoir des inconvénients dans certains cas à la réduire trop et qu'il importe, au contraire, d'après les circonstances, de la développer plus ou moins. La notion peut être importante, notamment pour des expertises d'accidents.

L'intérêt purement théorique de la question est évidemment très grand ; l'hypothèse de la résistance à la traction du béton est, sans aucun doute, plus voisine de la réalité que la négation de cette résistance. Il ne serait pas possible de l'écarter dans une étude expérimentale sérieuse et complète des conditions de résistance du béton armé. Les progrès réalisés dans ses applications et sa mise au point étant dus en grande partie aux résultats de recherches des laboratoires de résistance, la preuve est faite pour les techniciens qu'ils ne peuvent pas se désintéresser de l'avancement de la science.

Ces résultats généraux étaient connus et exprimés bien longtemps avant la rédaction du présent mémoire. Mais comme ils sont en somme peu répandus, il a paru utile à l'auteur d'en rendre la théorie plus pratique, de la mettre sous une forme convenable, accessible à la technique journalière et ainsi d'essayer d'en dégager davantage et d'en pouvoir rendre plus familiers les caractères essentiels.

33. Un point reste à trancher, de l'opportunité d'employer la méthode de l'auteur consistant à choisir  $\frac{b}{B}$  et à calculer  $\Omega$  en vue de la sécurité à la fissuration, ou bien le principe de Moersch Hager, de calculer le rapport convenable  $\frac{b}{B}$ ,  $\Omega$  ayant été déterminé par la méthode classique.

Cela dépend des hypothèses mises à la base du calcul. Si elles sont telles (règlements autrichien et suisse) qu'avec des nervures d'épaisseur normale, les sections d'armature calculées par la méthode classique n'exigent aucun renforcement pour satisfaire à la sécurité de la fissuration, une méthode dérivée de celle de Moersch-Hager serait préférable. Elle conduirait dans le cas de l'application 31c à un rapport  $\frac{b}{B}$  peu supérieur à 0,25, dans le cas de l'application 31d à un rapport  $\frac{b}{B}$  inférieur à cette valeur. Les hypothèses font que la majeure partie de la résistance à la traction est fournie par l'armature ; le béton de la nervure ne fournit qu'un faible supplément, de sorte que malgré l'incertitude de ce facteur, l'insécurité résultante est bien réduite. Les dimensions de la nervure restent normales, modestes ; les risques de tensions internes dues à des retraits inégaux, etc., et des fissurations subséquentes

qu'il s'agit précisément d'éviter, sont donc faibles, surtout si la prise du béton s'effectue dans un état d'humidité entretenue.

Si les hypothèses sont, au contraire, analogues à celles du règlement allemand et conduisent à une augmentation de la part de résistance à la traction qui échoît au béton, le principe de Moersch-Hager conclut généralement à des épaisseurs exagérées des nervures ; il en résulte une augmentation des risques de tensions internes, donc de fissurations et un accroissement de l'incertitude de résistance d'un élément qui a pris cependant une assez grande importance. D'autre part, la construction en subit un alourdissement non négligeable, dont j'ai cherché par l'application du § 31 à mettre en relief l'influence sensible sur la sollicitation et sur l'accroissement des dimensions. Si l'on divise la nervure, le travail et le prix du coffrage, sont considérablement accrus, ainsi que les fers accessoires, etc.

La méthode de l'auteur semble préférable dans ce cas ; elle limite l'épaisseur de la nervure à une dimension normale qu'il paraît opportun de ne pas dépasser, ou qui serait déterminée par toute autre considération (le rapport  $\frac{b}{B} = 0,25$  n'a été choisi, dans les applications qui précèdent, qu'à titre d'exemple, et ne prétend pas constituer une norme). Les risques de tensions internes, donc de fissuration, sont réduits. La résistance à la traction nécessaire pour ne pas atteindre la limite statique de fissuration du béton est obtenue par un renforcement de l'armature, dont les propriétés de résistance à la traction, à l'opposé de celles du béton, sont absolument certaines. Si l'on se réfère à la théorie classique du béton armé, un renforcement très sensible de la poutre est donc réalisé ; la sollicitation extérieure maximum admissible est augmentée.

L'expérience des chercheurs les plus dignes de foi a permis de constater que les corrosions des armatures sont le plus souvent locales et superficielles. Un renforcement important d'armature par rapport à celle qui est strictement nécessaire pour assurer la résistance statique, fournit donc une marge de corrosion, qui donne toute sécurité (44,5 p. c. dans l'exemple 31a par rapport à l'exemple 31b). Car on peut dire qu'il est établi qu'une telle proportion de corrosion ne pourrait se produire dans un ouvrage à la confection duquel a été apporté

un soin normal et qui est sollicité dans les limites de sécurité pratiques. M. PROBST, (*Leçons sur le béton armé 1917*, t. I, pages 169 à 187), formule à cet effet dans son ouvrage remarquable des conclusions formelles. Il recommande l'emploi d'un béton plastique de bonne qualité, c'est-à-dire non poreux et assez résistant; l'enrobage des armatures dans le béton à une profondeur suffisante qui dépendra notamment des circonstances plus ou moins favorables à la corrosion de l'armature et qui ne devrait pas être inférieure à 3 centimètres pour les pièces soumises à des charges variables et à des chocs, ou exposées à l'action des gaz actifs ou de l'eau. Moyennant ces précautions qui n'ont aucun caractère exceptionnel, de fines fissures statiques ou autres ne peuvent donner lieu qu'à des corrosions sporadiques ou localisées. Des attaques plus étendues et pouvant devenir dangereuses n'ont été observées que pour des pièces surchargées au point que la limite de striction du métal était atteinte, la liaison entre le béton et l'armature rompue et les fissures largement ouvertes (ce qui constitue pratiquement la désagrégation du béton et la mise hors service de l'ouvrage par sollicitation sortant des limites de sécurité).

Mais, plus encore, le même auteur (*op. cité* page 155) établit que la tension, ou mieux, l'allongement de fissuration du béton peuvent être augmentés par l'emploi d'un bon béton résistant, plastique à la mise en œuvre et ayant fait prise dans un état entretenu d'humidité (ce qui diminue le retrait et peut même le rendre négatif), en enrobant les armatures assez profondément dans le béton (condition déjà exprimée ci-dessus) et en répartissant bien l'armature dans le béton (c'est-à-dire en employant un grand nombre d'armatures minces plutôt qu'un petit nombre d'armatures épaisses). Il n'est donc pas dit qu'une augmentation de l'armature soit favorable; au contraire, si elle était réalisée par un accroissement des dimensions des barres, elle pourrait hâter la production des fissures. Mais on peut admettre qu'une augmentation modérée du nombre des armatures, sans modifier leurs dimensions, assure une répartition plus favorable et, partant, accroît la résistance à la fissuration.

Donc, on est fondé à admettre que les dimensions calculées d'après la méthode de l'auteur dans l'application 31a) assurent une sécurité plus réelle à la fissuration, que celles calculées au 31b) par le principe de Moersch-Hager.

Elles procurent tout au moins une plus grande marge pour la corrosion, d'ailleurs improbable, du métal. Enfin, si elles sont exagérées par suite de l'observation d'une prescription peut-être superflue, elles assurent au moins du même coup une augmentation très sensible de résistance, ce qui, notamment pour des constructions de chemins de fer et de services publics en général, n'est pas nuisible.

L'accroissement des dimensions par la méthode Moersch-Hager portant sur le béton, il n'en résulte aucun renforcement notable de la résistance, mais rien qu'un alourdissement sans compensation. Il faut, bien entendu, distinguer entre le principe et la méthode de Moersch-Hager, la dernière n'étant qu'une réalisation imparfaite du principe, entachée, ainsi qu'il a été démontré, d'une erreur systématique pouvant devenir très importante, précisément dans les cas pratiques les plus intéressants.

On pourrait donc ajouter que la *méthode* du règlement allemand ne donne même pas toutes garanties au sujet de la sécurité à la fissuration.

Pour parfaire l'étude critique et n'écarter aucun élément, il resterait à examiner quelle est la plus favorable des deux méthodes au point de vue du prix. Comparons donc les solutions des applications 31 *b*) et 31 *a*). — Les surfaces des coffrages sont les mêmes dans les deux cas, ainsi que les dimensions des dalles; nous supposerons de même que les armatures accessoires sont équivalentes. Il suffit donc de comparer les deux nervures qui comportent, d'une part, 6.066,5 cm<sup>2</sup> de béton et 93,5 cm<sup>2</sup> d'acier et, d'autre part, 4.265 cm<sup>2</sup> de béton et 135 cm<sup>2</sup>. d'acier. Au mètre courant

0.60665 m<sup>3</sup> de béton et 75 kgs d'acier  
 0,4265 m<sup>3</sup> de béton et 105 kgs d'acier.

L'égalité de prix serait réalisée lorsque,  
 B étant le prix du mètre cube de béton mis en œuvre,  
 A le prix de l'acier plié et mis en place, par 100 kgs.

$$0,60665 \times B + 0,75 A = 0,4265 B + 1,05 A$$

$$\text{d'où } B = \frac{0,50}{0,18015} \times A = 1,66 A.$$

Si B est inférieur à 1,66 × A, la méthode de Moersch-Hager conduit au résultat le plus économique. L'inverse se produit si B est supérieur à 1,66 × A. La première hypothèse

est généralement réalisée; elle l'était aussi avec les prix allemands d'avant la dépréciation du mark, donc à l'époque de l'établissement de la méthode de Moersch-Hager.

En effet, d'après GESTECH, (*La concurrence du fer et du béton armé dans la construction des ponts*, Berlin, 1918, pages 61 et suiv.), le prix du béton mis en œuvre était de 24 marks par mètre cube et celui des fers mis en place de 16 marks par 100 kilogrammes, d'où  $B = 1,50 A$ .

En automne 1921, en Belgique, les prix pratiqués étaient environ de

Fr. 110	pour la tonne de ciment,
55	les 100 kilogrammes d'acier pour armatures,
14 à 20	le mètre cube de sable,
15 à 25	le mètre cube de pierraille,
	2,65 le salaire horaire du bétonneur,
	2.50 le salaire horaire du monteur d'armatures,
	1,75 le salaire horaire du manœuvre.

Ces prix s'appliqueraient aux matériaux rendus à pied d'œuvre. Nous ne tenons pas compte des suppléments pour frais généraux, bénéfice, etc., c'est-à-dire que nous ne considérons que le prix de revient technique. Le béton à 350 kilogrammes de ciment pour 500 litres de sable et 750 litres de pierraille coûterait, mis en œuvre, de 82 à 89 francs par mètre cube. Les 100 kilogrammes d'armatures, mis en place, coûteraient 72 fr. 50 environ. C'est-à-dire que  $B$  est voisin de  $1,25 A$  et donc inférieur à  $1,66 \times A$ ; la méthode de l'auteur serait donc aussi, aux prix actuels, moins économique que celle de Moersch-Hager. Mais l'avantage deviendrait inverse si l'on tenait compte de la correction de l'erreur reconnue dans la méthode de Moersch-Hager; il faudrait, en effet, dans ce cas, 87<sub>k</sub>.5 d'acier par mètre courant, et la condition d'égalité deviendrait  $B = 0,975 A$ .

La comparaison a été établie par le moyen d'exemples concrets et chiffrés, non par des formules et symboles généraux. Les conclusions qui ont été ainsi rendues plus compréhensibles n'en sont pour cela pas moins générales et notamment en ce qui concerne la dernière question de prix. Le but poursuivi n'est pas, en effet, de déceler un avantage, les différences devant toujours être assez faibles, mais bien de montrer que la solution de l'auteur n'est guère, au point de vue écono-

mique, malgré la grande augmentation d'armature, plus défavorable que celle de Moersch-Hager. Les avantages qu'elle peut certainement revendiquer sont la légèreté, l'aspect plus satisfaisant et l'accroissement considérable de résistance à prix égal sinon inférieur, dans le cas, bien entendu, où l'on s'attache strictement à des prescriptions analogues à celles du règlement allemand. A tous égards, la sécurité réalisée est plus grande.

34) *Standardisation de la largeur relative des nervures.*

Ainsi qu'il a été remarqué plus haut, aucune différence très sensible dans les résultats de deux méthodes ne se révèle lorsque l'on applique les règlements suisse et autrichien. Si l'on ne craint pas d'allonger les calculs pour établir rationnellement toutes les dimensions, il faudrait, après avoir calculé  $h$  et  $\Omega$  par la méthode classique, déterminer  $\frac{b}{B}$  par la condition de sécurité à la fissuration, d'après le principe de la méthode de Moersch-Hager.

Les formules (31) et (32) seraient à transformer comme suit :

$$\frac{b}{B} = \frac{2 \left[ \frac{d}{H} \left( \frac{x_1}{H} - \frac{1}{2} \frac{d}{H} \right) - \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{x_1}{H} \right) \frac{n \cdot \Omega}{BH} \right]}{\frac{1}{n} \left( 1 - \frac{x_1}{H} \right)^2 - \left( \frac{x_1}{H} - \frac{d}{H} \right)^2} \quad (35')$$

$$\frac{M}{nBH^2\tau_b} =$$

$$\frac{1}{3 \left( 1 - \frac{x_1}{H} \right)} \left\{ \left[ \left( \frac{x_1}{H} \right)^3 - \left( \frac{x_1}{H} - \frac{d}{H} \right)^3 \right] + 2 \frac{d}{H} \left( \frac{x_1}{H} - \frac{1}{2} \frac{d}{H} \right) \frac{\left( \frac{x_1}{H} - \frac{d}{H} \right)^3 + \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{x_1}{H} \right)^3}{\frac{1}{n} \left( 1 - \frac{x_1}{H} \right)^2 - \left( \frac{x_1}{H} - \frac{d}{H} \right)^2} \right\} \\ + \frac{1}{\alpha} - \frac{x_1}{H} \left[ \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{x_1}{H} \right) - \frac{2 \left( \frac{x_1}{H} - \frac{d}{H} \right)^3 + \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{x_1}{H} \right)^3}{\frac{1}{n} \left( 1 - \frac{x_1}{H} \right)^2 - \left( \frac{x_1}{H} - \frac{d}{H} \right)^2} \right] \frac{m\Omega}{BH} \quad (34')$$

formes qui conviennent pour une valeur quelconque de  $n$  (règlement autrichien).

Elles se simplifient légèrement si  $n = 1$  (règlement suisse).

$$\frac{b}{B} = \frac{\left[ \frac{d}{H} \left( 2 \frac{x_1}{H} - \frac{d}{H} \right) - 2 \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{x_1}{H} \right) \frac{m\Omega}{BH} \right]}{\left( 1 - \frac{d}{H} \right) \left[ 1 - \left( 2 \frac{x_1}{H} - \frac{d}{H} \right) \right]} \dots (33'')$$

$$\frac{M}{BH^2\tau_b} = \frac{1}{3 \left( 1 - \frac{x_1}{H} \right)} \times$$

$$\left\{ \left[ \left( \frac{x_1}{H} \right)^3 - \left( \frac{x_1}{H} - \frac{d}{H} \right)^3 \right] + \frac{d}{H} \left( 2 \frac{x_1}{H} - \frac{d}{H} \right) \frac{\left( 1 - \frac{x_1}{H} \right)^2 - \left( 1 - \frac{x_1}{H} \right) \left( \frac{x_1}{H} - \frac{d}{H} \right) + \left( \frac{x_1}{H} - \frac{d}{H} \right)^2}{\left[ 1 - \left( 2 \frac{x_1}{H} - \frac{d}{H} \right) \right]} \right\} \\ + \frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{x_1}{H}}{1 - \frac{x_1}{H}} \left[ \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{x_1}{H} \right) - \frac{2}{3} \frac{\left( 1 - \frac{x_1}{H} \right)^2 - \left( 1 - \frac{x_1}{H} \right) \left( \frac{x_1}{H} - \frac{d}{H} \right) + \left( \frac{x_1}{H} - \frac{d}{H} \right)^2}{1 - \left( 2 \frac{x_1}{H} - \frac{d}{H} \right)} \right] \frac{m\Omega}{BH} \dots (34'')$$

Ces formules, d'apparence compliquée, ne sont cependant pas difficiles à traduire en tableaux en conservant  $\frac{x_1}{H}$  comme variable auxiliaire.

Pour une valeur choisie de  $n$ , ils pourraient donner pour différentes valeurs de  $\frac{x_1}{H}$  et de  $\frac{d}{H}$  (comme dans le tableau VI)

les valeurs de  $\frac{b}{B}$  et  $\frac{M}{nBH^2\tau_b}$  sous les formes

$$\frac{b}{B} = k_1 + k_2 \frac{m\Omega}{BH},$$

$$\frac{M}{nBH^2\tau_b} = k_3 + k_4 \frac{m\Omega}{BH},$$

$k_1, k_2, k_3$  et  $k_4$  étant des coefficients numériques. Les tableaux seraient d'emploi très facile pour le calcul d'établissement, comme pour le calcul de vérification.

Nous croyons suffisant d'en indiquer le principe sans les établir, car ils ne sont pas d'intérêt direct. Les calculs sont, d'ailleurs, susceptibles d'erreurs importantes, ce qui se con-

goit aisément, car les variations assez importantes de  $\beta$  influent peu sur la valeur de  $\frac{M}{nBH^2\tau_b}$ . Il serait plus pratique de recourir à une méthode analogue à celle de l'application du § 17 du chapitre II (vérification rapide de la sécurité à la fissuration), c'est-à-dire de rechercher des conditions telles que l'observation des taux de travail de sécurité de la méthode classique de calcul du béton armé (chap. III) assure en même temps avec certitude la sécurité à la fissuration. Elle ne devrait ainsi plus faire l'objet d'aucun calcul ni d'aucune vérification. Le moyen le plus simple d'arriver à un tel résultat serait de « standardiser » les largeurs relatives  $\frac{b}{B}$  des nervures, d'après le type de poutre et la nature de la sollicitation.

Le problème s'énoncerait comme suit : les pièces étant à calculer en observant des taux de travail de sécurité  $t_a$  et  $t'_b$ , déterminer une valeur de  $\frac{b}{B}$  telle que la sécurité à la fissuration soit concurremment assurée, c'est-à-dire que les tensions de traction calculées pour les fibres extrêmes de la nervure soient inférieures à  $\tau_b$ .

La solution est aisée à concevoir.

A l'aide du tableau V, pour une valeur quelconque de  $\frac{d}{H}$ , le rapport  $\frac{t_a}{mt'_b}$  étant connu, on calcule aisément  $\frac{m\Omega}{BH}$ ,  $\frac{M}{BH^2t'_b}$ .

$$\text{On en déduit } \frac{M}{nBH^2\tau_b} = \frac{M}{BH^2t'_b} \times \frac{t'_b}{n\tau_b}.$$

A l'aide des équations 34' ou 34'', connaissant  $\frac{M}{nBH^2\tau_b}$  et  $\frac{m\Omega}{BH}$ , on calcule  $\frac{x_1}{H}$  et ensuite par les équations 33' ou 33'' la valeur de  $\frac{b}{B}$ .

La seule difficulté matérielle consiste dans le calcul de  $\frac{x_1}{H}$ , racine d'une équation de degré supérieur et très complexe.

On effectue ce calcul pour un certain nombre de valeurs pratiques de  $\frac{m\Omega}{BH}$ ; on a ainsi un tableau, ou une courbe de variation de  $\frac{b}{B}$  en fonction de  $\frac{m\Omega}{BH}$ .

D'après l'allure de cette courbe, on fixe une valeur unique « standard » de  $\frac{b}{B}$ , ou plusieurs valeurs échelonnées pour des variations correspondantes de  $\frac{m\Omega}{BH}$  ou encore une formule empirique de  $\frac{b}{B}$  en fonction de  $\frac{m\Omega}{BH}$ , valables pour des valeurs déterminées de  $m$  et  $n$ , ainsi que des coefficients de sécurité  $t_a$ ,  $t'_b$  et  $\tau_b$  prescrits par le règlement pour des pièces sollicitées d'une manière déterminée (ponts de chemin de fer, ponts-routes, planchers, etc...).

L'auteur ne pouvait songer à entreprendre ce travail fastidieux et qui exige un choix préalable très soigneusement étudié des hypothèses. Il pourrait être fait en vue de l'établissement d'un règlement international pour les constructions en béton armé.

Le tableau unique VI exprimant  $\frac{m\Omega}{BH}$  et  $\frac{M}{nBd^2\tau_b}$  sous les formes  $k_1 + k_2 \frac{b}{B}$  et  $k_3 + k_4 \frac{b}{B}$  permettrait tous les calculs d'établissement et de vérification.

A titre d'exemple, appliquons les suggestions précédentes au cas des bâtiments d'après le règlement suisse qui fixe

$$m = 20, \quad n = 1, \quad t_a = 1200, \quad t'_b = 40 \quad \text{et} \quad \tau_b = 30.$$

$$\text{Par conséquent, } \frac{t_a}{mt'_b} = 1,50 \quad \text{et} \quad \frac{t'_b}{n\tau_b} = 1,55.$$

D'après le tableau V,  $\frac{h}{x} = 2,50$ . Envisageons deux cas presque extrêmes :

$$\frac{h}{d} = 7,50 \quad \text{et} \quad \frac{h}{d} = 2,50.$$

$$\text{Pour } \frac{h}{d} = 7,50, \quad \frac{x}{d} = 5, \quad \frac{m\Omega}{BH} = 0,558, \quad \frac{M}{Bd^2t'_b} = 5,861.$$

$$\text{Comme } \alpha = 1,075, \quad \frac{d}{H} = 0,124, \quad \frac{m\Omega}{BH} = 0,069.$$

$$\text{et } \frac{M}{BH^2t'_b} = 0,090.$$

$$\text{Donc } \frac{M}{BH^2\tau_b} = 0,09 \times 1,55 = 0,120.$$

L'équation (34'') admet comme solution  $\frac{x_1}{H} = 0,494$

d'où  $\frac{b}{B} = 0,40$  environ d'après (33').

L'épaisseur relative de la nervure est grande, à cause de la grande réduction de la tension d'armature, diminuée de 1.200 à moins de  $20 \times 30 = 600$ , pour satisfaire à la sécurité de fissuration.

Pour  $\frac{h}{d} = 2,50$ ,  $\frac{x}{d} = 1,00$ ,  $\frac{m\Omega}{B\Pi} = 0,554$  et  $\frac{M}{Bd^2t'_b} = 1,085$ .

Donc  $\frac{d}{H} = 0,372$ ,  $\frac{m\Omega}{B\Pi} = 0,124$ ,  $\frac{M}{B\Pi^2t'_b} = 0,15$

et  $\frac{M}{B\Pi^2\tau_b} = 0,20$ .

L'équation (34'') admet comme solution  $\frac{x_1}{H} = 0,525$ , d'où,

d'après (33'),  $\frac{b}{B} = 0,75$ , valeur encore plus considérable.

Quelle peut être la raison de ces résultats presque inattendus, alors que le règlement suisse, par sa valeur élevée de  $m$  devrait être plutôt favorable. C'est la valeur trop élevée de  $t_a$  par rapport à  $\tau_b$ .

En effet  $\frac{t_a}{m\tau_b} = \frac{1200}{20 \times 30} = 2$ .

Ce rapport est plus avantageux pour les taux de sécurité prescrits pour les ponts de chemin de fer.

$t_a = 800$ ,  $\tau_b = 25$ ,  $\frac{t_a}{m\tau_b} = \frac{800}{20 \times 25} = 1,60$ .

Il faudrait donc moins de renforcements par rapport au calcul classique pour assurer la sécurité à la fissuration dans ce dernier cas.

Ce caractère est encore plus accentué pour le règlement autrichien ; dans l'exemple d) du § 31  $\frac{t_a}{nm\tau_b}$  est, en effet, égal à 1.275.

On se trouve ainsi ramené à la conclusion qu'un moyen de réduire les tensions de traction du béton sans avoir recours à des nervures d'épaisseur relative exagérée consiste à réduire le taux de travail des armatures, c'est-à-dire à augmenter leur

section totale. Cette conclusion n'est toutefois applicable que si, suivant la méthode spécifiée par le règlement allemand, on limite la hauteur théorique de la poutre à la valeur minimum compatible avec les taux de travail  $t_a$  et  $t'_b$  imposés ou encore, si la limitation de hauteur imposée par les circonstances est telle que  $t'_b$  doive atteindre une valeur élevée.

Si la hauteur n'est pas étroitement limitée, la réduction des tensions de traction du béton peut être recherchée par un tout autre moyen et qui découle de la conclusion du § 17. Les tensions d'extension du béton seront, toutes choses égales d'ailleurs, d'autant plus réduites que le rapport  $\frac{t_a}{mt'_b}$  sera plus élevé, c'est-à-dire que la tension de compression du béton sera plus réduite. Cette méthode conduit à des poutres de grande hauteur relative à faible pourcentage d'armature. En se référant au chapitre III, l'on se rappellera que les poutres présentant ces particularités, dans lesquelles  $t_a$  atteint la limite de sécurité tandis que  $t'_b$  reste inférieure au taux maximum, dont la hauteur théorique est supérieure à ce que les auteurs allemands appellent la « hauteur minimum », offrent par rapport à cette dernière l'avantage d'être généralement plus économiques. Considérée sous cet angle, la limitation des tensions de traction du béton, loin de constituer une sujétion, s'accorde au contraire avec la recherche de l'économie. Elle est très rationnelle, parce qu'elle est basée sur le rôle prépondérant de l'armature de traction, élément certain, tandis qu'elle réduit les fatigues des bétons, matériaux moins sûrs. Elle est conforme aux enseignements généraux de la résistance des pièces fléchies, qui préconisent l'emploi de pièces de grande hauteur. Les poutres de grande hauteur relative sont d'aspect élégant et sont proportionnellement les plus légères.

Au point de vue pratique, la réduction des tensions de traction du béton par la réduction correspondante du taux de travail de compression, loin d'exiger des mélanges riches s'accommode donc de béton de composition moyenne ajoutant ainsi à l'économie déjà réalisée par la réduction d'armature.

Pour mettre en relief les considérations ci-dessus énoncées, reprenons l'application du § 31a et recherchons quelle valeur atteindrait la tension de traction maximum si l'on calculait la poutre par les coefficients  $t_a = 900 \text{ kg/cm}^2$  et  $t'_b = 25$ .

$$\text{Comme } M = \frac{9.500 \times 8^2}{8} = 76.000 \text{ kgm. (poids propre } 2.000 \text{ kg/mct.)}$$

$$\frac{M}{Bd^2t'_b} = \frac{7.600.000}{160 \times 400 \times 25} = 4,75.$$

$$\text{Comme } \frac{t_a}{mt'_b} = 2,40, \text{ on déduit du tableau V}$$

$$\frac{x}{d} = 2,0625, \text{ d'où } \frac{h}{d} = 3,40 \times 2,0625 = 7,$$

$$h = 140$$

$$H = 150 \text{ cm.}$$

$$\frac{m\Omega}{Bd} = 0,5154, \text{ d'où } \Omega = \frac{160 \times 20 \times 0,5154}{15} = 67,5 \text{ cm}^2.$$

Le poids propre envisagé est donc trop faible d'environ 16 kg/m., ce qui peut être négligé par rapport à la charge totale de 9.500 kilogrammes.

$$\frac{m\Omega}{BH} = 0,0421.$$

$$\text{D'après le tableau VI, pour } \beta = 0,25 \text{ et } \frac{d}{h} = 0,143, \frac{x_1}{H} = 0,43$$

$$\frac{M}{BH^2\tau_b} = 0,082.$$

$$\text{d'où } \tau_b = \frac{7.600.000}{160 \times 150^2 \times 0,082} = 25,7.$$

Ainsi donc, par rapport à la solution du paragraphe 31a, au prix d'une légère augmentation de hauteur (20 cm) augmentant de 687 cm<sup>2</sup> la section du béton, on diminue de 67,5 cm<sup>2</sup> la section d'armature, soit 50 p. c. tout en assurant presque la sécurité à la fissuration. Un minime accroissement de H suffirait pour la parfaire.

