Aphorismes mathématiques de J. Ellenberg

Jordan Stuart Ellenberg est né en 1971 de parents tous deux statisticiens. C'était un enfant surdoué en mathématiques qui gagna notamment plusieurs médailles (deux d'or aux âges de 16 et de 18 ans et une d'argent à 17 ans) aux olympiades mathématiques internationales, avec de plus, en 1989, un score parfait venant après une première place à l'épreuve nationale américaine. Comme il l'écrit lui-même, il faisait partie, durant sa jeunesse, d'un « groupe de jeunes stars [qui] a produit d'excellents mathématiciens [contemporains], comme Terry Tao qui a reçu la médaille Fields pour son travail en analyse harmonique » ([2], p. 469) ; pour des informations sur tao, voir par exemple dans [1].

J. S. Ellenberg a présenté en 1998 une thèse de doctorat sous la direction de B. Mazur à la *Harvard University* (Cambridge, MA) sur le thème « Hilbert modular forms and the Galois representations associated to Hilbert-Blumenthal abelian varieties ». Il est, depuis 2015, professeur à l'*University of Wisconsin-Madison* et ses recherches mathématiques portent principalement sur la géométrie arithmético-algébrique.

Ce brillant mathématicien n'hésite pas à s'investir dans la vulgarisation mathématique, écrivant régulièrement des chroniques dans de grands journaux américains (*New York Times*, *Wall Street Journal*, *Washington Post*). De plus amples renseignements sur sa carrière peuvent être trouvés sur son site professionnel, à l'adresse électronique suivante : http ://www.math.wisc.edu/ ellenber/.

J. S. Ellenberg s'est attelé, pendant huit ans, à rédiger un livre, intitulé en anglais *How not to be wrong*, car il « voulait expliquer aux gens, en détail, combien les maths sont fantastiques » ([2], p. 495), et, vraisemblablement en corollaire, à quoi elles servent.

Ce livre est désormais traduit en français. Il comprend plus de cinq cents pages et se décompose en cinq parties consacrées respectivement à la linéarité, l'inférence (statistique), l'espérance (mathématique), la régression (vers la moyenne) et l'existence (relative au choix collectif).

Tout au long de son ouvrage, l'auteur énonce des pensées, qui nous semblent profondes et pertinentes, à propos des mathématiques, de leur enseignement et de leur heuristique (c'est-à-dire la façon de les trouver). Il les explique et les illustre de façon simple et claire, en se référant à de nombreuses applications réelles et bien choisies, sans faire appel à un formalisme mathématique avancé.

Voici une sélection (forcément subjective) de trente-trois extraits que nous qualifions d'aphorismes mathématiques. Ils sont livrés en vrac, dans l'ordre de leur présentation dans [2]. Nous espérons qu'ils susciteront ceraines réflexions et inciteront à la lecture du livre en entier.

Jacques Bair

1. « Les mathématiques sont la science qui permet d'analyser les choses correctement, grâce à des techniques et des procédures forgées par des siècles de dur labeur et de disputes acharnées. Armé de l'outil des mathématiques, vous accédez à une compréhension du monde plus profonde, plus solide, et davantage chargée de sens. » (pp. 8-9)
2. « Les mathématiques, c'est du bon sens. Au niveau le plus simple, elles sont de l'ordre de l'évidence. » (p. 18)
3. « Les mathématiques sont l'étude de choses qui sont d'une certaine façon parce qu'il n'y a absolument aucun moyen qu'elles soient autrement. » (p. 19)
4. « Le langage spécialisé dans lequel conversent les mathématiques est un magnifique outil pour partager des idées complexes avec rapidité et précision. Mais son étrangeté peut créer chez les profanes l'impression d'une sphère de pensée totalement étrangère à la pensée ordinaire. C'est rigoureusement faux.

   Les mathématiques sont une sorte de prothèse que vous attachez à votre bon sens, multipliant ainsi de façon considérable sa force et sa portée. [. . .]

