

UNIVERSITÉ DE LIÈGE

Faculté des Sciences Appliquées

---

**F. CAMPUS**

Professeur à l'Université de Liège

---

**ELEMENTS DU  
BETON PRECONTRAIN**

---

**1960**

---

SOCIETE COOPERATIVE DE L'A. E. E. S.

9, rue Sœurs-de-Hasque, Liège

A. INTRODUCTION

Le béton est un matériau possédant une résistance appréciée à la compression, bien que variable dans des limites très étendues selon la composition et cela en vue d'usages divers, allant des bétons les plus légers aux bétons les plus compacts.

En tous cas, la sollicitation privilégiée des bétons est la compression et leur résistance propre à la traction n'est qu'une fraction assez faible de la résistance à la compression. Elle varie d'ailleurs en fonction de diverses conditions, notamment de l'âge, du mode de conservation et du degré d'humidité du béton, qui influent sur le retrait. Les tensions de retrait réduisent la résistance à l'extension du béton (cfr. notes du cours de procédés généraux de construction de première épreuve sur les bétons de ciment).

La résistance à la traction semble aussi influencée par le mode de sollicitation; elle est plus grande en flexion qu'en traction simple et la présence d'armatures l'influence aussi, en apparence du moins.

Une première technique s'est développée depuis un peu plus d'un siècle pour parer à l'insuffisance de résistance du béton à la traction, surtout en flexion, c'est celle du béton armé. Elle a pris une importance dominante dans la construction moderne. Cependant, elle est en elle-même imparfaite. La meilleure preuve en réside dans l'état de résistance ultime, auquel correspond le mode de calcul du béton armé. Le béton ne résiste que là où il est comprimé; il est fissuré et disloqué là où il est tendu et, dans ces régions, c'est l'acier des armatures qui résiste à l'extension. C'est, en un certain sens, l'association de l'aveugle et du paralytique. C'est à tout le moins une association bâtarde et qui entraîne des inconvénients non dénués d'importance, notamment les fissures dues aux moments fléchissants, aux efforts tranchants et aux forces de traction. Le seul élément de liaison propre à les éviter est l'adhérence, qui met en jeu des tensions ayant la nature des tensions tangentielles et dont la limite est donc du même ordre de grandeur que la résistance à la traction.

En fait, les constructions en béton armé présentent souvent des fissures, ce qui constitue toujours une amorce de dé-

gradation, d'importance toutefois très variable selon les circonstances. Elle est grave pour les constructions soumises à l'action d'agents agressifs, atmosphériques ou hydrauliques, et d'autant plus que la sollicitation est plus dynamique ou plus variable.

Le moyen le meilleur de conférer au béton une résistance appropriée à l'extension consiste à recourir à la mise en compression préalable du béton. On a donné à cette opération le nom générique de précontrainte. Elle n'est pas exclusive au béton. L'emploi de tirants mis sous tension, de frettes tendues et d'autres dispositifs analogues est très ancien. La précontrainte n'est qu'une application particulière du "réglage des efforts", (1) dont le principe consiste à introduire dans une construction des efforts préalables susceptibles d'améliorer sa résistance aux efforts qu'elle est destinée à subir en service. En général, ces efforts doivent produire dans la construction des tensions préalables de sens inverse à celles qui doivent résulter des sollicitations de service. Le réglage des efforts peut non seulement améliorer la résistance aux actions mécaniques, mais aussi la résistance aux actions destructrices quelconques. La mise en compression préalable du béton par exemple augmente sa durabilité (dans certaines limites).

Les premiers brevets relatifs au béton précontraint remontent à près de septante-cinq ans. Il n'y a cependant guère plus de vingt-cinq ans que le béton précontraint a pris un réel essor, qui s'est amplifié considérablement depuis une dizaine d'années. Les facteurs techniques qui ont favorisé ce développement ont été :

1. la possibilité économique de réaliser par vibration des bétons compacts, à haute résistance et faible déformabilité;
2. l'emploi d'armatures à très haute résistance, principalement sous forme de fils tréfilés.

Une circonstance économique y a contribué, qui a favorisé le développement du béton précontraint dans les pays dévastés par la dernière guerre mondiale : le volume important des travaux de reconstruction, qui a permis l'amortissement rapide du matériel de mise en précontrainte et une grande économie d'acier à une époque de pénurie d'acier. La résistance spécifique de l'acier (par unité de volume ou de poids) est considérablement augmentée par le tréfilage.

---

(1) Cfr. F. CAMPUS. Le réglage des efforts dans la construction (Congrès du Centenaire de l'A.I.Lg. 1947. Section Génie Civil).  
F. CAMPUS. Réglage des efforts dans les constructions métalliques (Cours de perfectionnement sur les constructions métalliques, A.I.Lg. 1957).

