AMÉLIE AUQUIÈRE
ISABELLE DEMONTY
ANNICK FAGNANT

IMPACT DES STRUCTURES SÉMANTIQUES ET DE L'INTRODUCTION DE SCHÉMATISATIONS SUR LES PERFORMANCES ET LES DÉMARCHES DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Abstract. Impact of semantic structures and schematic diagrams on performance and problem-solving strategies. This study focuses on the impact of the introduction of "range-tout" schematizations (Polotskaia and Consultant, 2010; Savard and Polotskaia, 2014) on pupils aged 9-10's problem-solving strategies. Coming from a test submitted to a micro-intervention and a post-test, the results highlight the impact of the semantic structures on children's spontaneous strategies (complement-procedure vs comparison-procedure, Gamo, Taabane and Sander, 2011) and on the way they appropriate the schematizations. Qualitative analyzes show that the introduction of schematizations positively affects students' performance when they encounter their spontaneous approaches, but that it is counterproductive (in the short term) when it directs them towards a different (and less economical) strategy.

Résumé. Cette étude s'intéresse à l'impact de l'introduction de schématisations « range-tout » (Polotskaia et Consultant, 2010 ; Savard et Polotskaia, 2014) sur les démarches de résolution de problèmes mises en œuvre par des élèves de 9-10 ans. Au départ d'un pré-test, d'une micro-intervention et d'un post-test, les résultats mettent en lumière l'impact des structures sémantiques des problèmes sur les démarches spontanées des élèves (*procédure-complément vs procédure-comparaison* notamment, Gamo, Taabane et Sander, 2011) et sur la façon dont ils s'approprient les schématisations proposées. Les analyses qualitatives montrent que l'introduction des schématisations affecte positivement les performances des élèves lorsqu'elles s'accordent à leurs démarches spontanées, mais qu'elle s'avère contre-productive, à court terme, quand elle les oriente vers une démarche différente et moins économique.

Mots-clés. Résolution de problèmes, schématisations, problèmes composant plusieurs structures sémantiques, démarches de résolution.

Introduction

Intrinsèquement liée aux mathématiques, la résolution de problèmes vise notamment à développer de nouveaux contenus dans des situations porteuses de sens, à appliquer des procédures dans des situations concrètes, ou encore, à développer des compétences transversales (Demonty et Fagnant, 2012 ; Fagnant et Vlassis, 2010). Lorsque l'on s'intéresse aux liens entre les mathématiques et la

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 23, p. 41 - 68.

réalité, deux processus complémentaires sont à l'œuvre (Houdement, 2011) : la *mathématisation* et la *modélisation*. Alors que la *mathématisation* « consiste à acquérir des connaissances mathématiques à partir de la résolution de problèmes issus du réel », la *modélisation* « est plutôt l'inférence, puis l'opérationnalisation de mathématiques pour résoudre un problème issu du réel » (page 59). Dans cet article, c'est à la résolution de problèmes d'application que nous allons porter une attention particulière. En accord avec Houdement (2011), les liens entre les mathématiques et la réalité relèvent donc, ici, du versant de la *modélisation*. Dans ce cadre, lorsque l'on propose des problèmes arithmétiques verbaux aux élèves, on attend d'eux qu'ils mobilisent des connaissances mathématiques acquises préalablement pour faire face aux situations qui leur sont proposées. On peut alors considérer la résolution de problèmes comme un « processus complexe de modélisation mathématique » (Verschaffel et De Corte, 2008 ; Verschaffel, Greer et De Corte, 2000) impliquant, notamment, la construction d'un « modèle de situation » (ou d'une représentation) traduisant la compréhension du phénomène à investiguer. C'est sur la base de cette représentation que l'élève devrait mobiliser le « modèle mathématique » à mettre en œuvre en vue de résoudre adéquatement le problème ; c'est aussi en référence à cette représentation qu'il devrait interpréter la solution et évaluer sa plausibilité dans le contexte appréhendé.

Autrement dit, on considèrera que résoudre un problème nécessite de *comprendre* les relations entretenues entre les divers éléments qui le composent, avant de s'engager dans le (ou les) calcul(s) adéquat(s). Cette *compréhension* implique la construction d'une *représentation mentale* qui peut résulter de l'activation d'un « schéma-problème » disponible en mémoire ou de la construction d'un « modèle épisodique de situation » prenant en compte le contexte dans lequel la situation mathématique s'inscrit. Chez les jeunes élèves, l'utilisation de matériel manipulable permet de soutenir ce processus de construction de représentation en allégeant la charge mnésique alors que, chez les élèves un peu plus âgés, c'est généralement la construction de *schématisations externes* qui est privilégiée (Thevenot, Barrouillet et Fayol, 2015).

La présente étude s'inscrit dans ce cadre puisqu'elle s'intéresse à une schématisation particulière, issue de travaux développés par une auteure d'origine russe (Polotskaia, 2009 ; Polotskaia et Consultant, 2010[1]) et réinvestis dans plusieurs études canadiennes (Ducharme et Polotskaia, 2008, 2009 ; Gervais, Polotskaia et Consultant, 2010 ; Polotskaia, Savard et Freiman, 2016 ; Savard et Polotskaia, 2014). À la différence des schémas spécifiques aux structures

[1] Ces schématisations se rapprochent de celles utilisées dans la « Méthode de Singapour », qualifiées de « Strip diagrams » dans la littérature anglo-saxonne (Beckmann, 2004).

sémantiques de problèmes envisagés dans plusieurs travaux (Gustein et Romberg, 1995 ; Verschaffel, Greer et De Corte, 2007 ; Willis et Fuson, 1988), ces schématisations, qualifiées de « range-tout » par les auteurs, présentent la particularité d'être adaptables à différentes structures sémantiques de problèmes. Les différents écrits proposés par cette équipe de recherche montrent l'intérêt d'une telle approche d'un point de vue didactique (Gervais et al., 2013 ; Savard et Polotskaia, 2014) et illustrent la façon dont elle peut être mise en place progressivement en classe. Toutefois, à notre connaissance, ils ne nous éclairent pas réellement sur son efficacité en proposant des données empiriques attestant, par exemple, de progrès réalisés par les élèves soumis à une telle approche.

Au départ d'un dispositif composé d'un pré-test, d'une micro-intervention et d'un post-test, cette étude s'intéresse ainsi à l'effet de l'introduction de schémas « range-tout » sur les performances et sur les démarches de résolution d'élèves de grade 4 (élèves de 9-10 ans). Elle fait l'hypothèse d'un effet différentiel de ces schématisations en fonction des types de problèmes proposés et des démarches spontanées des élèves.

1. Cadre théorique

La résolution de problèmes est une activité mathématique pour laquelle les élèves rencontrent fréquemment des difficultés les menant à l'adoption de démarches inefficaces, s'appuyant notamment sur une analyse superficielle de l'énoncé (Verschaffel et De Corte, 2008). Si posséder des connaissances mathématiques est nécessaire pour résoudre des problèmes, cela ne semble toutefois pas suffisant (Houdement, 2011, 2014 ; Marcoux, 2012, 2014). Des approches d'enseignement visant à apprendre aux élèves à développer des stratégies cognitives et métacognitives en résolution de problèmes (Hanin et Van Nieuwenhoven, 2016 ; Jaegers, Lafontaine et Fagnant, 2016 ; Mevarech et Kramarski, 2014 ; Özoy et Ataman, 2009) semblent également indispensables.

Parmi les recherches qui se sont intéressées au développement de stratégies cognitives en résolution de problèmes, de nombreuses études se sont focalisées sur les schématisations externes pouvant soutenir l'étape de construction de la représentation du problème. Plusieurs études ont ainsi montré qu'il était possible de s'appuyer sur les dessins spontanément construits par les élèves (*self-generated drawings*) pour les amener vers des schématisations plus efficaces (Csíkos, Szitányi et Kelemen, 2012 ; Van Essen et Hamaker, 1990) ou encore de leur apprendre à utiliser des schémas prédéfinis correspondant aux différentes structures sémantiques de problèmes (Levain, Le Borgne et Simard, 2006 ; Willis et Fuson, 1988). D'autres études se sont centrées sur l'utilisation de la droite graduée face à des problèmes additifs simples (Elia, 2011) ou encore sur l'enseignement de « *spatial diagrams* » (Novick, Hurley et Francis, 1999) pouvant notamment être utilisés face à des problèmes non-routiniers (Diezmann, 2002 ; Pantziara, Gagatsis et Elia, 2009). Enfin, quelques recherches se sont aussi attachées à confronter l'impact de différents types de schématisations sur la mise en œuvre d'une démarche efficace de résolution (Elia, 2009 ; Elia, Gagatsis et Demetriou, 2007 ; Fagnant, Auquière et Vlassis, 2015 ; Fagnant et Vlassis, 2013).