L'application examinée a été choisie au hasard dans l'ouvrage de KERSTEN. *Brücken in Eisenbeton*, Band I, elle n'est pas très favorable, mais elle permet cependant d'inférer avec certitude qu'en plus d'un avantage général d'économie, les poutres de grande hauteur relative présentent, toutes choses égales d'ailleurs, une plus grande sécurité à la fissuration.

Un procédé de standardisation très simple s'en déduit. Pour les ouvrages où il paraîtrait utile de limiter les tensions de traction du béton, l'épaisseur de la nervure sera normalisée en

fonction de la largeur de la dalle, soit empiriquement, soit par le moyen de considérations théoriques, basées sur la résistance du glissement par exemple.

La poutre sera ensuite calculée par la méthode ordinaire, au moyen de la limite de fatigue normale de  $t_a$ , mais en réduisant suffisamment  $t'_b$  pour que  $\tau_b$  reste inférieur à la limite fixée. Cette opération s'effectuera par tâtonnements de la même manière que dans l'application ci dessus ou à coup sûr par l'emploi de valeurs stipulées  $t'_b$  calculées à cet effet par les soins de l'organe de standardisation.

Il n'est pas possible de clore ce chapitre par des conclusions formelles; il s'arrête au stade des propositions dont la discussion reste ouverte. C'est qu'à cette note uniquement rationnelle manquent les bases expérimentales nécessaires. Celles qui existent sont contradictoires et ne permettent pas de conclure. Leur influence sur les calculs a été assez mise en relief.

L'auteur n'a point cherché à imaginer des hypothèses pour les besoins de la cause. Mais il croit pouvoir exprimer le vœu que l'on recherche, établisse et tombe d'accord au sujet de normes internationales. Les théories exposées sont assez souples pour pouvoir s'appliquer aux résultats que l'on obtiendrait, quels qu'ils soient.

Elles auraient encore atteint un but suffisant, si elles conduisaient à la conclusion générale qu'elles sont superflues et qu'au lieu de s'embarrasser de longs calculs, il est préférable de réduire convenablement le taux de travail de compression du béton.

35) Il ne sera pas question du calcul des tensions de traction du béton dans les poutres nervurées à double armature. Il ne pourrait être effectué des calculs de prédétermination que par le moyen d'hypothèses spéciales ou d'approximations qui enlèveraient à l'étude tout intérêt. Les conclusions du paragraphe 18 du chapitre II sont applicables par analogie au cas qui nous occupe et dont la signification est très restreinte.

En réalité, on ne peut guère concevoir d'autre méthode de calcul que celle par vérification des tensions, qui s'effectuera le plus aisément par le calcul arithmétique ou graphique des modules d'inertie.

**TABLEAU VI. Flexion plane simple des poutres nervurées. Calcul des tensions d'extension du béton.**

$d/H =$		0,30		0,25		0,20		0,15		0,10	
$n$	$x_1/H$	$m\Omega/BH$	$M/nBH^2\tau_b$								
1	0,40	0,142 - 0,350β	0,101 - 0,054β	0,150 - 0,518β	0,094 - 0,027β	0,113 - 0,302β	0,084 - 0,017β	0,092 - 0,281β	0,070 - 0,005β	0,066 - 0,250β	0,051 + 0,016β
	0,42	0,159 - 0,316β	0,113 - 0,028β	0,145 - 0,301β	0,105 - 0,021β	0,124 - 0,282β	0,095 - 0,008β	0,101 - 0,258β	0,077 + 0,008β	0,072 - 0,229β	0,056 + 0,028β
	0,44	0,178 - 0,300β	0,125 - 0,022β	0,161 - 0,283β	0,117 - 0,013β	0,139 - 0,261β	0,102 + 0,001β	0,112 - 0,254β	0,084 + 0,019β	0,080 - 0,212β	0,061 + 0,041β
	0,46	0,198 - 0,285β	0,139 - 0,016β	0,178 - 0,265β	0,127 - 0,005β	0,153 - 0,238β	0,112 + 0,011β	0,123 - 0,208β	0,092 + 0,051β	0,087 - 0,172β	0,067 + 0,056β
	0,48	0,220 - 0,264β	0,153 - 0,009β	0,197 - 0,242β	0,140 + 0,004β	0,169 - 0,214β	0,123 + 0,021β	0,135 - 0,179β	0,100 + 0,043β	0,096 - 0,140β	0,073 + 0,071β
	0,50	0,244 - 0,244β	0,168 - 0,002β	0,218 - 0,218β	0,153 + 0,013β	0,186 - 0,186β	0,134 + 0,033β	0,148 - 0,148β	0,109 + 0,057β	0,105 - 0,105β	0,079 + 0,087β
	0,52	0,271 - 0,222β	0,185 + 0,006β	0,241 - 0,192β	0,168 + 0,023β	0,205 - 0,156β	0,147 + 0,045β	0,163 - 0,114β	0,119 + 0,072β	0,115 - 0,066β	0,086 + 0,105β
	0,52	0,084 - 0,151β	0,062 - 0,021β	0,080 - 0,148β	0,060 - 0,019β	0,072 - 0,140β	0,055 - 0,014β	0,060 - 0,128β	0,047 - 0,006β	0,044 - 0,112β	0,035 + 0,006β
	0,54	0,097 - 0,146β	0,071 - 0,019β	0,091 - 0,141β	0,068 - 0,016β	0,081 - 0,131β	0,061 - 0,010β	0,067 - 0,117β	0,052 - 0,000β	0,049 - 0,099β	0,039 + 0,013β
	0,56	0,111 - 0,141β	0,080 - 0,017β	0,103 - 0,133β	0,076 - 0,012β	0,095 - 0,121β	0,068 - 0,005β	0,075 - 0,105β	0,058 + 0,006β	0,054 - 0,084β	0,043 + 0,019β
2,5	0,38	0,125 - 0,134β	0,090 - 0,014β	0,116 - 0,124β	0,085 - 0,008β	0,102 - 0,110β	0,076 + 0,001β	0,083 - 0,092β	0,064 + 0,013β	0,060 - 0,069β	0,047 + 0,030β
	0,40	0,142 - 0,126β	0,101 - 0,012β	0,130 - 0,115β	0,094 - 0,004β	0,113 - 0,098β	0,084 + 0,007β	0,092 - 0,077β	0,070 + 0,021β	0,066 - 0,051β	0,051 + 0,039β
	0,42	0,159 - 0,118β	0,113 - 0,007β	0,145 - 0,104β	0,105 + 0,001β	0,124 - 0,084β	0,095 + 0,013β	0,101 - 0,060β	0,077 + 0,029β	0,072 - 0,032β	0,056 + 0,050β
	0,44	0,178 - 0,118β	0,125 - 0,005β	0,161 - 0,091β	0,117 + 0,007β	0,139 - 0,069β	0,102 + 0,020β	0,112 - 0,042β	0,084 + 0,038β	0,080 - 0,010β	0,061 + 0,061β

### TROISIÈME SECTION.

#### Calcul des étriers, barres obliques et de la répartition des barres.

#### CHAPITRE V.

#### PL. VIII.

#### TENSIONS TANGENTIELLES ET PRINCIPALES.

36) *Tensions tangentielles appliquées au béton seul.*— Dans une section normale donnée d'une poutre de section rectangulaire ou nervurée, le maximum de la tension tangentielle s'exprime par la formule :

$$\theta_m = \frac{T}{b(h-z)},$$

$T$  étant l'effort tranchant dans la section considérée,  
 $b$  la largeur de la poutre rectangulaire ou de la nervure de la poutre en  $T$ ,

$(h - z)$  la distance du centre de gravité de l'armature au point d'application de la résultante des tensions de compression.

Nous négligeons dans cette étude les tensions de traction du béton. Si l'on en tenait compte, le calcul des tensions tangentielles et des tensions principales se ferait absolument comme pour les pièces homogènes. Pour des sections rectangulaires, la même formule serait d'ailleurs applicable,  $(h - z)$  désignant la distance entre les deux résultantes des tensions de compression et de traction. Cette distance étant plus réduite, les tensions calculées seraient plus grandes.

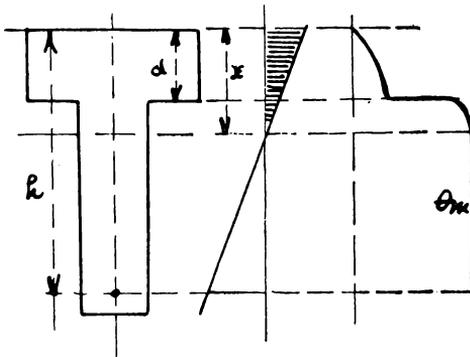


Fig. 6.

L'hypothèse du défaut de résistance à la traction du béton est donc trop favorable pour le calcul des fatigues dues au glissement. L'influence en est toutefois moins marquée pour les poutres nervurées.

La figure 6 ci-contre indique la loi gra-

phique de variation des tensions tangentiellles dans l'étendue d'une section normale de poutre en T, dans le cas le plus général.

Pour les poutres rectangulaires et pour les poutres nervurées, lorsque  $\frac{x}{d} \leq 1$ , c'est-à-dire que l'axe neutre est compris

dans l'épaisseur de la dalle,  $z = \frac{x}{3}$  et  $\theta_m = \frac{T}{b \left( h - \frac{x}{3} \right)}$ .

Si  $\frac{x}{d} > 1$ , c'est-à-dire que l'axe neutre coupe la nervure, si l'on néglige les tensions de compression dans la nervure :

$$z = \frac{d(3x - 2d)}{5(2x - d)}$$

Nous choisirons pour la formule la forme relative :

$$\frac{T}{\theta_m bh} = 1 - \frac{z}{h}$$

Pour les poutres rectangulaires et les poutres nervurées, lorsque  $\frac{x}{d} < 1$  elle s'écrit  $\frac{T}{\theta_m bh} = 1 - \frac{1}{3} \frac{x}{h}$  . . (35)

Pour les poutres nervurées, lorsque  $\frac{x}{d} > 1$  , elle s'écrit :

$$\frac{T}{\theta_m bh} = 1 - \frac{1}{3} \frac{d}{h} \frac{3 \frac{x}{d} - 2}{2 \frac{x}{d} - 1} \quad . \quad (36)$$

Le tableau VII interprète pratiquement les deux dernières formules, dont les variations sont d'ailleurs très faibles. Les tensions rasantes, c'est-à-dire les tensions tangentiellles dans les plans longitudinaux parallèles à l'axe neutre de la section normale, réciproques des tensions tangentiellles dans cette dernière section, satisfont aux mêmes formules.

L'effort rasant dans un élément de longueur  $e$  d'une telle section longitudinale s'exprime par :

$$R_m = be\theta_m = \frac{eT}{h - z}, \text{ en supposant } \theta_m \text{ et } T \text{ peu variables}$$

dans l'étendue de l'élément.

$$\text{Donc, } \frac{T}{R_m} = \frac{h-z}{e} = \frac{1 - \frac{z}{h}}{\frac{e}{h}} \quad . \quad (37)$$

37) *Des étriers participent à la résistance aux efforts rasants.* — Supposons que, à cette zone de longueur  $e$ , corresponde une section totale d'étrier  $\sigma$ . L'effort rasant reste exprimé par la même formule que ci-dessus, mais est appliqué à une section hétérogène, d'aire  $be$  pour le béton et  $\sigma$  pour l'acier. Quelle est la répartition superficielle de cet effort ? Le problème est insoluble par les seules considérations de la statique, qui admettent une infinité de solutions. Il n'est déterminé que par l'état élastique de la matière.

Si l'on suppose que la continuité du béton ne soit pas détruite par l'effort rasant, donc que l'état de la matière reste élastique, nous devons admettre l'identité des déformations du béton et de l'acier et si nous désignons par  $m'$  le rapport  $\frac{Ga}{Gb}$  des modules d'élasticité de glissement, la répartition des tensions pourrait être exprimée par la formule

$$R = (be + m'\sigma) \theta_m = \frac{eT}{h-z},$$

à condition encore que  $\theta_m$  et  $T$  varient peu dans l'étendue de l'élément de longueur  $e$ .

Quelle valeur faut-il choisir pour  $m'$ ? Il n'en existe pas d'usuelle. De nombreux et ingénieux essais ont été faits pour déterminer les éléments de la résistance du béton aux efforts tangentiels, mais les résultats divergents et controversés n'ont pas permis en somme de conclusions quantitatives générales.

Les essais au cisaillement entre mâchoires, qui sont les plus simples, ont été reconnus trop grossiers et les résultats entachés d'erreurs systématiques du même ordre que les quantités à mesurer, à cause des frottements, pressions et flexions.

Les essais de torsion sont considérés comme beaucoup plus précis; ils donnent des résultats assez constants quant à la valeur de  $G_b$ , mais les tensions de torsion de rupture le sont moins et dépendent notamment de la forme de la section. Il faut remarquer toutefois qu'elles ont été calculées par application des formules ordinaires de la torsion élastique d'un corps homogène et isotrope.

Or, la matière éprouvée n'est ni homogène ni isotrope, ne satisfait pas aux lois d'élasticité proportionnelle et se trouve d'ailleurs dans un état voisin de la rupture. La destruction des pièces essayées est due aux tensions principales de traction (agissant à 45° par rapport au plan de torsion).

Enfin, d'autres essais ont porté sur des prismes largement évidés dans l'axe et soumis à flexion. Les efforts rasants étaient tout entiers supportés par les sections réduites réservées entre les évidements. Dans ces sections situées au-dessus des appuis, l'influence des moments fléchissants est presque éliminée et des tensions rasantes considérables peuvent être développées au moyen de charges assez réduites.

Bien que les deux dernières méthodes aient donné des résultats assez semblables, leurs partisans respectifs en contestent mutuellement la valeur.

La première méthode donne pour le taux de rupture par glissement jusqu'à 60 à 70 kg/cm<sup>2</sup>, les deux dernières méthodes de 20 à 30 kg/cm<sup>2</sup> en moyenne et même jusqu'à 36 kg/cm<sup>2</sup>. Comme taux de sécurité, on ne pourra guère admettre plus de 3 à 5 kg/cm<sup>2</sup>. Comme valeur moyenne de  $G_b$  on pourrait admettre 125000 kg/cm<sup>2</sup> pour des tensions atteignant jusque 12 à 15 kg/cm<sup>2</sup>. Comme  $G_a = 830000$  environ, on aurait donc  $m' = 6,5$ , en moyenne, en état élastique.

Au taux de travail de sécurité moyen de 4 kg/cm<sup>2</sup> pour le béton correspondrait une tension tangentielle de 26 kg/cm<sup>2</sup> pour les étriers; au taux de rupture inférieur de 15 kg/cm<sup>2</sup> pour le béton une tension tangentielle de 97,5 kg/cm<sup>2</sup> pour les étriers, dont le taux de sécurité au cisaillement est de 650 à 800 kg/cm<sup>2</sup> environ.

L'expérience confirme cette déduction théorique qu'en état élastique, les étriers interviennent peu dans la résistance, moins encore que les armatures principales. Les essais montrent de plus que les étriers ne manifestent leur utilité qu'après destruction de la résistance du béton, de même donc que les armatures principales.

38) *Tensions principales.* — D'après la théorie générale de l'élasticité, en un point quelconque d'un prisme fléchi en béton, si  $t$  désigne la tension normale de flexion et  $\theta$  la tension tangentielle, les valeurs des tensions normales principales sont

$$\frac{t}{2} \pm \sqrt{\frac{t^2}{4} + \theta^2}$$

Elles sont dirigées suivant les axes principaux de l'ellipse d'élasticité, dont les inclinaisons par rapport à l'axe neutre et à sa normale sont données par la formule  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2\theta}{t}$ .

Si  $\theta = 0$ , ce qui est réalisé aux fibres extrêmes de toutes les sections, ainsi que dans toute l'étendue de celles où  $T = 0$  et donc  $M = \text{maximum}$ , les tensions principales sont égales à  $t$  et  $0$ , c'est-à-dire que les tensions normales de flexion sont principales, ce qui était évident a priori.

Dans toute la section au droit des appuis d'une poutre appuyée aux deux extrémités, où  $M = 0$ , ainsi qu'en tous les points de l'axe neutre,  $t = 0$ ; les tensions principales sont  $\pm \theta$  et  $\alpha = -45^\circ$ . Des tensions principales inclinées à  $45^\circ$  sur l'axe de la pièce se développent en tous les points de l'axe neutre et sont maxima au droit des appuis. Dans les essais, leur réalité se manifeste par des fissures qui peuvent conduire à la rupture des pièces. Elles sont dues aux tensions principales de traction égales en valeur absolue aux tensions tangentielles.

Cette dernière remarque met en relief la contradiction entre les valeurs expérimentales de la résistance à la traction du béton par essais directs de traction ou par essais de flexion et les valeurs expérimentales de la résistance au glissement. Ces dernières ont été, en général, supérieures aux premières, ce qu'exprime aussi la formule  $\theta = \frac{\sqrt{tt'}}{2}$  dans laquelle ont été condensés les résultats et où  $t'$  désigne la résistance à la compression,  $t$  celle à la traction et  $\theta$  celle au glissement. Comme, en général,  $t' > 4t$ ,  $\theta > t$  ce résultat est en contradiction avec la théorie générale des forces intérieures et avec les résultats d'expériences directes.

M. Saliger a soumis des poutres nervurées de 2,40 de portée à des essais directs. Les tensions rasantes maxima calculées pour la sollicitation donnant lieu aux premières fissures obliques près des appuis variaient de 12 à 18 kg/cm<sup>2</sup>, c'est-à-dire atteignaient bien le taux de rupture à la traction du béton, conformément à la théorie générale de l'élasticité.

Ainsi se trouvent justifiées les prescriptions de sécurité du règlement allemand, stipulant que les tensions tangentielles supérieures à 14 kg/cm<sup>2</sup> ne sont jamais admissibles. Leur but, comme le confirme M. Hager qui collabora à l'établissement

du règlement, est bien d'éviter la formation des fissures obliques très dangereuses. Leur effet est d'écarter les nervures trop basses et trop étroites; il ne doit cependant être sensible qu'aux endroits dangereux, c'est-à-dire aux appuis. Il est donc avantageux d'élargir et éventuellement d'augmenter la hauteur des nervures près des appuis par des faces obliques qui sont en même temps le plus souvent d'un heureux effet au point de vue de l'aspect.

Il est à remarquer que cette condition peut servir de base au calcul de  $\beta$  pour les poutres nervurées.

**TABLEAU VII.**

Flexion plane simple des poutres rectangulaires et nervurées.

Tableau des valeurs de  $\frac{T}{\theta_m bh}$ .

Pour  $\frac{x}{d} \leq 1$ ,  $\frac{T}{\theta_m bh} = 1 - \frac{1}{3} \frac{x}{h}$ . Pour  $\frac{x}{d} > 1$ ,  $\frac{T}{\theta_m bh} = 1 - \frac{1}{3} \frac{d}{h} \frac{\frac{3}{2} \frac{x}{d} - 2}{\frac{x}{d} - 1}$ .

$\frac{x}{d} =$ $\frac{h}{x}$	$\frac{T}{\theta_m bh}$									
	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	
5,00	0,933	0,988	0,944	0,950	0,956	0,960	0,963	0,966	0,969	
4,75	0,930	0,985	0,942	0,945	0,951	0,955	0,959	0,963	0,965	
4,50	0,926	0,981	0,938	0,943	0,948	0,953	0,957	0,961	0,965	
4,25	0,922	0,927	0,935	0,938	0,942	0,947	0,952	0,956	0,959	
4,00	0,917	0,922	0,931	0,935	0,940	0,944	0,949	0,953	0,957	
3,80	0,912	0,918	0,927	0,931	0,938	0,944	0,949	0,953	0,957	
3,60	0,907	0,914	0,923	0,927	0,935	0,941	0,946	0,950	0,954	
3,40	0,902	0,908	0,918	0,922	0,931	0,937	0,943	0,947	0,951	
3,30	0,900	0,906	0,916	0,923	0,931	0,937	0,943	0,947	0,951	
3,20	0,896	0,903	0,913	0,923	0,931	0,937	0,943	0,947	0,951	
3,10	0,892	0,900	0,910	0,917	0,926	0,933	0,939	0,944	0,948	
3,00	0,889	0,896	0,907	0,917	0,926	0,933	0,939	0,944	0,948	
2,90	0,885	0,893	0,904	0,912	0,921	0,928	0,935	0,940	0,944	
2,80	0,881	0,889	0,901	0,912	0,921	0,928	0,935	0,940	0,944	
2,70	0,877	0,885	0,897	0,905	0,915	0,923	0,929	0,935	0,940	
2,60	0,872	0,880	0,893	0,903	0,915	0,923	0,929	0,935	0,940	
2,50	0,867	0,876	0,889	0,897	0,907	0,916	0,924	0,930	0,935	
2,40	0,861	0,870	0,884	0,897	0,907	0,916	0,924	0,930	0,935	
2,20	0,848	0,859	0,874	0,887	0,899	0,909	0,917	0,923	0,929	
2,00	0,833	0,844	0,861	0,876	0,889	0,900	0,908	0,916	0,922	

## CHAPITRE VI.

### CALCUL DES ÉTRIERS ET BARRES OBLIQUES.

39) *Répartition de la résistance entre les divers éléments.* — L'étude du chapitre précédent permettrait le calcul des tensions réelles du béton et des armatures dans l'état élastique, si les rapports des divers coefficients d'élasticité étaient très précisément connus. On peut en conclure généralement que, dans les limites pratiques des tensions admissibles pour le béton, les armatures sont très peu sollicitées, trop peu pour que l'on puisse par l'emploi de coefficients de sécurité normaux calculer d'après ces efforts leurs dimensions pratiques.

Les essais montrent que les étriers et barres relevées entrent en action dans le stade de rupture du béton et possèdent une influence très sensible sur la résistance des pièces. Le calcul de leurs dimensions s'effectuera donc rationnellement dans l'hypothèse d'un état de désagrégation du béton, annihilant la résistance à la traction et, éventuellement, au glissement.

Avant rupture des pièces essayées à la flexion, les premières fissures se produisent tantôt normalement dans le milieu de la portée ou obliquement vers les appuis. Le meilleur effet utile serait atteint si les deux types de fissures se produisaient à peu près simultanément, et qu'elles soient ainsi réparties en grand nombre dans toute l'étendue de la pièce. Cela demande une bonne répartition dans toute l'étendue de la poutre des armatures principales de traction et des barres relevées, c'est-à-dire l'emploi de préférence de nombreuses barres de faible diamètre, dont la plupart seront relevées à leurs extrémités en conservant des intervalles réduits.

La rupture des pièces s'effectuant sous l'effet des tensions principales de traction, la résistance aux efforts tranchants près des appuis sera donc assurée en ordre principal, sinon entièrement, par les barres obliques.

A cet égard, les prescriptions des divers règlements diffèrent de nouveau radicalement. Il est cependant certain que les barres obliques seules, bien disposées, suffisent pour satisfaire au problème.

Comme les essais montrent que les étriers augmentent en général encore la résistance et que ces armatures sont souvent utiles, sinon indispensables, pour le montage, il est bon d'en

user. Mais c'est ici que les avis diffèrent. Les uns négligent l'effet résistant des étriers, d'autres lui assignent la fonction de neutraliser une fraction de l'effort tranchant; d'autres, même, le font entrer seul en ligne de compte contre le glissement; cette dernière méthode doit cependant être considérée comme erronée. Certains calculent séparément barres obliques et étriers en vue de la résistance à la totalité des efforts tranchants, ce qui semble excessif. Enfin, certains comptent également sur une résistance partielle du béton au glissement. Le point de vue n'est pas injustifié *à priori*, puisque la rupture provient de fissures d'extension et non de glissement. D'autre part, s'il existe des barres obliques et que l'on maintienne la limite des tensions rasantes en dessous du taux inférieur de rupture par traction du béton, des fissures obliques ne peuvent se manifester, le béton n'est pas désagrégé et possède encore de la résistance au glissement. En réalité, nous avons vu que, dans ce stade, il assure presque seul la résistance au glissement; mais il est illogique pour calculer *à la rupture* des étriers et barres relevées, de compter sur une certaine résistance empiriquement réduite du béton. En cette occurrence encore, il est permis de formuler le vœu que ces divergences s'accordent dans un règlement unique.

40) *Calcul des barres obliques et relevées.* — Il a pour point de départ le diagramme des efforts tranchants correspondant aux barres obliques, obtenu en déduisant du diagramme des efforts tranchants totaux les fractions de ceux-ci reprises par les étriers ou par le béton lui-même d'après les hypothèses choisies. Par exemple dans toute la zone médiane des pièces où les tensions tangentielles restent en dessous de la limite de sécurité au glissement du béton, celui-ci assure seul toute la résistance au cisaillement.

Ce diagramme a son origine (fig. 7) en un point O intermédiaire entre le milieu M et l'extrémité A de la portée et son maximum théorique au-dessus de l'axe de l'appui; pratiquement, il convient de prendre ce dernier point vers l'intérieur de la portée, par exemple, au-dessus de l'arête intérieure de la surface d'appui. Les formules (35) ou (36) et le tableau VII permettent de calculer les valeurs de  $b\theta_m$  d'après celles de T et d'en tracer le diagramme par rapport à la fibre neutre. Pour le calcul des barres obliques, il sera tenu compte de l'entière des efforts rasants, sans déduction de l'effort rasant limite ON que le béton peut supporter seul.



Soit  $N$  le nombre de ces armatures. Généralement,  $N\Omega t_a >$  aire  $N'O'A'K'$  (à l'échelle), il suffit pour assurer la résistance de relever un certain nombre des barres d'armature principale de traction.

Si  $N\Omega t_a <$  aire  $N'O'A'K'$ , il faudrait à ces barres relevées ajouter des armatures obliques spéciales.

Il vient d'être indiqué comment on détermine l'alignement  $G'G$  d'une armature oblique, ce qui fixe le point  $R$  où il faut courber l'armature principale s'il s'agit d'une barre relevée. Or, à partir de ce point  $R$ , la barre ne pourra être relevée que si elle n'est plus indispensable comme armature de traction. Si elle était encore nécessaire, au relèvement de la barre devrait être substitué l'emploi d'une armature oblique spéciale. C'est en général une telle circonstance qui fait recourir à des fers de ce genre, plutôt que la pénurie des barres principales.