## B. CAS DE LA TRACTION SIMPLE

Puisque la précontrainte a pour objet de conférer au béton une résistance à l'extension, il est théoriquement intéressant d'étudier la traction simple. Ce cas est d'ailleurs susceptible de nombreuses applications pratiques.

### 1. Résistance à la traction simple du béton

$$\sigma_b = \frac{N_c}{\omega_b} \ll R_b \qquad N_o \ll \omega_b R_b .$$

### 2. Résistance à la traction simple du béton armé

Il faut supposer que l'armature est répartie d'une manière homogène dans la section du béton, c'est-à-dire que le centre de gravité de la section d'acier et ses axes principaux d'inertie coïncident avec ceux de la section de béton. Il faut supposer en outre que les deux faces terminales de la barre prismatique restent planes. Dès lors, on doit admettre que toutes les sections restent planes.

$$N_c = \omega_b \sigma_b + \omega_a \sigma_a \qquad \sigma_b \ll R_b$$

$$N_c \ll \omega_b R_b \left(1 + \frac{\omega_a \sigma_a}{\omega_b R_b}\right) = \omega_b R_b \left(1 + m \frac{\omega_a}{\omega_b}\right) = N_a$$

$$m = \frac{\sigma_a}{R_b} .$$

Si l'on admet la loi de Hooke pour les matériaux

$$m = \frac{E_a}{E_b} .$$

Mais ceci augmente assez peu  $N_c$  par rapport à  $N_o$  et surtout pas économiquement.

On ne s'arrête d'ailleurs pas à cette limite, mais bien à  $N_c \ll \omega_a R_a$ , qui n'est pas comparable à  $N_o$ .

### 3. Résistance à la traction simple du béton précontraint

On admet les mêmes hypothèses qu'en 2) au sujet de la répartition des armatures de précontrainte et de la déformation des sections terminales de la barre prismatique. De plus,

on suppose que toutes les armatures de précontrainte subissent la même traction initiale

$$n_a = \frac{P}{\omega_a}$$

et que l'effort de précontrainte total  $P$  est uniformément réparti sur les deux faces terminales du prisme. Le béton subit alors partout une précontrainte initiale

$$n'_b = \frac{P}{\omega_b} = p_b$$

sous l'effet d'un effort normal de traction  $N$ , la pièce s'allonge de

$$\delta \ell = \ell \left( \frac{n'_b - \delta p_b}{E_b} \right) = \frac{\ell}{E_b} \left( \frac{N}{\omega_b} - \delta p_b \right)$$

$\delta p_b$  est l'augmentation de précontrainte résultant de l'allongement unitaire  $\delta \ell / \ell$  des armatures

$$\delta P = E_a \omega_a \frac{\delta \ell}{\ell} = \frac{E_a}{E_b} \left( \frac{N}{\omega_b} - \delta p_b \right) \omega_a$$

$$\delta p_b = \frac{\delta P}{\omega_b} \quad \sigma'_b = p_b + \delta p_b - \frac{N}{\omega_b} = p_b + \delta p_b - \sigma_b$$

$$\delta P = \frac{E_a \omega_a}{E_b \omega_b} N - \frac{E_a \omega_a}{E_b \omega_b} \delta P \quad \delta P = \frac{E_a \omega_a}{E_b \omega_b + E_a \omega_a} N$$

$$\delta P = \frac{\frac{m \omega_a}{\omega_b}}{1 + \frac{m \omega_a}{\omega_b}} N$$

Si l'on suppose que le béton n'ait pas de résistance propre à l'extension, par exemple parce que la barre prismatique est formée de tronçons indépendants serrés les uns contre les autres par la précontrainte, la limite  $N_1$ , de résistance de la barre sans fissuration sera

$$N_1 = P + \delta P = P + N_1 \frac{\frac{m \omega_a}{\omega_b}}{1 + \frac{m \omega_a}{\omega_b}}$$

d'où

$$N_1 = P \left( 1 + \frac{m \omega_a}{\omega_b} \right)$$

Si le béton a une résistance propre à l'extension de valeur

absolue  $R_b$ , la résistance de la barre sans fissuration  $N_2$  sera telle que

$$\sigma'_b = \sigma_b - p_b - \delta p_b \leq R_b$$

$$\sigma_b \leq p_b + \delta p_b + R_b$$

$$N_2 \leq \omega_b \sigma'_b = \omega_b p_b + \omega_b R_b + \omega_b \delta p_b = P + \omega_b R_b + \delta P$$

$$N_2 \leq P + \omega_b R_b + N_2 \frac{\frac{m \omega_a}{\omega_b}}{1 + \frac{m \omega_a}{\omega_b}}, \quad N_2 \leq (P + \omega_b R_b) \left(1 + \frac{m \omega_a}{\omega_b}\right)$$