Globalement, ces études s'accordent à montrer que les schématisations efficaces sont celles qui aident à construire une représentation mentale permettant de mettre en évidence les données importantes du problème et les relations qui les unissent (Hegarty et Kozhenikov, 1999 ; Uesaka et al., 2007). À l'heure actuelle, aucune étude n'a toutefois permis de déterminer la forme précise que devraient préférentiellement prendre ces schématisations (dessins libres *vs* schémas prédéfinis d'une part et quels types de schémas prédéfinis d'autre part), ni la meilleure manière de les enseigner (voir notamment Fagnant et Vlassis, 2013 ; Thevenot et al., 2015, pour des synthèses).

Parmi les différents types de schématisations possibles, Polotskaia et ses collaborateurs (Ducharme et Polotskaia, 2008, 2009 ; Polotskaia, 2009 ; Polotskaia et Consultant, 2010) proposent un schéma « range-tout » qui, en plus de soutenir le raisonnement des élèves, aurait l'avantage d'être adaptable à des problèmes de structures sémantiques différentes et de les aider à se focaliser sur les relations existant entre les quantités connues et inconnues.

Pour bien comprendre cette approche, il paraît utile de rappeler brièvement les travaux de Riley, Greeno et Heller (1983) ayant conduit à distinguer trois structures sémantiques de base qui permettent de construire une multitude de problèmes additifs et soustractifs :

- Les problèmes de type *changement* se réfèrent à des situations actives ou dynamiques dans lesquelles certains événements affectent la valeur d'une quantité initiale.
- Les problèmes de type *combinaison* font référence à des situations statiques impliquant deux quantités qui peuvent être considérées, soit séparément, soit en combinaison.
- Les problèmes de type *comparaison* impliquent deux quantités qui sont comparées, ainsi qu'une valeur indiquant la différence entre ces deux quantités.

En variant la position de l'inconnue et le sens de la relation ou de la transformation impliquée, il est alors possible de distinguer 14 types de problèmes différents, de complexité variable et permettant de donner du sens aux opérations additives et soustractives (Fagnant, 2013). De nombreuses études ont mis en évidence la pertinence de cette catégorisation appuyée sur les structures sémantiques et ceci, tant au niveau de la difficulté des problèmes que des démarches utilisées par les élèves pour les résoudre (voir Fayol, 1990 ; Verschaffel et De Corte, 1997, pour des synthèses). Ces structures sémantiques de base peuvent aussi être composées de façon à construire des structures plus complexes, comme nous le verrons par la suite avec les travaux de Gamo et ses collègues (Gamo et al., 2011 ; Gamo, Nogry et Sander, 2014 ; Gamo, Sander et Richard, 2010).

La figure 1 illustre les schématisations « range-tout » pour les trois structures sémantiques de base. Le principe de construction de ces schématisations est le suivant : chaque donnée du problème est représentée par un segment dont la longueur correspond approximativement à sa valeur et c'est la disposition des segments qui permet d'exprimer les relations existant entre les données concernées (Ducharme et Polotskaia, 2008).

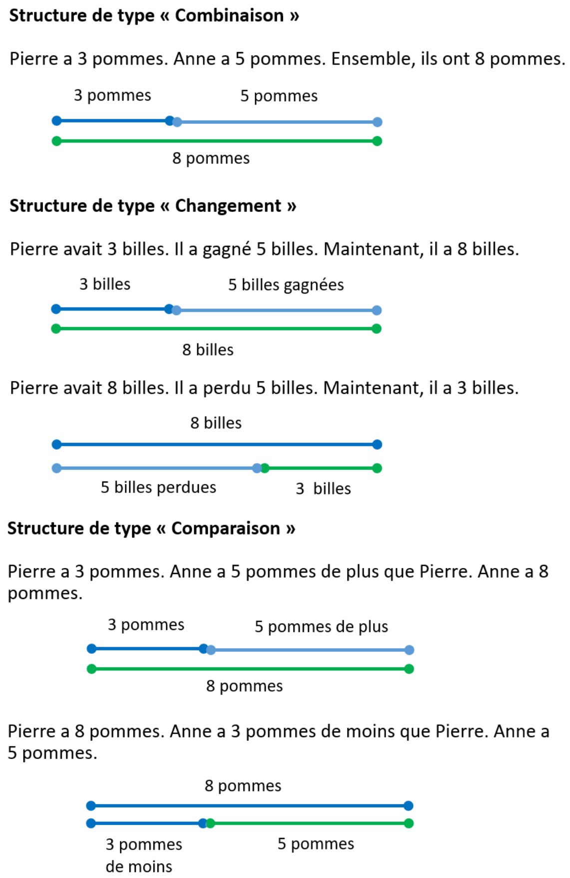


Figure 1. Schémas « range-tout » pour des structures de problèmes de types combinaison, changement et comparaison

Pour introduire ces schématisations, Polotskaia et ses collègues proposent la mise en place d'un scénario prenant la forme d'un jeu de communication (Ducharme et Polotskaia, 2009 ; Polotskaia et Consultant, 2010). Durant ce jeu (appelé « jeu du capitaine »), les élèves, répartis en équipes, sont invités à analyser une série de problèmes et à construire des messages-dessins respectant un ensemble de règles : 1) le message doit représenter le problème ; 2) le message ne doit comporter aucune lettre[2] ; 3) le message ne doit comporter aucun symbole d'opération arithmétique (+, ÷, – et ×) ; et 4) le message ne doit pas comporter de nombres autres que ceux du texte du problème. Chaque équipe remet ses messages à un élève (le « capitaine » de l'équipe). L'objectif est que cet élève puisse trouver la solution du problème sans avoir accès à l'énoncé du problème d'origine.

La figure 2 illustre des messages respectant les règles susmentionnées. Même sans avoir vu l'énoncé du problème, on comprend qu'il s'agit d'additionner une série d'achats et de rechercher le prix du dernier achat (représenté par un point d'interrogation) de façon à conduire à un total de 50 euros.

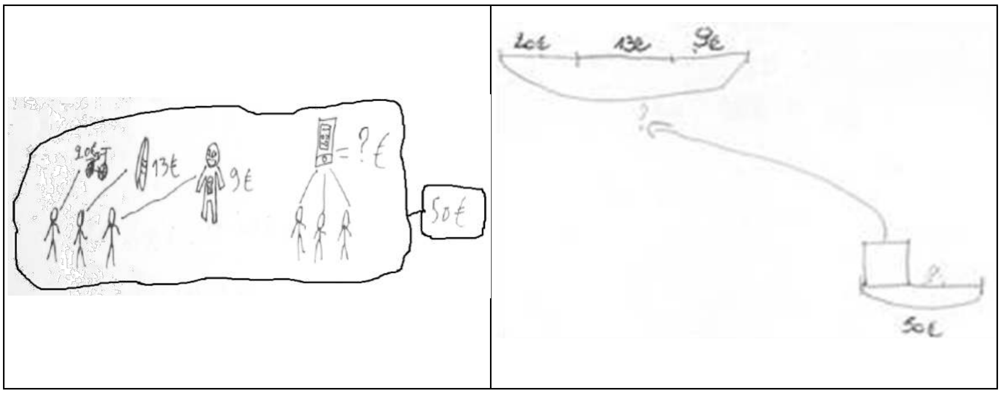


Figure 2. Schématisations respectant les règles du « jeu du capitaine » (inspiré de Polotskaia et Consultant, 2010)

La schématisation de gauche conserve des éléments concrets de la situation, utiles à la contextualisation du problème, mais peu nécessaires à sa résolution. La schématisation de droite, plus abstraite, est suffisante pour résoudre le problème. L'exploitation des messages-dessins produits par les élèves permet d'introduire les schématisations « range-tout », présentées comme une façon simplifiée de

[2] Dans les règles d'origine, le message ne doit comporter « aucune lettre ». Il peut être intéressant de modifier cette contrainte par « aucun mot » de façon à permettre aux élèves d'indiquer les unités correspondantes et de faciliter ainsi la contextualisation des résultats numériques (c'est-à-dire ce qu'Houdement, 2011, nomme le processus de « qualification »).

représenter le problème. Elles deviennent alors des « outils » dont peuvent s'emparer les élèves pour soutenir leur propre processus de résolution de problèmes.

Pour Polotskaia et ses collaborateurs, l'intérêt de ces schématisations est d'amener les élèves à « mettre en relation les nombres entre eux pour mettre en lumière la structure mathématique du problème et ainsi dégager l'opération à effectuer » (Gervais et al., 2013, page 50). Ces schémas peuvent non seulement être adaptés aux trois structures additives classiques, mais ils peuvent également être utilisés pour représenter des problèmes complexes, combinant par exemple plusieurs structures additives (ex. *changement* + *combinaison*), voire même des structures multiplicatives.