Les armatures obliques spéciales seront toujours de préférence disposées vers l'intérieur de la portée, les barres relevées se trouvant à l'extérieur, c'est-à-dire vers les appuis.

La vérification de la compatibilité du relèvement des barres avec la résistance aux moments fléchissants se fait par une épure analogue à celle des tôles pour les poutres métalliques

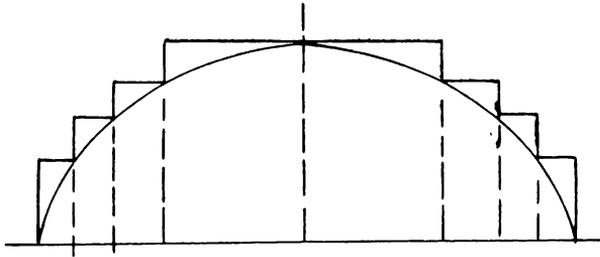


Fig. 8.

en tôles et cornières assemblées (fig. 8). On trace pour l'étendue de la poutre le diagramme des  $M$  sollicitants, de forme continue, et le diagramme discontinu en escaliers des  $M$  résistants, les sauts brusques se trouvant au droit des points tels que  $R$  à partir desquels on relève les barres. Il faut que le second diagramme soit en tous ses points à l'extérieur du premier.

Les  $M$  sollicitants sont connus, les  $M$  résistants se calculent d'après les tableaux pour les diverses valeurs de  $\frac{m\Omega}{bh}$  ou  $\frac{m\Omega}{Bd}$ .

*Remarque.* — Par l'emploi des tableaux, on peut avoir les valeurs exactes des M résistants, ainsi que de  $h-\zeta$ , c'est-à-dire de  $b\theta_m$ . Pour le calcul préalable des barres relevées, on est cependant obligé d'admettre l'hypothèse approximative que  $h-\zeta = \text{constante}$ , ce qui a pour conséquence que le diagramme des  $b\theta_m$  ne diffère de celui des T que par l'échelle. Moyennant la même hypothèse, les hauteurs des échelons du diagramme des M résistants en escalier sont égales. On se référera à l'axe neutre de la section la plus armée (M maximum), correspondant à  $(h-\zeta)$  minimum, ce qui augmente la sécurité.

Pratiquement, il faut que chaque plan de fissuration éventuelle (normal aux barres obliques) rencontre au moins une barre oblique et, autant que possible, vers le voisinage du

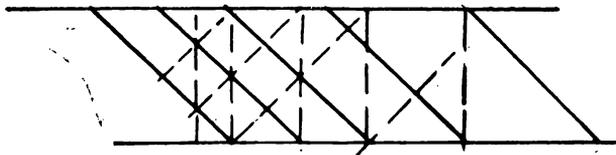


Fig. 9.

centre de la section (fig. 9). Il faut donc que les diverses armatures obliques soient au moins aussi rapprochées que les diagonales d'un treillis simple à montants verticaux ou mieux, que les diagonales d'un double treillis, tout au moins dans le voisinage des appuis. Il convient de même qu'une barre relevée passe par le point de l'axe neutre situé au droit de l'appui.

41. *Calcul des étriers.* — Le calcul des barres obliques, au sujet duquel il n'existe guère de divergences sensibles d'opinion, étant passé au premier plan, celui des étriers ne présente plus qu'une importance réduite. On n'est pas plus d'accord sur la manière dont il convient de calculer ces armatures, que sur la détermination des efforts qu'il convient de leur faire supporter. Il serait oiseux de dissérer à ce propos, le plus sage semblerait d'utiliser des étriers dans la mesure où l'exigeraient les conditions pratiques de montage et de construction, sans en tenir compte dans les calculs.

Si l'on désirait cependant calculer la résistance d'un étrier au cisaillement, on écrirait

$$\sigma_{\theta_a} = \int_0^e \frac{T dl}{h-z} \dots \dots \dots \text{(voir 57)}$$

Si l'on admet  $T$  et  $h - z$  constants dans l'étendue  $e$

$$\sigma_{\theta_a} = \frac{T e}{h - z}.$$

Pour une certaine valeur de  $T$ , l'écartement des étriers doit être

$$e = \frac{\sigma_{\theta_a} (h - z)}{T} \dots \dots \dots (38)$$

Ces formules supposent que les étriers travaillent comme les rivets fixant les cornières aux âmes des poutrelles composées ou comme les cales des poutres jumelées en bois. Comme les essais de flexion ne décèlent pas de surface de rupture par glissement, l'exactitude de cette hypothèse est plus que douteuse. On ne pourrait davantage lui préférer celle des étriers travaillant par traction comme les montants d'un treillis à diagonales comprimées réalisées par le béton, ce qui reviendrait à substituer dans les formules ci-dessus  $t_a$  à  $\theta_a$ .

D'autres hypothèses ont été faites (par exemple, par M. Hager). Elles contiennent toutes une si grande part d'arbitraire que leur complication ne semble pas justifier qu'on les examine davantage dans cette note.

APPLICATIONS.

42. *Calcul de  $\beta$  par la limitation des  $\theta_{max}$ .* — Considérons la poutre de l'application (31a) du chapitre précédent, calculée par la méthode de l'auteur.

$B = 160$ ,  $d = 20$ ,  $H = 130$ ,  $\Omega = 135 \text{ cm}^2$  au milieu (12 barres de 38 m/m),  $L = 800$ .

Surcharge fixe : 1600 kg/m.  
 Surcharge mobile : 7100 kg/m.  
 Poids propre : 1800 kg/m. ( $\beta = 0,250$ )  
 Charge totale : 10100 kg/m.

$$T_{max} = 42000 \text{ kg.}$$

Au droit de l'appui,  $\Omega = 45,36$  (4 barres de 38 m/m).

Donc,  $\frac{m \Omega}{Bd} = 0,213$ , tandis que  $\frac{h}{d} = \frac{130}{1,075 \times 20} = 6,05$ .

D'après le tableau V,  $\frac{x}{d} = 1,47$ , d'où  $\frac{h}{x} = 4,11$

D'après le tableau VII,  $\frac{T}{\theta_m b h} = 0,932$ .

$$\text{Donc, } \beta = \frac{T}{0,932 B h \theta_m}.$$

Or, d'après le règlement allemand,  $\theta_m$  est limité à 14 kgs,

$$\text{d'où, } \beta = \frac{42000}{0,932 \times 160 \times 0,93 \times 130 \times 14} = 0,1665 < 0,25.$$

Pour  $\beta = 0,25$  :

$$\theta_m = \frac{42000}{0,932 \times 160 \times 0,93 \times 130 \times 0,25} = 9,55 \text{ kg/cm}^2.$$

La condition de limitation de la tension tangentielle maximum donne dans ce cas des dimensions très normales pour l'épaisseur de la nervure. Ce résultat favorable est évidemment dû à la grande hauteur de la poutre envisagée et  $\beta$  croîtrait si  $h$  diminuait.

Mais comme la même influence agirait sur la valeur de  $\beta$  calculée par la sécurité à la fissuration, il est permis de conclure qu'avec les coefficients du règlement allemand, cette méthode conduira toujours à de plus grandes valeurs de  $\beta$  que celle de limitation des tensions tangentielles.

Il semble donc que le principe de la limitation des tensions tangentielles pourrait être choisi avec avantage pour le calcul de  $\beta$ ; il resterait à se mettre d'accord sur les coefficients à employer.

43) *Calcul des barres obliques et relevées.* — Reprenons l'exemple (31.c) du chapitre précédent :

$$B = 160, \quad H = 130, \quad d = 20, \quad \beta = 0,25.$$

$$\Omega = 90,79 \text{ (10 barres de 34 m/m).}$$

$$t_a = 800, \quad t'_b = 30, \quad m = 20, \quad \theta_m = 3 \text{ (règlement suisse).}$$

Charge totale pour M, 9300 kg/mètre courant;

$$\text{— — — T, 10500 —}$$

Pour une portée  $L = 800$ ,  $M = 74400 \text{ kgm.}$ ,  $T = 42000 \text{ kg.}$

Si l'on admet  $h - \zeta$  constant (méthode approximative) et que l'on veuille assurer en tous points la même sécurité qu'au milieu de la poutre, on trouve par le calcul que :

il faut 10 barres sur une longueur de 1,26 de part et d'autre du milieu de la poutre,

—	9	—	—	1,79	—
—	8	—	—	2,19	—
—	7	—	—	2,53	—
—	6	—	—	2,83	—
—	5	—	—	3,10	—
—	4	—	—	3,34	—

La tension du métal serait approximativement égale, aux points où une barre serait supprimée, à la tension de l'armature au milieu de la poutre, qui est inférieure à 800 kg/cm<sup>2</sup> à cause du supplément ajouté à l'armature théoriquement nécessaire, notamment par suite de sa constitution pratique au moyen d'un certain nombre de barres d'un diamètre courant.

En effet, pour  $\Omega = 90,79 \text{ cm}^2$  (10 barres de 34 m/m), d'après le tableau V et en négligeant les tensions de compression du béton dans la nervure,  $t'_b = 26$  et  $t_a = 734$ .

Pour  $t_a = 800$ , d'après le même tableau,  $\Omega = 83,5 \text{ cm}^2$  et  $t'_b = 26,3$ .

Donc, le  $\Omega$  théoriquement suffisant =  $0,92 \times \Omega$  réel.

En se basant sur les valeurs d'armatures théoriquement nécessaires, c'est à-dire telles que, en tous les points où une barre est supprimée,  $t_a = 800$ , et en supposant de plus par approximation  $h - \zeta = \text{constante}$ , on trouverait que :

il faut 10 barres sur une longueur de 0,59 de part et d'autre du milieu de la poutre,

—	9	—	—	1,44	—
—	8	—	—	1,96	—
—	7	—	—	2,36	—
—	6	—	—	2,70	—
—	5	—	—	3,00	—
—	4	—	—	3,28	—

Enfin, si l'on calcule exactement, d'après les tableaux V et VII, les valeurs de  $M$ ,  $\frac{h}{x}$ ,  $\frac{x}{d}$  et  $\left(1 - \frac{z}{h}\right)$  pour divers nombres de barres, on trouve les résultats ci-dessous :

Nombre de barres :	10	9	8	7	6	5	4
$M$	81000	73300	64900	57000	48800	40900	32700
$\frac{h}{x}$	2,41	2,55	2,71	2,92	3,18	3,50	3,97
$\frac{x}{d}$	2,506	2,375	2,23	2,075	1,905	1,73	1,525
$1 - \frac{z}{h}$	0,924	0,9245	0,925	0,926	0,928	0,928	0,931

Ces nombres ont été établis dans l'hypothèse de la négligence des efforts de compression dans la nervure. Mais il est certain que, malgré les valeurs relativement élevées de  $\beta$

(0,25), ainsi que de  $\frac{x}{d}$  pour certains cas (2,506, par exemple), cette négligence n'exerce qu'une très minime influence sur les différences dans les valeurs de  $1 - \frac{z}{h}$  et encore bien dans le sens de l'atténuation. Quoi qu'il en soit, l'hypothèse de la constance de  $1 - \frac{z}{h}$  peut être pratiquement admise. Par les dernières valeurs ci-dessus de M, on trouverait pour les longueurs des barres de part et d'autre du milieu de la poutre 0,49, 1,43, 1,94, 2,35, 2,68, 2,96, etc., présentant avec celles calculées dans l'hypothèse approximative des différences peu sensibles et de l'ordre des erreurs accidentelles admissibles. Il n'y a de grande différence que pour la longueur de la première barre, ce qui n'a rien d'étonnant. La courbe des moments étant dans le voisinage de son maximum, la détermination des points de section par une sécante parallèle à la tangente au sommet présente évidemment peu de précision.

Les points à partir desquels les barres peuvent être relevées sont donc bien déterminés.

Cherchons à partir de quelle distance  $x$  du milieu de la poutre l'importance des efforts tranchants exige le relèvement des barres, c'est le point à partir duquel  $\theta_m$  dépasse 3 kg/cm<sup>2</sup>. Admettons comme valeur moyenne

$$\begin{aligned} \frac{T}{\theta_m bh} &= 1 - \frac{z}{h} = 0,927 \\ 105 x &= 0,927 \times 3 \times 40 \times 121 \\ x &= \frac{13300}{105} = 128. \end{aligned}$$

A partir de 1,28 m. de part et d'autre du milieu de la poutre, la résistance à l'effort tranchant exige le relèvement des barres.

D'après l'étude précédente des moments, ce relèvement est possible. Dans l'hypothèse que la totalité des effets de l'effort tranchant est à supporter à partir de ce point par les barres relevées, l'effort total est exprimé par l'aire du trapèze N'O'A'K dont la base mesure  $(380 - 128) \cos. 45^\circ = 178$ . (Voir fig. 1 de la planche.)

Le petit côté mesure  $40 \times 5 = 120$ .

Le grand côté,  $b\theta_m = \frac{39900}{0,927 \times 121} = 356$ .

L'aire du trapèze, représentant la résultante totale des tractions, est donc

$$178 \times \left( \frac{120 + 356}{2} \right) = 42400 \text{ kgs.}$$

Une barre relevée pouvant supporter un effort de 7260 kilogrammes, il faut donc  $\frac{42400}{7260} = 5,84$  barres obliques. Donc en déduisant de la portée la longueur de la surface d'appui vers l'intérieur, ainsi qu'il a été dit plus haut, l'on conclut qu'il faut six barres obliques, dont la répartition selon la méthode indiquée ne peut donner lieu à aucune difficulté. (Voir fig. I de la planche I.)

M. Probst conseille de faire passer une barre oblique par le point de l'axe neutre situé au droit de l'axe d'appui théorique. Dans ce but, il est prévu une septième barre oblique. Si l'on compare maintenant les points d'origine des barres obliques aux points déterminés précédemment, à partir desquels les barres peuvent être relevées, on constate que, si les deux premières barres obliques vers l'intérieur peuvent être obtenues par relèvement, la possibilité n'en est plus donnée pour les 3<sup>me</sup>, 4<sup>me</sup>, 5<sup>me</sup> et 6<sup>me</sup>. Dans ces conditions, la première barre oblique sera réalisée par une armature courte spéciale et les six autres par relèvement des barres principales.

44) *Étriers*. — La poutre de l'exemple précédent reçoit aussi des étriers à quatre branches en fers de 10 millimètres de  $\Phi$ , espacés de 40 centimètres dans la partie médiane, de 30 centimètres vers les extrémités de la poutre. Les efforts tranchants auxquels ces écartements permettraient aux étriers de résister par traction sont ( $\sigma = 4 \times 0,785$ ).

$$T_1 = \frac{3,14 \times 800 \times 0,927 \times 121}{40} = 7040 \text{ kg.}$$

$$T_2 = \frac{3,14 \times 800 \times 0,927 \times 121}{30} = 9400 \text{ kg.}$$

(Formule 58 où  $\theta_a$  est remplacé par  $t_a$ ).

45) *Remarques diverses*. — a) Les méthodes de calcul indiquées conviennent pour les poutres tant doublement que simplement armées.

b) Pour le calcul des barres obliques, l'exposition a été faite dans l'hypothèse d'une pièce simplement appuyée aux extrémités. S'il y avait encastrement total ou partiel, il n'y aurait théoriquement rien de changé, attendu que le calcul est basé sur les tensions principales de traction au droit de l'axe neutre, ce qui écarte l'influence des moments. Pratiquement, à l'encastrement correspond un déplacement de l'axe neutre et éventuellement une modification d'allure de la courbe des  $\theta_m$ . La répartition des barres obliques sera cependant en pratique relativement peu influencée. Les conditions subordonnant le relèvement des barres principales à la résistance aux moments fléchissants sont, par contre, profondément modifiées.

46) *Tensions tangentielles longitudinales dans les dalles.* — Les auteurs français n'envisagent généralement pas les tensions tangentielles dans les plans de section longitudinaux verticaux de la dalle. Soit  $yy'$  la trace d'un tel plan dans une section normale de la pièce et considérons l'équilibre de translation selon l'axe de la poutre d'un solide ayant pour section l'aire hachurée de la figure 10 et d'épaisseur élémentaire  $\Delta x$  dans la direction perpendiculaire.

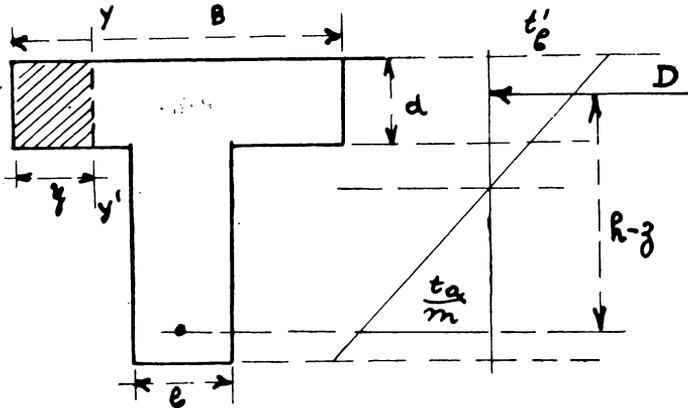


Fig. 10.

En négligeant les tensions de compression dans la nervure, l'effort total de compression réparti uniformément sur la longueur  $B$  de la dalle est  $D$  tel que  $D = \frac{M}{h-z}$  (la double armature éventuelle est supposée aussi également répartie sur la longueur).

A la longueur  $y$  de dalle correspond un effort  $D_1 = \frac{Dy}{B}$ .

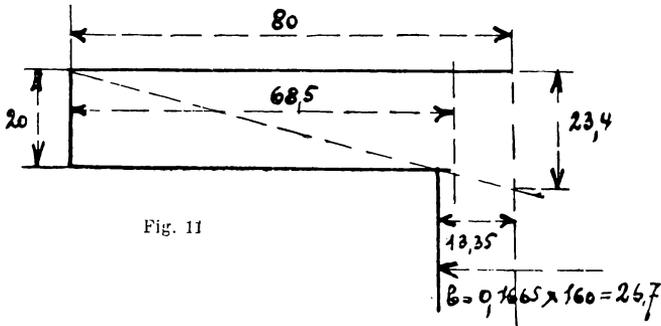
L'équation d'équilibre cherchée est  $\Delta D_1 = d \cdot \Delta x \cdot \theta$ .

$$\begin{aligned} \Delta D_1 &= \frac{y \Delta D}{B} = \frac{y \Delta M}{B(h-z)} = \frac{T \Delta x}{(h-z)} \frac{y}{B}, \\ \frac{T}{Bh\theta} &= \frac{d}{y} \left(1 - \frac{z}{h}\right), \\ \frac{d}{y} &= \frac{T}{Bh\theta \left(1 - \frac{z}{h}\right)} \quad \dots \quad (39) \end{aligned}$$

Comme  $1 - \frac{z}{h} = \frac{T}{bh\theta_m}$ ,

$$\frac{d}{y} = \beta \frac{\theta_m}{\theta} \quad \dots \quad (39')$$

Dans ces formules, nous pouvons concevoir que  $d$  est variable; il serait nul pour  $y = 0$ . Les équations ci-dessus expriment le coefficient angulaire d'une droite dont les ordonnées représentent en tous points les limites inférieures de l'épaisseur de la dalle pour la sécurité aux tensions tangentielles longitudinales. Ces formules établiraient éventuellement la nécessité de chanfreins à la jonction de la nervure à la dalle et permettraient d'en effectuer le tracé, qui sera cependant plus généralement conditionné par la résistance de la dalle à l'encastrement dans la nervure.



Prenons l'exemple de l'application 42) et supposons que les dimensions calculées soient adoptées.  $\theta_m = 14$  et  $\beta = 0,1665$ . Pour  $\theta$ , le règlement allemand admet 8. ou 9 kg. par  $\text{cm}^2$ , compte tenu des armatures transversales du dallage. Prenons  $\theta = 8$ .

Dans ces conditions,  $\frac{d}{y} = 0,1665 \times \frac{14}{8} = 0,292$ .

Pour  $y = \frac{B}{2} = 80$ ,  $d = 23,4$ .

Pour  $d = 20$ ,  $y = 68,5$ .

De sorte que l'épaisseur de 20 centimètres de la dalle est partout suffisante pour la résistance aux efforts tangentiels et qu'aucun renforcement n'est nécessaire dans ce but.

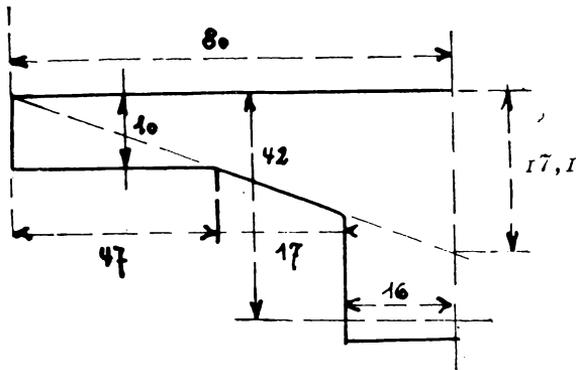


Fig. 12.

*Autre exemple.* — Soient  $B = 160$ ,  $h = 42$ ,  $d = 10$ ,  
 $\varrho = 14,73$  (3 barres de 25).  $T \text{ max.} = 10600 \text{ kg.}$

D'après les tableaux V et I,  $\frac{x}{d} < 1$  et  $\frac{h}{x} = 4,44$ .

D'où, d'après le tableau VII,  $1 - \frac{z}{h} = 0,925$ .

Donc, pour  $\theta = 8$ ,  $\frac{d}{y} = \frac{10600}{160 \times 42 \times 8 \times 0,925} = 0,214$ .

Pour  $d = 10$ ,  $y = 47$ .

Pour  $y = 80$ ,  $d = 17,1$ .

Supposons  $\beta = 0,20$ , ou  $b = 32$ .

A la rencontre de la dalle et de la nervure, pour assurer une résistance suffisante aux tensions tangentiels, il faut un renforcement oblique sur 17 centimètres de longueur.

47) *Adhérence des armatures au béton.* — Sans vouloir rouvrir la discussion au sujet de la nature intime de cette adhérence, l'auteur se bornera à constater que, pour rester logique avec les méthodes de calcul employées pour la flexion,

en tenant ou non compte des tensions de traction du béton, on est obligé d'admettre l'existence d'une action exercée par le béton sur la périphérie des armatures, parallèlement à la direction de celles-ci et en sens inverse de celui de la croissance des efforts de traction dans les armatures; sinon il faudrait admettre la constance des efforts de traction dans les armatures, ce qui conduirait à un mode de calcul des pièces fléchies en béton armé analogue à celui des poutres triangulées.

Pour le calcul des efforts ou tensions vrais d'adhérence, la même difficulté se présente que pour les efforts et tensions rasants, l'ignorance de la répartition vraie des tensions normales de flexion et l'empirisme des solutions admises.

En désignant par  $p$  la périphérie de l'armature et par  $\theta_{ad}$  la tension d'adhérence en un point quelconque,

$$p \times \theta_{ad} = \frac{dF}{dx},$$

$F$  désignant la traction totale dans l'armature au point considéré.

En négligeant les tensions de traction du béton et supposant  $(h - z)$  constant,

$$p \times \theta_{ad} = \frac{dM}{(h - z) dx} = \frac{T}{h - z},$$

c'est-à-dire que  $\frac{T}{p \times \theta_{ad}} = \frac{T}{b\theta_m}$  (voir formules 35 et 36).

Donc  $\theta_{ad}$  serait maximum pour  $T$  maximum et  $p$  minimum; conditions réalisées simultanément au droit des appuis.

Or, aux appuis,  $F = 0$  et il est certain que dans toute la région voisine, la majeure partie des efforts de traction est supportée par le béton, l'armature étant peu active. La formule est donc pratiquement inadmissible.

On préfère recourir à une méthode de calcul de sécurité limite (1). En supposant que l'armature soit prolongée d'une longueur  $a$  à l'extérieur de l'appui théorique, en un point à distance  $x$  de l'appui, la sécurité sera satisfaite si l'effort total de traction  $F$  de l'armature, supposé uniformément réparti à sa périphérie sur toute la longueur, donne une tension

(1) Voir K. HAGER. *Theorie des Eisenbetons* Ed. Oldenbourg, 1916, Munich, pages 148, etc. L'exposé de l'auteur diffère de celui de l'ouvrage allemand par la substitution à la courbe continue des  $M$  de celle des  $\Theta$ , présentant des discontinuités aux points de relèvement des barres principales.

moyenne  $\frac{F}{p(x+a)}$  plus petite qu'une certaine limite  $\theta_{ad}$  de sécurité.

En négligeant les tensions de traction du béton et en supposant  $h - \zeta$  constant,

$$\theta_{ad} = \frac{M}{(h - \zeta) p (x + a)} = \frac{\Theta}{x + a},$$

en désignant par  $\Theta$  l'expression  $\frac{M}{(h - \zeta) p}$ .

La courbe des  $M$  est connue,  $(h - \zeta)$  est invariable et  $p$  varie par échelons, en décroissant du milieu de la poutre vers les extrémités. Le diagramme des  $\Theta$  sera donc généralement à escaliers comme dans la figure 13 ci-après.

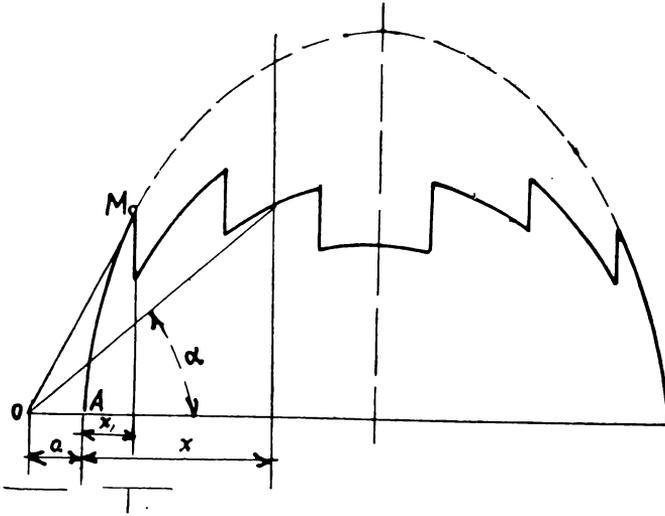


Fig. 13.

On peut écrire

$$\theta_{ad} = \text{tg } \alpha,$$

$\text{tg } \alpha$  étant le coefficient angulaire du vecteur mené par l'extrémité réelle de l'armature passant par le point de la courbe des  $\Theta$  correspondant à l'abscisse  $x$ .

Si la courbe des  $\Theta$  était continue, le maximum de  $\text{tg } \alpha$  correspondrait à la tangente à la courbe issue du point O.

Pratiquement, le maximum de  $\text{tg } \alpha$  correspondra presque toujours au vecteur joignant O au premier ressaut de la courbe,

c'est-à dire à l'origine de la barre relevée la plus voisine de l'appui.

$$\theta_{ad \max} = \frac{M_1}{(h - z) p (x_1 + a)} = \frac{\Omega_1 t_a}{p (x_1 + a)},$$

à la limite.

D'après le règlement autrichien de 1915, pour obtenir  $a$  il faut majorer la longueur réelle dont l'armature dépasse l'appui théorique d'une quantité destinée à tenir compte des crochets terminant les barres.