Ceci implique que

$$\frac{N_1}{\omega_a} \quad \text{ou} \quad \frac{N_2}{\omega_a}$$

soit inférieur à la limite de proportionnalité de l'acier. Si après avoir atteint la limite de fissuration  $N_1$  ou  $N_2$ , on décharge la pièce, les fissures se referment et la pièce revient à son état antérieur, pourvu que la limite de proportionnalité de l'acier n'ait pas été dépassée. Si le béton a une résistance propre à l'extension, la première fissuration a lieu sous la charge  $N_2$ ; après décharge les fissurations ultérieures réapparaîtront sous la charge  $N_1$ .

Donc, le béton précontraint est élastique à la fissuration tant que la limite élastique vraie de l'acier n'est pas atteinte.

Lorsque le béton est fissuré, les armatures seules supportent l'effort de traction  $N_1$  comme dans le béton armé fissuré.

$$N < (\omega_a R_a - P)$$

La charge de rupture est

$$N_a^t = (\omega_a R_a - P)$$

$$\sigma'_b = p_b + \delta p_b - \frac{N}{\omega_b} = p_b - \frac{N}{\omega_b} \frac{1}{1 + \frac{m \omega_a}{\omega_b}}$$

La compression est maximum lorsque  $N = 0$ .

Donc

$$(\sigma'_b)_0 = p_b \leq R'_b \quad P \leq \omega_b R'_b$$

d'où

$$N_1 \ll \omega_b R'_b \left(1 + \frac{m\omega_a}{\omega_b}\right) < (\omega_a \sigma_{a_e} - P)$$

$$N_2 \ll \omega_b (R'_b + R_b) \left(1 + \frac{m\omega_a}{\omega_b}\right) < (\omega_a \sigma_{a_e} - P) .$$

Ces deux valeurs sont beaucoup plus considérables que  $N_o$  (béton non armé) et  $N_a$  (béton armé). En employant du fil d'acier à haute résistance et haute limite élastique, comme celle-ci peut atteindre et dépasser  $0,80 R_a$ , on peut rapprocher assez bien la limite de fissuration de la charge de rupture. Cependant, il faut tenir compte de la dispersion des facteurs  $R'_b$  et  $R_b$  et ne pas leur donner des valeurs excessives.

On peut au moyen d'armatures fortement tendues comprimer fortement des prismes de béton de grande longueur et très élanés, sans danger de flambage à la première charge critique, pourvu que les armatures soient enrobées dans le béton et obligées de suivre ses déformations transversales et sa courbure éventuelle. En effet, par suite de cette liaison, l'effort de compression reste toujours centré. La charge critique d'instabilité de flexion est plus élevée que celle d'instabilité de torsion; elle ne sera donc pas atteinte.

Ce qui précède concerne à vrai dire du béton précontraint après durcissement (postcontrainte). Les armatures de précontrainte traversent les gaines réservées dans la pièce en béton (ou lui sont extérieures en traversant le creux central d'une pièce en caisson). Les armatures sont ensuite mises sous tension par des vérins et calées par des ancrages dans des plateaux rigides en métal ou en béton qui reportent les efforts sur la pièce en béton. Sous réserve de glissements dans les ancrages, on admet que l'on détermine exactement par la mise en tension des fils la valeur de la précontrainte.

La précontrainte proprement dite consiste à tendre les fils dans le moule rigide avant le bétonnage et à libérer les extrémités des fils (en les coupant au chalumeau) lorsque le béton a suffisamment durci. Le béton, mis en compression se raccourcit et les fils aussi; la précontrainte est donc inférieure à ce qui correspond à la tension initiale des fils. Si on admet que la tension est uniforme sur toute la longueur, on a  $P_o = \omega_a (n_a)_o$ . Après libération des fils

$$P_i = \omega_a n_{ai} = \omega_b n'_{bi} ; \quad \frac{(n_a)_o - n_{ai}}{E_a} = \frac{n'_{bi}}{E_b}$$

$$(n_a)_o - n_{ai} = \frac{E_a}{E_b} n'_{bi} = m \frac{\omega_a}{\omega_b} n_{ai} \quad \text{d'où} \quad n_{ai} = \frac{(n_a)_o}{1 + \frac{m\omega_a}{\omega_b}}$$