Dans la mesure où une même schématisation se veut adaptable aux différentes structures sémantiques de problèmes, on peut penser que les schématisations « range-tout » s'accordent assez mal à la théorie des « schémas-problèmes » selon laquelle les élèves activeraient, à partir de la lecture de l'énoncé, un schéma mental (une connaissance abstraite logée en mémoire à long terme) correspondant à une structure sémantique de problèmes (Julo, 2002 ; Thevenot et al., 2015). À l'heure actuelle, les travaux en psychologie cognitive ont d'ailleurs remis en cause cette théorie au profit de la théorie des « modèles épisodiques de situation » qui permet de rendre compte « du fait que des aspects interprétatifs du contenu du problème influencent sa résolution » (Gamo et al., 2011, page 616). En effet, on sait aujourd'hui que les facteurs linguistiques et situationnels (comme la formulation de l'énoncé, la place de la question, le déroulement de l'histoire…) influencent la résolution de problèmes, même lorsque ceux-ci présentent des structures sémantiques comparables (Coquin-Viennot et Moreau, 2003 ; Gamo et al., 2011 ; Thevenot et al., 2015). Avec les schématisations « range-tout », on n'attend pas des élèves qu'ils *activent* directement un schéma mental particulier en fonction de la structure sémantique du problème (théorie des « schémas-problèmes »), mais plutôt qu'ils *construisent* un modèle mental spécifique (théorie des « modèles épisodiques de situation ») permettant de mettre en exergue les relations entre les éléments saillants du problème (Thevenot et al., 2015). Lorsque les problèmes composent plusieurs structures sémantiques et nécessitent plusieurs étapes de résolution, on peut aussi penser que la mise en œuvre des schématisations « range-tout », via l'analyse étape par étape de chaque relation mathématique qu'elle induit, pourrait aussi favoriser un processus de « qualification » qui consiste à amener les élèves à identifier chaque résultat intermédiaire, en relation avec le contexte de l'énoncé (Houdement, 2011, 2014).

S'inscrivant dans la lignée théorique des « modèles épisodiques de situation », Gamo et ses collègues (Gamo et al., 2010, 2011, 2014) se sont intéressés à la « nature des variables » impliquées dans les énoncés de problèmes. Leurs travaux ont montré que la nature de la variable en jeu dans l'énoncé du problème incite les élèves à s'engager dans une démarche de résolution donnée, sans étudier toutes les démarches de résolution possibles. Plus précisément, portant leur attention sur l'opposition entre deux types de variables (matériel *vs* temporel), ils font l'hypothèse que la présence de « variables matérielles » (ex. effectifs, prix ou poids) mènerait la majorité des élèves à utiliser une *procédure-complément,* non-économique et plus complexe, tandis que la présence de « variables temporelles » (ex. durée ou âge) favoriserait le recours à une *procédure-comparaison*, plus économique et plus efficace, et ce, sans jamais songer à une alternative.

Le tableau 1 illustre des exemples de problèmes composant plusieurs structures sémantiques de base, ainsi que les *procédures (complément*, *comparaison et hybride)* pouvant être mobilisées face à chacun d'eux. Les travaux susmentionnés de Gamo et ses collègues, menés auprès d'élèves de 9-11 ans (grades 4-5), montrent clairement que c'est la *procédure-complément,* comprenant trois étapes, qui est privilégiée face au premier problème alors que c'est la *procédure-comparaison,* qualifiée d'économique puisque ne comportant qu'une seule étape, qui est majoritaire face au second. Ce second problème est mieux réussi que le premier, témoignant ainsi de la plus grande efficacité de la procédure économique. *A contrario*, la procédure en trois étapes semble s'avérer plus complexe et être source d'erreurs.

Enoncé avec variable matérielle (poids)	**Enoncé avec variable temporelle (durée)**
Un sac de farine pèse 8 kg. On le pèse avec un sac de crevettes. La balance indique 14 kg. Un sac de moules est pesé avec le même sac de crevettes. Ce sac de moules pèse 3 kg de moins que le sac de farine. Quel est le poids indiqué sur la balance ?	Le voyage d'Arnaud dure 8 heures. Son voyage a débuté à une certaine heure. À l'arrivée, l'horloge indique 17 h. David part à la même heure qu'Arnaud. Son voyage dure 2 heures de moins que celui d'Arnaud. À son arrivée, quelle heure est indiquée sur l'horloge ?
Procédure-complément : 8 + (6) = 14 ; 8 – 3 = (5) et 6 + 5 = (11) Procédure-comparaison : 14 – 3 = (11) Procédure hybride : 8 + (6) = 14 et 14 – 3 = (11)	Procédure-complément : 8 + (9) = 17 ; 9 – 2 = (7) et 8 + 7 = 15 Procédure-comparaison : 17 – 2 = (15) Procédure hybride : 8 + (9) = 17 et 17 – 2 = (15)

Tableau 1. Problèmes impliquant des variables matérielle ou temporelle et démarches de résolution possibles (d'après Gamo et al., 2011, page 629)

De notre point de vue, ces deux problèmes ne se distinguent pas seulement en fonction de la variable impliquée (matérielle *vs* temporelle), mais aussi selon leur structure sémantique qui traduit un caractère dynamique ou statique de la situation elle-même. Ainsi, même si les deux problèmes impliquent une relation de *comparaison*, le premier problème s'apparente à une structure de type *combinaison* et le second à une structure de type *changement*, selon la typologie de Riley et al. (1983). Les schémas « range-tout » devraient pouvoir s'adapter à ces structures de problèmes, mais vont-ils affecter les démarches de résolution spontanées des élèves ?

2. Questions de recherche et hypothèses

La première question de recherche s'inscrit dans la lignée des travaux de Gamo et ses collaborateurs (Gamo et al., 2010, 2011, 2014). Elle s'intéresse à l'impact de la structure sémantique des problèmes, sur les démarches de résolution. Nous pensons effectivement que les élèves recourront plus spontanément à une démarche économique (c'est-à-dire, en une seule étape) pour résoudre un problème impliquant conjointement des relations de types *changement* et *comparaison* et qu'ils privilégieront une démarche complexe (c'est-à-dire, en trois étapes) pour la résolution d'un problème composant des relations de types *combinaison* et *comparaison*. En corollaire, les taux de réussite du premier problème devraient être plus élevés que ceux du second. Complémentairement, il est supposé qu'un problème impliquant uniquement des relations de type *combinaison* sera mieux réussi que les deux structures susmentionnées qui composent deux types de relation sémantique.

La seconde question de recherche s'inscrit, quant à elle, dans la lignée des travaux de Polotskaia et ses collègues (Ducharme et Polotskaia, 2008, 2009 ; Gervais et al., 2013 ; Polotskaia, 2009 ; Polotskaia et al., 2016 ; Polotskaia et Consultant, 2010 ; Savard et Polotskaia, 2014). Elle vise à analyser l'impact de la construction de schématisations « range-tout » sur les performances des élèves et sur leurs démarches de résolution. Nous faisons l'hypothèse d'un effet différentiel de ces schématisations en fonction de la structure sémantique des problèmes et des démarches spontanées des élèves. En effet, même si elles se veulent adaptables aux problèmes relevant des différentes structures sémantiques, le travail d'abstraction à réaliser pour les concrétiser n'est pas le même dans tous les cas. Plus précisément, nous pensons que l'introduction de ces schématisations sera essentiellement efficace face à un problème de type *combinaison* dans la mesure où cette structure sémantique traduit une relation statique, de type parties-tout, qui s'accorderait particulièrement bien aux schémas « range-tout ». On peut ensuite escompter un effet positif marqué face à un problème de type *combinaison-comparaison* étant donné qu'il traduit aussi une relation statique et que la schématisation ne devrait pas entrer en conflit avec la procédure non-économique attendue pour ce type de problème. Corrélativement, on s'attend à un effet moins marqué face à un problème de type *changement-comparaison* dans la mesure où les transformations dynamiques demandent une abstraction plus importante pour être reconceptualisées sous la forme d'une relation parties-tout et que le passage par la schématisation pourrait s'avérer conflictuel avec la procédure économique attendue face à ce type de problème.

3. Dispositif de recherche

Pour répondre à la première question de recherche, un test constitué de trois problèmes de structures sémantiques différentes (voir tableau 2) a été administré à dix classes (N = 178 élèves) de 4[e] année primaire en Belgique francophone (grade 4, élèves de 9-10 ans).

Type *combinaison*	**La brocante (P1)** Michael, Jerry et Daniel ont participé à une brocante. Avant-midi, Michael a vendu son vieux vélo pour 20 €, Jerry a vendu ses skis pour 13 € ; Daniel a vendu son costume d'Halloween de l'année passée pour 9 €. Après-midi, les amis ont vendu un DVD. En tout, les trois garçons ont accumulé 50 €. Combien d'argent les amis ont-ils reçu pour le DVD ?
Type *changement-comparaison*	**La fête de l'école (P2)** C'est la fête de l'école aujourd'hui. Antoine avait encore quelques tickets de l'an passé. Aujourd'hui, il a gagné 8 tickets. Fin de journée, il compte tous ses tickets pour choisir son cadeau et constate qu'il en a 17. Nadia avait le même nombre de tickets qu'Antoine en début de journée. Aujourd'hui, elle en a gagné deux de moins que lui. Combien de tickets Nadia a-t-elle en fin de journée ?
Type *combinaison-comparaison*	**La rentrée scolaire (P3)** Laurent achète au supermarché un classeur qui coûte 8 € et un plumier. Il paie 14 €. Un stylo coûte 3 € de moins qu'un classeur. Augustin achète un plumier et un stylo. Combien Augustin doit-il payer pour ses achats ?

