Linéaire

Quelle surprise !

Ce matin, me réveillant de bonne humeur à la vue du grand soleil et du ciel bleu qui emplissent la fenêtre de ma chambre ([1]), je prends la décision de concrétiser, aujourd'hui même, l'idée qui, d'abord assez floue, a peu à peu pris forme dans ma petite tête : vous parler de l'adjectif *linéaire*. Il le mérite bien : je donne tout de même un cours d'algèbre linéaire !

Pas besoin de savantes recherches pour deviner que l'adjectif est dérivé du substantif *ligne* : *linea* en latin. Plus précisément, *linéaire* est le descendant du mot latin *linearis*, adjectif formé sur *linea*. Un dessin *linéaire*, c'est un dessin « au trait » ; en archéologie, sont dénommés *linéaires (A ou B)* certains types d'écritures retrouvés en Crète.

Et la surprise, alors ? Patience, gardons le meilleur pour la fin.

En attendant, vagabondons parmi les divers avatars de l'adjectif, à l'intérieur des mathématiques ou non.

De quelles lignes parlons-nous, d'abord ? Quand j'étais à l'école primaire — et cet enseignement était appuyé par les planches illustrées du *Larousse* —, il y avait les lignes droites, les lignes courbes, les lignes brisées et les lignes mixtes. Ne cherchons pas à trop examiner cette classification, dont la rigueur logique me semble avec le recul bien fragile, et concentrons-nous sur les deux premières ; lorsqu'elles sont devenues plus présentes dans ma pratique des mathématiques, j'ai fait comme tous mes interlocuteurs : je les ai nommées simplement *droites* et *courbes*, omettant le nom *ligne* et substantivant l'adjectif, selon ce que GREVISSE appelait alors la *dérivation impropre* et que GOOSSE, dans les dernières éditions du *Bon Usage*, désigne simplement comme un *changement de catégorie* ([2]).

Mais les courbes n'ont été étudiées que plus tard. Au début, les lignes, c'étaient donc les droites — comme en anglais.

Notons au passage que, pour EUCLIDE, les droites étaient plutôt ce que nous appelons maintenant *segments* :

- DÉFINITION II : Une ligne est une longueur sans largeur.
- DÉFINITION III : Les extrémités d'une ligne sont des points.
- DÉFINITION IV : La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.
- POSTULAT I : Entre deux points on peut toujours tracer une droite.
- POSTULAT II : On peut toujours prolonger indéfiniment une droite tracée entre deux points.

(Il s'agit évidemment d'une traduction ; les détails de la formulation peuvent varier.)

Nous y voilà : pour le mathématicien, *linéaire* signifie donc : relatif à une ligne (droite). C'est au milieu du XIX^e^ siècle, semble-t-il, que sont qualifiées de *linéaires* les fonctions dont le graphe est une ligne (droite), les fonctions du premier degré. De nos jours, ces fonctions sont plutôt dites *affines*, le qualificatif *linéaire* étant réservé aux fonctions *homogènes* du premier degré ([3]), c'est-à-dire les fonctions du premier degré sans terme constant ; leurs graphes sont les droites passant par l'origine du repère.

Ce glissement de terminologie s'est opéré sous la pression de la théorie des espaces vectoriels, dont la définition axiomatique précise est due à PEANO (cf. Vecteur, Espace vectoriel, *Losanges* **36**, p. 71). L'étude des espaces vectoriels (l'aspect *synthétique*) et le calcul matriciel (l'aspect *analytique*) prendront, à partir du milieu du XX^e^ siècle, le nom d'*algèbre linéaire*. Dans ce contexte dépassant largement les fonctions réelles d'une variable réelle, une fonction (ou une *application* — le moment n'est pas venu de discuter si les deux termes sont synonymes) f est linéaire si elle satisfait aux deux règles de calcul

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

pour tous « vecteurs » x et y, et

$$f(kx) = kf(x)$$

pour tout « vecteur » x et tout « scalaire » k. Lorsque nous regardons $\mathbf{R}$ comme espace vectoriel réel, sont linéaires les applications de la forme

$$x \mapsto ax$$

(pour un certain réel a) et elles seules ; la boucle est bouclée.

([1]) En Belgique, ceci pourrait être considéré comme une surprise, mais ce n'est pas de celle-là qu'il s'agira ci-dessous.
([2]) Quel soulagement ! Je dois avouer que cette dénomination *dérivation impropre*, avec ses sous-entendus au moins péjoratifs, m'a toujours traumatisé.
([3]) Ainsi qu'à la fonction nulle, qui n'est pas du premier degré.

Pour le redire encore, de manière plus pratique, plus porteuse de sens pour tout un chacun, une fonction de **R** dans **R** est linéaire si ses valeurs sont proportionnelles à ses arguments. En dimension 1, la *linéarité*, c'est donc la *proportionnalité*.

C'est ce qui est en cause lorsque le gouvernement et l'opposition s'écharpent sur des mesures (favorables ou défavorables au contribuable) dites « linéaires » ou au contraire « non-linéaires ». La T.V.A. est une taxe linéaire, puisque son montant est proportionnel au prix du bien (dans sa catégorie) ; en revanche, l'impôt sur le revenu des personnes physiques ne l'est pas : les taux d'imposition sont différents d'une tranche à l'autre ; l'impôt dû est une fonction affine par morceaux, et non linéaire, du revenu brut (sans entrer dans les détails, mentionnons que cette fonction est cependant continue et croissante : ainsi le revenu net ne risque-t-il pas de diminuer si le revenu brut franchit le seuil d'une nouvelle tranche).

Voilà comment un adjectif, certes usité dans le langage courant, a vu son sens mathématique rejaillir à tort et à travers (4) dans les pages politiques ou économiques de nos quotidiens.

Et la surprise ?

Le lecteur régulier de ces colonnes se souviendra que l'auteur ne s'y contente pas de signaler que *trapèze* dérive du bas latin *trapezium* ni *vecteur* de *vector* ; le premier est donc en droit de réclamer du second que, cette fois encore, il creuse davantage. D'autant que, pour une fois, le discours linguistique a été pollué par quelques considérations mathématiques et même, horreur, par des *formules* ! L'adjectif *linéaire* vient de *linearis*, lui-même dérivé de *linea*. Mais après ? Ou plutôt, mais avant ?

Eh bien, *linea* est le féminin substantivé de l'adjectif *lineus*, qui signifie « de lin », la plante étant désignée par nos ancêtres les Romains(5) par le mot *linum*.

La ligne (droite, bien sûr) est l'idéalisation du fil tendu, et le fil commun, dans l'antiquité, était le fil de lin.

La surprise, la grandiose surprise, c'est que l'algèbre linéaire a des racines textiles, voire botaniques...

P. Dupont

Liège ou Liége

Nos lecteurs Liégeois seront peut-être étonnés de découvrir dans notre *Regard sur le Passé* le nom de la ville de Liège écrit à plusieurs reprises avec un accent aigu : « Liége ». Or, telle était bien l'orthographe officielle de ce nom jusqu'en 1947. Les citations que nous reproduisons dans le texte étant extraites d'un ouvrage datant de 1831, utiliser l'orthographe actuelle aurait constitué un anachronisme !

(4) Moins cependant que l'exponentielle, dont journalistes et politiciens oublient à qui mieux mieux qu'elle peut aussi bien être décroissante que croissante.
(5) Statistiquement, nous avons sans doute tous quelques colons romains dans nos ascendants.