et

$$n'_{bf} = \frac{\omega_a}{\omega_b} n_{af} = \frac{(n_a)_o \frac{\omega_a}{\omega_b}}{1 + m \frac{\omega_a}{\omega_b}}, \quad P_1 = \frac{P_o}{1 + m \frac{\omega_a}{\omega_b}}$$

$$N_1 \leq P_1 \left(1 + \frac{m \omega_a}{\omega_b}\right) \quad \text{ou} \quad P_o,$$

sans tenir compte de la variation de  $m$  avec le temps

$$N_{2f} \leq (P_1 + \omega_b R_b) \left(1 + \frac{m \omega_a}{\omega_b}\right) \quad \text{ou} \quad P_o + \omega_b R_b \left(1 + m \frac{\omega_a}{\omega_b}\right).$$

En fait,  $m$  augmente avec le temps et

$$N_1 \leq P \left(1 + m_t \frac{\omega_a}{\omega_b}\right)$$

$$N_2 \leq (P + \omega_b R_b) \left(1 + m_t \frac{\omega_a}{\omega_b}\right),$$

$m_t$  étant la valeur actuelle de  $m$ , lors de l'application de  $N$ , mais il faut alors diminuer  $P_1$  des pertes de précontrainte correspondantes.

#### 4. Pertes de précontrainte

Dans le paragraphe précédent, nous avons considéré la précontrainte active lors de l'application de l'effort de traction  $N$ . Cette précontrainte n'est pas égale à sa valeur initiale, mais elle diminue en fonction du temps, en raison du retrait du béton et de son fluage sous des efforts de compression permanents (voir notes du cours de procédés généraux de construction de lère épreuve, sur les propriétés des bétons).

On peut considérer les valeurs instantanées du retrait et du fluage ou bien des valeurs ultimes (en admettant que celles-ci soient sensiblement atteintes après un certain temps).

Désignons le retrait par  $\rho_b$ .

Pour le fluage du béton, on admet que, pour une même durée, il est proportionnel à la tension de compression appliquée. Bien qu'il s'agisse de déformations permanentes (en majeure partie), on se référera à un module élastique réduit du béton

$$E'_b = \frac{E_b}{n}, \quad n > 1.$$

L'armature sous forte tension permanente subit aussi une



déformation différée, conduisant dans ce cas à une diminution de tension ou relaxation, assez réduite d'ailleurs. On se référera à un module élastique réduit  $E'_a = E_a (1 - \epsilon)$ .

Appelons  $P_o$  la valeur initiale de l'effort de précontrainte en cas d'ancrage,  $P$  la valeur réduite après un certain temps ou ultime. En admettant l'égalité des raccourcissements du béton et de l'armature :

$$\rho_b + \frac{P}{E'_b \omega_b} - \frac{P_o}{E_b \omega_b} = \frac{P_o}{E_a \omega_a} - \frac{P}{E'_a \omega_a}$$

$$P \left( \frac{1}{E'_b \omega_b} + \frac{1}{E'_a \omega_a} \right) = P_o \left( \frac{1}{E_b \omega_b} + \frac{1}{E_a \omega_a} \right) - \rho_b .$$

Posons

$$\frac{E_a}{E_b} = m \quad P \left( \frac{1}{1 - \epsilon} + \frac{nm\omega_a}{\omega_b} \right) = P_o \left( 1 + \frac{m\omega_a}{\omega_b} \right) - \rho_b E_a \omega_a$$

$$P = P_o \frac{1 + \frac{m\omega_a}{\omega_b}}{\frac{1}{1 - \epsilon} + \frac{nm\omega_a}{\omega_b}} - \frac{\rho_b E_a \omega_a}{\frac{1}{1 - \epsilon} + \frac{nm\omega_a}{\omega_b}}$$

$$\Delta P_o = P_o - P = P_o \frac{\frac{\epsilon}{1 - \epsilon} + \frac{(n - 1) m \omega_a}{\omega_b}}{\frac{1}{1 - \epsilon} + \frac{nm\omega_a}{\omega_b}} + \frac{\rho_b E_a \omega_a}{\frac{1}{1 - \epsilon} + \frac{nm\omega_a}{\omega_b}}$$