Tableau 2. Les 3 problèmes soumis aux 10 classes de 4[e] année primaire (N = 178)

Le problème de type *combinaison* (P1) est un problème parallèle à celui utilisé par Polotskaia et ses collègues pour introduire le « jeu du capitaine ». Les problèmes de types *changement-comparaison* (P2) et *combinaison-comparaison* (P3) impliquent tous deux des variables « matérielles » (des tickets dans un cas, des prix dans l'autre) et sont construits de façon sensiblement parallèle aux problèmes de « durée » et de « poids » proposés par Gamo et al. (2011, voir tableau 1). Les consignes invitaient les élèves à réaliser un dessin ou un schéma s'ils le souhaitaient ; elles leur demandaient explicitement d'indiquer tous leurs calculs.

Pour répondre à la deuxième question de recherche, un dispositif en trois étapes a été mis en œuvre dans six classes de grade 4[3] (N = 107 élèves) : le pré-test, constitué des trois problèmes précités ; une micro-intervention visant à introduire les schémas de type « range-tout » et un post-test constitué de trois problèmes parallèles à ceux du pré-test. L'intervention menée se décline en cinq étapes réparties en deux séances : la première séance est menée immédiatement après l'administration du pré-test tandis que la seconde précède directement celle du post-test.

La première étape (mise en situation) consiste à proposer une version simplifiée du « jeu du capitaine » (adaptée de Polotskaia et Consultant, 2010). Les élèves sont répartis en duos et chaque membre de chaque duo reçoit un problème de type *combinaison* très simple (P1 – *Pierre a 4 billes. Nadia a 6 billes. Combien de billes Pierre et Nadia ont-ils ensemble ?* ; P2 – *Pierre a 4 billes. Nadia a aussi quelques billes. Ensemble, Pierre et Nadia ont 10 billes. Combien de billes Nadia a-t-elle ?*). Afin de faciliter les échanges au sein des duos, les problèmes proposés sont volontairement proches : les valeurs numériques et les éléments contextuels sont identiques, mais la place de l'inconnue diffère (recherche du « tout » ou d'une « partie »). Les consignes données sont proches de celles du jeu d'origine (voir figure 3).

« Dans chaque groupe duo, chacun a reçu un problème différent. Tous les problèmes parlent de Pierre, de Nadia et de billes. Vous devez écrire un message qui permettra à votre copain de résoudre le problème. Attention : il ne lira pas le problème et ne verra que votre message !

<u>Voici les règles pour le message</u> :

• Le message doit représenter le problème ;

• Le message ne doit comporter aucune lettre ;

• Le message ne doit comporter aucun symbole d'opération arithmétique (+, ÷, – ou ×) ;

• Le message ne doit pas comporter de nombres autres que ceux du texte du problème. »

Figure 3. Consignes pour le « jeu du capitaine »

[3] Les 6 classes font partie des 10 classes précédemment citées. Il s'agit d'un sous-échantillon de convenance dans la mesure où ce sont simplement les classes qui ont accepté de participer à l'expérimentation qui ont été retenues.

Après le travail en duos, une phase de correction collective (étape 2) permet de confronter les messages créés par les élèves et d'introduire les schémas « range-tout », présentés comme étant une solution économique et efficace pour représenter la structure du problème. Pour finir, un nouveau problème de type *combinaison*, proche des deux précédents, mais faisant porter l'inconnue sur l'autre « partie » (P3 – *Pierre a quelques billes. Nadia a 6 billes. Ensemble, Pierre et Nadia ont 10 billes. Combien de billes Pierre a-t-il ?*) est proposé aux élèves dans le but de réinvestir collectivement le type de schémas introduit (étape 3).

La seconde séance d'intervention est menée environ une semaine après la première. Elle consiste à proposer une phase de rappel des schémas (étape 4) et un réinvestissement de ceux-ci face à un problème permettant d'investir les deux structures sémantiques qui le composent, c'est-à-dire les structures de types *changement* et *comparaison* (étape 5). Les élèves sont invités à représenter le problème en utilisant des schémas « range-tout », puis à le résoudre. Dans le but de favoriser le processus de *qualification* (Houdement, 2011), l'enseignant précise qu'ils peuvent maintenant écrire des informations sur les schémas pour s'aider à mieux comprendre la situation (ex. les billes, les prénoms des enfants, en tout…). Il précise aussi qu'ils peuvent faire plusieurs schémas pour analyser pas à pas le problème. La correction collective met en exergue les schémas attendus (figure 4).

Problème de réinvestissement

Pierre est arrivé à l'école ce matin avec un sachet de 15 billes. Il a perdu 3 billes pendant la récréation. Fin de journée, Pierre et Marc comptent leurs billes. Marc a 6 billes de plus que Pierre. Combien de billes Marc a-t-il ?

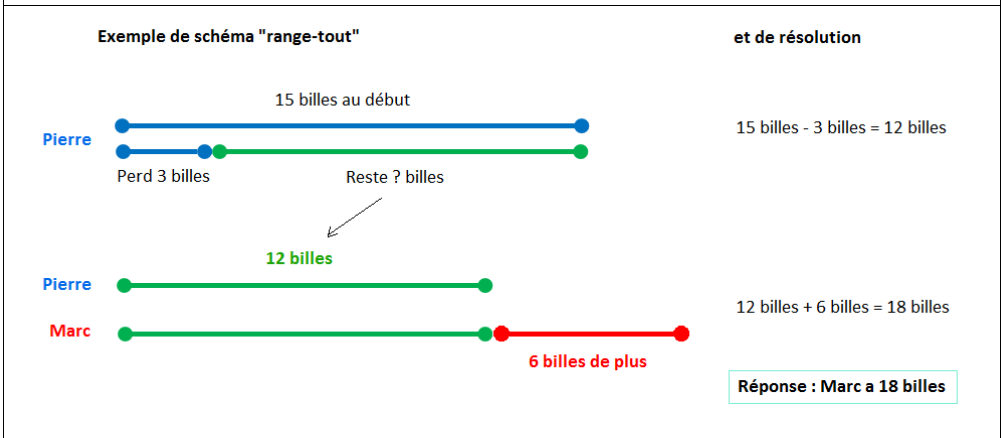


Figure 4. Exemple de schématisations et de résolution proposé lors de la mise en commun portant sur le problème de réinvestissement

Comme indiqué précédemment, le post-test est composé de trois problèmes parallèles à ceux du pré-test. Les thématiques abordées et l'ordre de présentation des problèmes ont été modifiés pour éviter un effet de *testage*. Pour faciliter la lecture, nous les avons identifiés, ici, par des codes similaires à ceux du pré-test (P1', P2' et P3' – voir tableau 3). Les consignes étaient du même type qu'au pré-test, si ce n'est qu'elles demandaient explicitement aux élèves d'utiliser les schémas découverts précédemment.

Type *combinaison*	**La vente de chocolats (P1')** Fatima, Lucie, Emma et Julien vendent des chocolats pour leur voyage scolaire. Les ventes de Fatima lui ont rapporté 24 €, celles de Lucie 5 euros et celles d'Emma, 7 €. Les ventes de Julien lui ont aussi rapporté un peu d'argent. En tout, les ventes des quatre enfants ont rapporté 40 euros. Combien d'argent les ventes de Julien lui ont-elles rapporté ?
Type *changement-comparaison*	**La partie de fléchettes (P2')** A midi, Farid et Julie terminent la partie de fléchettes commencée à dix heures. Farid avait déjà quelques points après la partie de la matinée. À midi, il gagne 7 points. Il a maintenant un total de 13 points. Julie avait le même nombre points que Farid ce matin. À midi, elle gagne 3 points de moins que lui. Combien de points Julie a-t-elle à la fin de la partie ?
Type *combinaison-comparaison*	**Le matériel de tennis d'occasion (P3')** Patrick achète une boite de balles à 6 € et un sac de sport. Il paie 15 €. Une housse de raquette coûte 2 € de moins que la boîte de balles. Jordan achète un sac de sport et une housse de raquette. Combien Jordan doit-il payer pour ses achats ?

Tableau 3. Les 3 problèmes du post-test soumis aux 6 classes ayant mis en œuvre l'intervention (N = 107)

4. Résultats

4.1. La difficulté relative des trois problèmes et les démarches spontanées des élèves

Alors que l'on pensait que le problème 1 aurait été le plus facile dans la mesure où il ne met en œuvre qu'un seul type de relation, les résultats présentés dans le tableau 4 montrent que c'est le problème 2 qui est le mieux réussi. Le problème 3 est celui qui présente le taux de réussite le plus faible.

