

---

# Blind Inverse Imaging with Positivity Constraints

---

Loïc Lecharlier

Université Libre de Bruxelles  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématique

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences



*Promoteur* : Professeur Christine DE MOL  
*Co-Promoteur* : Professeur Catherine CHARLES

July 2014



# Acknowledgments

This thesis would not have been without the support of many people. I would like to thank first my advisor Professor Christine De Mol from whom I have learned a lot on a mathematical and academical level. I thank her for her advice and her dedication during the six years of my thesis. I also acknowledge financial support during this last year from the “Action de recherche concertée” research contract ARC-AUWB/2010–15/ULB-11. Secondly I want to thank the SIMa department of Gembloux Agro-Bio Tech where I spent the previous years as a teaching assistant, working on my thesis with my second advisor Catherine Charles. I thank her for her advice, her support and her encouragements. From this department, I also thank Professor Jean-Jacques Claustriax who has always shown interest in my thesis.

As concerns the numerical experiments, I am obliged to Professors Marco Prato and Nicolas Gillis who were kind enough to share with me some numerical data (respectively astronomical images and HYDICE hyperspectral cube). I am also thankful to Professors Mario Bertero, Thomas Bruss, Michel Defrise, Laurent Jacques and Ignace Loris, as well as to Federica Porta and Adriana Gonzalez, for helpful discussions and/or constructive remarks on the manuscript.

I am grateful to my parents as well as to my sister Charlotte and her husband for their encouragements of every day. The person, however, to whom I am the most indebted is my beloved wife Leonides. Day after day, believing in me, she is bearing with me and with my nervous nature. I could not have been able to achieve this thesis without her. I will always have a debt to her.

Finally I want to dedicate this thesis to my late brother Mathias I miss every day and to my daughter Isaline who is my sunshine and always puts me in a good mood.

## ACKNOWLEDGMENTS

---

# Résumé

## **Inversion aveugle d'images avec contraintes de positivité**

Dans les problèmes inverses en imagerie, on suppose généralement connu l'opérateur ou matrice décrivant le système de formation de l'image. De façon équivalente pour un système linéaire, on suppose connue sa réponse impulsionnelle. Toutefois, ceci n'est pas une hypothèse réaliste pour de nombreuses applications pratiques pour lesquelles cet opérateur n'est en fait pas connu (ou n'est connu qu'approximativement). On a alors affaire à un problème d'inversion dite "aveugle". Dans le cas de systèmes invariants par translation, on parle de "déconvolution aveugle" car à la fois l'image ou objet de départ et la réponse impulsionnelle doivent être estimées à partir de la seule image observée qui résulte d'une convolution et est affectée d'erreurs de mesure. Ce problème est notoirement difficile et pour pallier les ambiguïtés et les instabilités numériques inhérentes à ce type d'inversions, il faut recourir à des informations ou contraintes supplémentaires, telles que la positivité qui s'est avérée un levier de stabilisation puissant dans les problèmes d'imagerie non aveugle. La thèse propose de nouveaux algorithmes d'inversion aveugle dans un cadre discret ou discrétisé, en supposant que l'image inconnue, la matrice à inverser et les données sont positives. Le problème est formulé comme un problème d'optimisation (non convexe) où le terme d'attache aux données à minimiser, modélisant soit le cas de données de type Poisson (divergence de Kullback-Leibler) ou affectées de bruit gaussien (moindres carrés), est augmenté par des termes de pénalité sur les inconnues du problème. La stratégie d'optimisation consiste en des ajustements alternés de l'image à reconstruire et de la matrice à inverser qui sont de type multiplicatif et résultent de la minimisation de fonctions coût "surrogées" valables dans le cas positif. Le cadre assez général permet d'utiliser plusieurs types de pénalités, y compris sur la variation totale (lissée) de l'image. Une normalisation éventuelle de la réponse impulsionnelle ou de la matrice est également prévue à chaque itération. Des résultats de convergence pour ces algorithmes sont établis dans la thèse, tant en ce qui concerne la décroissance des fonctions coût que la convergence de la suite des itérés vers un point stationnaire. La méthodologie proposée est validée avec succès par des simulations numériques relatives à différentes applications telle que la déconvolution aveugle d'images en astronomie, la factorisation en

## RÉSUMÉ

---

matrices positives pour l'imagerie hyperspectrale et la déconvolution de densités en statistique.