On admet souvent une perte  $\frac{\Delta P_o}{P}$  de 0,10 à 0,15 . Cette valeur normale concerne cependant des armatures mises sous tension après le durcissement du béton et dont les extrémités sont fixées à celui-ci par des ancrages après mise sous tension par des vérins. Lors de la fixation, il se produit souvent des glissements des fils dans les ancrages, qui augmentent la perte de précontrainte. Si les fils sont tendus avant le bétonnage et ancrés par adhérence, en admettant la répartition uniforme sur toute la longueur, sous réserve des extrémités, on a

$$\rho_b + \frac{n'_b}{E'_b} = \frac{(n_a)_o}{E_a} - \frac{n_a}{E'_a}$$

$$n_a \left( \frac{\omega_a}{E'_b \omega_b} + \frac{1}{E'_a} \right) = \frac{(n_a)_o}{E_a} - \rho_b$$

$$n_a = \frac{(n_a)_o}{\frac{1}{1 - \epsilon} + \frac{nm\omega_a}{\omega_b}} - \frac{\rho_b E_a}{\frac{1}{1 - \epsilon} + \frac{nm\omega_a}{\omega_b}} \quad P = \omega_a n_a .$$

$\rho_b$ ,  $\epsilon$ ,  $N$  et  $m$  sont des fonctions du temps; il faut considérer à chaque instant les valeurs correspondantes, à partir du début du durcissement, car il y a adhérence entre le béton et l'armature même avant sa libération, dès la prise du ciment.

En outre, il y a du glissement aux extrémités, car la tension des armatures doit y être nulle et atteindre par adhérence la valeur normale sur une certaine longueur d'ancrage. La perte de précontrainte est donc supérieure à

$$\Delta P_o = P_o - \frac{P_o}{\frac{1}{1-\epsilon} + \frac{nm\omega_a}{\omega_b}} + \rho_b \frac{E_a \omega_a}{\frac{1}{1-\epsilon} + \frac{nm\omega_a}{\omega_b}}$$

$$\Delta P_o \geq P_o \frac{\frac{\epsilon}{1-\epsilon} + \frac{nm\omega_a}{\omega_b}}{\frac{1}{1-\epsilon} + \frac{nm\omega_a}{\omega_b}} + \frac{\rho_b E_a \omega_a}{\frac{1}{1-\epsilon} + \frac{nm\omega_a}{\omega_b}}$$

Si l'on veut réaliser la valeur finale  $n_a$ , il faut

$$(n_a)_o = n_a \left( \frac{1}{1-\epsilon} + \frac{nm\omega_a}{\omega_b} \right) + \rho_b E_a$$

Pour  $n$ , on admet 2 à 3. Cette dernière valeur est la plus grande citée par le règlement du M.R.U. (Ministère de la reconstruction et de l'urbanisme en France). Elle correspond certes à un béton de qualité médiocre, déformable.  $\epsilon$  varie selon la tension de l'acier et sa nature de 0,05 à 0,15; cette dernière valeur paraît toutefois exceptionnelle.  $\rho_b$  peut varier de 0,0004 à 0,0002; la première valeur paraît exceptionnelle. Il est à remarquer que  $E_b$ , c'est-à-dire  $m$ , ainsi que  $n$  et

LOI DE VARIATION DE  $n_a$



$\rho_b$  varient d'après l'âge du béton lors de la mise en précontrainte (en cas d'ancrage). Avec l'âge du béton lors de la mise en précontrainte,  $m$  et  $n$  diminuent, ainsi que  $\rho_b$ , car la perte de précontrainte ne résulte que du retrait résiduel après la mise en précontrainte (en cas d'ancrage). Or le retrait est une fonction décroissante du temps et le retrait résiduel diminue lorsque l'âge augmente.

Donnons quelques exemples hypothétiques pour fixer les idées.

$$\begin{aligned}P_o &= 40 \text{ t} \\ \sigma_a &= 100 \text{ kg/mm}^2 \\ \sigma'_b &= 100 \text{ kg/cm}^2 \\ \omega_b &= 400 \text{ cm}^2 \\ \omega_a &= 4 \text{ cm}^2 \\ \frac{\omega_a}{\omega_b} &= 0,01 \\ E_a &= 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2 .\end{aligned}$$

a) bon béton  $m = 6$   
 $n = 2$   
 $\rho_b = 0,0002$   
bon fil  $\epsilon = 0,05$

$$\begin{aligned}\Delta P_o &= 40.000 \frac{\frac{0,05}{0,95} + 0,06}{\frac{1}{0,95} + 0,12} + \frac{0,0002 \times 8 \cdot 10^6}{\frac{1}{0,95} + 0,12} \\ &= 40.000 \times \frac{0,1126}{1,17} + \frac{1600}{1,17} \\ &= 3850 + 1370 = 5220\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta P_o}{P_o} = \frac{5220}{40.000} = 0,1305 .$$

b) béton médiocre  $m = 10$   
 $n = 3$   
 $\rho_b = 0,0003$   
fil médiocre  $\epsilon = 0,10$

