Défense orale TFE

Modélisation multiphysique de l'écoulement des glaciers : analyse et résolution numérique d'un problème couplé non linéaire

Bulthuis Kevin (Ulg)

Promoteur : Arnst Maarten

22 Juin 2015

Sommaire

Motivation

- Point de départ : Lecture d'un article de Keyes *et al* intitulé « *Multiphysics simulations : Challenges and opportunities* ».
- Deux raisons principales pour porter un nouveau regard sur la simulation multiphysique :
  - Intérêt croissant pour la simulation multiphysique afin d'étudier les problèmes scientifiques actuels (interactions fluide-structure, modèles climatiques, réacteur à fusion nucléaire, ...) ;
  - Augmentation des capacités computationnelles qui permet l'utilisation de nouveaux algorithmes de couplage (transition des simulations faiblement couplées vers des simulations fortement couplées).

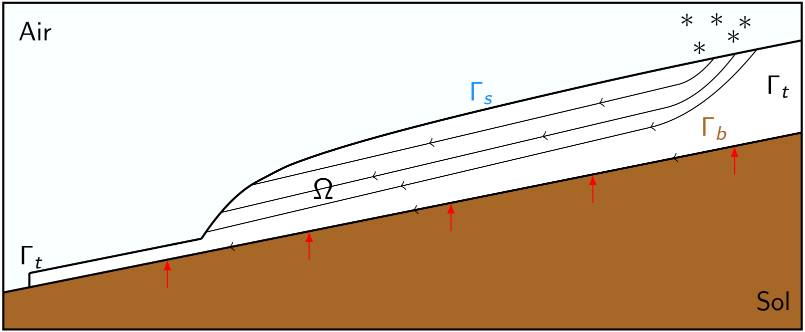
Objectifs

- Établir les fondements physiques, mathématiques et numériques nécessaires à la mise en œuvre de simulations numériques d'un problème multiphysique avec un intérêt scientifique actuel.
- Développer une première analyse des méthodes numériques multiphysiques (avantages, désavantages et opportunités).
- Réaliser une base de travail pour de futures contributions aux nouvelles méthodes multiphysiques.

Méthodologie du TFE

- Étude de l'écoulement des glaciers :
  - En lien avec la problématique du réchauffement climatique (intérêt global) ;
  - Problème multiphysique (couplage thermomécanique) ;
  - Résolution numérique d'un problème physique non linéaire.
- Méthodologie de travail en 3 étapes :
  1. Modélisation physique des glaciers ;
  2. Analyse des problèmes monophysiques ;
  3. Méthodes de résolution numérique pour le problème couplé.

Glacier modèle



Modèle mécanique

- Équations en volume :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu(\mathbf{v},p,T)\dot{\varepsilon}) + \nabla p = \rho \mathbf{g}, \\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

- Conditions aux limites :

$$\begin{cases} \sigma\cdot\mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur}\,\Gamma_s, \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} & \text{sur}\,\Gamma_t, \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = a_b(T) & \text{sur}\,\Gamma_b, \\ \mathbf{t}_b = -C_b(T)\,\mathbf{v}_b & \text{sur}\,\Gamma_b. \end{cases}$$

- Difficultés :
  - Existence et unicité de la solution ;
  - Non-linéarités à cause de la viscosité ;
  - Couplage avec la température (a_b, C_b, μ).

Modèle thermique

- Équation en volume :

$$-\mathrm{div}\left(k(T)\nabla T\right) + \rho c(T)\,\mathbf{v}\cdot\nabla T = 2\mu(\mathbf{v},p,T)\,\mathrm{Tr}\,\dot{\varepsilon}^2.$$

- Conditions aux limites :

$$\begin{cases} T = T_s & \text{sur}\,\Gamma_s, \\ \nabla T\cdot\mathbf{n} = 0 & \text{sur}\,\Gamma_t, \\ k(T)\nabla T\cdot\mathbf{n} = q_{\text{geo}} - \mathbf{t}_b\cdot\mathbf{v}_b - \begin{cases} \rho L a_b & \text{si } T = T_m(p) \\ 0 & \text{si } T < T_m(p) \end{cases} & \text{sur}\,\Gamma_b. \end{cases}$$

- Difficultés :
  - Influence du transport convectif pour la résolution numérique ;
  - Contrainte thermique ;
  - Non-linéarités comportementales (k, c, μ) et de contact ;
  - Couplage avec la vitesse $(\mathbf{v}\cdot\nabla T, \mathrm{Tr}\,\dot{\varepsilon}^2, \mu, \mathbf{t}_b\cdot\mathbf{v}_b)$.

Implémentation du modèle mécanique

- L'unicité de la solution est déterminée par la condition de Babuska-Brezzi.