	P1 *Combinaison*	P2 *Changement-comparaison*	P3 *Combinaison-comparaison*
% de résolutions correctes[4]	62 % (N = 111)	70 % (N = 124)	25 %[5] (N = 45)

Tableau 4. Résultats globaux des élèves à chaque problème (N = 178)

Le problème de type *combinaison*[6] est celui qui est le plus fréquemment accompagné d'une schématisation spontanée relativement concrète qui, dans la majorité des cas, semble constituer une aide à la résolution (voir figure 5). Parmi les élèves qui ont résolu le problème correctement (N = 111), 63 % ont utilisé un calcul relationnel (20 + 13 + 9 + ? = 50) ; 21 % ont procédé en deux temps (20 + 13 + 9 = 42 et 50 – 42 = 8, parfois en réalisant la deuxième étape mentalement) ; 9 % ont réalisé un calcul canonique (50 – 20 – 13 – 9 = 8) et 7 % se sont appuyés directement sur la schématisation et n'ont écrit aucun calcul.

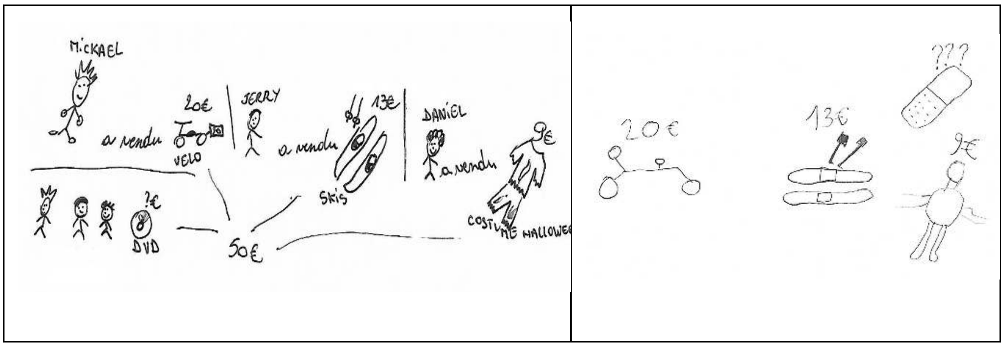


Figure 5. Exemples de schématisations produites face au problème (P1) de type *combinaison*

[4] Le pourcentage de résolutions correctes comprend les réponses correctes, ainsi que les démarches correctes assorties d'une erreur de calcul ou d'un problème d'identification de la réponse. Pour le P1, cinq élèves ont résolu correctement le problème (ex. 20 + 13 + 9 + 8 = 50), puis ont indiqué 50 dans la case réponse.

[5] Notons que certains élèves (8,5 %) aboutissent à la réponse « 11 » en considérant que le stylo coûte 3 euros et en additionnant ce prix au prix du classeur (8 euros). Bien qu'aboutissant à la réponse attendue, ces résolutions n'ont pas été considérées comme correctes et ne sont pas reprises dans le tableau 4.

[6] Face aux trois problèmes, plus de la moitié des élèves accompagnent leur démarche de résolution d'une schématisation spontanée relativement concrète (64% pour P1, 56 % pour P2 et 53 % pour P3).

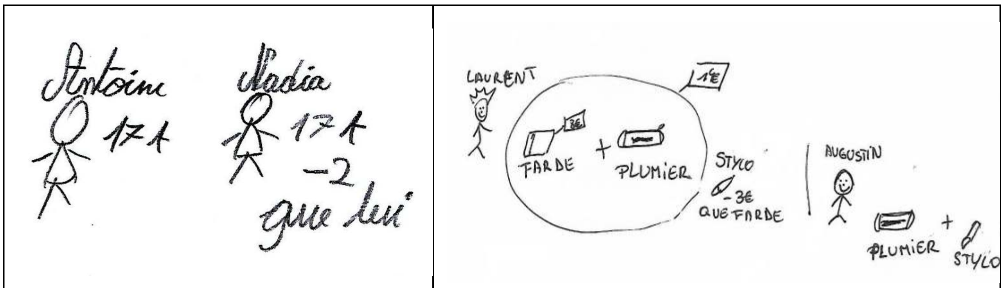
Pour les deux autres problèmes, les démarches correctes des élèves ont été analysées selon qu'elles relevaient d'une procédure économique (*procédure-comparaison*) ou non-économique (*procédure-complément*). Certaines démarches, qualifiées d'hybrides, constituent un « croisement » entre ces deux procédures et d'autres n'ont pas pu être classifiées. Les résultats sont présentés dans le tableau 5.

P2 - *Changement-comparaison* (N = 124)		P3 - *Combinaison-comparaison* (N = 45)	
Procédure-complément (9) + 8 = 17, 8 – 2 = (6) et 9 + 6 = (15)	2 % (N = 2)	Procédure-complément 8 + (6) = 14, 8 – 3 = (5) et 6 + 5 = (11)[7]	91 % (N = 41)
Procédure hybride (9) + 8 = 17 et 17 – 2 = (15)	15 % (N=19)	Procédure hybride 8 + (6) = 14 et 14 – 3 = (11)	2 % (N = 1)
Procédure-comparaison 17 – 2 = (15)	79 % (N = 98)	Procédure-comparaison 14 – 3 = (11)	4 % (N = 2)
Non identifiable *Calcul et schématisation absents ou incodables*	4 % (N = 5)	Non identifiable *Calcul et schématisation absents ou incodables*	2 % (N = 1)

Tableau 5. Démarches observées face aux problèmes composant deux structures sémantiques

Si les élèves sont très nombreux à recourir à une procédure économique (en une étape) face au problème de type *changement-comparaison,* pratiquement aucun n'y a recours face au problème de type *combinaison-comparaison* où c'est la procédure en trois étapes qui est largement privilégiée. Dans la même logique, les *procédures hybrides*, qui s'appuient elles aussi sur une comparaison des états finaux, ne s'observent pratiquement que face au problème impliquant un changement. La simplicité de la *procédure-comparaison* et la complexité de la *procédure-complément* permettent de comprendre la hiérarchisation au niveau des taux de réussite. La figure 6 illustre les schématisations correspondant aux démarches les plus fréquentes pour chacun des problèmes.

[7] Parmi les 41 démarches correspondant à une *procédure-complément*, 10 élèves écrivent les calculs correspondant aux trois étapes impliquées ; les autres réalisent une partie de la démarche mentalement : la dernière étape (8 + (6) = 14 et 8 – 3 =(5) – 7 élèves), la deuxième étape (8 + (6) = 14 et 6 + 5 = (11) – 6 élèves), voire les deux premières étapes (le seul calcul indiqué est alors 6 + 5 = 11, souvent accompagné du dessin des achats – le classeur à 8 euros, le plumier à 6 euros et le stylo à 5 euros).



Démarche économique au P2	Démarche non-économique au P3

Figure 6. Exemples de schématisations illustrant les démarches les plus courantes observées face aux problèmes (P2) de types *changement-comparaison* et (P3) *combinaison-comparaison*

Les variables impliquées dans chaque énoncé étant, dans les deux cas, « matérielles » et non « temporelles » (des articles à acheter d'un côté et des tickets gagnés à une tombola de l'autre), il semble, en accord avec notre hypothèse, que c'est bien la structure sémantique du problème qui encourage le recours à une démarche économique de type *procédure-comparaison*.

4.2. L'impact de l'introduction des schématisations « range-tout »

La comparaison entre le pré-test[8] et le post-test (voir tableau 6) montre que les élèves ont progressé face au problème de type *combinaison* (+15 %) et, dans une moindre mesure, face à celui de type *combinaison-comparaison* (+8 %). À l'inverse, une régression est constatée pour le problème de type *changement-comparaison* (-12 %). Les effets observés restent néanmoins relativement faibles (ampleurs de l'effet comprises entre 0,17 et 0,33).

---

[8] Les taux de réussite des 6 classes au pré-test sont très proches de ceux observés pour l'ensemble des 10 classes.

	P1	P1'	P2	P2'	P3	P3'
% de résolutions correctes[9]	**61 %** (N = 65)	**76 %** (N = 81)	**71 %** (N = 76)	**59 %** (N = 63)	**26 %** (N = 28)	**34 %** (N = 36)
(Ecart-type)	(49 %)	(43 %)	(46 %)	(49 %)	(44 %)	(48 %)
Ampleur de l'effet (AE)[10]	0,33		-0,25		0,17	

Tableau 6. Comparaison des résultats globaux des élèves lors du pré-test et du post-test (N = 107)

Pour tenter de comprendre ces résultats, il convient d'abord d'observer dans quelle mesure les élèves ont réinvesti les schématisations introduites. Le tableau 7 montre qu'environ 80 % des élèves ont produit des schématisations au post-test (ce qui est en augmentation par rapport au pré-test) et que, dans trois-quarts des cas, ces dernières sont de type « range-tout ». Pour chaque problème, environ 20 % des élèves[11] ont directement calculé la solution au départ du schéma, sans passer par la mise à plat d'un calcul sous une forme conventionnelle.