$$\Delta P_o = 40.000 \frac{0,111 + 0,20}{1,11 + 0,30} + \frac{2400}{1,41} = 8800 + 1700 = 10.500$$

$$\frac{\Delta P_0}{P_0} = \frac{10.500}{40.000} = 0,2625 .$$

c) très bon béton      m = 5  
   n = 2  
    $\rho_b = 0,0002$

très bon fil               $\epsilon = 0,04$

$$\Delta P_0 = 40.000 \times \frac{0,0917}{1,14} + \frac{1600}{1,14} = 3215 + 1405$$

$$\Delta P_0 = 4620 \frac{\Delta P_0}{P_0} = \frac{4620}{40.000} = 0,115 .$$

Il semble difficile que  $\frac{\Delta P_0}{P_0}$  soit inférieur à 0,10 .

Pour le béton précontraint par adhérence, en admettant les mêmes valeurs de  $\rho_b$  (en réalité elles doivent être plus grandes) on aurait dans les trois cas

a)  $\Delta P_0 = 40.000 \times \frac{0,1726}{1,17} + 1370 = 7270 \text{ kg} , \frac{\Delta P_0}{P_0} = 0,181$

b)  $\Delta P_0 = 40.000 \times \frac{0,411}{1,41} + 1700 = 13400 \text{ kg} , \frac{\Delta P_0}{P_0} = 0,335$

c)  $\Delta P_0 = 40.000 \times \frac{0,1417}{1,14} + 1405 = 6365 \text{ kg} , \frac{\Delta P_0}{P_0} = 0,159 .$

### 5. Sollicitation par des charges instantanées ou permanentes.

Les formules du paragraphe 3 correspondent aux effets d'une charge N instantanée de courte durée, pour autant que la répétition des charges ne produise pas d'allongement permanent, ce qui correspondrait à une diminution de  $E_b$  et à une augmentation de m .

Si l'effort N est appliqué d'une manière permanente, il faut remplacer  $E_b$  par

$$E'_b = \frac{E_b}{n}$$

et m par

$$m' = mn$$

dans les formules du paragraphe 3. Ceci augmente  $\delta P$ , c'est-à-dire l'effet de la précontrainte. Cependant, les charges de fissuration  $N_1$  et  $N_2$  ne sont pas augmentées en ce sens que, si l'on porte d'emblée la charge permanente à l'une ou l'autre de ces valeurs, selon le cas, la fissuration se produit. Mais pour toute charge permanente inférieure à ces valeurs, la sécurité à la fissuration augmente théoriquement avec le temps.

## 6. Applications pratiques

Les barres tendues ne sont pas rares dans les constructions : barres de treillis, tirants. On pourrait objecter que l'acier seul suffirait. Mais le plus souvent, le béton d'enrobage est nécessaire pour assurer la durabilité du métal, le mettre à l'abri de la corrosion. L'acier sous tension se corrode d'autant plus vite que la tension est plus élevée. Le béton précontraint comprimé lui assure une protection certaine, non réalisée avec certitude dans le cas du béton armé fissurable.

Une application assez particulière a été exposée par le professeur R. Kozak, recteur de l'Ecole polytechnique de Poznan, dans sa conférence du 29 mars 1950 à l'Institut du Génie Civil de l'Université de Liège.

Des barres de béton de petites sections diverses (par exemple  $5 \times 5$  cm) sont précontraintes au moyen de fils d'acier de 1,5 à 2 mm de diamètre, tordus deux à deux

$$R_a = 250 \text{ kg/mm}^2 \quad R'_b = 600-700 \text{ kg/cm}^2 \quad p_b = 300 \text{ kg/cm}^2 .$$

Par exemple

$$\omega_b = 25 \text{ cm}^2 \quad \omega_a = 0,5 \text{ cm}^2 \quad \frac{\omega_a}{\omega_b} = 0,02 \quad n_a = 15.000 \text{ kg/cm}^2$$

$$P = 0,5 \times 15000 = 7500 \text{ kg} = 25 \times 300 .$$

Si l'on admet  $m = 5$  et  $R_b = 50 \text{ kg/cm}^2$ , pour des charges instantanées

$$N_2 = 25 (300 + 50) \times 1.10 = 9625 \text{ kg}$$

$$N_1 = 25 \times 300 \times 1.10 = 8250 \text{ kg}.$$

La différence est importante.