Condition de Babuska-Brezzi

$$\inf_{\substack{q_h \in Q_h \\ q_h \neq 0}} \sup_{\substack{\mathbf{w}_h \in V_h \\ \mathbf{w}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{b(\mathbf{w}_h, q_h)}{\|q_h\|_{Q_h} \|\mathbf{w}_h\|_{V_h}} \geqslant \beta_h > 0.$$

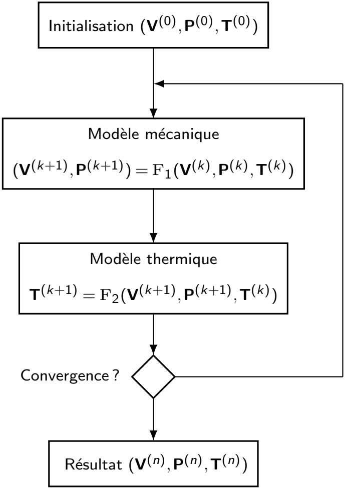
- Résoudre numériquement le problème de Stokes :
  - Éléments finis compatibles ;
  - Éléments finis à divergence nulle ;
  - Méthodes de stabilisation.

Implémentation du modèle thermique

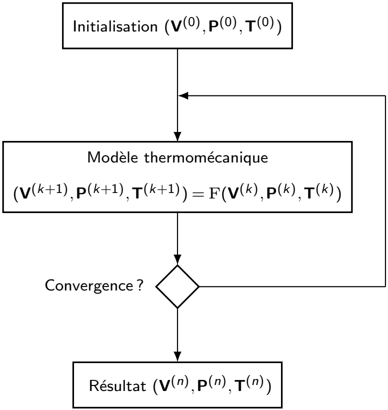
- Résolution numérique de l'équation d'advection-diffusion :
  - Insuffisance de la méthode classique de Galerkin (dissymétrie du terme convectif) ;
  - Méthode de Petrov-Galerkin ;
  - Méthodes de stabilisation (SUPG,GLS).
- Prise en compte de la contrainte thermique :
  - Inégalité variationnelle ;
  - Méthodes de pénalisation ;
  - Méthodes duales.

Couplage des modèles mécanique et thermique

Méthodes faiblement couplées



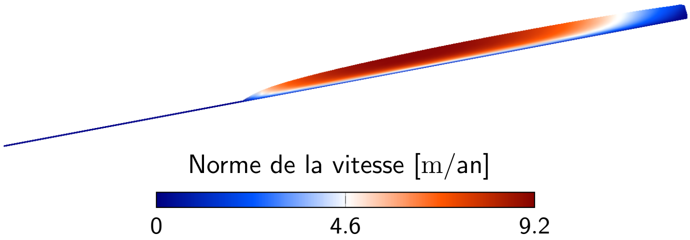
Méthodes fortement couplées

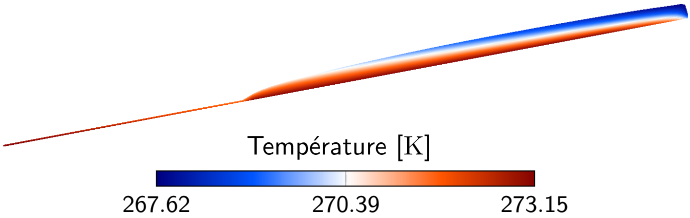


Résolution numérique des non-linéarités du problème

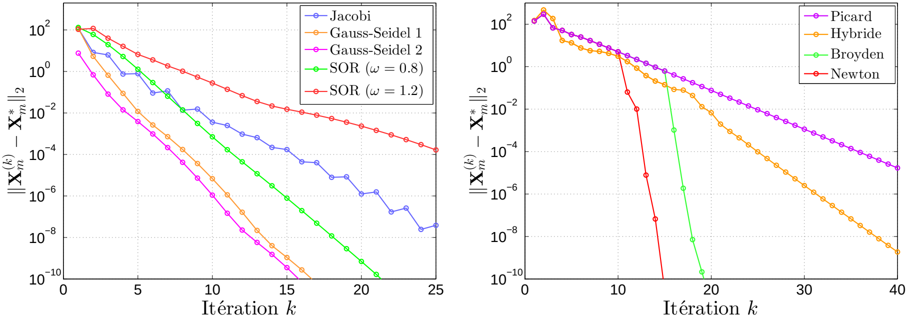
- Les non-linéarités du problème peuvent être résolues à l'aide des méthodes classiques de résolution des systèmes non linéaires :
  - Méthode de Picard ;
  - Méthode de Newton ;
  - Méthode hybride (méthode de Picard + méthode de Newton) ;
  - Méthode de Broyden.
- Les non-linéarités peuvent être résolues localement (approche faiblement couplée) ou globalement (approche fortement couplée). Une résolution globale des non-linéarités permettra de travailler avec les blocs extra-diagonaux de la matrice jacobienne qui représentent le couplage entre les modèles monophysiques.

Simulations numériques





Comparaison des méthodes de résolution



Méthodes faiblement couplées.

Méthodes fortement couplées.

Figure: Erreur absolue pour le problème mécanique.

Conclusion

- Travail multidisciplinaire :
  - Modélisation physique ;
  - Analyse fonctionnelle ;
  - Optimisation ;
  - Analyse numérique (non-linéarités, couplages multiphysiques).
- Élargissements à des domaines différents de la glaciologie :
  - Méthodologie générale en trois étapes ;
  - Problème de Stokes pour d'autres écoulements visqueux.
- Approfondissements :
  - Étude des nouvelles méthodes fortement couplées ;
  - Approche duale pour le problème thermique ;
  - Étude des glaciers en régime instationnaire.