   Pour paraphraser Clausewitz : les mathématiques ne sont que la continuation du bon sens par d'autres moyens. » (p. 20)

5. « Il est assez difficile de comprendre les mathématiques sans faire soi-même des mathématiques. » (p. 25)
6. « Nous avons certainement une intuition innée pour penser les choses incertaines, mais elle est beaucoup plus difficile à articuler. Ce n'est pas pour rien que la théorie mathématique des probabilités est arrivée si tard dans l'histoire des mathématiques, et si tard dans leur enseignement - quand elle y est arrivée. » (p. 132)
7. « Un résultat statistiquement significatif vous donne un indice, suggérant un sujet prometteur sur lequel concentrer votre énergie. *Le test de signification est le détective, pas le juge.* » (p. 189)
8. « En 1956, vers la fin de sa vie, il [Fisher] écrivait : " En réalité, aucun chercheur scientifique n'a un niveau fixé de signification au-deçà duquel d'une année sur l'autre, et dans toutes les circonstances, il rejette les hypothèses ; il applique plutôt sa réflexion à chaque cas particulier à la lumière de ses preuves et de ses idées". » (p. 191)
9. « La probabilité a posteriori dépend du résultat que vous obtenez, mais aussi de votre a priori. » (p. 211)
10. « Elle [la formule de Bayes] nous offre une règle, que nous pouvons choisir de suivre ou non, pour mettre à jour nos croyances à la lumière de nouvelles observations. Sous cette forme nouvelle, elle est naturellement l'objet de féroces disputes. Il existe des bayésiens acharnés que pensent que *toutes* nos croyances doivent être modelées par de stricts calculs bayésiens, aussi stricts du moins que notre savoir limité nous le permet ; d'autres voient plutôt dans la règle de Bayes une recommandation qualitative non contraignante. » (p. 214)
11. « Sur cette question [la foi], les mathématiques n'ont rien à dire. » (p. 225)
12. « Les mathématiques sont pleines d'idées qui semblent évidentes aujourd'hui - additionner et soustraire des quantités négatives, représenter des points sur un plan par des couples de nombres, décrire et manipuler mathématiquement les probabilités d'événements incertains - mais que ne sont en fait nullement évidentes, nullement triviales, comme disent les mathématiciens. Si elles l'étaient, elles ne seraient pas apparues si tard dans l'histoire de la pensée humaine. » (p. 235)
13. « Quand vous êtes confronté à un problème mathématique que vous ne savez pas résoudre, vous avez deux options : rendre le problème plus facile, ou le rendre plus difficile.

    Rendre le problème plus facile semble la meilleure solution. [. . .] Parfois cette approche marche très bien. [...] Mais il arrive aussi qu'un excès de simplification élimine les caractéristiques intéressantes du problème, comme dans le vieille blague sur le physicien chargé d'optimiser la production laitière qui attaque plein d'entrain sa démonstration en ces termes : "Considérons une vache sphérique . . . " [. . .]

    Nous nous tournons alors vers l'autre stratégie [. . .] ; *rendre le problème plus difficile.* Elle a l'air assez peu prometteuse - mais quand elle marche, elle marche du tonerre. » (pp. 254-255)
14. « Dans la vie réelle, les mathématiciens sont des gens passablement ordinaires, pas plus fous que la moyenne, et il est assez rare qu'ils aillent s'enfermer dans les montagnes pour résoudre en solitaire des problèmes totalement hermétiques. Les mathématiques tendent à renforcer l'esprit plutôt qu'à le pousser à son point de rupture. J'ai trouvé au contraire que dans les moments d'émotion extrême, rien ne vaut un problème de mathématiques pour apaiser les plaintes de notre psyché. Les mathématiques, comme la méditation, vous mettent en contact direct avec l'univers, qui est plus grand que vous, qui était là avant vous et sera là après vous. Ce qui pourrait me rendre fou serait de *ne pas* en faire. » (pp. 261-262)
15. « Notre slogan se vérifie une fois encore : les mathématiques sont la continuation du bon sens par d'autres moyens. » (p. 288)
16. « En mathématiques, nous aimons les règles, et nous n'aimons pas les exceptions. » (p. 308)
17. « L'élégance mathématique et l'utilité pratique sont de proches compagnons, comme ne cesse de le démontrer l'histoire des sciences. Parfois, les physiciens découvrent une théorie en laissant aux

mathématiciens le soin de découvrir pourquoi elle est élégante, et d'autres fois les mathématiciens développent une théorie élégante en laissant aux physiciens le soin de découvrir à quoi elle sert. ≫ (p. 308)