Sous la réserve indiquée au paragraphe 5 et en admettant  $n = 2$ , ces charges de fissuration deviendraient en cas de charge permanente

$$N_2 = 25 \times 350 \times 1.20 = 10.450 \text{ kg}$$

$$N_1 = 25 \times 300 \times 1.20 = 9.000 \text{ kg.}$$

Après leur bétonnage par vibration, les barres sont étuvées pour accélérer le durcissement et permettre de couper les fils (et libérer les moules) le plus tôt possible. Pour atteindre la valeur finale  $n_a = 15.000 \text{ kg/cm}^2$  il faudrait donc une tension initiale

$$\begin{aligned} (n_a)_o &= n_a \left( \frac{1}{1 - \varepsilon} + \frac{nm\omega_a}{\omega_b} \right) + \rho_b \cdot E_a \\ &= 15.000 \left( \frac{1}{0,90} + 2 \times 5 \times 0,02 \right) + 2.10^{-6} \times 0,0002 \\ &= 20.000 \text{ kg/cm}^2 . \end{aligned}$$

Ceci paraît un peu élevé.

Ces barres de béton précontraint sont employées comme armatures tendues dans des éléments en béton de qualité médiocre : bétons de cendrées, bétons de briquillons ou de décombres concassés, bétons poreux, dans lesquels des armatures ordinaires seraient corrodées rapidement. L'économie d'acier est considérable; la barre ci-dessus, armée de  $0,5 \text{ cm}^2$  d'acier, remplace  $5 \text{ cm}^2$  d'armatures ordinaires travaillant à  $15 \text{ kg/mm}^2$ .

On donne à ces barres en béton précontraint un profil légèrement varié, pour assurer l'adhérence au béton dans lequel elles sont enrobées. On peut s'en servir comme tirants tendus.

### C. CAS DE LA FLEXION, PRECONTRAINTE UNIFORME

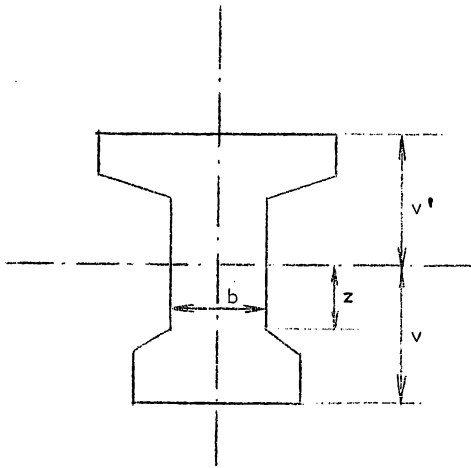
#### 1. Pièce fléchie prismatique en béton non armé

$$\sigma_b = \frac{Mv}{I_b} < R_b \quad M_b \ll R_b \frac{I_b}{v} = \frac{R_b \omega_b r_b^2}{v} = M_o$$

$R_b$  est la résistance du béton à la traction par flexion. La tension tangentielle maximum, égale à la traction principale maximum due à l'effort tranchant, est

$$\sigma''_b = \sigma_b = \frac{T \mathcal{M}}{I_b b} \quad \mathcal{M} = \int_0^v bz \, dz$$

$$T \ll \frac{I_b \cdot b}{\mathcal{M}} R_b = \frac{\omega_b r_b^2 b}{\mathcal{M}} R_b = T_o$$