[9] Le pourcentage de résolutions correctes a été calculé comme expliqué précédemment. Pour le P1, les progrès observés masquent une difficulté spécifique aux problèmes pour lesquels la position de l'inconnue favorise la production de calculs « à trou ». En effet, les élèves ont certes progressé au niveau des démarches de résolution, mais on note aussi une augmentation du nombre de réponses incorrectement identifiées dans la case prévue à cet effet (3 % au pré-test contre 13 % au post-test). Dans le deuxième exemple de la figure 7, le point d'interrogation placé à côté du « 4 » laisse entendre que l'élève a bien repéré l'inconnue. Pourtant, il indique « 40 » dans la case réponse, c'est-à-dire le nombre situé derrière le signe d'égalité dans son calcul « 36 + 4 = 40 ».

[10] L'ampleur de l'effet est calculée sur la base des moyennes et des écarts-types (M_1 - M_2 / $\sqrt{[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) / 2]}$). Généralement, en référence à Cohen (1992), on considère une ampleur de l'effet de 0,2 comme faible, de 0,5 comme modérée et de 0,8 comme élevée. L'ampleur de l'effet renseigne sur la taille de la différence entre deux moyennes observées, mais n'autorise pas forcément les généralisations.

[11] On note ainsi 22 % d'omission dans la zone « calcul » pour le P1' (contre 4 % au pré-test) ; 20 % pour le P2' contre 11 % au pré-test) et 20 % pour le P3' (contre 6 % au pré-test).

	P1	P1’	P2	P2’	P3	P3’
% de schématisations (dont % de « range-tout » au post-test)	**61 %**	**79 %** (75 %)	**53 %**	**86 %** (79 %)	**54 %**	**81 %** (75 %)

Tableau 7. Proportion d’élèves proposant une schématisation lors du pré-test et du post-test (N = 107)

Pour le problème de *type combinaison*, les schématisations produites par les élèves s’avèrent généralement efficaces. En accord avec les démarches de résolution déjà observées au pré-test, certains produisent une schématisation qui combine d’emblée l’ensemble des données et d’autres procèdent en deux étapes, comme illustré à la figure 7. Même si les schématisations ne prennent pas toujours la forme attendue (voir troisième exemple), elles semblent avoir pu aider les élèves à organiser leur démarche et à résoudre correctement le problème.

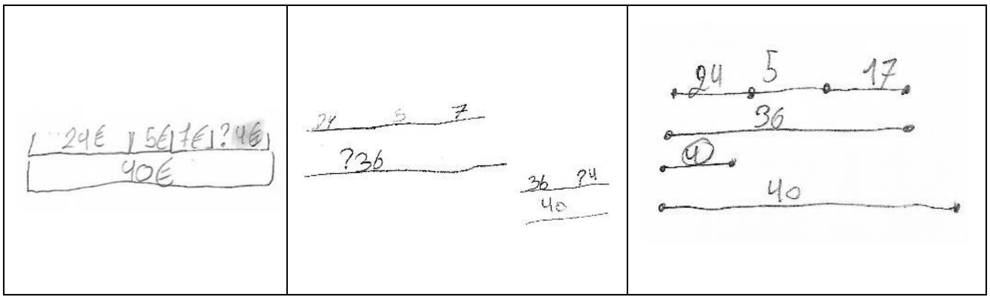


Figure 7. Exemples de schématisations « range-tout » correspondant au problème (P1’) de type *combinaison*

Pour comprendre les résultats obtenus aux deux autres problèmes, les démarches correctes observées ont été codées dans les mêmes catégories que précédemment. Pour faciliter la lecture des exemples qui vont suivre, elles sont rappelées dans le tableau 8 et exemplifiées au départ des données du post-test.

Les résultats montrent assez nettement une évolution des démarches au profit des procédures non-économiques (*procédures-complément*). Pour le problème de type *combinaison-comparaison,* ces procédures étaient déjà très majoritaires au pré-test et les quelques rares élèves qui s’étaient appuyés sur une comparaison des états finaux (*procédure-comparaison*) ont abandonné cette procédure.

P2 – *Changement-comparaison*			P3 – *Combinaison-comparaison*		
	Pré-test (N = 76)	Post-test (N = 63)		Pré-test (N = 28)	Post-test (N = 36)
Procédure-complément (6) + 7 = 13, 6 – 2 = (4) et 6 + 4 = (10)	1 % (N = 1)	24 % (N = 15)	Procédure-complément 6 + (9) = 15, 6 – 2 = (4) et 9 + 4 = (13)[12]	89 % (N = 25)	100 % (N = 36)
Procédure hybride (6) + 7 = 13 et 13 – 3 = (10)	10 % (N = 8)	24 % (N = 15)	Procédure hybride 6 + (9) = 15 et 15 – 2 = (13)	4 % (N = 1)	-
Procédure-comparaison 13 – 3 = (10)	86 % (N = 65)	52 % (N = 33)	Procédure-comparaison 15 – 2 = (13)	7 % (N = 2)	-
Non identifiable *Calcul et schématisation absents ou incodables*	2 (3 %)	-	Non identifiable *Calcul et schématisation absents ou incodables*	-	-

Tableau 8. Évolution des démarches observées face aux problèmes composant deux structures sémantiques

La figure 8 illustre trois exemples de schématisations « range-tout » traduisant la *procédure-complément*. Dans le premier cas, les trois étapes de calcul sont représentées ; dans le deuxième cas, la deuxième étape est réalisée mentalement ; dans le troisième cas, seule la dernière étape est représentée (le « dessin » qui précède le schéma « range-tout » témoignant de la bonne compréhension de la situation).

[12] Au pré-test comme au post-test, la mise en œuvre de la *procédure-complément* ne se traduit pas nécessairement par l'écriture des trois étapes de calcul. Comme précisé précédemment, certaines étapes sont en effet réalisées mentalement, pouvant conduire l'élève à n'écrire que certaines étapes de calcul et/ou, dans la même logique, à ne représenter que certaines étapes sous la forme d'une schématisation « range-tout ».

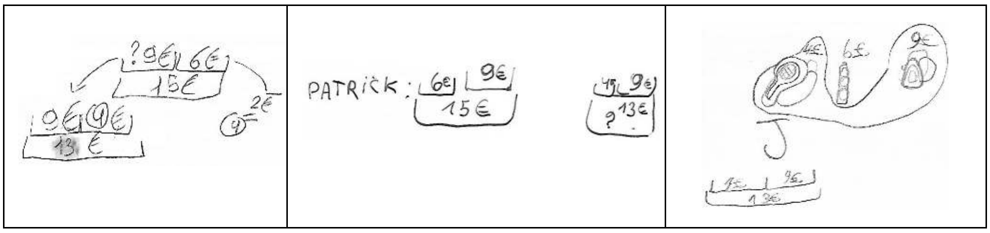


Figure 8. Exemples de schématisations « range-tout » correspondant au problème (P3’) de type *combinaison-comparaison*

Pour le problème de type *changement-comparaison*, l’évolution est notable puisque près d’un quart des démarches correctes s’appuie maintenant sur une *procédure-complément*, comme si le passage par la schématisation externe induisait une volonté de décomposer les différentes étapes du problème. L’augmentation des procédures hybrides peut sans doute aussi se comprendre dans cette logique (propension à mettre à plat l’état initial, même si on ne s’en sert finalement pas pour procéder à une comparaison des états finaux).

La figure 9 illustre les trois types de procédures observées : les deux premiers exemples traduisent des *procédures-complément* (toutes les étapes sont représentées dans le premier cas, la deuxième étape est réalisée mentalement dans le second) ; les deux suivants correspondent respectivement à une procédure hybride et à une *procédure-comparaison*.

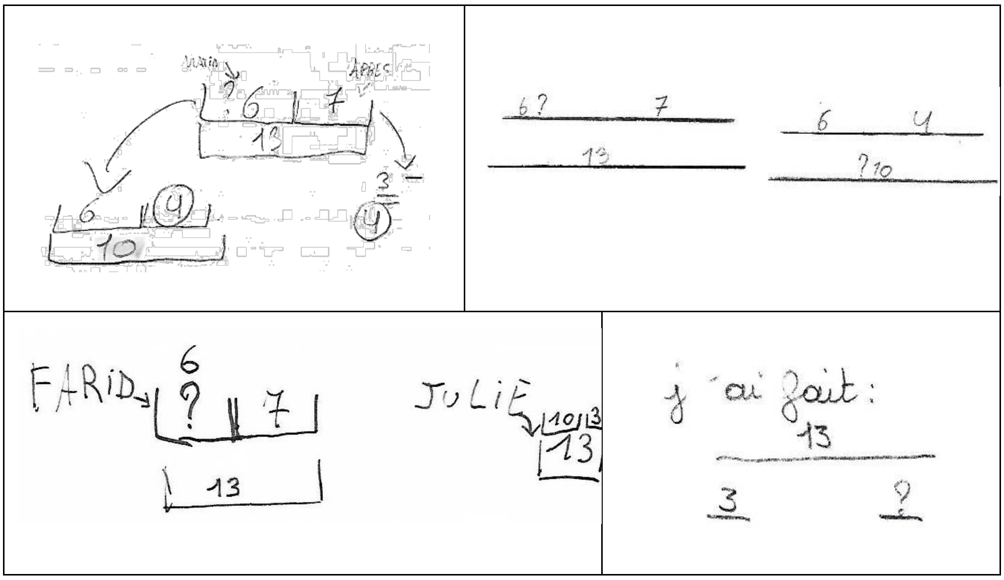


Figure 9. Exemples de schématisations « range-tout » correspondant au problème (P2’) de type *changement-comparaison*