18. Ce formalisme mathématique ne saisit pas tous les détails des phénomènes qu'il décrit, et il n'est pas conçu pour ça. Il y a par exemple des questions sur l'aléatoire que la théorie des probabilités n'aborde pas. Certains estiment que les questions qui restent hors de portée des maths sont les plus intéressantes. Mais réfléchir sur le hasard de nos jours *sans* avoir une théorie des probabilités quelque part à l'esprit est une erreur. [. . .]

    Y aura-t-il un jour une théorie mathématique de la conscience ? Ou de la société ? Ou de l'esthétique ? Des gens s'y efforcent, c'est certain, avec un succès limité pour l'instant. Vous devriez écarter d'instinct ce genre de prétentions. Mais vous devez aussi garder à l'esprit qu'elles peuvent aboutir un jour à des résultats importants. ≫ (p. 314)
19. ≪ Darwin était convaincu que les méthodes mathématiques offraient aux scientifiques une vision enrichie du monde, même si son propre travail était loin d'avoir cet aspect quantitatif. Il écrivit dans ses mémoires, à propos de son éducation : " J'ai tâté des mathématiques, et j'ai même reçu durant l'été 1828 les leçons d'un tuteur privé (un homme très ennuyeux), mais j'avançais très lentement. Le travail me répugnait, surtout du fait de mon incapacité à trouver un sens quelconque à l'algèbre élémentaire. Cette impatience était très stupide, et j'ai profondément regretté depuis de n'avoir pas suffisamment avancé pour comprendre au moins quelque chose aux grands principes des mathématiques, car les hommes qui en sont capables semblent disposer d'un sens supplémentaire." ≫ (pp. 344-345)
20. ≪ Galton a montré que la régression vers la moyenne est à l'œuvre chaque fois que le phénomène étudié est influence par le jeu des forces du hasard. Mais quelle est la puissance de ces forces [. . .] ? ≫ (p. 355)
21. ≪ Les mathématiques sont un moyen de ne pas dire n'importe quoi, mais elles ne sont pas un moyen d'avoir raison sur *tout*. ≫ (p. 380)
22. ≪ L'avantage de l'algèbre est qu'elle est plus facile à formaliser et à entrer dans un ordinateur. L'avantage de la géométrie est qu'elle permet de faire jouer notre intuition physique, en particulier quand on trace un graphique. Il est rare que je comprenne *réellement* un problème mathématique avant de le voir traduit en langage géométrique. ≫ (p. 381)
23. ≪ Un outil mathématique, comme tout instrument scientifique, détecte certains types de phénomènes mais pas d'autres. [. . .] Quand on vous dit que deux phénomènes dans la nature ou dans la société n'ont montré aucune corrélation, cela ne veut pas dire qu'ils n'ont aucun rapport, seulement qu'ils n'ont pas un rapport du type que la corrélation est conçue pour détecter. ≫ (p. 392)
24. ≪ C'est une histoire récurrente en mathématiques : nous développons une méthode, et si c'est une *bonne* méthode, qui contient réellement une idée nouvelle, nous découvrons régulièrement que la même démonstration fonctionne dans des contextes très divers, qui peuvent être aussi différents qu'une sphère l'est d'un plan, voire davantage. ≫ (p. 452)
25. ≪ Selon la célèbre formulation de Philip Davis et Reuben Hersh : " Le mathématicien typique est platonicien pendant la semaine et formaliste le dimanche." ≫ (p. 466)
26. ≪ L'un des aspects les plus douloureux de l'enseignement des mathématiques, c'est de voir des étudiants abîmés par le culte du génie. Ce culte dit aux étudiants que ce n'est pas la peine de faire des maths si vous n'êtes pas le *meilleur* en maths, parce que les quelques élus sont les seuls dont la contribution a une importance. [. . .]