*Application.* -- Reprenons la poutre de l'application du § 43 du présent chapitre.  $x_1 = 0^m.80$  (voir fig. I de la planche).

$$M_1 = \frac{9300 \times 0.80 \times 7.20}{2} = 26750 \text{ kgm.}$$

$$h - z = 112 \text{ cm.}$$

$$\text{Pour 4 barres de } 34 \text{ m/m, } p = 4 \times 10.68 = 42.72.$$

$$\text{Enfin, } \begin{cases} x_1 = 80 \\ a = 20 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + a = 100. \end{array} \right.$$

$$\theta_{ad \max.} = \frac{2675000}{112 \times 42.72 \times 100} = 5.58 \text{ kg/cm}^2.$$

Cette valeur est certainement trop élevée, mais il est à remarquer qu'il n'a pour ainsi dire pas été tenu compte de l'influence des crochets qui, d'après le règlement autrichien, peut être assimilée à une surlongueur égale à 12 fois le diamètre, soit 40,8 cm.

Dans ce cas,  $a = 14.2 + 40.8 = 55$  et  $x_1 + a = 135$ .  
 $\theta_{ad \max.} = 4.15 \text{ kg/cm}^2$ , valeur généralement admissible.

## QUATRIÈME SECTION.

### Flexion plane composée.

#### CHAPITRE VII. — Section rectangulaire.

LA SECTION EST COMPRIMÉE DANS TOUTE SON ÉTENDUE.

48) *Théorie générale.* — Les éléments de la section sont définis à la figure 14 ci-après et sont liés entre eux par les mêmes relations que dans les chapitres précédents,  $\frac{H}{h} = \alpha$  et  $\omega = C\Omega$ .



Les expressions pour les sections à double armature peuvent dériver des dernières par des corrections très simples.

$$\left. \begin{aligned} \frac{S_c}{bH} &= \frac{S_o}{bH} + \sigma C \\ \sigma &= \frac{m\Omega}{bH} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (43)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathcal{M}_c}{bH^2} &= \frac{\mathcal{M}_o}{bH^2} + \mu C \\ \mu &= \frac{1}{\alpha} \frac{m\Omega}{bH} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (44)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{J_c}{bH^3} &= \frac{J_o}{bH^3} + \iota C \\ \iota &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \frac{m\Omega}{bH} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (45)$$

De la connaissance de ces expressions peuvent se déduire :

$$\left. \begin{aligned} \frac{v}{H} &= \frac{\mathcal{M}/bH^2}{S/bH} \\ \frac{v'}{H} &= 1 - \frac{v}{H} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (46)$$

En désignant par I le moment d'inertie central :

$$I = J - Sv^2 = J - \frac{\mathcal{M}^2}{S},$$

donc , 
$$\frac{I}{bH^3} = \frac{J}{bH^3} - \frac{[\mathcal{M}/bH^2]^2}{S/bH} \dots \dots \dots (47)$$

Pour les modules d'inertie enfin :

$$\left. \begin{aligned} \frac{I/v}{bH^2} &= \frac{I/bH^3}{v/H} \\ \frac{I/v'}{bH^2} &= \frac{I/bH^3}{v'/H} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (48)$$

Les sommets N et N' du noyau central se trouvent à des distances ε et ε' du centre de gravité telles que :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\epsilon}{H} &= \frac{\frac{I}{v} / bH^2}{S/bH} = \frac{I/bH^3}{\mathcal{M}/bH^2} \\ \frac{\epsilon'}{H} &= \frac{\frac{I}{v'} / bH^2}{S/bH} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (49).$$

Pour qu'il n'y ait que des tensions de compression dans toute l'étendue de la section, il faut et il suffit que le point d'application de la résultante soit à l'intérieur du noyau central.

L'armature principale se trouvant évidemment vers l'arête la plus fatiguée, dans le système de notations employé et d'après la figure 14, le point d'application F de la résultante doit être compris entre G et N', c'est-à-dire que l'excentricité  $e$  doit être plus petite que  $\varepsilon$ '.

Dans une telle section sollicitée par un effort normal de compression N, d'excentricité  $e$ , la tension de compression extrême est :

$$t'_b = \frac{N}{S} + \frac{Ne}{I/v} = \frac{N(e + \varepsilon)}{I/v},$$

ou

$$t'_b = \frac{N/bH}{S/bH} + \frac{Ne/bH^2}{\frac{1}{v}/bH^2} = \frac{N(e + \varepsilon)/bH^2}{\frac{1}{v}/bH^2} \dots (50).$$

Le tableau VIII donne les valeurs de  $\frac{S_0}{bH}$ ,  $\frac{\mathcal{M}_0}{bH^2}$  et  $\frac{J_0}{bH^3}$  ainsi que de  $\sigma$ ,  $\mu$  et  $\iota$  en fonction de  $\frac{m\Omega}{bH}$  et pour les valeurs

de  $\alpha$  égales à 1,05 et 1,10. Pour les valeurs intermédiaires de  $\alpha$ , on interpolera. A l'aide de ce tableau, on pourra appliquer aisément toutes les formules de (40) à (50), ainsi que résoudre toutes les questions des autres chapitres dans lesquelles interviennent les moments et modules d'inertie des sections rectangulaires. Notamment les calculs de tension du béton dans les pièces simplement fléchies, dans l'hypothèse  $n = 1$  (voir le § 18), les calculs de déformation, etc.

49) *Discussion de l'économie des armatures.* — En général, abstraction faite de toutes les conditions n'ayant pas trait à la résistance, dans le cas de sollicitation qui nous occupe, il ne sera fait usage d'armatures que si les tensions maxima calculées pour le prisme non armé dépassent la limite de sécurité.

Le problème principal de ce chapitre est donc de déterminer la section et la meilleure disposition d'armature à employer pour abaisser la tension maximum au taux de sécurité. La solution la plus avantageuse est celle qui, toutes autres choses égales d'ailleurs, requiert le minimum d'acier. Il apparaîtrait donc *a priori* qu'elle est réalisée par l'emploi de l'armature unique qui assure la meilleure utilisation du métal.

D'ailleurs, à pourcentage d'armature constant, c'est-à-dire pour  $(1 + C) \frac{m\Omega}{bH}$  invariable et, partant,  $\frac{S}{bH}$  invariable, dans la

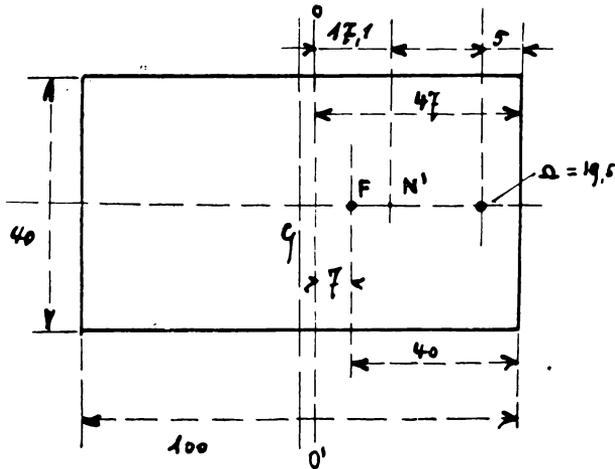


Fig. 15.

formule (50),  $\frac{N/bH}{S/bH}$  est constant, tandis que  $\frac{Ne/bH^2}{\frac{1}{v}/bH^2}$  augmente

lorsque  $C$  augmente. Car, en effet,  $\nu$  croît et donc  $e$  également, tandis que  $\frac{1}{v}/bH^2$  diminue.

Donc la tension extrême  $t'_b$  sera minimum pour  $C = 0$ . Réciproquement, c'est aussi pour  $C = 0$  que l'on réalisera donc  $t'_b \leq$  taux de travail limite avec le moins de métal.

Pratiquement, il y aura souvent lieu, pour des raisons de construction ou de montage (notamment s'il s'agit de pièces verticales ou à forte inclinaison) d'employer la double armature. Il conviendra de donner à l'armature secondaire le moindre développement possible compatible avec ces conditions spéciales et de calculer les armatures principales en tenant compte des armatures secondaires.

#### APPLICATIONS.

50) *Vérification des tensions.* — a) Les dimensions de la

pièce simplement armée sont définies ci-contre (fig. 15); en F agit une compression normale de 100000 kilogrammes.

$$\frac{N}{bH} = 25, \quad \alpha = \frac{100}{95} = 1,05.$$

$$\frac{m\Omega}{bH} = \frac{15 \times 19,5}{4000} = 0,073, \quad C = 0.$$

Dans ces conditions,  $\left. \begin{aligned} \frac{S_o}{bH} &= 1,073 \\ \frac{\mathcal{M}_o}{bH^2} &= 0,5036 \\ \frac{J_o}{bH^3} &= 0,55546 \end{aligned} \right\} \text{ (Voir tableau VIII).}$

D'où,  $\frac{v}{H} = \frac{0,5036}{1,073} = 0,47,$

$$\frac{e}{H} = 0,07, \quad \frac{Ne}{bH^2} = 1,75,$$

$$\frac{l}{bH^3} = 0,55546 - 0,2557 = 0,0978$$

$$\frac{l}{v} / bH^2 = 0,208, \quad \frac{l}{v'} / bH^2 = 0,184,$$

$$t'_b = \frac{25}{1,073} + \frac{1,75}{0,208} = 23,5 + 8,4 = 31,7 \text{ kg/m}^2.$$

La tension minimum est

$$(t'_b)_1 = 23,5 - \frac{1,75}{0,184} = 23,5 - 9,5 = 15,8 \text{ kg/cm}^2.$$

L'étendue du noyau central est

$$\frac{\varepsilon}{H} = \frac{0,184}{1,073} = 0,171.$$

b) Dans la même pièce, le même pourcentage de métal est réparti entre deux armatures égales. Donc  $C = 1$  et  $\Omega = 9,75$ .

$$\frac{m\Omega}{bH} = 0,0565, \quad \frac{N}{bH} = 25.$$

$$\frac{S_c}{bH} = 1,073,$$

$$\frac{\mathcal{M}_c}{bH^2} = 0,5018 + 0,0345 = 0,5363,$$

$$\frac{J_c}{bH^2} = 0,33338 + 0,0331 = 0,36648,$$

$$\frac{v}{H} = 0,50, \quad \text{ce qui \u00e9tait connu \u00e0 priori,}$$

$$\frac{e}{H} = 0,10, \quad \frac{Ne}{bH^2} = 2,5.$$

$$\frac{I}{bH^3} = 0,36648 - \frac{0,5363^2}{4,073} = 0,36648 - 0,26815 = 0,09833.$$

$$\frac{I}{v} / bH^2 = \frac{I}{v'} / bH^2 = \frac{0,09833}{0,50} = 0,1967.$$

$$t'_b = \frac{25}{1,073} + \frac{2,5}{0,1967} = 23,3 + 12,7 = 36 \text{ kg/cm}^2,$$

tension sensiblement sup\u00e9rieure \u00e0 celle de l'exemple pr\u00e9c\u00e9dent, malgr\u00e9 le m\u00eame pourcentage total d'armature. La tension minimum est :

$$(t'_b)_1 = 23,3 - 12,7 = 10,6 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\text{L'\u00e9tendue du noyau central est } \frac{\epsilon}{H} = \frac{\epsilon'}{H} = \frac{0,1967}{1,073} = 0,183.$$

51) *R\u00e9sistance limite.* — Le probl\u00e8me de la sollicitation limite peut se pr\u00e9senter sous deux formes diff\u00e9rentes selon que le facteur qui en est l'inconnue est l'effort normal ou son excentricit\u00e9. La connaissance pr\u00e9alable d'un de ces deux \u00e9l\u00e9ments est indispensable. Des deux formes du probl\u00e8me, la plus fr\u00e9quente est la suivante :

a) *Limite de la valeur d'un effort normal d'excentricit\u00e9 donn\u00e9e.* — Si nous conservons les donn\u00e9es num\u00e9riques du cas a) de l'application du n\u00b0 50 et limitons \u00e0 35 kg/cm<sup>2</sup> les fatigues de compression du b\u00e9ton, l'\u00e9quation (50) peut s'\u00e9crire

$$35 = \frac{N}{bH} \left[ \frac{1}{1,073} + \frac{0,07}{0,208} \right] = \frac{N}{bH} \left[ 0,932 + 0,337 \right]$$

$$\frac{N}{bH} = \frac{35}{1,269} = 27,5 \quad N = 27,5 \times 40 \times 100 = 110\,000 \text{ kgs.}$$

b) *Recherche de la limite d'excentricit\u00e9 d'un effort normal donn\u00e9.* — Tel est le second aspect du probl\u00e8me. — Cette limite est toujours inf\u00e9rieure \u00e0 la hauteur du noyau central et peut \u00eatre de ce fait atteinte sans que la limite de s\u00e9curit\u00e9 \u00e0 la compres-

sion soit réalisée si l'effort normal est relativement restreint et que l'on veut éviter toute tension de traction. Pour les données numériques précédentes, cette limite est  $\frac{e}{H} = \frac{\epsilon'}{H} = 0,171$ .

Soit  $e = 17,1$  cm.

Si  $N = 40,000$ , pour  $e = 17,1$

$$t'_{b \max.} = 10 \left[ \frac{1}{1,073} + \frac{0,171}{0,208} \right] = 10 \left[ 0,932 + 0,824 \right] = 17,56 \text{ kg/cm}^2,$$

$$t'_{b \min.} = 0.$$

Si  $N$  dépasse la valeur  $bH \times \frac{350}{17,56} = 79750$  kgs, la limite de  $e$  est inférieure à la hauteur du noyau central.

Ainsi, pour  $N = 120000$  kg.,  $\frac{N}{bH} = 30$ , l'équation (50)

$$\text{s'écrit :} \quad 35 = 30 \left[ \frac{1}{1,073} + \frac{e}{0,208 H} \right],$$

$$\frac{e}{H} \left[ \frac{35}{30} - \frac{1}{1,073} \right] 0,208 = 0,208 \left[ 1,167 - 0,932 \right] = 0,208 \times 0,235 = 0,049$$

$$e = 4,9 \text{ cm.}$$

52) *Calcul des dimensions.* — Pour ce problème-ci également, par suite du nombre accru des inconnues, des conditions spéciales doivent être introduites par la fixation préalable de certaines dimensions ou données.

Nous examinerons divers cas :

a) *Calculer la hauteur d'une pièce de largeur donnée, soumise à un moment et à un effort normal donnés, la tension maximum restant inférieure au taux de sécurité fixé et le pourcentage d'armature étant choisi à priori.*

C'est le problème dont la solution a été fournie par la méthode et le tableau de l'ingénieur hollandais W.-J. Wisselink pour  $C = 1$  (deux armatures égales) (1).

Le tableau VIII permet de le résoudre pour une valeur quelconque de  $C$ . Par exemple,  $b = 25$  cm.,  $N = 50.000$  kg.,  $M = 400.000$  kgcm. et  $t'_b = 40$  kg/cm<sup>2</sup>.

Choisissons  $C = 0$  (armature unique) et comme pourcentage d'armature 1,6 p. c., soit

(1) Cfr. le fascicule n° 9 de 1918 du périodique hollandais, *Gewapend beton*.

$$\frac{m\Omega}{bH} = 0,24 \quad \text{Soit enfin } \alpha = 1,075.$$

D'après le tableau VIII :

$$\frac{S_o}{bH} = 1,24,$$

$$\frac{\mathcal{M}_o}{bH^2} = 0,517,$$

$$\frac{J_o}{bH^3} = 0,5346,$$

$$\frac{v}{H} = 0,416,$$

$$\frac{l}{bH^3} = 0,5346 - 0,216 = 0,1186,$$

$$\frac{l/v}{bl^2} = 0,285.$$

$$\text{Dès lors, } 40 = \frac{50\,000}{25 \times H} + \frac{400\,000}{25 \times H^2},$$

$$40 = \frac{1612}{H} + \frac{56\,300}{H^2},$$

$$H^2 - 40,5H - 1407,5 = 0,$$

$$H = 62,8 \text{ cm.}$$

$$\text{Vérification. } t'_b = \frac{50000}{1,24 \times 1570} + \frac{400000}{0,285 \times 98596} = 25,7 + 14,3 = 40 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\text{La tension minimum est } 25,7 - \frac{400\,000}{98596 \times \frac{0,1186}{0,584}} = 25,7 - 20 = 5,7 \text{ kg/cm}^2.$$

b) *Même problème mais H étant donné, calculer b.* — Supposons que  $H = 60$  cm. et soit à calculer  $b$ .

$$\text{L'équation s'écrit : } 40 = \frac{50\,000}{1,24 \times 60 \times b} + \frac{400\,000}{0,285 \times 3600 \times b},$$

$$b = \frac{50\,000}{1,24 \times 60 \times 40} + \frac{400\,000}{0,285 \times 3600 \times 40} = 16,8 + 9,75 = 26,55 \text{ cm.}$$

$$\text{Vérification. } t'_b = \frac{50\,000}{1,24 \times 60 \times 26,55} + \frac{400\,000}{0,285 \times 3600 \times 26,55} = 25,3 + 14,7 = 40 \text{ kg/cm}^2.$$

La tension minimum est

$$25,3 - \frac{400\,000}{0,203 \times 3600 \times 26,5\bar{c}} = 25,3 - 20,6 = 4,7 \text{ kg/cm}^2$$

53. *Calcul des armatures.* — C'est la forme qu'affecte le plus habituellement dans la pratique le problème de la section soumise uniquement à des tensions de compression. Les dimensions  $b$  et  $H$  sont données, ainsi que les éléments de la sollicitation. Il y aura lieu de calculer tout d'abord les tensions qui prendraient naissance dans la section non armée.

La nécessité théorique d'une armature s'avérera si la fatigue maximum ainsi calculée dépasse le taux de travail limite.

Il a été mis en évidence que, par raison d'économie, il y a lieu de préférer l'armature unique dans la zone du maximum de compression. Le problème rationnel consistera donc à déterminer l'armature simple nécessaire pour réduire la tension maximum de compression du béton au taux admissible.

Pratiquement, des raisons de construction exigeront souvent la double armature. La meilleure méthode de procéder consistera à réduire les barres dans la zone la moins fatiguée au minimum compatible avec les exigences pratiques et d'en déterminer ainsi au préalable la section. Ensuite, il faudra calculer l'armature principale encore nécessaire pour réduire la tension maximum de compression du béton au taux admissible. Telle est la forme la plus générale et également la plus pratique du problème; l'auteur n'a cependant pas connaissance qu'il ait été envisagé déjà sous cet angle. Jusqu'à présent on s'est souvent attaché dans de telles circonstances aux armatures égales, solution économiquement défavorable et donnant lieu à des calculs plus compliqués que le problème considéré sous la forme absolument générale, telle qu'elle vient d'être énoncée. Ce procédé semble cependant avoir été préféré dans la présomption qu'il était le seul donnant lieu à des calculs praticables. Les formules (40) à (50) et le tableau VIII ne permettent le calcul que par tâtonnements et ne conviennent donc pas; il faut employer une autre méthode. Dans les calculs qui vont suivre, on se référera au bras du levier  $\epsilon$  de l'effort normal par rapport à l'arête la plus fatiguée et non plus à son excentricité vraie. Les autres notations sont définies par la figure 16. La proportionnalité des tensions s'exprime par  $t = t_b \frac{x - H}{x}$ .

L'équilibre de translation fournit les équations successives :

$$bH \frac{t'_b + t}{2} + m\Omega t'_b \frac{x - H + h}{x} + m\omega t'_b \frac{x - h}{x} = N,$$

$$bH t'_b \frac{2x - H}{2x} + m\Omega t'_b \frac{x - (H - h)}{x} + m\omega t'_b \frac{(x - h)}{x} = N,$$

$$x \left[ bH t'_b + m\Omega t'_b + m\omega t'_b - N \right] = \frac{bH^2 t'_b}{2} + m\Omega t'_b (H - h) + m\omega t'_b h,$$

$$x = \frac{\frac{bH^2}{2} + m\Omega (H - h) + m\omega h}{(bH + m\Omega + m\omega) - \frac{N}{t'_b}}.$$

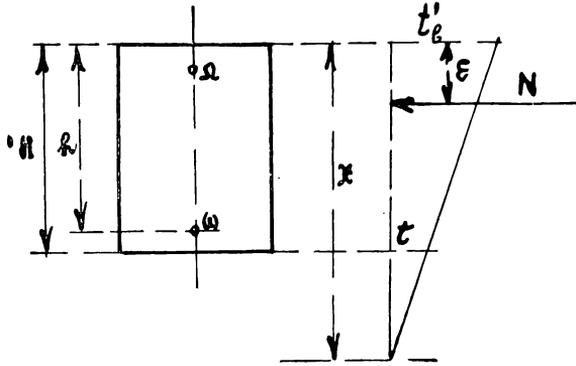


Fig. 16.

L'équilibre des moments par rapport à l'arête la moins fatiguée, comme axe de référence, s'exprime comme suit :

$$\frac{bx t'_b}{2} \left[ \frac{2}{3} x - x + H \right] + \frac{b(x - H)^2}{2x} t'_b \frac{x - H}{3} + m\Omega t'_b \frac{(x - H + h)}{x} h + m\omega t'_b \frac{x - h}{x} (H - h) = N(H - \epsilon),$$

$$\frac{bH^2 t'_b}{6x} (3x - H) + m\Omega t'_b h \frac{x - (H - h)}{x} + m\omega t'_b (H - h) \frac{x - h}{x} = N(H - \epsilon),$$

$$x \left[ \frac{bH^2}{2} t'_b + m\Omega t'_b h + m\omega t'_b (H - h) - N(H - \epsilon) \right] = \frac{bH^5}{6} t'_b + m\Omega t'_b h (H - h) + m\omega t'_b (H - h) h,$$

$$x = \frac{\frac{bH^5}{6} + m(\Omega + \omega) h(H - h)}{\frac{bH^2}{2} + m\Omega h + m\omega (H - h) - \frac{N(H - \epsilon)}{t'_b}},$$

$$\text{Donc } \frac{\left[ \frac{bH^2}{2} + m\omega h \right] + m\Omega (\Pi - h)}{\left[ bH + m\omega - \frac{N}{t'_b} \right] + m\Omega} = \frac{\left[ \frac{bH^3}{6} + m\omega (\Pi - h, h) \right] + m\Omega (\Pi - h) h}{\left[ \frac{bH^2}{2} + m\omega (\Pi - h) - \frac{N(\Pi - \varepsilon)}{t'_b} \right] + m\Omega h},$$

$$\text{ou } \frac{A + \frac{m\Omega}{bH} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right)}{B + \frac{m\Omega}{bH}} = \frac{C + \frac{m\Omega}{bH} \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right)}{D + \frac{m\Omega}{bH} \frac{1}{\alpha}};$$

relation dans laquelle :

$$A = \frac{1}{2} + \frac{m\omega}{bH} \frac{1}{\alpha},$$

$$B = 1 + \frac{m\omega}{bH} - \frac{N}{bHt'_b},$$

$$C = \frac{1}{6} + \frac{m\omega}{bH} \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right),$$

$$D = \frac{1}{2} + \frac{m\omega}{bH} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{N \left( 1 - \frac{\varepsilon}{H} \right)}{bHt'_b}.$$

$$\text{D'où } \frac{m\Omega}{bH} = \frac{BC - AD}{\frac{1}{\alpha} A - \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) B - C + \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) D}.$$

Cette expression devient après développement :

$$\frac{m\Omega}{bH} = \frac{\frac{N}{bHt'_b} \left[ \frac{1}{3} + \frac{m\omega}{bH} \left( \frac{1}{\alpha} \right)^2 \right] - \frac{N\varepsilon}{bH^2 t'_b} \left[ \frac{1}{2} + \frac{m\omega}{bH} \frac{1}{\alpha} \right] - \frac{1}{12} - \frac{m\omega}{bH} \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha} + \left( \frac{1}{\alpha} \right)^2 \right]}{\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha} + \left( \frac{1}{\alpha} \right)^2 + \frac{m\omega}{bH} \left( \frac{2}{\alpha} - 1 \right)^2 - \frac{N}{bHt'_b} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right)^2 + \frac{N\varepsilon}{bH^2 t'_b} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right)} \quad (51)$$

Elle est rationnelle et très simple d'application. Comme il n'y a qu'une seule inconnue  $\frac{m\Omega}{bH}$ , il est inutile d'établir des tableaux. Le nombre élevé des variables (trois) rendrait d'ailleurs ce travail fastidieux.

Lorsqu'il n'existe qu'une seule armature, c'est-à-dire lorsque  $\omega = 0$ , la formule se simplifie comme suit :

$$\frac{m\Omega}{bH} = \frac{\frac{1}{3} \frac{N}{bHt'_b} - \frac{1}{2} \frac{N\varepsilon}{bH^2 t'_b} - \frac{1}{12}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha} + \left( \frac{1}{\alpha} \right)^2 - \frac{N}{bHt'_b} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right)^2 + \frac{N\varepsilon}{bH^2 t'_b} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right)} \quad (52)$$

Elle est également remarquablement simple. Si l'on impose comme condition que les armatures soient égales,  $\omega = \Omega$  et l'expression devient du second degré en  $\frac{m\Omega}{bH}$ , qui est racine de l'équation :

$$\left(\frac{2}{\alpha} - 1\right)^2 \left(\frac{m\Omega}{bH}\right)^2 + \frac{m\Omega}{bH} \left[ 2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) + \frac{N\epsilon}{bH^2 t'_b} - \frac{N}{bH t'_b} \left( 1 + \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2} \right) \right] + \frac{1}{12} - \frac{N}{3bH t'_b} + \frac{N\epsilon}{2bH^2 t'_b} = 0 \quad \dots \dots \dots (53)$$

L'on pourrait aussi poser la condition  $\omega = C\Omega$ , le problème serait également résolu par une équation du 2<sup>me</sup> degré.

54. *Exemples numériques.* — a)  $H = 100$ ,  $b = 25$ ,  $N = 100\ 000$ ,  $\epsilon = 40$ . — Si la section n'est pas armée,  $t'_b = \frac{100\ 000}{25 \times 100} \left[ 1 + \frac{6 \times 10}{100} \right] = 64 \text{ kg/cm}^2$ .

Cette fatigue est exagérée; elle ne pourrait dépasser  $40 \text{ kg/cm}^2$ ; une armature est donc nécessaire.

b) Le moyen le plus économique d'atteindre le résultat désiré est de prévoir une armature dans la zone du maximum de compression.