# Contents

<b>Acknowledgments</b>	<b>3</b>
<b>Résumé</b>	<b>5</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>11</b>
1 Linear inverse problems . . . . .	11
2 Restoration from noisy data . . . . .	12
3 The EMMML and ISRA algorithms . . . . .	14
4 Regularization by penalties and constraints . . . . .	16
5 Blind inversion . . . . .	18
6 Overview of the thesis . . . . .	20
7 Recent related literature . . . . .	22
<b>2 Algorithms for Poisson noise</b>	<b>25</b>
1 Formulation of the problem . . . . .	25
2 Derivation of the algorithm . . . . .	26
2.1 Update rule for $X$ (with $H$ fixed) . . . . .	26
2.2 Update rule for $H$ (with $X$ fixed) . . . . .	28
2.3 Alternate update rules for the blind case . . . . .	32
3 Convergence of the algorithm . . . . .	33
3.1 Strict monotonicity of the decrease of the cost function . . . . .	33
3.2 KKT conditions and stationary points . . . . .	34
3.3 Zangwill's theorem . . . . .	37
3.4 Convergence results . . . . .	38
<b>3 Applications with Poisson noise</b>	<b>43</b>
1 Blind deconvolution . . . . .	43
1.1 Restoration from a single image . . . . .	43
1.2 Blind deconvolution for AO astronomy . . . . .	48
1.3 Restoration from multiple images . . . . .	53
2 Hyperspectral imaging . . . . .	55
3 Blind density deconvolution . . . . .	60

## CONTENTS

---

<b>4</b>	<b>Algorithms for Gaussian noise</b>	<b>67</b>
1	Formulation of the problem . . . . .	67
2	Derivation of the algorithm . . . . .	67
2.1	Update rule for $X$ (with $H$ fixed) . . . . .	67
2.2	Update rule for $H$ (with $X$ fixed) . . . . .	70
2.3	Alternate update rules for the blind case . . . . .	74
3	Convergence of the algorithm . . . . .	75
3.1	Strict monotonicity of the decrease of the cost function . . . . .	75
3.2	KKT conditions and stationary points . . . . .	76
3.3	Convergence results . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Applications with Gaussian noise</b>	<b>79</b>
1	Blind deconvolution . . . . .	79
1.1	Restoration from a single image . . . . .	79
1.2	Restoration from multiple images . . . . .	82
2	Hyperspectral Imaging . . . . .	84
	<b>Concluding Remarks</b>	<b>89</b>
	<b>Appendices</b>	<b>91</b>
<b>A</b>	<b>Convergence in the non-blind case</b>	<b>91</b>
<b>B</b>	<b>Implementation of the algorithms</b>	<b>95</b>
1	Circular deconvolution and NMF . . . . .	95
2	Nonnegative blind deconvolution for a single image . . . . .	96
3	Nonnegative blind deconvolution from multiple images . . . . .	98
4	Additional details about implementation . . . . .	102
4.1	Implementation of the convolution products . . . . .	102
4.2	Update rule for $H$ in the Poisson case . . . . .	102
<b>C</b>	<b>The Newton-Raphson Method</b>	<b>105</b>
1	The algorithm and its convergence properties . . . . .	105
2	KL update rule for $H$ with $X$ fixed in the case $\mu = 0$ . . . . .	107
<b>D</b>	<b>Total-Variation Regularization</b>	<b>111</b>
<b>E</b>	<b>Acceleration of the least-squares algorithm</b>	<b>117</b>
1	Minimization on $X$ (with $H$ fixed) . . . . .	117
2	Accelerated algorithm for the blind case . . . . .	120
<b>F</b>	<b>Assumptions on the data matrix</b>	<b>123</b>
1	Nonnegative matrix factorization . . . . .	123
2	Blind deconvolution . . . . .	124



3	Image with background . . . . .	124
4	Blind imaging with a space-variant PSF . . . . .	124
	<b>Bibliography</b>	<b>126</b>