5. Conclusion et discussion

La première question de recherche s'intéressait à l'impact des structures sémantiques sur les performances et sur les démarches mises en œuvre par les élèves. Nos hypothèses se vérifient partiellement : le problème de type *combinaison* ne s'est pas révélé le mieux réussi, mais la hiérarchie entre les problèmes de types *changement-comparaison* et *combinaison-comparaison* est, quant à elle, très marquée. Concernant les démarches de résolution, notre hypothèse se vérifie largement : la procédure économique (*procédure-comparaison*) s'est révélée très majoritaire face au problème de type *changement-comparaison* et quasiment inexistante face à celui de type *combinaison-comparaison* qui était, quant à lui, principalement résolu via une procédure non-économique (*procédure-complément*). Gamo et al. (2011) estimaient que la nature des variables en jeu expliquait l'utilisation de ces deux procédures. Plus précisément, leur interprétation était la suivante :

> Certaines variables (Effectif, Prix, Hauteur et Poids) en tant que variables mesurant des quantités matérielles, engendrent plutôt une représentation cardinale des quantités qui se cumulent, incitant au calcul du tout et/ou du complément, alors que d'autres (Durée et Âge) compte tenu de leur appartenance à la classe des variables mesurant des quantités temporelles, engendrent une représentation ordinale qui invite à une comparaison de quantités incitant au calcul de la différence associée à la comparaison. Les procédures de résolution mises en œuvre apparaissent bien être dépendantes de la classe d'appartenance de la variable (Gamo et al., 2011, page 636).

Les deux problèmes que nous avons soumis aux élèves ont été construits selon une formulation sensiblement parallèle à celle utilisée par Gamo et al. (2011). Nos deux énoncés proposaient des variables qu'il nous semble pouvoir qualifier de « matérielles » puisqu'il s'agissait de tickets dans un cas et d'euros dans l'autre. *A priori*, il s'agit bien de quantités qui s'accordent davantage à une représentation « cardinale » et non « ordinale » des nombres. Le premier problème proposé était toutefois formulé en mettant en exergue une structure sémantique de type *changement* (le nombre de tickets de départ est affecté par une transformation positive exprimée par le nombre de tickets gagnés durant la journée) alors que le second mettait en exergue une structure sémantique de type *combinaison* (les différents achats constituent les différentes parties et la somme totale représente le tout). En accord avec notre hypothèse, il semblerait donc que ce soit la structure sémantique des problèmes qui affecte la procédure de résolution mise en œuvre, et ceci, à tout le moins lorsqu'il s'agit de variables matérielles dans les deux cas. Des études complémentaires devraient être menées pour vérifier ce qu'il se passerait si l'on proposait ces deux structures sémantiques dans des problèmes impliquant des variables temporelles. Par ailleurs, il importerait aussi de vérifier dans quelle mesure la formulation n'affecte pas le repérage de la partie commune dans les deux énoncés. En effet, dans les problèmes engendrant une procédure économique (problème de durée chez Gamo et al. *vs* problème de tickets dans notre étude), seuls deux « personnages » sont impliqués, ce qui permet aisément de comprendre que l'on peut comparer les états finaux (l'heure d'arrivée dans un cas ; le nombre de tickets disponibles en fin de journée dans l'autre). *A contrario*, dans les autres problèmes (poids *vs* achats en euros), trois « objets » sont impliqués (un sac de farine, un sac de crevettes et un sac de moules dans un cas ; un plumier, un classeur et un stylo dans l'autre), ce qui rend sans doute moins saillants les éléments finaux à comparer (le poids indiqué sur les deux balances dans un cas, la somme des achats effectués par chacun des deux enfants dans l'autre).

La seconde question de recherche s'intéressait à l'effet de l'introduction des schématisations « range-tout » sur les performances et sur les démarches de résolution de problèmes des élèves. En accord avec nos hypothèses, c'est face au problème de type *combinaison* que les progrès sont les plus marqués (de l'ordre de 15 %) ; le problème de type *combinaison-comparaison* engendre, lui aussi, un certain progrès (de l'ordre de 10 %) et le problème de type *changement-comparaison* se solde par une régression sensible (de l'ordre de 10 % également). Le problème de type *combinaison* (P1, P1') implique une relation parties-tout qui correspond assez directement à une schématisation de type « range-tout ». Il est donc assez logique que ce soit le problème pour lequel les progrès sont les plus importants. Notons aussi que c'est la structure de problème au départ de laquelle le « jeu du capitaine » a été mené lors de l'intervention, mais avec un problème beaucoup plus simple et dans un contexte très différent ne permettant sans doute pas aux élèves de faire aisément le lien entre les deux types de problèmes. La régression observée au problème de type *changement-comparaison* s'explique sans doute par le développement de procédures non-économiques à la suite de l'introduction des « range-tout » qui semblent avoir induit une schématisation étape par étape peu compatible avec la *procédure-comparaison* s'appuyant directement sur le calcul de la différence entre les deux états finaux.

Au final, si les progrès observés à la suite de l'introduction des schématisations « range-tout » restent, somme toute, assez faibles (ampleurs de l'effet comprises entre 0,17 et 0,33), il faut toutefois rappeler la brièveté de l'intervention menée. Le « jeu du capitaine » n'a été mis en œuvre qu'une seule fois et les schémas « range-tout » introduits dans ce jeu n'ont été réinvestis que dans deux problèmes, ce qui est sans doute insuffisant pour permettre une réelle appropriation par les élèves (Ducharme et Polotskaia, 2008, 2009). En effet, cette approche s'éloigne des démarches courantes des élèves qui ont l'habitude de se centrer sur les données plutôt que sur les relations et qui peuvent être quelque peu perturbés par l'idée de représenter des quantités précises par des segments de droite de longueur très approximative.

Par ailleurs, les schématisations « range-tout » demandent aussi un certain degré d'abstraction étant donné qu'elles nécessitent une reconceptualisation des problèmes en termes de relations « parties-tout », ce qui n'est *a priori* pas très « naturel » pour certains problèmes et ce qui s'avère sans doute très complexe pour certains élèves. De ce point de vue, la réapparition dans la littérature récente de schémas « parties-tout » visant à représenter tous les types de problèmes peut surprendre dans la mesure où des travaux déjà anciens concluaient plutôt à la nécessité d'adapter les schématisations aux différentes structures de problèmes et critiquaient l'utilisation de schémas parties-tout pour représenter les transformations négatives (Vergnaud 1982, 1990, 1997 ; voir aussi Gustein et Romberg, 1995 ; Verschaffel, 1990). *A contrario*, la remise en cause de la théorie des « schémas-problèmes » au profit de la théorie des « modèles épisodiques de situation » (Coquin-Viennot et Moreau, 2003 ; Thevenot et al., 2015), davantage sensibles à la formulation des énoncés et s'accordant mieux avec l'idée d'une schématisation construite (progressivement) au départ du texte, pourrait constituer un élément en faveur des schémas « range-tout ». En effet, lorsque les élèves sont invités à utiliser des schémas prédéfinis qui leur ont été fournis antérieurement (un schéma pour représenter chaque structure sémantique de problèmes ; i.e. étude de Willis et Fuson, 1988), ils risquent de développer des stratégies superficielles consistant à rechercher des mots-clés indicateurs du « bon » schéma, ce qui risque finalement de faire perdre tout le bénéfice d'une telle approche. Avec les schémas « range-tout », il ne s'agit pas de faire appel à un schéma spécifique à un type de problème particulier conservé en mémoire, mais bien de réellement construire une schématisation en organisant soi-même la mise en relation entre les données et l'inconnue au départ d'un canevas adaptable aux différentes situations rencontrées. Si ces schématisations semblent constituer une aide potentielle à la résolution de problèmes, des études complémentaires doivent encore être menées pour mieux comprendre comment et à quelles conditions les élèves peuvent s'emparer d'un tel « outil externe » pour soutenir leur processus de construction d'une représentation mentale des situations rencontrées.

Bibliographie

BECKMANN, S. (2004). Solving Algebra and Other Story Problems with Simple Diagrams: a Method Demonstrated in Grade 4–6 Texts Used in Singapore. *The Mathematics Educator*, **14(1)**, 42-46.

COHEN, J. (1992). A power primer. *Psychological Bulletin,* **112(1)**, 155-159.

COQUIN-VIENNOT, D. & MOREAU, S. (2003). Highlighting the role of the episodic situation model in the solving of arithmetical problems. *European Journal of Psychology of Education,* **XVIII(3)**, 267-279.

CSÍKOS, C., SZITÁNYI, J. & KELEMEN, R. (2012). The effects of using in developing young children's mathemat ical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics,* **81(1)**, 47-65.