Supposons  $h = 95$ ,  $\alpha = 1,05$ ,  $\frac{1}{\alpha} = 0,95$ ,  $\frac{1}{\alpha^2} = 0,90$ ,

$$1 - \frac{1}{\alpha} = 0,05, \quad \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right)^2 = 0,0025;$$

$$\frac{N}{bH t'_b} = \frac{100\ 000}{25 \times 100 \times 40} = 1,$$

$$\frac{N\epsilon}{bH^2 t'_b} = \frac{100\ 000 \times 40}{25 \times 100\ 00 \times 40} = 0,4.$$

Donc, d'après la formule (52) :

$$\frac{m\Omega}{bH} = \frac{\frac{1}{3} - 0,20 - \frac{1}{12}}{\frac{1}{3} - 0,95 + 0,90 - 0,0025 + 0,02} = \frac{0,25 - 0,20}{0,3333 - 0,0325} = \frac{0,05}{0,3008} = 0,167,$$

$$\Omega = \frac{0,167 \times 2500}{15} = 27,8 \text{ cm}^2.$$

c) Supposons que pour des raisons de construction il y ait une armature secondaire  $\omega = 18,10 \text{ cm}^2$  (4 barres de 24).

$$\frac{m\omega}{bH} = \frac{15 \times 18,1}{2500} = 0,109.$$

D'après la formule (51) :

$$\frac{m\Omega}{bH} = \frac{\left[ \frac{1}{3} + 0,90 \times 0,109 \right] - 0,4 \left[ \frac{1}{2} + 0,95 \times 0,109 \right] - \frac{1}{12} - 0,109 \left[ \frac{1}{3} - 0,95 + 0,90 \right]}{\frac{1}{3} - 0,95 + 0,90 + 0,109 (1,90 - 1)^2 - 0,0025 + 0,02}$$

$$\frac{m\Omega}{bH} = \frac{0,076}{0,589} = 0,129,$$

$$\Omega = \frac{0,129 \times 2500}{15} = 21,5 \text{ cm}^2.$$

La section totale d'armature comporte donc 50,6 cm<sup>2</sup>, soit près du double de celle de la solution b).

d) Si les deux armatures étaient égales, l'armature totale serait encore supérieure.

L'équation (53) s'écrit :

$$0,81 \left( \frac{m\Omega}{bH} \right)^2 + \frac{m\Omega}{bH} \left[ 2 \left( \frac{1}{3} - 0,95 + 0,90 \right) + 0,40 - \left( 1 - 1,90 + 1,805 \right) \right] + \frac{1}{12} - \frac{1}{3} + 0,20 = 0,$$

$$0,81 \left( \frac{m\Omega}{bH} \right)^2 + 2 \times 0,0508 \frac{m\Omega}{bH} - 0,05 = 0,$$

$$\frac{m\Omega}{bH} = \frac{-0,0508 + \sqrt{0,000948 + 0,0405}}{0,81} = \frac{-0,0508 + 0,2055}{0,81}$$

$$\Omega = \frac{0,210 \times 2500}{15} = 35 \text{ cm}^2.$$

La section totale d'armature est 70 cm<sup>2</sup>.

Ces exemples suffiront pour mettre en évidence tout l'intérêt des formules (51), (52) et (53).

**TABLEAU VIII.**  
Flexion plane des pièces rectangulaires. — Éléments géométriques des sections.

$\alpha$	$\frac{m\Omega}{bH}$	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30
	$\frac{S_0}{b \cdot 1}$	1,00	1,02	1,04	1,06	1,08	1,10	1,12	1,14	1,16	1,18	1,20	1,22	1,24	1,26	1,28	1,30
	$\sigma$	»	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30
1,05	$\frac{\mathcal{M}_0}{bH^2}$	0,500	0,501	0,502	0,503	0,504	0,505	0,506	0,507	0,508	0,509	0,510	0,510	0,511	0,512	0,513	0,514
1,10	$\frac{\mathcal{M}_0}{bH^2}$	0,500	0,502	0,504	0,505	0,507	0,509	0,511	0,513	0,515	0,516	0,518	0,520	0,522	0,524	0,525	0,527
1,05	$\mu$	»	0,019	0,038	0,057	0,076	0,095	0,114	0,133	0,152	0,171	0,190	0,210	0,229	0,248	0,267	0,286
1,10	$\mu$	»	0,018	0,036	0,055	0,073	0,091	0,109	0,127	0,145	0,164	0,182	0,200	0,218	0,236	0,255	0,273
1,05	$\frac{J_0}{bH^3}$	0,3333	0,3333	0,3334	0,3334	0,3335	0,3335	0,3336	0,3336	0,3337	0,3337	0,3338	0,3338	0,3338	0,3339	0,3339	0,3340
1,10	$\frac{J_0}{bH^3}$	0,3333	0,3335	0,3336	0,3338	0,3340	0,3341	0,3343	0,3345	0,3346	0,3348	0,3350	0,3351	0,3353	0,3355	0,3356	0,3358
1,05	$\epsilon$	»	0,0181	0,0363	0,0544	0,0725	0,0906	0,1088	0,129	0,1450	0,1631	0,1813	0,1994	0,2175	0,2356	0,2538	0,2719
1	$\epsilon$	»	0,0165	0,0331	0,0496	0,0661	0,0826	0,0992	0,1157	0,1322	0,1487	0,1653	0,1818	0,1983	0,2148	0,2314	0,2479

## CHAPITRE VIII.

### *Section rectangulaire.*

LA COMPRESSION EXCENTRIQUE DONNE NAISSANCE A DES TENSIONS DE TRACTION COMPATIBLES AVEC LA RÉSISTANCE A L'EXTENSION DU BÉTON.

55) *Théorie générale et discussion.* — Lorsque l'effort de compression est appliqué en dehors du noyau central, il développe dans la section des tensions de traction qui devront être supportées par des armatures, à moins que l'on ne puisse compter sur une résistance suffisante du béton à l'extension. A ce propos se manifeste de nouveau une grande diversité d'appréciations dans les divers règlements nationaux.

Les prescriptions autrichiennes qui admettent des tensions de traction du béton relativement élevées dans le cas de la flexion simple conservent évidemment les mêmes dispositions pour la compression excentrique.

Le règlement suisse admet des fatigues de 8,9 et 10 kg/cm<sup>2</sup> d'après la nature de la sollicitation et le règlement allemand 5 kg/cm<sup>2</sup> pour tous les cas.

Dans les autres pays, en général, il n'est pas tenu compte de la résistance à la traction du béton. La prudence la plus scrupuleuse semble cependant pouvoir s'accommoder de fatigues modérées de traction, telles que celles admises en Allemagne et en Suisse; c'est pourquoi un examen succinct de cette hypothèse paraît intéressant.

Il sera effectué par la méthode classique de la flexion plane composée, en admettant l'invariabilité du module d'élasticité du béton dans toute la section. Ce point de vue est plausible, puisqu'il ne sera en principe question que de tractions très faibles. Les formules (40) à (50) du chapitre précédent sont donc applicables. Il suffit d'y adjoindre pour la tension maximum de traction du béton :

$$t_b = \frac{N / bH}{S / bH} - \frac{Ne / bH^2}{1/v/bH^2} = \frac{N(e - \varepsilon') / bH^2}{\frac{v}{v} / bH^2} \dots (54)$$

Le tableau VIII est donc utilisable, et les problèmes pratiques se résoudreont de la même manière que dans le chapitre précédent. Ils sont cependant compliqués du fait qu'il faut

veiller à demeurer en deçà des limites admissibles pour les tensions maxima de compression et de traction. La répartition des armatures ne change pas cependant, l'armature principale doit rester dans la zone comprimée, attendu que les compressions admissibles sont très supérieures aux limites de traction. En principe, la meilleure économie resté réalisée par l'armature unique comprimée, qui utilise mieux le métal que l'armature étendue. Ceci nous autorise à conserver les notations qui ont été employées dans le chapitre précédent pour les sections des armatures,  $\Omega$  désignant l'armature principale comprimée.

A ce chapitre s'applique l'inverse d'une remarque formulée pour la flexion simple. Il faut s'attacher pour réaliser l'économie d'atteindre simultanément les taux limites de compression et d'extension du béton. Cette règle conduit à des sections de dimensions raisonnables et surtout à une économie d'armature. Il est évidemment recommandable d'utiliser tout l'espace disponible ou de ne limiter les dimensions que par des conditions pratiques de proportion. Mais même dans le cas où l'espace utilisable est suffisant, l'économie des matériaux exige d'atteindre autant que possible aux deux arêtes les limites pratiques des tensions.

Il est nécessaire d'ajouter que l'emploi de la présente méthode ne pourrait se justifier que lorsque l'excentricité reste faible et qu'ainsi les tensions de compression ont une grande prépondérance sur celles dues à la flexion. Les tensions de traction dans les armatures sont, en effet, très réduites ; le métal est très mal employé à l'extension. Si les efforts de cette nature étaient au contraire importants, il serait préférable d'utiliser la méthode du chapitre suivant qui fait supporter tous les efforts de traction, à un taux élevé, par les armatures. Il faudrait théoriquement y recourir dès que les calculs effectués par la méthode du présent chapitre établissent la nécessité d'une armature étendue.

Passons rapidement en revue quelques applications en utilisant pour la facilité autant que possible les mêmes données que dans le chapitre précédent.

#### APPLICATIONS.

56) *Vérification des tensions.* — (Voir n° 50.)

$$a) \quad N = 50\,000 \text{ kg}, \quad e = 20 \text{ cm}, \quad \frac{N}{bH} = 1,25,$$

$$\frac{e}{\Pi} = 0,20, \quad \frac{Ne}{bH^2} = 2,5,$$

$$\frac{S_0}{bH} = 1,073,$$

$$\frac{I}{v} / bH^2 = 0,208,$$

$$\frac{I}{v'} / b\Pi^2 = 0,184,$$

$$t_b = \frac{12,5}{1,073} + \frac{2,5}{0,208} = 11,65 + 12,05 = 23,70 \text{ kg/cm}^2,$$

$$t_b = \frac{12,5}{1,073} - \frac{2,5}{0,184} = 11,65 - 13,60 = - 1,95 \text{ kg/cm}^2.$$

b) Même pourcentage total de métal, mais réparti également entre deux armatures :

$$\frac{e}{\Pi} = 0,23, \quad \frac{Ne}{bH^2} = 2,875,$$

$$\frac{S_0}{bH} = 1,073, \quad \frac{I}{v} / bH^2 = \frac{I}{v'} / b\Pi^2 = 0,1967,$$

$$t_b = \frac{12,5}{1,073} + \frac{2,875}{0,1967} = 11,65 + 14,60 = 26,25 \text{ kg/cm}^2,$$

$$t_b = 11,65 - 14,60 = - 2,95 \text{ kg/cm}^2.$$

37) *Résistance limite.* —

(Voir n° 51.) Elle sera déterminée par la plus défavorable des deux conditions de limitation des tensions de compression et de traction.

a) *Limite de la valeur d'un effort normal d'excentricité donnée :*

$t'_b$  étant limité à  $35 \text{ kg/cm}^2$ , limitons  $t_b$  à  $5 \text{ kg/cm}^2$  et soit  $e = 20 \text{ cm}$ . Les deux conditions s'écrivent :

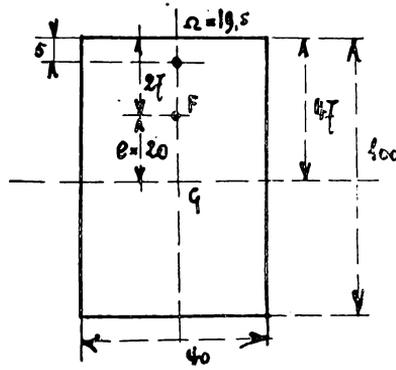


Fig. 17.

$$35 = \frac{N}{bH} \left[ \frac{1}{1,073} + \frac{0,20}{0,208} \right] = \frac{N}{bH} (0,932 + 0,965) = 1,895 \frac{N}{bH},$$

$$5 = \frac{N}{bH} \left[ \frac{1}{1,073} - \frac{0,20}{0,184} \right] = \frac{N}{bH} [0,932 - 1,087] = - 0,155 \frac{N}{bH}.$$

$$\text{D'où } \frac{N}{bH} < \frac{35}{1,895} \quad \text{et} \quad \frac{N}{bH} < \frac{5}{0,155} .$$

La première condition est la plus défavorable et donne :

$$N < 4.000 \times \frac{35}{1,895} \text{ où } 74.000 \text{ kg.}$$

b) *Limite d'excentricité d'un effort normal donné.*

Soient  $N = 40.000$  et  $t_b = 10 \text{ kg/cm}^2$ ,  $t'_b = 35 \text{ kg/cm}^2$ .

$$\text{Alors } \frac{N}{bH} = 10.$$

Les deux conditions s'écrivent :

$$35 = 10 \left[ \frac{1}{1,073} + \frac{\frac{e}{H}}{0,208} \right], \quad \text{d'où } \frac{e}{H} < \left[ \frac{35}{10} - \frac{1}{1,073} \right] \times 0,208 \text{ ou } 0,535,$$

$$-10 = 10 \left[ \frac{1}{1,703} - \frac{\frac{e}{H}}{0,184} \right], \quad \text{d'où } \frac{e}{H} < \left[ \frac{10}{10} + \frac{1}{1,703} \right] \times 0,184 \text{ ou } 0,355.$$

Cette fois, c'est la limitation des tensions de traction qui limite l'excentricité à  $\frac{e}{H} = 0,355$ , soit  $e = 35,5 \text{ cm}$ .

58) *Calcul des dimensions* (voir n° 52). — Celles-ci seront déterminées par la plus défavorable des conditions de résistance à la compression ou à la traction, à moins que l'on n'impose la condition de réaliser à la fois les deux limites de fatigue.

a) *Calculer la hauteur d'une pièce de largeur donnée, soumise à un moment et à un effort normal donnés, les tensions maxima de compression et d'extension devant rester inférieures à des taux de sécurité fixés et le pourcentage, ainsi que la répartition des armatures étant fixés à priori.*

Par exemple  $b = 25$ ,  $N = 25\,000 \text{ kg}$   $M = 600\,000 \text{ kgcm.}$ ,  
 $t'_b = 40 \text{ kg/cm}^2$  et  $t_b = 5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 1,075$ .

Choisissons  $C = 0$  (armature unique) et un pourcentage d'armature de 1,6 p. c. Dès lors (voir paragraphe 52 a) :

$$\frac{m\Omega}{bH} = 0,24, \quad \frac{v}{H} = 0,416,$$

$$\frac{S_0}{bH} = 1,24, \quad \frac{1}{v} / bH^2 = 0,285, \quad \frac{1}{v'} / bH^2 = 0,204 .$$

Les deux conditions s'écrivent :

$$40 = \frac{25\ 000}{25 \times H} + \frac{600\ 000}{25 \times H^2},$$

$$5 = \frac{25\ 000}{25 \times H} + \frac{600\ 000}{25 \times H^2}.$$

Elles donnent lieu aux deux équations du second degré

$$H^2 - 20,15 H - 2110 = 0,$$

$$H^2 + 161,2H - 25560 = 0.$$

La première admet comme racine  $H = 57,07$  cm, la seconde  $H = 92,65$  cm, laquelle fournit la solution.

$$\text{Vérification : } t_b = -\frac{25\ 000}{1,24} + \frac{600\ 000}{0,285} = -8\ 70 + 15,70 = 5,$$

$$t'_b = \frac{26 \times 92,65}{1,24} + \frac{25 \times 92,65^2}{0,285} = 8,70 + 9,85 = 18,55 \text{ kg/cm}^2.$$

La fatigue de compression du béton est très réduite, l'utilisation du métal mauvaise. Les tensions de flexion sont trop importantes par rapport à la compression. Nous examinerons plus loin s'il n'y aurait pas d'intérêt à recourir à une armature de traction sans compter sur la résistance à l'extension du béton, mais en faisant travailler ce dernier par compression au maximum.

*b) Même problème, mais H étant donné, calculer b.*

Supposons que  $N = 80000$ ,  $M = 1600000$  et  $H = 100$

Les équations s'écrivent :

$$40 = \frac{80\ 000}{1,24 \times 100 \times b} + \frac{1\ 600\ 000}{0,285 \times 10\ 000 \times b},$$

$$5 = -\frac{80\ 000}{1,24 \times 100 \times b} + \frac{1\ 600\ 000}{0,204 \times 10\ 000 \times b},$$

dont les racines sont  $b = 30,20$  cm et  $27,7$  cm.

La première valeur fournit la solution.

*Vérification :*

$$t'_b = \frac{+80\ 000}{1,24 \times 3010} + \frac{1\ 600\ 000}{0,285 \times 301\ 000} = 21,40 + 18,60 = 40,$$

$$t_b = \frac{-80\ 000}{1,24 \times 3010} + \frac{1\ 600\ 000}{0,204 \times 301\ 000} = -21,40 + 26 = -4,60.$$

Dans ce problème-ci, l'excentricité étant réduite et la pression considérable, les méthodes du présent chapitre sont d'application avantageuse.

59) *Calcul des armatures.* — (Voir n° 53). Le problème se pose de la même manière que dans le chapitre précédent : Ayant déterminé *a priori* la section de l'armature secondaire  $\omega$  (étendue) éventuellement nulle, ou bien ayant spécifié qu'elle doit être identique à celle de l'armature principale  $\Omega$ , calculer cette dernière section. Les conditions qui permettent ce calcul sont que la tension maximum de compression doit être inférieure à  $t'_b$ , celle de traction inférieure à  $t_b$ . Cette fois encore la solution sera déterminée par la plus défavorable de ces conditions. La première s'exprime par les équations (51), (52) ou (53) du chapitre précédent.

Pour la dernière (limite  $t_b$ ), il est possible d'établir de la même manière des équations analogues qui s'écrivent :

$$\frac{m\Omega}{bH} = \frac{\frac{N}{bHt_b} \left[ \frac{1}{6} + \frac{m\omega}{bH} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{1}{\alpha} \right] - \frac{N\varepsilon}{bH^2t_b} \left[ \frac{1}{2} + \frac{m\omega}{bH} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] - \frac{1}{12} - \frac{m\omega}{bH} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right)}{\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{m\omega}{bH} \left[ \frac{2}{\alpha} - 1 \right]^2 - \frac{N}{bHt_b} \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{N\varepsilon}{bH^2t_b} \frac{1}{\alpha}} \quad (54)$$

$$\frac{m\Omega}{bH} = \frac{\frac{1}{6} \frac{N}{bHt_b} - \frac{1}{2} \frac{N\varepsilon}{bH^2t_b} - \frac{1}{12}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{N}{bHt_b} \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{N\varepsilon}{bH^2t_b} \frac{1}{\alpha}} \quad (55)$$

$$\left( \frac{2}{\alpha} - 1 \right)^2 \left( \frac{m\Omega}{bH} \right)^2 + \frac{2m\Omega}{bH} \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) - \frac{N}{bHt_b} \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{N\varepsilon}{2bH^2t_b} \right] + \frac{1}{12} - \frac{N}{6bHt_b} + \frac{N\varepsilon}{2bH^2t_b} = 0 \quad (56)$$

Les calculs s'effectuent comme il a été indiqué au chapitre précédent. Pratiquement, si des raisons de construction exigent qu'il y ait une armature  $\omega$  dans la zone étendue, il sera toujours préférable de la considérer comme armature principale, en négligeant la résistance à la traction du béton. A moins cependant que, pour éviter des fissurations on ne veuille limiter  $t_b$ . Le plus souvent, on recherchera d'abord les tensions qui se produiraient dans la section sans armature. Si l'on trouve une tension de traction exagérée et importante par rapport à celle de compression, on recourra à une armature de traction que l'on calculera par les méthodes du chapitre suivant.

Si l'on trouve une compression exagérée, accompagnée de tractions faibles ou relativement faibles, on utilisera une arma-

ture de compression, calculée d'après les formules (52) ou (55) en supposant l'armature unique.

Si, pour des raisons quelconques, une armature secondaire était indispensable et que, cependant, l'application des méthodes du présent chapitre fût opportune, les formules (51) ou (54) donneraient la solution.

60. *Exemple numérique.* — Soit sur un pilier carré de  $100 \times 100$ , supportant une pression totale de 150.000 kilogrammes, excentrée de 26 cm suivant une direction parallèle à un des côtés. Les fatigues limites sont  $t'_b = 30 \text{ kg/cm}^2$  et  $t_b = 5 \text{ kg/cm}^2$ . Dans la section non armée, les tensions maxima seraient:  $t'_b = \frac{150\,000}{10\,000} + \frac{150\,000 \times 26}{100 \times 10\,000} = 15 + 23,4 = 38,4 \text{ kg/cm}^2$ ,

$$t_b = 23,4 - 15 = 8,4 \text{ kg/cm}^2.$$

Les deux tensions sont exagérées. Cherchons à les réduire aux limites admises par une armature dans la zone comprimée, qui se calculera tout d'abord par la formule (55).

Soient  $\alpha = 1,075$ ,  $\frac{1}{\alpha} = 0,93$ ,  $1 - \frac{1}{\alpha} = 0,07$ ,  $\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0,865$ ,  
 $\epsilon = 24$ .

$$\frac{N}{bHt_b} = \frac{150\,000}{100 \times 100 \times 5} = 3,$$

$$\frac{N\epsilon}{bH^2t_b} = \frac{150\,000 \times 24}{100 \times 10\,000 \times 5} = 0,72.$$

L'on obtient la valeur  $\frac{m\Omega}{bH} = 0,077$ ,  $\Omega = 51,5 \text{ cm}^2$

La formule (52) fournit pour

$$\frac{N}{bHt'_b} = 0,5, \quad \frac{N\epsilon}{bH^2t'_b} = 0,12.$$

la valeur  $\frac{m\Omega}{bH} = 0,084$ ,  $\Omega = 56 \text{ cm}^2$ .

Il faut adopter cette dernière solution.

Le tableau VIII permet de vérifier que :

pour  $\frac{m\Omega}{bH} = 0,077$ ,  $t_b = 5 \text{ kg/cm}^2$  et  $t'_b = 30,65 \text{ kg/cm}^2$ ;

pour  $\frac{m\Omega}{bH} = 0,084$ ,  $t'_b = 30 \text{ kg/cm}^2$  et  $t_b = 4,70 \text{ kg/cm}^2$ .

Supposons maintenant que, par raison de construction, la section doit comporter une armature secondaire de 27,14 cm<sup>2</sup> (6 barres de 24 m/m).

$$\frac{m\omega}{bH} = \frac{15 \times 27.14}{10000} = 0.0407.$$

Dans ce cas, d'après la formule (54),  $\frac{m\Omega}{bH} = 0,0650$

et, d'après la formule (51),  $\frac{m\Omega}{bH} = 0,0865$ .

Il faut donc presque la même armature principale que lorsque celle-ci est unique, elle est en effet de 57,66 cm<sup>2</sup>. L'armature totale comporterait donc 84,80 cm<sup>2</sup>.

61) *Condition du maximum d'utilisation.* — Elle revient à exiger que les limites admissibles de  $t'_b$  et  $t_b$  soient atteintes simultanément. Dans la flexion simple, le rapport  $\frac{t'_b}{t_b}$  dépend uniquement du pourcentage et de la répartition de l'armature; en flexion composée, il dépend de plus de l'excentricité relative  $\frac{e}{H}$ . La condition d'utilisation maximum est, de ce fait, une complication supplémentaire et elle est le plus souvent impraticable.

Le problème le plus habituel, celui du calcul des armatures (n° 59), les dimensions extérieures de la section du béton étant fixées à *priori*, n'admet pas cette condition supplémentaire. Nous avons vu, en effet, que  $\frac{m\Omega}{bH}$  est complètement déterminé par l'une des conditions de limite de  $t_b$  ou de  $t'_b$ ; ce n'est que par un cas fortuit que les deux limites pourraient être réalisées concurremment. Le calcul des dimensions de la section d'après le numéro 58 peut s'accommoder de la condition de l'utilisation maximum et dans le cas où la hauteur totale de la section est fixée à *priori*, elle mérite de retenir l'attention, car elle réalise la condition de l'armature minimum.

La méthode à suivre est la suivante :

1) Calculer  $\frac{m\Omega}{bH}$  en fonction de  $\frac{\varepsilon}{H}$  et du rapport  $\frac{t'_b}{t_b}$ , éventuellement aussi de  $\frac{m\omega}{bH}$  si une armature secondaire est jugée indispensable.

2) Cette valeur de  $\frac{m\Omega}{bH}$  étant connue, calculer  $b$  par l'une des conditions équivalentes, de telle façon que la limite de  $t'_b$  ou  $t_b$  soit atteinte.

La seconde opération ne diffère en rien de celle qui a été exposée au numéro 58 b), où nous avons supposé  $\frac{m\Omega}{bH}$  déterminé d'une manière quelconque.

Il ne reste donc qu'à exposer le calcul préliminaire de  $\frac{m\Omega}{bH}$ .

Exprimons à cet effet l'équilibre des moments des forces internes autour du point d'application F de la résultante des forces extérieures.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{b\alpha t'_b}{2} \left( \frac{x}{3} - \varepsilon \right) + m t'_b \frac{x-H+h}{x} (\varepsilon - \Pi + h) + b \frac{(H-x)}{2} t_b \left[ \Pi - \varepsilon - \frac{H-x}{3} \right] + m\omega \frac{h-x}{\Pi-x} t_b (h-\varepsilon) = 0. \\
 & -\frac{1}{2} \frac{x}{H} \frac{t'_b}{t_b} \left[ \frac{1}{3} \frac{x}{H} - \frac{\varepsilon}{H} \right] + \frac{m\Omega}{bH} \frac{t'_b}{t_b} \left[ \frac{\varepsilon}{\Pi} - \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \frac{\frac{x}{H} - \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right)}{x} + \left( 1 - \frac{x}{\Pi} \right) \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{x}{H} - \frac{\varepsilon}{\Pi} \right] \\
 & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{bH} \frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{x}{\Pi}}{1 - \frac{x}{H}} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{\varepsilon}{H} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

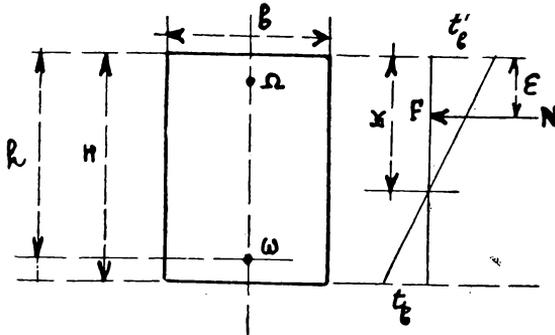


Fig. 18.