    Nous perdons ainsi beaucoup de mathématiciens. Mais ce n'est pas le seul problème. Je crois qu'il faut aussi plus d'étudiants en mathématiques qui ne deviendront pas des mathématiciens. Plus de médecins, plus de professeurs, plus de chefs d'entreprises, plus de sénateurs qui connaissent les mathématqiues. ≫ (p. 467)
27. ≪ La capacité à travailler dur - à garder son attention et son énergie concentrées sur un problème, en le retournant en tous sens pour trouver quelque chose qui ressemble à une faille, en dépit de l'absence

de tout signe de progrès - n'est pas une compétence donnée à tout le monde. Les psychologues, de nos jours, l'appellent "endurance " et il est impossible de faire des maths sans cela. On tend à perdre de vue l'importance du travail, parce que l'inspiration mathématique, quand elle vient finalement, peut sembler immédiate et ne pas avoir demandé d'effort. ≫ (pp. 467-468)

28. ≪ Terry Tao a écrit : " L'image populaire du génie solitaire (et peut-être légèrement cinglé) qui ignore la littérature scientifique et le savoir conventionnel et parvient par une inspiration exceptionnelle (nourrie par une bonne lampée de souffrances) à trouver une solution d'une originalité stupéfiante à un problème qui a confondu tous les experts est une image romantique et charmante, mais aussi tout à fait fausse, du moins dans le monde des mathématiques modernes. [. . .] En fait, je trouve la réalité de la recherche mathématique aujourd'hui - où le progrès est obtenu naturellement et de façon cumulative comme le produit d'un dur travail, orienté par l'intuition, la littérature et un peu de chance - bien plus satisfaisante que l'image romantique." ≫ (p. 470)
29. ≪ Les gens ont tendance à voir les mathématiques comme le domaine de la certitude et de la vérité. À certains égards, c'est vrai. [. . .] Mais les maths sont aussi un moyen de raisonner sur l'incertain, en lui donnant un cadre à défaut de le domestiquer complètement. [. . .] Les maths nous permettent d'être incertains d'une manière fondée : non pas en disant simplement "j'en sais rien", mais en affirmant fermement : "Je n'en suis pas sûr, voici poursquoi je n'en suis pas sûr, et voici en gros jusqu'à quel point je n'en suis pas sûr". ≫ (p. 481)
30. ≪ Les mathématiciens peuvent être tatillons sur les subtilités logiques. Nous sommes de ces gens qui trouvent amusant, quand on leur demande : "Vous voulez de la soupe ou de la salade avec ça ? " de répondre : "Oui". ≫ (p. 488)
31. ≪ On peut apprendre de l'échec. Vous essayez de réfuter la proposition d'une certaine façon, et vous vous heurtez à un mur. Vous essayez autrement, et vous trouvez un autre mur. [. . .] Si vous avez de la chance, tous ces murs vont commencer à former une structure, et la structure est la démonstration du théorème. Car si vous avez réellement compris *ce qui vous empêche* de réfuter le théorème, vous avez des chances de comprendre, d'une façon qui vous était jusque-là inaccessible, pourquoi le théorème est vrai. ≫ (pp. 490-491)
32. ≪ Il [Beckett] résume la valeur de l'échec dans la cration mathématique de façon plus succincte qu'aucun professeur ne saurait le faire : "Essayer encore. Rater encore. Rater mieux". ≫ (p. 493)
33. ≪ Les leçons des mathématiques sont simples, et elles ne contiennent pas de chiffres : elles disent que le monde possède une structure ; que nous pouvons espérer en comprendre une partie et pas seulement rester stupéfaits devant ce que nos sens nous présentent ; que notre intuition est plus forte avec un exosquelette formel que sans lui. Et que la certitude mathématique est une chose, les convictions que nous chérissons dans notre vie quotidienne en sont une autre, et que nous devons nous efforcer de garder à l'esprit cette différence. ≫ (p. 494)

Références

[1] Bair J., Pensées (mathématiques) de Tao, *Losanges*, 23, 2013, pp. 33-41.

[2] Ellenberg J., *L'art de ne pas dire n'imprte quoi - Ce que le bon sens doit aux mathématiques*, traduit de l'anglais par F. Bouillot. Cassini, Paris, 2017, 534 pages