DEMONTY, I. & FAGNANT, A. (2012). Les différentes fonctions de la résolution de problèmes sont-elles présentes dans l'enseignement primaire en communauté française de Belgique ? In J.-L. Dorier & S. Coutat. (Eds). *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE3, pp. 1752–1760).

DIEZMANN, C. M. (2002). Enhancing students' problem solving through diagram use. *Australian Primary Mathematics Classroom,* **7(3)**, 4-8.

DUCHARME, M. & POLOTSKAIA, E. (2008). Développement du raisonnement algébrique par resolution de problèmes textuels chez les enfants au primaire (ingénierie didactique) (Partie 1). *ENVOL*, **145**, 21-28.

DUCHARME, M. & POLOTSKAIA, E. (2009). Développement du raisonnement algébrique par resolution de problèmes textuels chez les enfants au primaire (ingénierie didactique) (Partie 2). *ENVOL*, **146**, 33-38.

ELIA, I. (2009). L'utilisation d'images en résolution de problèmes additifs : quel type d'images et quel rôle. *Annales de Didactique des Sciences cognitives,* **14**, 5-29.

ELIA, I. (2011). Le rôle de la droite graduée dans la résolution de problèmes additifs. *Annales de Didactique des Sciences cognitives*, **16**, 45-66.

ELIA, I., GAGATSIS, A. & DEMETRIOU, A. (2007). The effects of different modes of representations on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction,* **17***,* 658-672.

FAGNANT, A. (2013). Opérations arithmétiques et symbolisations variées. Partir des démarches informelles des élèves pour donner du sens aux apprentissages. *Education & Formation,* **e-298(1)**, 23-38.

FAGNANT, A., AUQUIÈRE, A. & VLASSIS, J. (2015). *Résolution de problèmes arithmétiques et représentations schématiques : comment évaluer l'efficacité d'approches didactiques contrastées ?* In P. Detroz & O. Borsu (Eds). Actes du 27e colloque de l'Admée-Europe. L'évaluation à la lumière des contextes et des disciplines.

FAGNANT, A. & VLASSIS, J. (2010). Le rôle de la résolution de problèmes dans les apprentissages mathématiques : questions et réflexions. *Education Canada,* **50(1)***,50-52.*

FAGNANT, A. & VLASSIS, J. (2013). Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational Studies in Mathematics*, **84**,149-168.

FAYOL, M. (1990). *L'enfant et le nombre*. Paris : Delachaux & Niestlé.

GAMO, S., NOGRY, S. & SANDER, E. (2014). Réduire les effets de contenus en résolution de problème pour favoriser la construction d'une représentation alternative. *Cahiers des Sciences de l'Éducation,* **36***,* 35-66.

GAMO, S., SANDER, E. & RICHARD, J-F. (2010). Transfer of strategy use by semantic recoding in arithmetic problem solving. *Learning & Instruction,* **20***,* 400-410.

GAMO, S., TAABANE, L. & SANDER, E. (2011). Rôle de la nature des variables dans la résolution de problèmes additifs complexes. *L'Année psychologique,* **111**, 613-640.

GERVAIS, C., SAVARD, A. & POLATSKAIA, E. (2013) La résolution de problèmes de structures additives chez les élèves du premier cycle du primaire : le développement du raisonnement. *Bulletin AMQ,* **53**, 58-66.

GUSTEIN, E. & ROMBERG, T.A. (1995). Teaching children to add and subtract. *Journal of mathematical Behavior,* **14***,* 283-.324.

HANIN,V. & VAN NIEUVENHOVEN, C. (2016). Évaluation d'un dispositif pédagogique visant le développement de stratégies cognitives et métacognitives en résolution de problèmes en première secondaire. *Évaluer. Journal International de Recherche en Education et Formation,* **2(1)**, 53-88.

HEGARTY, M. & KOZHENIKOV, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology,* **91(4)**, 684-689.

HOUDEMENT, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactique des Sciences cognitives*, **16**, 67-96.

HOUDEMENT, C. (2014). Des connaissances fonctionnelles (mais ignorées) en résolution de problèmes arithmétiques. *Cahiers des Sciences de l'Education*, **36**, 7-33.

JAEGERS, D., LAFONTAINE D. & FAGNANT, A. (2016). Développer l'autorégulation et les compétences en résolution de problèmes : une étude exploratoire en fin d'enseignement primaire en Belgique francophone. *Revue Suisse des Sciences de l'Education,* **38(3)**, 1-21.

JULO, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N,* **69***,* 31- 52.

LEVAIN, J.P., LE BORGNE, P. & SIMAR, A. (2006). Apprentissage de schémas et résolution de problèmes en SEGPA. *Revue Française de Pédagogie,* **159**, 95-109.

MARCOUX, G. (2012). *Tâches scolaires et mobilisation adaptée de procédures : quels paramètres sont influents ?* Thèse de doctorat en Sciences de l'Éducation, Université de Genève, document non publié.

MARCOUX, G. (2014). Résolution de problèmes arithmétiques dans le cadre d'une approche par compétences : ordre des tâches et parts d'influence de quelques facteurs cognitifs et motivationnels. *Les cahiers des Sciences de l'Éducation,* **36***,* 67-114.

MEVARECH, Z. R. & KRAMARSKI B. (2014). Critical maths for innovative societies: the role of metacognitive pedagogies. OECD publishing.

NOVICK, L.R., HURLEY, S.M. & FRANCIS, M. (1999). Evidence for abstract, schematic knowledge of three spatial diagram representations. *Memory & Cognition,* **27(2)***,* 288-308.

ÖZOY G. & ATAMAN A. (2009). The effect of metacognitive strategy training on mathematical problem solving achievement. *International Electronic Journal of Elementary Education,* **1(2)**, 67-82.

PANTZIARA, M., GAGATSIS, A. & ELIA, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics,* **72***,* 39-60.

POLOTSKAIA, E. (2009). *Communication de la structure mathématique du problème par les élèves du primaire. Analyse d'un scénario didactique*. Proceedings of CIEAEM 61, 178-183, University of Palermo, Italy.

POLOTSKAIA, E. & CONSULTANT, P. (2010). Des représentations graphiques dans l'enseignement des mathématiques – Deux jeux pour apprendre. *Bulletin AMQ,* **L(1)**, 12-28.

POLOTSKAIA, E., SAVARD, A. & FREIMAN, V. (2016). Investigating a case of hidden misinterpretations of an additive word problem: structural substitution. *European Journal of Psychology of Education,* **31***,* 135-153.

RILEY, M.S., GREENO, J.G. & HELLER, J.I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.) *The development of mathematical thinking*. New York : Academic Press.

SAVARD, A. & POLOTSKAIA, E. (2014). Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire. *Education & Francophonie,* **XLII(2)**, 138-157.

THEVENOT, C., BARROUILLET, P. & FAYOL, M. (2015). De l'émergence du savoir calculer à la résolution des problèmes arithmétiques verbaux. In M. Crahay & M. Dutrevis (Eds). *Psychologie des apprentissages scolaires* (pp. 169-197). Bruxelles: De Boeck.

UESAKA, Y., MANALO, E. & ICHIKAWA, S. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving? *Learning and Instruction,* **17***,* 322–335.

VAN ESSEN, G. & HAMAKER, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research,* **83(6)***,* 301-312.

VERGNAUD, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operation of thought involved in addition and subtraction problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser & T.A. Romberg (Eds). *Addition and Subtraction. A cognitive perspective*, (pp. 39-59). Hillsdale, N. J. : Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactique des Mathématiques*, **10 (2.3)**, 133-170.

VERGNAUD, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes & P. Bryant (Eds). *Learning and Teaching Mathematics: An International perspective* (pp. 5-28). UK : Psychology Press Ltd.

VERSCHAFFEL, L. (1990*). A review of research on addition and subtraction word problem solving.* Centre of Instructional Psychology and Technology. University of Leuven. Internal Report.

VERSCHAFFEL, L. & DE CORTE, E. (1997). Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school? In T. Nunes & P. Bryant (Eds), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective* (pp. 69-97). UK : Psychology Press Ltd.

VERSCHAFFEL, L. & DE CORTE, E. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace. In M. Crahay, L.

Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Eds). (2e édition). *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* (153-176). Bruxelles : De Boeck.

VERSCHAFFEL, L., GREER, B. & DE CORTE, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, Hollande : Swets & Zeitlinger.

VERSCHAFFEL, L., GREER, B. & DE CORTE, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Reston, VA: NCTM.

WILLIS, G.B. & FUSON, K.C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and substraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, **80(2)**, 192-201.

AMÉLIE AUQUIÈRE
Département des Sciences de l'Éducation, Université de Liège
amelie.auquiere@uliege.be

ISABELLE DEMONTY
Département des Sciences de l'Éducation, Université de Liège
isabelle.demonty@uliege.be

ANNICK FAGNANT
Département des Sciences de l'Éducation, Université de Liège
afagnant@uliege.be