Or,  $\frac{x}{\Pi} = \frac{\frac{t'_b}{t_b}}{1 + \frac{t'_b}{t_b}}$ , d'où l'on déduit finalement :

$$\frac{m\Omega}{bH} = \frac{\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{t'_b}{t_b} \right)^2 \left[ \frac{1}{5} \frac{t'_b}{t_b} - \frac{\varepsilon}{H} \left( 1 + \frac{t'_b}{t_b} \right) \right] \left[ -\frac{2}{5} + \frac{t'_b}{t_b} - \frac{\varepsilon}{H} \left( 1 + \frac{t'_b}{t_b} \right) \right] - \frac{m\omega}{bH} \left( 1 + \frac{t'_b}{t_b} \right)^2 \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{\varepsilon}{H} \right) \left[ \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{t'_b}{t_b} \right) - \frac{t'_b}{t_b} \right] \right\}}{\left( 1 + \frac{t'_b}{t_b} \right)^2 \left[ \frac{\varepsilon}{H} - \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \left[ \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{t'_b}{t_b} \right) - 1 \right]} \quad (57)$$

Si l'armature est simple,  $\frac{m\omega}{bH} = 0$ , et la formule devient :

$$\frac{m\Omega}{bH} = \frac{\frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{t'_b}{t_b} \right]^2 \left[ \frac{1}{5} \frac{t'_b}{t_b} - \frac{\varepsilon}{H} \left( 1 + \frac{t'_b}{t_b} \right) \right] \left[ -\frac{2}{5} + \frac{t'_b}{t_b} - \frac{\varepsilon}{H} \left( 1 + \frac{t'_b}{t_b} \right) \right] \right\}}{\left( 1 + \frac{t'_b}{t_b} \right)^2 \left[ \frac{\varepsilon}{H} - \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \left[ \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{t'_b}{t_b} \right) - 1 \right]} \quad (58)$$

Si dans la formule (57) on introduit l'expression  $\omega = C\Omega$ , on obtient la formule :

$$\frac{m\Omega}{bH} = \frac{\left[ \frac{t'_b}{t_b} \right]^2 \left[ \frac{1}{5} \frac{t'_b}{t_b} - \frac{\varepsilon}{H} \left( 1 + \frac{t'_b}{t_b} \right) \right] - \left[ \frac{2}{5} + \frac{t'_b}{t_b} - \frac{\varepsilon}{H} \left( 1 + \frac{t'_b}{t_b} \right) \right]}{2 \left( 1 + \frac{t'_b}{t_b} \right)^2 \left[ \frac{\varepsilon}{H} - \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \left[ \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{t'_b}{t_b} \right) - 1 \right] + C \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{\varepsilon}{H} \right) \left[ \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{t'_b}{t_b} \right) - \frac{t'_b}{t_b} \right]},$$

toujours linéaire et que nous ne citons que pour mémoire.

On pourrait en particulier pour  $C = 1$  (armatures égales) écrire une forme particulière de la formule.

On utilisera surtout les formules (57) et (58) qui peuvent être facilement traduites en deux tableaux analogues aux tableaux I et II.

Pour différents rapports  $\frac{t'_b}{t_b}$  et différentes valeurs échelonnées de  $\frac{\varepsilon}{H}$ , un premier tableau donnerait d'après la formule

(58) les valeurs de  $\frac{m\Omega}{bH}$  pour  $C = 0$ , un second les valeurs d'un coefficient de correction applicable pour toutes valeurs de  $C$ , que l'on peut déduire de la formule (57).

Ces tableaux ne présentent pas un grand intérêt général; ils sont trop particuliers pour que nous les introduisions dans la présente note; il suffit de les avoir cités.

$\frac{m\Omega}{bH}$  étant ainsi déterminé, nous pouvons, pour terminer la résolution du problème, appliquer purement et simplement les calculs du numéro 58 b), c'est-à-dire recourir au tableau VIII.

En effet, nous pouvons, grâce à ce tableau, calculer  $\frac{v}{H}$ , d'où  $\frac{e}{H} = \frac{v}{H} - \frac{\varepsilon}{H}$  et ainsi de suite.

62) *Exemple numérique.*— Soient  $H = 100$ ,  $\varepsilon = 20$ ,  $\frac{1}{\alpha} = 0,95$  et  $1 - \frac{1}{\alpha} = 0,05$ . Supposons qu'il n'y ait qu'une armature, donc  $\omega = 0$ . Les limites admissibles de tension étant  $t'_b = 40$  et  $t_b = 5$ ,  $\frac{t'_b}{t_b} = 8$

$$\frac{m\Omega}{bH} = \frac{64 [2,67 - 0,20 \times 9] - [0,67 + 8 - 0,20 \times 9]}{2 \times 81 \times (0,20 - 0,05) (0,95 \times 9 - 1)} = 0,267.$$

D'après le tableau VIII :

$$\frac{S_0}{bH} = 1,267, \quad \frac{v}{H} = 0,405, \quad \frac{v'}{H} = 0,595.$$

$$\frac{e}{H} = 0,405 - 0,200 = 0,205,$$

$$\frac{1}{v} / bH^2 = 0,314, \quad \frac{1/v'}{bH^2} = 0,215.$$

Pour calculer  $b$ , il suffit d'écrire :

$$40 = \frac{N}{100 \times b \times 1,267} + \frac{N \times 0,205}{100 \times b \times 0,314},$$

$$\text{d'où } b = \frac{N}{10\,000} [1,97 + 1,63] = \frac{5,60N}{10\,000}$$

$$\text{On en déduit : } \frac{N}{bH} = \frac{100}{3,60} = 27,8,$$

$$\frac{Ne}{bH^2} = 27,8 \times 0,205 = 5$$

Comme vérification :

$$t_b = \frac{-27,8}{1,267} + \frac{5,60}{0,215} = 26,8 - 21,8 = 5.$$

Si l'on adoptait un pourcentage d'armature inférieur à celui calculé ci-dessus,  $t'_b$  serait inférieur à 40 et l'armature serait mal utilisée et peu économique, car, malgré le pourcentage réduit, la valeur absolue de l'armature croîtrait à cause de l'augmentation prépondérante de la largeur calculée  $b$ .

Si l'on adoptait un pourcentage supérieur d'armature,  $t_b$

serait inférieur à 5, mais  $b$  ne diminuant que faiblement, la section réelle de l'armature serait également plus grande dans ce cas.

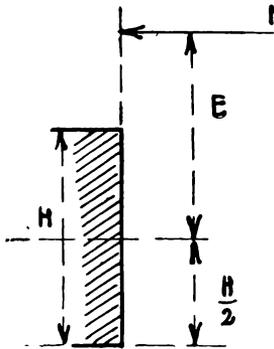
Le problème ne se présente pas sous une forme praticable lorsque la largeur  $b$  est fixée *a priori* et qu'il s'agit de calculer la hauteur  $H$  en réalisant simultanément les tensions  $t'_b$  et  $t_b$ . Il semble ne pouvoir être résolu que par des tâtonnements laborieux; le point est d'ailleurs d'un mince intérêt et ne sera pas examiné davantage.

## CHAPITRE IX.

### Section rectangulaire.

LA RÉSISTANCE AUX TENSIONS DE TRACTION PROVENANT DE LA COMPRESSION EXCENTRIQUE EST ASSURÉE UNIQUEMENT PAR UNE ARMATURE (1).

63) *Théorie générale.* — Ce chapitre est l'analogue du chapitre I de la première section; la résistance à l'extension du béton est négligée. La figure ci-contre définit les notations employées, dont une nouvelle  $E$  sert à déterminer la position de l'effort de compression par rapport à l'axe médian de la section, situé à égale distance des arêtes. Cette distance n'est donc pas l'excentricité; on pourrait lui affecter une désignation spéciale (écart, par exemple).



F.g. 19.

L'unique longueur à laquelle s'applique le nom d'excentricité est le bras de levier de la force normale résultante sollicitant la section par

rapport au centre de gravité de la *partie active* de celle-ci,

(1) Le manuscrit de ce mémoire était terminé depuis plusieurs semaines lorsque j'ai eu connaissance d'une note de l'ingénieur hollandais, M. W.-J. Wis-selink, publiée dans le fascicule du 15 juillet 1922 du périodique *De Ingenieur*. Les formules qu'il établit présentent beaucoup d'analogie avec celles du chapitre ci-dessus. Le rapprochement des dates de publication et les caractères distinctifs

c'est-à-dire abstraction faite de la zone d'extension du béton.

C'est la seule distance satisfaisant à la formule  $e = \frac{M}{N}$ .

Or, le centre de gravité de la section active n'est pas ou n'est que difficilement connu a priori ; il est peu pratique de s'y référer et son lieu géométrique dans la pièce constructive examinée ne présente rien de tangible ou de remarquable.

Toutes les méthodes qui se réfèrent à une « excentricité » différente de celle qui vient d'être définie et lui appliquent une propriété  $e = \frac{M}{N}$  sont, ou bien entachées d'erreur systématique, ou d'un emploi strictement limité aux cas où les hypothèses particulières faites sont réalisées.

Le choix de l'élément E élimine toute inexactitude et conduit à une solution pratique dans tous les cas. En effet, le calcul organique d'une construction ne peut être entrepris que lorsque tous les éléments de la sollicitation extérieure, en tenant compte des liaisons, sont connus, c'est-à-dire lorsque le problème de statique extérieure est résolu. Il est donc toujours possible de tracer la ligne des pressions et de la rapporter à un axe médian que l'on peut généralement se fixer pour la construction et qui sert habituellement d'axe primitif pour la conception et le dessin du projet.

La proportionnalité des tensions s'exprime par la relation

$$\text{connue : } \frac{t_a}{mt'_b} = \frac{h-x}{x}, \quad \text{d'où : } \frac{h}{x} = \frac{1}{1 + \frac{t_a}{mt'_b}}.$$

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$N = \frac{bxt'_b}{2} + m\omega t'_b \frac{x - H + h}{x} - \Omega t_a.$$

Après transformation et tenant compte des hypothèses  $H = \alpha h$  et  $\omega = C\Omega$ ,

$$\frac{m\Omega}{bH} = \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) \left\{ \frac{t_a}{mt'_b} - C \left[ 1 - (\alpha - 1) \left( 1 - \frac{t_a}{mt'_b} \right) \right] \right\}} - \frac{\frac{N}{bh t'_b}}{\frac{t_a}{mt'_b} - C \left[ 1 - (\alpha - 1) \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) \right]}$$

des deux études suffiront pour établir qu'il n'y a là qu'une heureuse coïncidence. Il m'est très précieux de trouver une confirmation de mes propres travaux, exécutés de 1920 à 1922 d'une manière indépendante, dans la communication d'un spécialiste autorisé, auquel j'ai eu l'occasion déjà de me référer au chapitre VII.



On en déduit après transformation :

$$\frac{m\Omega}{bh} = \frac{3 \left( \frac{E}{h} - \frac{\alpha}{2} \right) \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) + 1}{6 \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right)^2 \frac{t_a}{mt'_b} \left\{ \frac{E}{h} + 1 - \frac{\alpha}{2} - C \frac{1 - (\alpha - 1) \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right)}{\frac{t_a}{mt'_b}} \left( \frac{E}{h} + \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \right\}}$$

Si la section est simplement armée,  $C = 0$  et l'expression devient :

$$\frac{m\Omega}{bh} = \frac{3 \left[ \frac{E}{h} - \frac{\alpha}{2} \right] \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) + 1}{6 \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right)^2 \frac{t_a}{mt'_b} \left( \frac{E}{h} - \frac{\alpha}{2} + 1 \right)} = K_0 \dots (61)$$

Si  $C$  est différent de zéro, on emploiera l'expression avant précédente sous la forme

$$\frac{m\Omega}{bh} = \frac{K_0}{1 - C\chi} \quad , \quad \dots \quad (62)$$

en posant :

$$\chi = \frac{1 - (\alpha - 1) \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right)}{\frac{t_a}{mt'_b}} \times \frac{E/h + \frac{\alpha}{2} - 1}{E/h - \frac{\alpha}{2} + 1} = \mu \frac{E/h + \frac{\alpha}{2} - 1}{E/h - \frac{\alpha}{2} + 1} \quad (65)$$

64. *Discussion de la formule (61).* — Pour une valeur donnée du rapport  $\frac{t_a}{mt'_b}$ , il existe une limite inférieure de  $\frac{E}{h}$ ,

fournie par l'équation  $\frac{m\Omega}{bh} = 0$  ou  $3 \left[ \frac{E}{h} - \frac{\alpha}{2} \right] \left[ 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right] + 1 = 0$ ,

$$\text{d'où : } \frac{E}{h} = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3 \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right)}.$$

Comme cette valeur est plus petite que  $\frac{\alpha}{2}$ , elle correspond à un point d'application de la force normale à l'intérieur de la section. D'autre part, pour  $\frac{t_a}{mt'_b}$  constant,  $K_0$  tend assez rapidement vers une limite lorsque  $\frac{E}{h}$  croît.

Pour le mettre aisément en évidence, on écrira :

$$K_o = \frac{5 \left(1 + \frac{t_a}{m t'_b}\right) - \frac{3 \left(1 + \frac{t_a}{m t'_b}\right) - 1}{E/h - \alpha/2 + 1}}{6 \left(1 + \frac{t_a}{m t'_b}\right)^2 \frac{t_a}{m t'_b}} = A_o - \frac{B_o}{\frac{t_a}{m t'_b} \left[ \frac{E}{h} + 1 - \frac{\alpha}{2} \right]} \quad (64)$$

[Voir formules (2) et (5)].

$$\text{Lorsque } \frac{E}{h} = \infty, \quad K_o = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{t_a}{m t'_b}\right) \frac{t_a}{m t'_b}} = A_o$$

ce qui était évident, d'ailleurs, à priori.

On remarquera que :

$$K_o = A_o - \frac{B_o h}{\frac{t_a}{m t'_b} \left[ E + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) h \right]} = A_o - \frac{mN}{b h t_a},$$

d'après les formules (64) et (60).

$$\text{Donc : } \frac{mN}{b h t_a} = \frac{B_o h}{\frac{t_a}{m t'_b} \left[ E + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) h \right]},$$

$$\frac{mN \left[ E + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) h \right]}{b h^2 t_a} = \frac{B_o}{\frac{t_a}{m t'_b}},$$

$$\text{ou encore } \frac{N \left[ E + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) h \right]}{b h^2 t'_b} = B_o \quad (65) \quad [\text{voir formule (5)}].$$

$N \left[ E + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) h \right]$  n'est autre chose que le moment de la force normale résultante par rapport au centre de l'armature étendue.

Dans le cas où il y aurait une armature double, la confrontation des formules (59) et (62) ou mieux, l'expression directe de l'équilibre de rotation autour du centre de l'armature principale conduisent au résultat

$$\frac{N \left[ E + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) h \right]}{b h^2 t'_b} = B_o + C \frac{m \Omega}{b h} \varphi, \quad (66)$$

formule identique à la formule (6) avec

$$\varphi = \left[ 1 - (\alpha - 1) \left( 1 + \frac{t_a}{mt'_b} \right) \right] (2 - \alpha). \dots (7)$$

Le tableau I donne les valeurs de  $B_o$ , le tableau II celles de  $\varphi$ . On peut ainsi résoudre tous les problèmes de la flexion composée par l'emploi des mêmes tableaux que pour la flexion simple.

APPLICATIONS.

65. *Recherche des tensions.* — Soit une pièce rectangulaire de dimensions  $b = 50$  cm. et  $H = 97$  cm., avec  $h = 90$  cm., d'où  $\alpha = 1,075$ ; l'armature principale comportant  $15,21$  cm<sup>2</sup>, l'armature comprimée la moitié, donc  $C = 0,50$ . Elle a à supporter une compression  $N = 20.000$  kg. agissant à distance  $E = 90$  cm. du milieu de la pièce. Calculer les fatigues extrêmes.

$$\frac{m\Omega}{bh} = \frac{15 \times 15,21}{50 \times 90} = 0,0507,$$

$$\frac{E}{h} + 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 + 1 - 0,5375 = 1,4625,$$

$$\frac{E}{h} - \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) = 0,5375.$$

D'après les formules (62) et (64),

$$\Lambda_o = \frac{B_o}{\frac{m\Omega}{bh} \times 1,4625}$$

$$\frac{m\Omega}{bh} = \frac{B_o}{1 - 0,50 \mu \frac{0,5375}{1,4625}}.$$

Pour  $\frac{t_a}{mt'_b} = 1,70$ ,  $\frac{m\Omega}{bh} = 0,0476 \left[ \Lambda_o = 0,1089, B_o = 0,1623, \mu = 0,469 \right].$

Pour  $\frac{t_a}{mt'_b} = 1,60$ ,  $\frac{m\Omega}{bh} = 0,0554 \left[ \Lambda_o = 0,1202, B = 0,1676, \mu = 0,505 \right].$

D'où, pour  $\frac{m\Omega}{bh} = 0,0507$ ,  $\frac{t_a}{mt'_b} = 1,6555.$

D'après l'équation (59) :

$$0,0507 \times \left( 1 - 0,50 \times 0,487 \right) = 0,1149 - \frac{15 \times 20000}{4500 \times t_a},$$

$$\text{d'où : } \frac{15 \times 20000}{4500 \times t_a} = 0,1149 - 0,7563 \times 0,0507 = 0,0766,$$

$$t_a = \frac{15 \times 20000}{4500 \times 0,0766} = 872 \text{ kg/cm}^2.$$

$$t'_b = \frac{872}{15 \times 1,6535} = 35,10 \text{ kg/cm}^2.$$

Il a été choisi à dessein un cas assez compliqué avec double armature, l'absence d'armature comprimée allégeant considérablement le calcul sans rien modifier cependant au principe de la résolution du problème.

Le calcul par la voie analytique exige la résolution d'une équation du 3<sup>me</sup> degré assez complexe. La comparaison pratique des deux méthodes mettrait en relief tous les avantages de simplicité et de rapidité de celle qui vient d'être exposée. Il faut ajouter que s'il existe d'assez nombreux tableaux en vue de la détermination de l'une ou de l'autre dimension des sections soumises à la compression excentrique, il n'en est guère qui se prêtent en même temps au calcul des tensions.

66. *Résistance limite.* — a) Le problème qui se présentera le plus souvent consistera à rechercher le maximum admissible pour un effort normal d'excentricité donnée, sans que les limites imposées pour  $t'_b$  et  $t_a$  puissent être dépassées. Il est possible d'opérer absolument comme dans le problème précédent. Si les limites fixées étaient  $t_a = 1000$  et  $t'_b = 40$  pour la pièce étudiée dans le § précédent, ayant trouvé que pour la section donnée et l'excentricité donnée,  $\frac{t_a}{mt'_b} = 1,6535$ , la limite réelle à appliquer est  $t'_b = 40$  et alors  $t_a = 1,6535 \times 15 \times 40 = 992 \text{ kg/cm}^2$ , d'où  $N = 22\ 800 \text{ kgs}$ .

b) Bien qu'il soit d'un intérêt pratique plus restreint que le problème précédent, il est utile de montrer comment peut se calculer l'excentricité limite admissible d'un effort normal de grandeur donnée. Effectuons cette recherche pour la même section que ci-dessus, mais en supposant, pour simplifier, qu'il n'y ait qu'une armature simple, c'est-à-dire que  $C = o$ .

Il faut recourir aux formules (60) et (65).

Supposons  $N = 20000$ ,  $t_a = 1000$  et  $t'_b = 40$ .

Donc,  $\frac{N}{bh t'_b} = \frac{20000}{50 \times 90 \times 40} = 0,1149$ ; d'autre part  $\frac{m\Omega}{bh} = 0,0507$ .

La formule (60) peut s'écrire :  $\frac{m\Omega}{bh} = A_0 - \frac{N}{bh t'_b} \frac{1}{\frac{t_a}{m t'_b}}$ ,

d'où :  $\frac{N}{bh t'_b} = \frac{t_a}{m t'_b} \left( A_0 - \frac{m\Omega}{bh} \right)$ .

Pour  $\frac{t_a}{m t'_b} = 1,60$ ,  $A_0 = 0,1202$  (tabl. I)

et  $\frac{N}{bh t'_b} = 1,60 \left[ 0,1202 - 0,0507 \right] = 0,111$ .

Donc la solution est fournie par la valeur  $\frac{t_a}{m t'_b} = 1,60$ , d'où

$$t_a = 1,60 \times 15 \times 40 = 960 < 1000.$$

D'après la formule (65) :

$$\frac{E}{h} + 1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{B_0}{\frac{N}{bh t'_b}} = \frac{0,1676}{0,111} = 1,51, \text{ avec } \alpha = 1,075.$$

Donc :  $\frac{E}{h} = 1,51 - 1,00 + 0,5375 = 1,0475$ ,

et  $E_{lim.} = 1,0475 \times 90 = 94,5 \text{ cm.}$

67. *Calcul des dimensions.* — a) La hauteur est fixée à priori ; il s'agit de calculer la largeur et la section d'armature d'après les limites assignées à  $t_a$  et  $t'_b$ .

Soient :  $H = 105$ ,  $h = 100$ , ( $\alpha = 1,05$ ),

$N = 20\ 000$ ,  $E = 200$ ,  $t_a = 900$ ,  $t'_b = 50$ .

$$\frac{E}{h} = 2, \quad \frac{E}{h} + 1 - \frac{\alpha}{2} = 2,475, \quad \text{et} \quad \frac{t_a}{m t'_b} = 2.$$

D'après le tableau I :  $A_0 = 0,0833$  et  $B_0 = 0,1481$ .

D'après la formule (64) :  $\frac{m\Omega}{bh} = 0,0833 - \frac{0,1481}{2 \times 2,475} = 0,0533$ .

D'après la formule (60) :  $0,0533 = 0,0833 - \frac{15 \times 20\ 000}{b \times 100 \times 900}$

d'où :  $b = \frac{300\ 000}{90\ 000 \times 0,03} = 111 \text{ cm.},$

$$\Omega = \frac{0,0533 \times 100 \times 111}{15} = 39,5 \text{ cm}^2.$$

b) La largeur étant fixée à priori, il s'agit de calculer la hauteur et la section d'armature.

La solution s'obtient par résolution d'une équation du second degré; même dans le cas le plus compliqué d'armature double, elle est encore d'une très grande simplicité.

Soient  $b=40$ ,  $N=20\ 000$ ,  $E=90$ ,  $\alpha=1,05$ ,  $C=1$ ,  $t_a=1200$  et  $t'_b=40$

$\frac{t_a}{mt'_b}=2$ , d'où  $A_o=0,0835$ ,  $B_o=0,1481$ ,  $\mu=0,425$   
et  $\varphi=0,8075$  (tableaux I et II).

Les équations (66) et (59) combinées donnent l'équation :

$$N \left[ \frac{E + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)h}{bh^2t'_b} \right] = B_o + \frac{C\varphi}{1 - C\mu} \left( A_o - \frac{mN}{bht_a} \right),$$

ou

$$\left( B_o + \frac{C\varphi}{1 - C\mu} A_o \right) bt'_b h^2 - \left[ \frac{C\varphi}{(1 - C\mu)} \frac{t_a}{mt'_b} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right] Nh - NE = 0,$$

équation du second degré en  $h$ .

$$\left( 0,1481 + \frac{0,8075}{1 - 0,425} 0,0835 \right) 40 \times 40h^2 - \left[ \frac{0,8075}{2(1 - 0,425)} + 1 - 0,525 \right] 20\ 000h - 20\ 000 \times 90 = 0.$$

Après réduction, cette équation devient :  $h^2 - 55,6h - 4245 = 0$ , dont la racine positive est

$$h = 98,70,$$

$$\text{d'où : } H = 1,05 \times 98,70 = 103,5 \text{ cm.}$$

D'après la formule (59) :

$$\frac{m\Omega}{bh} = \frac{0,0835 - \frac{15 \times 20\ 000}{40 \times 98,70 \times 1200}}{1 - 0,425} = 0,0546,$$

$$\text{d'où : } \Omega = \omega = \frac{40 \times 98,70 \times 0,0546}{15} = 9,12 \text{ cm}^2.$$

68) *Calcul des armatures.* — Considérons l'exemple d'une pile-bajoyer d'écluse avec déversoir accolé [fig. 21 a)], cet ouvrage séparant une rivière d'un bassin à marée dans lequel elle se jette. Pour certaines raisons, imposées par les circonstances particulières, l'épaisseur de la pile est assez limitée et elle est considérablement déforcée à la base par la présence

d'un aqueduc-larron d'assez grande largeur. Il en résulte la possibilité d'extensions dans la maçonnerie à la base de la pile et la nécessité de l'armer de tirants. — Examinons l'hypothèse de calcul suivante :

La plus forte marée connue, augmentée d'une surpression pour tenir compte d'une certaine houle, correspond au niveau de l'eau effleurant le sommet de la pile (cote + 7,00). Par contre, le côté de la rivière est à sec.

Nous négligeons l'augmentation de densité due à la salure de l'eau de mer et prenons comme poids spécifique de la maçonnerie 2300 kg/m<sup>3</sup> (béton).

Dans le cas où l'aqueduc-larron est vide, la répartition des forces normales dans les demi-sections de base AB est celle indiquée par la figure 21 b); elle correspond au second schéma de la figure 21 c) lorsque l'aqueduc est en relation avec l'aval. Il n'a pas été tenu compte de sous-pressions dans l'idée que les armatures importantes de la construction s'opposent à une ouverture appréciable de fissures. Recherchons quelle est l'armature nécessaire pour le cas de sollicitation le plus défavorable de la demi-section Aa.

$$b = 100, \quad H = 100, \quad h = 91, \quad \alpha = 1,10, \quad E = 257,5, \quad N = 8550, \\ t'_b = 50 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{et} \quad t_a = 600 \text{ kg. cm}^2.$$

Les taux de travail de sécurité ont été choisis réduits à dessein pour assurer une sécurité suffisante à la fissuration et éviter les sous-pressions, de même que pour augmenter la section de fer afin de compenser les effets d'une attaque possible par l'eau de mer, malgré l'épaisseur de l'enrobage ( $\alpha = 1,10$ ).

Supposons que l'on emploie une armature unique étendue. On déduit de la formule (65) :

$$t'_b = \frac{N \left( \frac{E}{h} + 1 - \frac{\alpha}{2} \right)}{bhB_0},$$

$$\text{d'où } t_a = \frac{mN \left( \frac{E}{h} + 1 - \frac{\alpha}{2} \right)}{bhB_0} \frac{t_a}{mt'_b} = \frac{45 \times 8550 [2,61 + 1 - 0,55]}{100 \times 91 \times B_0} \frac{t_a}{mt'_b}, \\ t_a = \frac{45,10}{B_0} \frac{t_a}{mt'_b}.$$

$$\text{Pour } \frac{t_a}{mt'_b} = 2,00, \quad t_a = \frac{45,10}{0,1481} \times 2 = 581.$$

Pour  $\frac{t_a}{mt'_b} = 2,10$ ,  $t_a = \frac{43,10}{0,1439} \times 2,10 = 630$ .

Donc  $t_a = 600$  pour  $\frac{t_a}{mt'_b} = 2,039$ , d'où  $t'_b = \frac{600}{15 \times 2,039} = 19,65 \text{ kg/cm}^2$ .

Enfin, d'après la formule (60) :

$$\frac{m\Omega}{bh} = 0,0808 - \frac{15 \times 8550}{100 \times 91 \times 600} = 0,0573$$

d'où :  $\Omega = \frac{91 \times 100 \times 0,0573}{15} = 34,8 \text{ cm}^2$ .

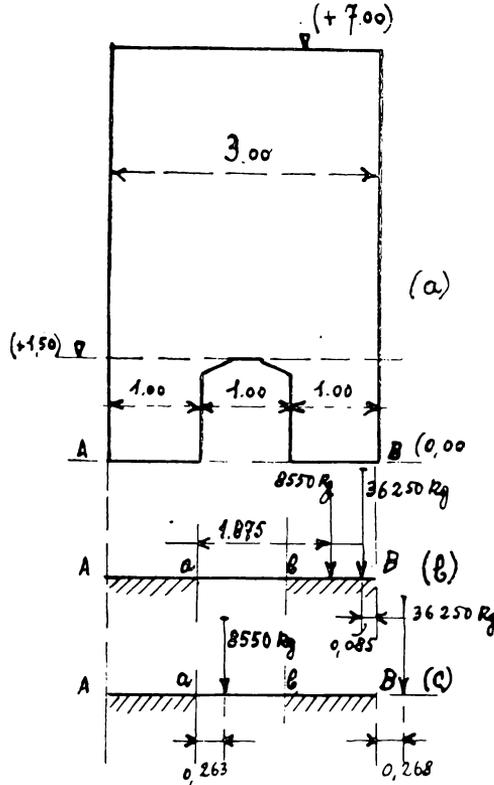


Fig. 21.

Si l'on désirait recourir à la double armature, la résolution resterait la même et ne serait qu'apparemment plus compliquée.

Il suffit de combiner, comme pour le problème 67 b) (calcul

de la hauteur), les équations (59) et (66), ce qui permet d'écrire :

$$\frac{t_a}{mt'_b} \frac{mN \left( \frac{E}{h} + 1 - \frac{\alpha}{2} \right)}{bht_a} = B_o + \frac{C\varphi}{1 - C\mu} \left( A_o - \frac{mN}{bht_a} \right),$$

$$\text{d'où : } t_a = \frac{\frac{mN}{bh} \left[ \frac{t_a}{mt'_b} \left( \frac{E}{h} + 1 - \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{C\varphi}{1 - C\mu} \right]}{B_o + \frac{C\varphi A_o}{1 - C\mu}}.$$

Supposons que l'on ait choisi  $C = 0,5$ .

$$t_a = \frac{\frac{15 \times 8550}{9100} \left( 3,06 \frac{t_a}{mt'_b} + \frac{0,5\varphi}{1 - 0,5\mu} \right)}{B_o + \frac{0,5\varphi A_o}{1 - 0,5\mu}}$$

$$\text{Pour } \frac{t_a}{mt'_b} = 2,10, t_a = \frac{14,10 \left( 3,06 \times 2,10 + \frac{0,5 \times 0,621}{1 - 0,5 \times 0,328} \right)}{0,1439 + \frac{0,5 \times 0,621}{1 - 0,5 \times 0,328} \times 0,0768} = 565.$$

$$\text{Pour } \frac{t_a}{mt'_b} = 2,20, t_a = \frac{14,10 \left( 3,06 \times 2,20 + \frac{0,5 \times 0,612}{1 - 0,5 \times 0,309} \right)}{0,1400 + \frac{0,5 \times 0,612}{1 - 0,5 \times 0,309} \times 0,0710} = 605,$$

$$\text{d'où } t_a = 600 \text{ pour } \frac{t_a}{mt'_b} = 2,1875, \text{ et } t'_b = \frac{600}{15 \times 2,1875} = 18,50.$$

D'après la formule 59 :

$$\frac{m\Omega}{bh} = \frac{0,0717 - \frac{15 \times 8550}{9100 \times 600}}{1 - 0,5 \times 0,3115} = \frac{0,0485}{0,08442} = 0,0575,$$

$$\Omega = \frac{91 \times 100 \times 0,0575}{15} = 34,8 \text{ cm}^2.$$

La section totale de fer est  $1,5 \times 34,8 = 52,2 \text{ cm}^2$  supérieur de 50 p. c. à celle calculée pour le cas de l'armature simple.

Il n'en faudrait pas généraliser que l'armature double soit toujours aussi désavantageuse; elle l'est principalement dans le cas présent à cause des faibles valeurs de  $t'_b$  et de  $\alpha$

$$\left( \alpha = \frac{h}{3,1875} = 0,314h \right).$$

A  $t_a$  constant, lorsque C augmente,  $t'_b$  décroît et la consommation de fer croît. Dans certaines conditions, l'inverse peut se produire lorsque  $t'_b$  est constant,  $t_a$  diminue en même temps que C et il peut se présenter un minimum de consommation totale de fer pour une valeur de  $C > 0$ .

69) *Problème de la double armature.* — Il se pose comme pour la flexion simple de la manière suivante :

Les dimensions de la section étant définies, ainsi que les taux de travail limites, calculer l'aire et la répartition des armatures nécessaires pour permettre à la section de résister aux actions sollicitantes externes.

Il sous-entend qu'une armature simple est impropre à procurer ce résultat dans des conditions économiques, parce que, lorsque la limite de  $t'_b$  est atteinte, la valeur de  $t_a$  est encore notablement inférieure à son taux de sécurité.

Soient  $b = 100$ ,  $H = 55$ ,  $h = 50$  ( $\alpha = 1,40$ ),  $E = 37,5$ ,  $N = 60\ 000$ ,  
 $t_a = 1000$  et  $t'_b = 40$ .

Combinons encore comme précédemment les équations (59) et (66) :

$$\frac{N \left( \frac{E}{h} + 1 - \frac{\alpha}{2} \right)}{bht'_b} = B_o + \frac{C\varphi}{1 - C\mu} \left( A_o - \frac{mN}{bht_a} \right).$$

Comme  $\frac{t_a}{mt'_b} = 1,67$ ,  $A_o = 0,1127$ ,  $B_o = 0,1641$ ,  $\mu = 0,440$   $\varphi = 0,660$

(tabl. I et II),  $\frac{E}{h} + 1 - \alpha/2 = 1,20$ .

$$\frac{60\ 000 \times 1\ 20}{50 \times 100 \times 40} = 0,1641 + \frac{0\ 660\ C}{1 - 0,44\ C} \left( 0,1127 - \frac{15 \times 60\ 000}{50 \times 100 \times 1000} \right),$$

d'où : 
$$C = \frac{0,1959}{0,0419} = 4,67.$$

D'après l'équation (59) :

$$\frac{m\Omega}{bh} - \frac{0,1127 - \frac{15 \times 60\ 000}{50 \times 100 \times 1000}}{1 - 0,44 \times 4,67} = \frac{0,0673}{1,05} = 0,064,$$

d'où : 
$$\Omega = \frac{50 \times 100}{15} \times 0,064 = 21,4\ \text{cm}^2,$$

$$\omega = 4,67 \times 21,4 = 98\ \text{cm}^2,$$

et 
$$\Omega + \omega = 119,40\ \text{cm}^2,$$

Il est possible de calculer directement l'armature totale. On déduit, en effet, de l'équation (66) :

$$\frac{m\Omega}{bh} = \frac{\frac{N \left[ \frac{E}{h} + 1 - \frac{\alpha}{2} \right]}{bht'_b} - B_o}{C\varphi} ,$$

$$\text{d'où : } \left( 1 + C \right) \frac{m\Omega}{bh} = \frac{\left( 1 + \frac{1}{C} \right)}{\varphi} \left[ \frac{N \left( \frac{E}{h} + 1 - \frac{\alpha}{2} \right)}{bht'_b} - B_o \right] .$$

D'autre part, l'équation établie plus haut pour le calcul de C donne comme forme générale de la solution :

$$C = \frac{1}{\frac{\left[ A_o - \frac{mN}{bht_a} \right]}{\mu + \varphi} \frac{N \left( \frac{E}{h} + 1 - \frac{\alpha}{2} \right)}{bht'_b} - B_o}$$

d'où :

$$\left( 1 + C \right) \frac{m\Omega}{bh} = \frac{1 + \mu}{\varphi} \left[ \frac{N \left( \frac{E}{h} + 1 - \frac{\alpha}{2} \right)}{bht'_b} - B_o \right] + \Lambda_o - \frac{N}{bh t'_b} \frac{1}{\frac{t_a}{mt'_b}} .$$

Cette formule appliquée au cas que nous venons d'examiner fournit effectivement la valeur  $\left( 1 + C \right) \frac{m\Omega}{bh} = 0,3597$ , correspondant aux valeurs de C et de  $\frac{m\Omega}{bh}$  trouvées plus haut.

Certains auteurs font remarquer que, pour une valeur constante de  $t'_b$ , il est possible de réaliser par le choix d'une valeur convenable de  $t_a$ , un minimum de la section totale d'armature, c'est-à-dire de  $\left( 1 + C \right) \frac{m\Omega}{bh}$ . On pourrait rechercher la condition du minimum de cette fonction en prenant comme variable  $t_a$ , ou ce qui revient au même,  $\frac{t_a}{mt'_b}$ . La fonction

étant compliquée, de même que sa dérivée, il paraît plus simple d'essayer quelques valeurs de  $t_a$ .

Si, dans l'exemple précédent, nous choisissons  $t_a = 600$ ,

d'où  $\frac{t_a}{mt'_b} = 1$ ,  $A_o = 0,250$ ,  $B_o = 0,2084$ ,  $\mu = 0,800$ ,  $\varphi = 0,720$ ,  
(tableaux I et II) :

$$\left(1 + C\right) \frac{m\Omega}{i\hbar} = \frac{1,800}{0,720} \left(0,56 - 0,2084\right) + 0,250 - 0,50 = 0,529,$$

$$\text{d'où : } \left(1 + C\right) \Omega = \frac{50 \times 100}{15} \times 0,529 = 109,5 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Pour } t_a = 720, \text{ on trouverait : } \left(1 + C\right) \frac{m\Omega}{bh} = 0,5524$$

La différence est donc minime, beaucoup moindre que celle qui est mise en relief par l'emploi de certaines méthodes approximatives (1).

Mais si le gain d'armature est faible, il faut noter cependant l'avantage très appréciable de la réduction de fatigue de l'armature principale, ce qui est évidemment avantageux pour la sécurité.

Cette condition du minimum d'armature totale peut être envisagée dans les calculs des dimensions  $b$  ou  $h$  qui font l'objet des problèmes 67 *a*) et *b*), mais elle se complique du fait qu'il faut rationnellement faire intervenir dans l'économie la section du béton. Le plus souvent d'ailleurs, la solution la plus avantageuse sera réalisée, si l'espace disponible le permet, par l'armature unique de traction, ainsi que le fait ressortir l'exemple du n° 68.

70. *Cas des faibles excentricités.* — Jusqu'à présent, les tableaux I et II, qui sont établis avec une valeur inférieure de  $\frac{t_a}{mt'_b} = 1$  se sont montrés suffisants pour tous les problèmes.

(1) Voir K. HAGER, *op. cit.*, dont l'exemple ci-dessus est extrait (pp. 195 et 196).

Une note toute récente de l'ingénieur hollandais F.-W. DEKKER (*De Ingenieur*, fascicule 25 du 24 juin 1922) met en évidence, pour des piliers rectangulaires à armatures doubles symétriques et de faibles excentricités, des différences plus sensibles. Elle étudie, contrairement à l'opinion exprimée ci-dessus, la dérivée de la fonction  $\left(1 + C\right) \frac{m\Omega}{bh}$  et constitue ainsi une étude systématique des conditions optima. Voir aussi la note précitée de M. WISSELINK.

D'après la discussion de la formule (61), il y correspond une limite inférieure d'excentricité définie par :

$$\frac{E}{h} = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3 \times 2} = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{6}.$$

Il existe ainsi un point d'application limite de la résultante des actions normales, situé à l'intérieur de la section à une distance de l'arête comprimée égale à  $\frac{h}{6}$ .

Pour des points situés plus à l'intérieur encore,  $\frac{t_a}{mt'_b} < 1$ .

Afin de permettre d'appliquer les méthodes du présent chapitre à des cas de l'espèce, les valeurs de  $A_o$ ,  $B_o$ ,  $\mu$  et  $\varphi$  pour quelques valeurs de  $\frac{t_a}{mt'_b}$  inférieures à 1 ont été réunies dans le tableau IX.

La résolution des problèmes s'opère de la même manière que pour les excentricités moyennes et grandes; il est donc superflu de les reprendre. Il est cependant utile d'établir une comparaison avec les résultats fournis par les méthodes du chapitre précédent, qui constitue le principal intérêt de la question des faibles excentricités.

On a examiné au chapitre précédent [application n° 58 a)] une poutre rectangulaire pour laquelle  $b=25$ ,  $h=92,65$ ,  $h=86$ . ( $\alpha=1,075$ ),  $C=0$ ,  $N=25\ 000$ ,  $E=31,8$ ,  $t'_b=40$ . Donc  $\frac{E}{h}=0,57$ .

D'après la formule (65) :

$$t'_b = \frac{N \left( \frac{E}{h} + 1 - \frac{\alpha}{2} \right)}{bh B_o} = \frac{25\ 000 \times 0,8325}{25 \times 86 \times B_o} = \frac{9,67}{B_o}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pour } \frac{t_a}{mt'_b} = 0,80, \quad t'_b = \frac{9,67}{0,2263} = 42,70. \\ \text{Pour } \frac{t_a}{mt'_b} = 0,60, \quad t'_b = \frac{9,67}{0,2474} = 39,10. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{d'où pour } t'_b = 40, \\ \frac{t_a}{mt'_b} = 0,65 \end{array}$$

$$t_a = 0,65 \times 15 \times 40 = 390 \text{ kg/cm}^2, \quad \frac{m\Omega}{bh} = A_o - \frac{mN}{bht_a} = 0,478 - \frac{15 \times 25\ 000}{25 \times 86 \times 390} = 0,03.$$

Or, dans l'hypothèse du chapitre précédent,  $\frac{m\Omega}{bh} = 0,24$ .

Le pourcentage d'armature calculé par la méthode du présent chapitre est donc huit fois moindre. Il est à remarquer que, dans le cas présent  $t_a = 390$  et  $t'_b = 40$ .

Dans l'hypothèse du chapitre précédent  $t_b = 5$ ,  $t'_b = 18,55$  et  $t'_a = 255$  kg/cm<sup>2</sup>. La différence des tensions calculée explique suffisamment l'économie d'armature réalisée.

Le vrai problème à résoudre dans l'application 58a consistait dans le calcul de  $h$  et  $\frac{m\Omega}{bh}$  pour certains taux limites de fatigue.

Supposons que l'on ait choisi  $t_a = 480$  et  $t'_b = 40$  ;

$$\frac{t_a}{m t'_b} = 0,80, \quad \lambda_0 = 0,547, \quad B_0 = 0,2263, \quad \frac{\alpha}{2} = 0,5375, \quad C = 0,$$

$h$  est racine de l'équation du second degré :

$$B_0 b t'_b h^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) N h - N E = 0,$$

$$0,2263 \times 25 \times 40 h^2 - (1 - 0,5375) 25000 h - 25000 \times 51,8 = 0,$$

$$h^2 - 51 h - 5515 = 0,$$

$$\text{d'où :} \quad h = 90 \text{ cm.} \quad H = 96,75,$$

$$\frac{m\Omega}{bh} = \lambda_0 - \frac{mN}{b h t_a} = 0,547 - \frac{15 \times 25000}{25 \times 90 \times 480} = 0.$$

C'est-à-dire que l'état élastique envisagé correspond exactement à celui du calcul ordinaire des sections de maçonnerie sans armature, le joint étant supposé ouvert dans la partie soumise à extension.

Si l'on choisissait une hauteur inférieure à  $H = 96,75$  cm.,  $\frac{m\Omega}{bh}$  augmenterait, cependant que  $t_a$  diminuerait

On peut conclure de ce qui précède qu'il est, en règle générale, préférable de calculer les pièces soumises à compression excentrique en négligeant la résistance à l'extension du béton et en utilisant une armature principale de traction. Cette conclusion est, abstraction faite de tout appareil mathématique, conforme au bon sens. Les méthodes du chapitre précédent, qui tiennent compte de la résistance du béton à l'extension et prévoient une armature principale de compression ne se justifient que lorsque les excentricités sont très faibles et que l'on compte, comme dans les règlements suisse

et principalement autrichien, sur une grande résistance du béton à l'extension. Sans bénéfice au point de vue économique, cette méthode paraît plus douteuse que l'autre au point de vue de la sécurité.

*Remarque générale.* — S'il s'agissait d'une traction excentrique, les formules du présent chapitre resteraient applicables, à la condition de changer les signes de  $N$  et de  $E$  (c'est-à-dire de les considérer comme des grandeurs négatives).

**TABLEAU IX — Flexion plane composée des pièces rectangulaires. Cas des petites excentricités**

$$\text{Limite } \frac{E}{h} = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3 \left( 1 + \frac{t_a}{m't'_b} \right)} \cdot \left[ \frac{1 - (\alpha - 1) \left( 1 + \frac{t_a}{m't'_b} \right)}{\frac{t_a}{m't'_b}} \right] \dots \dots \dots (4)$$

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{t_a}{m't'_b} \right) \frac{t_a}{m't'_b}} \dots \dots (2)$$

$$B_0 = \frac{2 + 3 \frac{t_a}{m't'_b}}{6 \left( 1 + \frac{t_a}{m't'_b} \right)^2} \dots \dots (5)$$

$$\varphi = \left[ 1 - (\alpha - 1) \left( 1 + \frac{t_a}{m't'_b} \right) \right]^{(2 - \alpha)} (7)$$

$\frac{t_a}{m't'_b}$	Limite de $\frac{E}{h}$	$\Lambda_0$	$B_0$	$\mu$	$\varphi$
1 00	$\frac{\alpha}{2} - 0,467$	0,250	0,2084	1 00 - 2,00 ( $\alpha - 1$ )	1,00 + 2 ( $\alpha - 1$ ) <sup>2</sup> - 3 ' $\alpha - 1$ '
0 80	$\frac{\alpha}{2} - 0,185$	0,547	0,2263	1,25 - 2,25 ( $\alpha - 1$ )	1,00 + 1,8 ( $\alpha - 1$ ) <sup>2</sup> - 2,8 ( $\alpha - 1$ )
0 60	$\frac{\alpha}{2} - 0,208$	0,521	0,2474	1,667 - 2,67 ( $\alpha - 1$ )	1,00 + 1 6 ( $\alpha - 1$ ) <sup>2</sup> - 2,6 ( $\alpha - 1$ )
0 40	$\frac{\alpha}{2} - 0,238$	0,895	0,2721	2,50 - 5,50 ( $\alpha - 1$ )	1,00 + 1,4 ( $\alpha - 1$ ) <sup>2</sup> - 2,4 ( $\alpha - 1$ )

CHAPITRE X.

FLEXION PLANE COMPOSÉE DES POUTRES NERVURÉES.

71. *Compression excentrique agissant dans l'intérieur du noyau central de la section.* Il n'existe donc que des tensions de compression dans toute l'étendue de la section. La théorie est en principe identique à celle du chapitre VII et s'exprime par des formules tout à fait analogues. Avec les mêmes notations, elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{S}{Bd} &= 1 + \beta \left( \frac{H}{d} - 1 \right) + (1 + C) \frac{m\Omega}{Bd}, \\ \frac{\mathcal{M}}{Bd^2} &= 1/2 + \frac{\beta}{2} \left( \frac{H^2}{d^2} - 1 \right) + \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{H}{d} \frac{m\Omega}{Bd} + \frac{1}{\alpha} \frac{H}{d} C \frac{m\Omega}{Bd}, \\ \frac{\mathcal{J}}{Bd^3} &= \frac{1}{3} + \frac{\beta}{3} \left( \frac{H^3}{d^3} - 1 \right) + \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right)^2 \frac{H^2}{d^2} \frac{m\Omega}{Bd} + \frac{1}{\alpha} \frac{H^2}{d^2} C \frac{m\Omega}{Bd}, \\ \frac{v}{d} &= \frac{\mathcal{M}/Bd^2}{S/Bd}, & \frac{v'}{d} &= \frac{H}{d} - \frac{v}{d}, \\ \frac{I}{Bd^3} &= \frac{\mathcal{J}}{Bd^3} - \frac{[\mathcal{M}/Bd^2]^2}{S/Bd}, \\ \frac{I/v}{Bd^2} &= \frac{I/Bd^3}{v/d}, & \frac{I/v'}{Bd^2} &= \frac{I/Bd^3}{v'/d}; \end{aligned}$$

et les limites du noyau central sont éloignées de G des distances :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{d} &= \frac{\frac{I}{v}/Bd^2}{S/Bd} = \frac{I/Bd^3}{\mathcal{M}/Bd^2}, \\ \frac{\varepsilon'}{d} &= \frac{\frac{I}{v'}/Bd^2}{S/Bd}. \end{aligned}$$

Si la section est sollicitée par un effort de compression N, agissant avec une excentricité  $e$  (par rapport au centre de gravité), les tensions aux fibres extrêmes sont :

$$t'_b = \frac{N/Bd}{S/Bd} + \frac{Ne/Bd^2}{\frac{I}{v}/Bd^2} = \frac{N(e + \varepsilon)/Bd^2}{\frac{1}{v}/Bd^2},$$



pour l'établissement des formules précitées en y introduisant d'emblée les facteurs numériques et en conservant  $\Omega$  comme inconnue ; on établit ainsi directement l'équation du premier degré ou du second degré en  $\Omega$ .

72. *Tensions d'extension du béton, dues à la compression excentrique.* — Les principes du chapitre VIII, étudiant les mêmes problèmes pour la section rectangulaire, sont également applicables ici. Nous nous référons donc à ce chapitre ainsi qu'aux formules du paragraphe précédent.

Pour le calcul des armatures, il faut, pour tenir compte de la limite  $t_b$ , ajouter des formules analogues d'établissement et d'application aux formules (54), (55) et (56).

Comme ci-dessus, il paraît inutile de reproduire les expressions trop complexes de ces formules et préférable de les établir d'après la marche indiquée en introduisant d'emblée dans les équations d'équilibre les facteurs numériques et en conservant  $\Omega$  comme inconnue.

La condition du maximum d'utilisation, c'est-à-dire de la réalisation simultanée des tensions limites  $t'_b$  et  $t_b$  se traduirait par les formules analogues à (57) et (58) qui ne seront pas davantage transcrites, mais pour l'emploi desquelles est suggérée la même méthode que ci-dessus.

73. *La résistance à l'extension d'une section nervurée soumise à la flexion plane composée et assurée uniquement par une armature.* — Ce paragraphe est l'analogie du chapitre IX ; les mêmes principes les règlent et aboutissent à des équations analogues.

On établirait ainsi les formules :

$$\frac{m\Omega}{Bd} = \frac{(1 + \beta\gamma) A_0 - \frac{mN}{Bdt_a}}{1 - C\mu}, \dots \quad (67)$$

avec

$$A_0 = \frac{2 \frac{x}{d} - 1}{2 \frac{t_a}{m't_b} \frac{x}{d}} \dots \quad (19)$$

$$\mu = \frac{1 - (\alpha - 1) \left( 1 + \frac{t_a}{m't_b} \right)}{\frac{t_a}{m't_b}},$$

$$\gamma = \frac{\left(\frac{x}{d} - 1\right)^2}{2 \frac{x}{d} - 1} \quad . \quad (25)$$

D'autre part

$$\frac{N \left[ E + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) h \right]}{B d^2 t'_b} = \left( D_o + \frac{x}{d} C \psi \frac{m \Omega}{B d} \right) (1 + \beta \gamma) - \beta \delta, \quad (68)$$

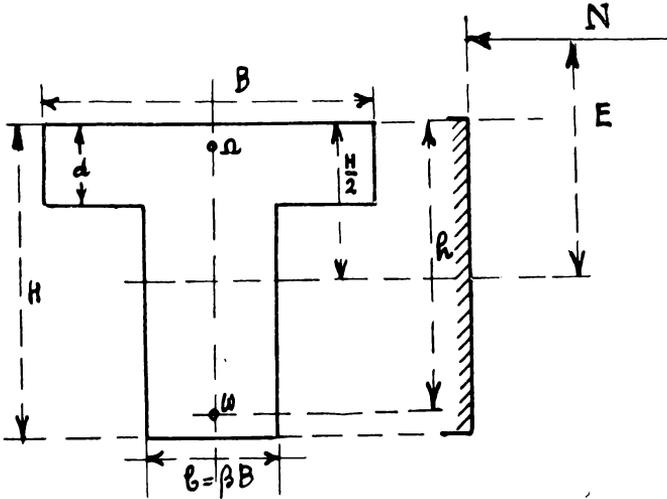


Fig. 23.

avec

$$D_o = \left(\frac{x}{d} - 1\right) + \frac{1}{3 \frac{x}{d}} + \frac{2 \frac{x}{d} - 1}{2} \frac{t_a}{m t'_b} \quad , \quad (21)$$

$$\psi = \left(1 + \frac{t_a}{m t'_b}\right) (2 - \alpha) \left[1 - (\alpha - 1) \left(1 + \frac{t_a}{m t'_b}\right)\right], \quad (23)$$

$$\delta = \frac{\left(\frac{x}{d} - 1\right)^2 \frac{x}{d}}{3 \left(2 \frac{x}{d} - 1\right)} \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Les formules (67) et (68) sont établies dans l'hypothèse où l'on tient compte des tensions de compression du béton dans

la nervure. Si on les néglige, pour ne tenir compte que du béton de la dalle, il faut faire dans ces formules  $\beta = 0$  et elles deviennent :

$$\frac{m\Omega}{Bd} = \frac{A_o - \frac{mN}{Bdt_a}}{1 - C\mu} \quad . . (69)$$

$$\frac{N \left[ E + \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) h \right]}{Bd^2 t'_b} = D_o + \frac{x}{d} C\psi \frac{m\Omega}{Bd} \quad . (70)$$

Dè (69) et (70), l'on déduit :

$$\frac{m\Omega}{Bd} = \frac{A_o - \frac{D_o}{m t'_b} \left[ \frac{E}{d} + \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{h}{d} \right]}{1 - C\chi} \quad . . (71)$$

avec

$$\chi = \mu \frac{\frac{E}{d} - \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{h}{2}}{\frac{E}{d} + \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{h}{d}} \quad . . (72)$$

Si l'on ne néglige pas la zone comprimée de la nervure, de (67) et (68) on déduit :

$$\frac{m\Omega}{Bd} = \frac{(1 + \beta\gamma) \left[ A_o - \frac{D_o}{m t'_b} \left[ \frac{E}{d} + \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{h}{d} \right] \right] + \frac{\beta\delta}{m t'_b} \left[ \frac{E}{d} + \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{h}{d} \right]}{1 - C\xi} \quad , (73)$$

avec

$$\xi = \mu \frac{\frac{E}{d} - \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{h}{d} (1 + 2\beta\gamma)}{\frac{E}{d} + \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{h}{d}} .$$

Ces formules se résolvent avec l'aide des tableaux II et V; il suffit de se référer pour l'application aux chapitres III et IX.

74 *Application.* — Examinons une application de ces formules au calcul des armatures d'une section dont toutes les dimensions sont définies, ce qui se présentera fréquemment dans le calcul des arcs ou poutres à béquilles. Soient  $B = 150$ ,  $b = 30$  ( $\beta = 0.2$ ),  $h = 46$ ,  $H = 49$ ,  $\alpha = 1.06$ ,  $d = 9$ , d'où  $\frac{h}{d} = 5.11$ ;  $N = 50\ 000$  et  $E = 40$ .

Enfin les taux de travail limites sont  $t'_b = 42$  et  $t_a = 1000$ .

On choisit  $C = 0,25$ . Nous négligeons la zone comprimée de la nervure. La combinaison des formules (69) et (70) donne :

$$t_a = \frac{\frac{mN}{Bd} \left\{ \frac{t_a}{mt'_b} \left[ \frac{E}{d} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{h}{d} \right] + \frac{C\psi}{1 - C\mu} \frac{x}{d} \right\}}{D_o + \frac{C\psi A_o}{1 - C\mu} \frac{x}{d}},$$

$$= \frac{\frac{15 \times 30\,000}{150 \times 9} \left\{ \frac{t_a}{mt'_b} \left[ \frac{40}{9} + 0,47 \times \frac{46}{9} \right] + \frac{0,25\psi}{1 - 0,25\mu} \frac{x}{d} \right\}}{D_o + \frac{0,25\psi A_o}{1 - 0,25\mu} \frac{x}{d}},$$

$$= \frac{533,33 \left\{ 6,85 \frac{t_a}{mt'_b} + \frac{0,25\psi}{1 - 0,25\mu} \frac{x}{d} \right\}}{D_o + \frac{0,25\psi A_o}{1 - 0,25\mu} \frac{x}{d}}.$$

Pour  $\frac{t_a}{mt'_b} = 1,60$ , on déduit des tableaux II et V :

$$A_o = 0,466, D_o = 3,480, \mu = 0,523, \psi = 2,06, \frac{x}{d} = 1,965,$$

d'où  $t_a = 10,14$  et  $t_b = 41,8$ .

Pour  $\frac{t_a}{mt'_b} = 1,80$ , on trouverait  $t_a = 1166$  et  $t'_b = 43,18$ .

On peut admettre comme suffisante la solution  $\frac{t_a}{mt'_b} = 1,60$ .

$$\frac{m\Omega}{Bd} = \frac{A_o - \frac{mN}{Bd t_a}}{1 - C\mu} = \frac{0,466 - \frac{15 \times 30\,000}{150 \times 9 \times 1004}}{1 - 0,25 \times 0,528} = 0,154,$$

d'où :  $\Omega = 13,86 \text{ cm}^2, \quad \omega = 3,46 \text{ cm}^2.$

Si l'on voulait tenir compte de la zone comprimée de la nervure, l'équation de  $t_a$  s'écrirait d'après les formules (67) et (68) :

$$t_a = \frac{\frac{mN}{Bd} \left\{ \frac{t_a}{mt'_b} \left[ \frac{E}{d} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{h}{d} \right] + (1 + \beta\gamma) \frac{C\psi}{1 - C\mu} \frac{x}{d} \right\}}{(1 + \beta\gamma) \left\{ D_o + \frac{C\psi}{1 - C\mu} \frac{x}{d} (1 + \beta\gamma) A_o \right\} - \beta\delta}.$$

Pour  $\frac{t_a}{mt'_b} = 1,60$ ,  $\gamma = 0,318$ ,  $\delta = 0.209$  (tableau V),

on trouve :  $t_a = 952$  et  $t'_b = 59,67 \text{ kg/cm}^2$ .

Pour  $\frac{t_a}{mt'_b} = 1,80$ ,  $\gamma = 0,257$  et  $\delta = 0.1585$ ,

on trouve :  $t_a = 1115,5$  et  $t'_b = 41.51 \text{ kg/cm}^2$ .

On en déduit que, pour  $t_a = 1000$ ,

$$\frac{t_a}{mt'_b} = 1,6587 \quad \text{et} \quad t'_b = 40,19 \text{ kg/cm}^2.$$

Pour cette valeur :  $A_o = 0,4475$ ,  $\mu = 0,509$  et  $\gamma = 0.310$  ;

$$\frac{m\Omega}{Bd} = \frac{(1 + \beta\gamma) A_o - \frac{mN}{Bdt_a}}{1 - \mu} = \frac{(1 + 0,2 \times 0,310) 0,4475 - \frac{15 \times 50000}{150 \times 9 \times 1000}}{1 - 0,25 \times 0,509} = 0,1607.$$

D'où :  $\Omega = 14,46 \text{ cm}^2$  et  $\omega = 5,61 \text{ cm}^2$ .

La correction relative à la zone comprimée de la nervure, si elle n'a qu'une très faible répercussion sur la section des armatures, exerce un effet assez sensible sur la grandeur des tensions. Ainsi se trouve résolu assez facilement un problème dont la solution par les formules directes est rebutante, et ce sans devoir recourir à des tableaux spéciaux et d'usage restreint, mais bien par le moyen des mêmes tables qui sont employées pour les cas de flexion simple, d'usage fréquent et avec lesquelles le praticien peut donc être tout-à-fait familiarisé.

75. *Cas des faibles excentricités.* — Comme pour la flexion composée des sections rectangulaires, le tableau V doit être complété pour les faibles excentricités, ce qui est réalisé par le tableau X d'usage analogue à celui du précité.

*Remarque.* — Les formules du n° 73 sont applicables aux cas de traction excentrique, à condition d'affecter les valeurs de N et de E du signe négatif.

**TABLEAU X. — Flexion plane composée des poutres nervurées.**  
**Cas des petites excentricités.**

$$A_0 = \frac{2 \frac{x}{d} - 1}{2 \frac{t_a}{m't'_b} \frac{x}{d}} \quad (19)$$

$$D_0 = \left( \frac{x}{d} - 1 \right) + \frac{1}{3} \frac{x}{d} + \frac{2 \frac{x}{d} - 1}{2} \frac{t_a}{m't'_b} \quad (21)$$

$$\varphi = \left( 1 + \frac{t_a}{m't'_b} \right) (2 - \alpha) \left[ 1 - (\alpha - 1) \left( 1 + \frac{t_a}{m't'_b} \right) \right] \quad (25)$$

$$\gamma = \frac{\left( \frac{x}{d} - 1 \right)^2}{2 \frac{x}{d} - 1} \quad (25)$$

$$\delta = \frac{\left( \frac{x}{d} - 1 \right)^2 \frac{x}{d}}{3 \left( 2 \frac{x}{d} - 1 \right)} \quad (27)$$

$\frac{t_a}{m't'_b} =$	1,00	0,80	0,60	0,40	
$\frac{h}{x}$	2,00	1,80	1,60	1,40	$\gamma$
$\varphi$	$\left. \begin{array}{l} 2,00 + 4(\alpha - 1)^2 \\ - 6(\alpha - 1) \end{array} \right\} 1,80 + 3,24(\alpha - 1)^2$		$1,60 + 2,56(\alpha - 1)^2$	$1,40 + 1,86(\alpha - 1)^2$	$\delta$
$\frac{h/d}{A_0}$	2,00	1,80	1,60	1,40	
$\frac{h/d}{D_0}$	0,500	0,625	0,833	1,250	0
$\frac{d}{s}$	0,833	0,733	0,633	0,533	0

$\frac{d}{x} = 1,25$	$\frac{h/d}{A_0}$ $D_0$	2,50 0,600 1,267	2,25 0,750 1,117	2,00 1,000 0,967	1,75 1,500 0,817	0,0417	0,0174
$\frac{d}{x} = 1,50$	$\frac{h/d}{A_0}$ $D_0$	3,00 0,667 1,722	2,70 0,833 1,522	2,40 1,111 1,322	2,10 1,667 1,122	0,125	0,0625
$\frac{d}{x} = 1,75$	$\frac{h/d}{A_0}$ $D_0$	3,50 0,714 2,190	3,15 0,894 1,940	2,80 1,190 1,690	2,45 1,786 1,440	0,225	0,13125
$\frac{d}{x} = 2,00$	$\frac{h/d}{A_0}$ $D_0$	4,00 0,750 2,667	3,60 0,9375 2,367	3,20 1,250 2,067	2,80 1,875 1,767	0,333	0,222
$\frac{d}{x} = 2,50$	$\frac{h/d}{A_0}$ $D_0$	5,00 0,800 3,633	4,50 1,000 3,233	4,00 1,333 2,833	3,50 2,000 2,433	0,5625	0,469
$\frac{d}{x} = 3,00$	$\frac{h/d}{A_0}$ $D_0$	6,00 0,833 4,611	5,40 1,042 4,111	4,80 1,389 3,611	4,20 2,083 3,111	0,800	0,800
$\frac{d}{x} = 4,00$	$\frac{h/d}{A_0}$ $D_0$	8,00 0,875 6,583	7,20 1,094 5,883	6,40 1,458 5,183	5,60 2,188 4,483	1,286	4,718

## APPENDICE.

### INTERPRÉTATION GRAPHIQUE DE LA MÉTHODE.

#### ABAQUES.

1° Toutes les formules qui ont été établies dans la note peuvent être interprétées par des tables graphiques ou abaqués, aussi bien que par des tableaux numériques. Ce système sera préféré par les praticiens qui ont à répéter très fréquemment des calculs semblables, parce que la suppression des opérations d'interpolation fait gagner beaucoup de temps. Il n'y a rien de particulier à ajouter. Les abaqués ayant fourni les facteurs relatifs, les calculs des dimensions ou des forces s'effectuent par leur moyen, de la même manière que si l'on s'était servi des tableaux numériques.

Mais il est possible, en outre, de substituer à certaines opérations des constructions graphiques très simples, notamment pour tenir compte de la double armature.

2° *Pièces à sections rectangulaires.* — La figure II de la planche représente les courbes des variations de  $A_o$ ,  $B_o$ ,  $\mu$  et  $\varphi$  en fonction de  $\frac{t_a}{mt'_b}$ . Elles ont été, par raison démonstrative, tracées respectivement dans les quatre secteurs rectangulaires délimités par deux axes perpendiculaires entre eux, se coupant au point  $o$ , pris comme origine des coordonnées.

Si  $C = 0$ , armature simple, les courbes de  $A_o$  et  $B_o$  fournissent directement les valeurs de  $\frac{m\Omega}{bh}$  et de  $\frac{M}{bh^2t'_b}$ .

Si  $C$  est différent de zéro, il faut calculer :

$$\frac{m\Omega}{bh} = \frac{A_o}{1 - C\mu},$$

$$\frac{M}{bh^2t'_b} = B_o + \varphi C \frac{m\Omega}{bh}.$$

Ces grandeurs peuvent être représentées graphiquement sur l'abaque, par simple application des règles de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division graphiques.

Oa représentant  $\frac{t_a}{mt'_b}$ ,  $ab$  représente  $A_o$ . Projétons-le sur l'axe  $OA_o$  en  $On$ .

$af$  représente  $\mu$ ; projetons-le en  $ec$ . La perpendiculaire abaissée de  $c$  sur  $Od$  coupe  $Oe$  en  $m$ . La droite  $mn$  coupe  $e\mu$  en  $p$ , qui se projette en  $q$  sur l'ordonnée  $ab$ . Les relations des triangles semblables donnent :

$$\frac{hq}{on} = \frac{oe}{om} = \frac{oe}{oe - em},$$

$$\frac{em}{ec} = \frac{ed}{oe}, \quad \text{d'où } em = \frac{ed \times ec}{oe}.$$

Si  $oe$  représente l'unité graphique,  $\frac{em}{oe} = \frac{\frac{ed}{oe} \times \frac{ec}{oe}}{1} = C\mu$ .

$$\frac{bq}{on} = \frac{1}{1 - \frac{em}{oe}} = \frac{1}{1 - C\mu},$$

$$bq = \frac{on}{1 - C\mu} = \frac{[A_0]}{1 - C\mu} = \left[ \frac{m\Omega}{bh} \right],$$

c'est à-dire que  $bq$  représente  $\frac{m\Omega}{bh}$  à la même échelle que  $on$  ou  $ab$  représentent  $A_0$ .

De même,  $or$  représentant  $\frac{ta}{mt'_b}$ ,  $rs$  représente  $B_0$  et  $ru$  représente  $\varphi$  et se projette en  $tv$  sur l'axe  $t\varphi$ . Sur l'axe  $OA_0$ , représentons en  $oq'$  le facteur  $\frac{m\Omega}{bh}$  ( $oq' = bq$ ).  $tw$  représente  $C$ . La perpendiculaire abaissée de  $v$  sur  $ow$  coupe l'axe  $ot$  en  $x$ , dont l'ordonnée coupe en  $y$  la droite  $tq'$ .  $y$  se projette en  $z$  sur  $rs$ .

Des relations des triangles semblables et  $ot$  servant d'unité graphique, on peut déduire :

$$rz = xy = oq' \frac{xt}{ot},$$

$$\frac{xt}{tv} = \frac{wt}{ot}, \quad \text{d'où } xt = \frac{tw \times vt}{ot},$$

$$\text{ou } \frac{xt}{ot} = C\varphi.$$

$$\text{Donc } rz = oq' \times C\varphi = bq \times C\varphi = \left[ \frac{m\Omega}{bh} \right] C\varphi.$$

Si les échelles de  $A_0$  et  $B_0$  sont les mêmes,  $rz$  représente

donc à cette échelle la valeur de  $\frac{m\Omega}{bh} \times C\varphi$ , et  $s\tau$  représente

donc  $B_o + \frac{m\Omega}{bh} C\varphi$ , c'est-à-dire  $\frac{M}{bh^2t'_b}$ .

Pour l'usage, la disposition adoptée par l'abaque dans la figure III de la planche paraît pratique. Elle résume tous les renseignements des tableaux I, II et IX; elle contient également la courbe de variation de  $\left(\frac{mM}{bh^2t'_a}\right)_o$  [tableau I].

En dessous de l'abaque proprement dit, un faisceau de droites concourantes, cotées en valeurs échelonnées de C, ne sert qu'à donner les alignements par rapport auxquels il faut abaisser les perpendiculaires dont il a été question.

Toutes les constructions sont indiquées à titre d'exemple sur la figure III pour le cas suivant :  $\frac{t_a}{mt'_b} = 1,50$ ,  $C = 0,50$  et  $\alpha = 1,10$ . Elles fournissent les valeurs :

$$\frac{m\Omega}{bh} = 0,18, \quad \frac{M}{bh^2t'_b} = 0,235.$$

Dans la pratique, il est inutile de tracer ces droites; il suffit d'appliquer les équerres et de marquer d'un trait léger au crayon les points d'intersection utiles.

Remarquons enfin que les calculs de flexion composée s'effectuent, ainsi que nous l'avons vu, par les mêmes facteurs  $A_o$ ,  $B_o$ ,  $\mu$  et  $\varphi$ .

L'abaque de la figure III permet donc également de résoudre tous les cas de flexion composée; éventuellement, par le moyen de constructions graphiques analogues à celles qui viennent d'être exposées.

Ainsi donc, la méthode proposée aboutit à concentrer en une seule table graphique, celle de la figure III, tous les moyens nécessaires pour le calcul exact, rapide et précis de tous les cas de flexion plane simple ou composée de pièces rectangulaires en béton armé, à armatures simples ou doubles.

3° *Poutres nervurées.* — La figure IV de la planche représente pour les poutres nervurées un abaque de caractère et d'usage complètement analogues à ceux de la figure III.

Elle contient les courbes représentatives des variations de  $A_o$ ,  $D_o$ ,  $\mu$ ,  $\psi$  et  $\frac{h}{d}$  en fonction de  $\frac{t_a}{mt'_b}$ ,  $\frac{x}{d}$  et  $\alpha$ .

Dans le cas où l'armature est simple,  $C = 0$  et les valeurs de  $A_0$  et  $D_0$  relevées au moyen des courbes fournissent directement  $\frac{m\Omega}{Bd}$  et  $\frac{M}{Bd^2t'_b}$ .

Si  $C$  est différent de  $0$ , qu'il y a une armature comprimée les courbes permettent de calculer les valeurs des expressions,

$$\frac{m\Omega}{Bd} = \frac{A_0}{1 - C\mu}, \quad \frac{M}{Bd^2t'_b} = D_0 + \frac{x}{d} C \psi \frac{m\Omega}{Bd}.$$

Mais il est possible, comme pour les sections rectangulaires, d'obtenir le même résultat par des constructions graphiques.

La marche est identique dans les deux cas pour le calcul de  $\frac{m\Omega}{Bd}$ ; il y a une légère différence pour celui de  $\frac{M}{Bd^2t'_b}$ .

Il faut remarquer que, pour permettre un groupement favorable des courbes, il a fallu recourir à des échelles diverses dont on a tenu compte dans les constructions graphiques.

Un exemple concret représenté sur l'abaque fera mieux comprendre qu'un exposé trop général. Soient  $\frac{t_a}{mt'_b} = 1,50$ ,  $C = 0,25$ ,  $\frac{h}{d} = 5$  et  $\alpha = 1,10$ . Il en résulte, d'après l'abaque, que :

$$\frac{x}{d} = 2,00, \quad A = 0,50, \quad D_0 = 3,40, \quad \mu = 0,50, \quad \psi = 1,70.$$

Du point représentatif de  $\mu = 0,50$  sur l'échelle des  $\mu$ , abaissons une perpendiculaire sur la directrice cotée  $C = 0,25$ . Joignons son point d'intersection avec l'axe  $Oo$  au point représentatif de  $A_0$  sur l'échelle des  $A_0$ . Cette droite coupe l'axe des  $\mu$  en un point qui, projeté sur l'axe des  $A_0$ , donne la valeur du supplément à ajouter à  $A_0$  pour obtenir  $\frac{m\Omega}{Bd}$ .

$$\text{On trouve ainsi } \frac{m\Omega}{Bd} = 0,57.$$

Cette valeur  $0,57$  est reportée sur l'axe de  $\frac{m\Omega}{Bd}$  et le point obtenu joint à l'origine de l'axe des  $\psi$ . Du point représentatif de la valeur de  $\psi$  sur ce dernier axe, abaissons une perpendiculaire sur la directive cotée  $\frac{x}{d} \times C = 2 \times 0,25 = 0,50$ .

Le supplément à ajouter à  $D_o$  est donné par l'ordonnée interceptée entre le point d'intersection de cette perpendiculaire avec l'axe  $Oo$ , d'une part, et, d'autre part, la droite précédemment tracée.

Cette portion d'ordonnée mesure 0,50 à l'échelle des  $D_o$ , donc  $\frac{M}{Bd^2l_b} = 3,90$ . Le problème est résolu.

Le calcul par les tableaux vérifie les résultats trouvés et prouve qu'ils sont suffisamment précis pour la pratique.

La précision pourrait d'ailleurs être de l'ordre qu'on voudrait d'après l'exécution typographique de l'abaque qui résume les tableaux II, V et X.

Nous avons vu que l'étude de la flexion composée des poutres nervurées peut s'effectuer par le moyen des mêmes facteurs  $A_o$ ,  $D_o$ ,  $\mu$  et  $\psi$ ; la figure IV permet donc de résoudre tous les problèmes de flexion plane simple ou composée des poutres nervurées à armatures simples ou doubles.

Comme elle contient toutes les courbes utiles pour la valeur de  $\frac{x}{d} = 1$ , elle permet aussi de résoudre tous les problèmes pour les poutres rectangulaires, la présence dans les calculs de la variable auxiliaire  $x/d$  ne présentant pas d'inconvénients. La figure IV est donc vraiment un abaque universel, permettant de résoudre tous les cas de flexion plane des poutres en béton armé de sections usuelles.

Nous ajouterons que, tel qu'il est présenté dans un but purement démonstratif, il n'est pas de forme assez perfectionnée pour remplir convenablement un office aussi important. Un défaut particulier de la figure IV est de plus qu'elle ne représente par les valeurs de  $\mu$  pour des valeurs de  $\frac{t_o}{m} < 1$  (Cas des petites excentricités en flexion composée.)

Mais, ainsi que l'auteur l'a fait connaître dans l'avant-propos, son mémoire ne constitue qu'un essai, et non un ouvrage pratique.

# TABLE DES MATIÈRES

	Pages.
AVANT-PROPOS . . . . .	1
<b>PREMIÈRE SECTION. — Flexion plane simple des pièces à section rectangulaires (poutres ou dalles) simplement ou doublement armées.</b>	
<b>CHAPITRE I. — La résistance à l'extension du béton est négligée . . . . .</b>	<b>4</b>
(Tableaux I et II).	
<b>CHAPITRE II. — Recherche des tensions de traction du béton . . . . .</b>	<b>17</b>
(Tableaux III et IV).	
<b>DEUXIÈME SECTION. — Flexion plane simple des poutres à nervures (section T) simplement ou doublement armées.</b>	
<b>CHAPITRE III. — La résistance à l'extension du béton est négligée. . . . .</b>	<b>34</b>
(Tableau V).	
<b>CHAPITRE IV. — Limitation des tensions de traction du béton. Sécurité à la fissuration . . . . .</b>	<b>49</b>
(Tableau VI).	
<b>TROISIÈME SECTION. — Calcul des étriers, barres obliques et de la répartition des barres.</b>	
<b>CHAPITRE V. — Tensions tangentielles et principales . . . . .</b>	<b>77</b>
(Tableau VII).	
<b>CHAPITRE VI. — Calcul des étriers et barres obliques . . . . .</b>	<b>84</b>
<b>QUATRIÈME SECTION. — Flexion plane composée.</b>	
<b>CHAPITRE VII. — Section rectangulaire. La section est comprimée dans toute son étendue . . . . .</b>	<b>99</b>
(Tableau VIII).	
<b>CHAPITRE VIII. — Section rectangulaire. La compression excentrique donne naissance à des tensions de traction compatibles avec la résistance à l'extension du béton. . . . .</b>	<b>114</b>

CHAPITRE IX. — Section rectangulaire. La résistance aux tensions de traction provenant de la compression excentrique est assurée uniquement par une armature . . . . . 125  
(Tableau IX).

CHAPITRE X. — Flexion plane composée des poutres nervurées. 144  
(Tableau X).

Appendice. Interprétation graphique de la méthode (Planche). . . 154

---

## ERRATA.

---

Page 60, ligne 12, lire  $\tau_0 = 18,8$ , au lieu de 1,8.

Page 70, ligne 24, lire  $\frac{m\Omega}{Bd} = 0,558$ , au lieu de  $\frac{m\Omega}{BH} = \dots$

Page 71, ligne 7, lire  $\frac{m\Omega}{Bd} = 0,334$ , au lieu de  $\frac{m\Omega}{BH} = \dots$

---

FIGURE I.

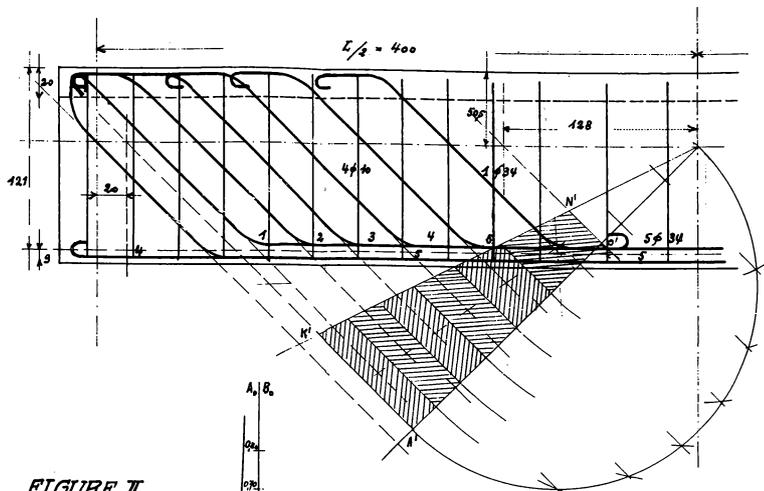


FIGURE II.

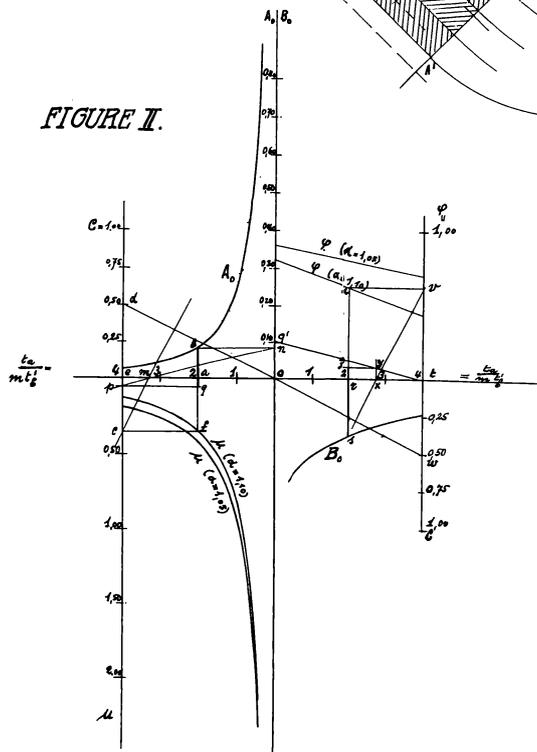


FIGURE III.

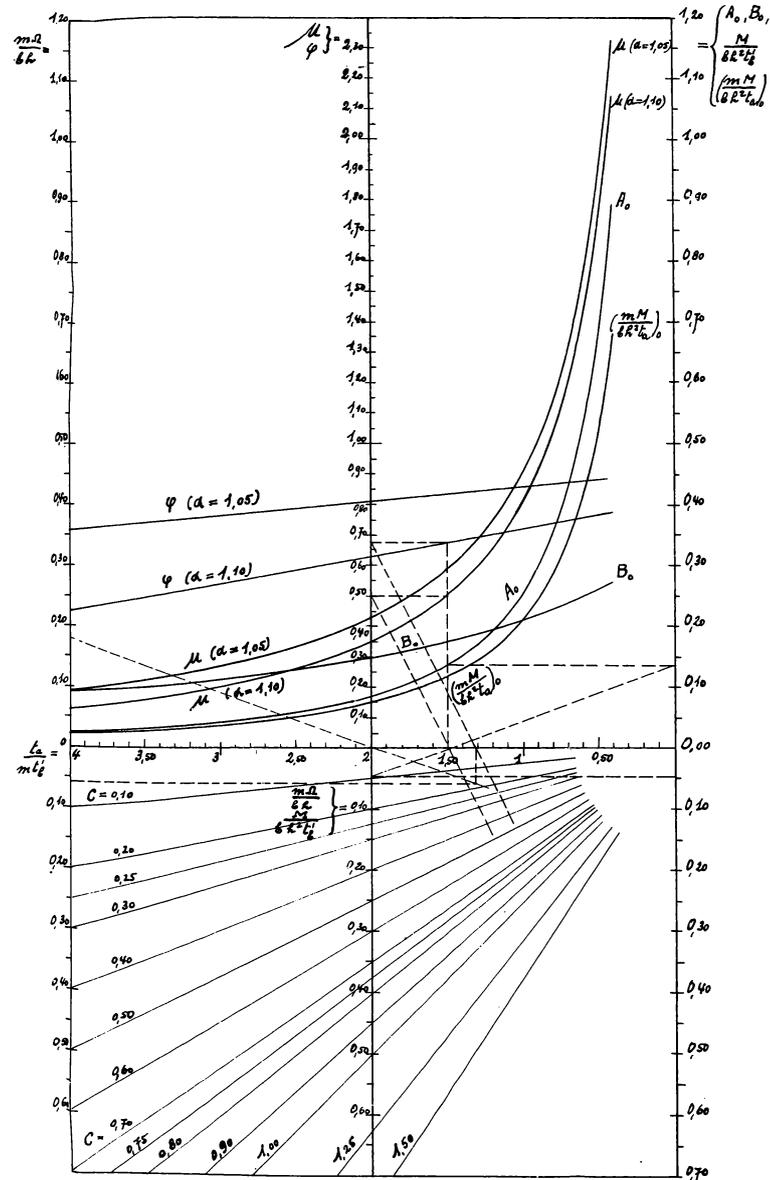


FIGURE IV.