$$\frac{M_o}{T_o} = \frac{\pi}{vb} = t = kv \quad k < 1$$

$$\sigma_b'' = \sigma_b = \frac{(Tt)v}{I_b} \ll R_b .$$

Par exemple, pour une section rectangulaire  $b \times h$ ,

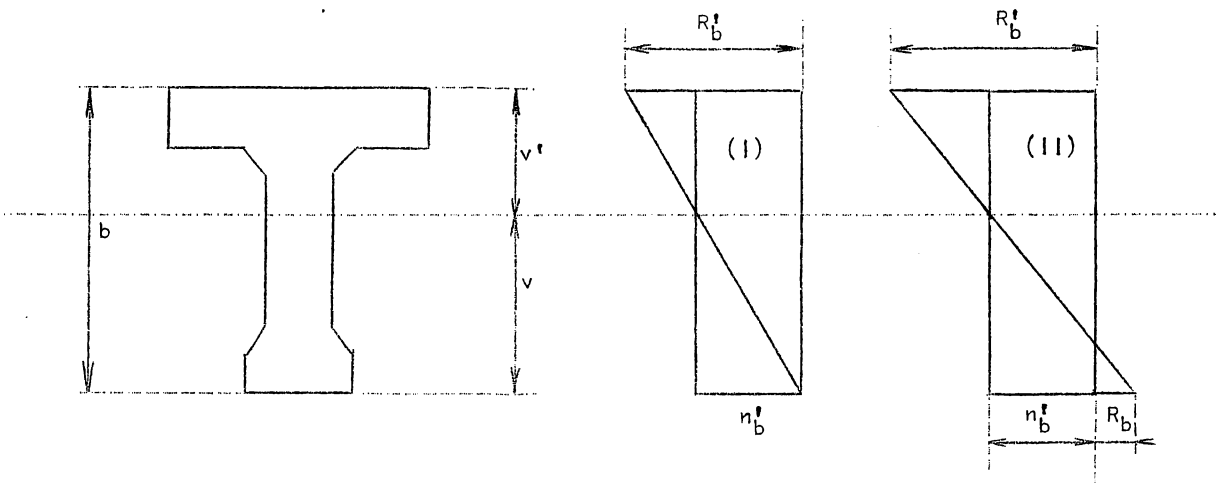
$$M \ll \frac{bh^2}{6} R_b = M_o$$

$$T \ll \frac{2}{3} bh R_b = T_o$$

$$t = \frac{h}{4} .$$

2. La comparaison à une pièce similaire en béton armé ne présente pas d'intérêt.

### 3. Pièce prismatique fléchie précontrainte uniformément



L'armature et l'effort de précontrainte sont uniformément répartis; la compression précontrainte du béton est

$$n'_b = \frac{P}{\omega_b}$$

et est uniforme.

P agit donc au centre de gravité de la section. L'armature a son centre de gravité et ses axes principaux d'inertie confondus avec ceux de la section de béton.

I. On ne tient pas compte de la résistance à la traction du béton (par exemple la pièce est formée de blocs serrés entre eux par la précontrainte). Alors

$$\sigma_b = \frac{Mv}{I_b} = n'_b = \frac{P}{\omega_b}$$

$$M = \frac{I_b}{v} \frac{P}{\omega_b} = \frac{Pr_b^2}{v}$$

$$R'_b \geq n'_b + \frac{v'}{v} n'_b = \left(1 + \frac{v'}{v}\right) n'_b \quad (\text{cf. figure})$$

$$n'_b \leq \frac{R'_b}{1 + \frac{v'}{v}} = R'_b \frac{v}{h}$$

Donc

$$M \leq \frac{I_b}{v} R'_b \frac{v}{h} = R'_b \frac{I_b}{h} \quad R'_b \geq \frac{Mh}{I_b}$$

$$P \leq R'_b \omega_b \frac{v}{h}$$

II. On tient compte d'une résistance du béton à la traction par flexion, égale à  $R_b$  en valeur absolue

$$\sigma_b = n'_b + R_b = \frac{P}{\omega_b} + R_b = \frac{Mv}{I_b} \quad M = \frac{I_b}{v} \left(\frac{P}{\omega_b} + R_b\right)$$

$$M = \frac{Pr_b^2}{v} + M_o$$

$$R'_b = n'_b + \frac{v'}{v} (n'_b + R_b) \geq \frac{h}{v} n'_b + \frac{v'}{v} R_b \quad (\text{cf. figure})$$

$$n'_b \leq R'_b \frac{v}{h} - R_b \frac{v'}{h}$$

$$M \leq \frac{I_b}{v} \left(R'_b \frac{v}{h} - R_b \frac{v'}{h} + R_b\right) = \frac{I_b}{h} (R'_b + R_b)$$

$$R'_b \geq \frac{Mh}{I_b} - R_b$$

$$M = \frac{Pr_b^2}{v} + M_o \leq \frac{I_b}{h} (R'_b + R_b) \quad P \leq R'_b \omega_b \frac{v}{h} + R_b \omega_b \left(\frac{v}{h} - 1\right)$$

$$P \leq \omega_b \left(R'_b \frac{v}{h} - R_b \frac{v'}{h}\right)$$



A égalité de  $n'_b$  (précontrainte), on a dans le cas I,  
si  $v = v' = h$

$$M = 2 n'_b \frac{I_b}{h} ;$$

dans le cas II,

$$M = 2 (n'_b + R_b) \frac{I_b}{h} .$$

Dans les deux cas, le moment de fissuration est proportionnel à  $I/h$  .

Il faut donc réaliser  $I/h$  maximum, soit en doublé té, soit en caisson ou par une section de forme similaire.

La section rectangulaire est donc peu favorable

$$\frac{I}{h} = \frac{bh^2}{12} .$$

Si l'on a recours à des poutres rectangulaires, ce doivent être des poutres-cloisons de grande hauteur, sous réserve d'instabilité.

Si la flexion peut varier de sens sans varier de grandeur, la poutre doit être symétrique

$$v = v' = \frac{h}{2} .$$

Si le moment de flexion ne varie pas de sens, on peut employer une poutre non symétrique, telle que  $v' > v$  . Pour une hauteur  $h = v + v'$  donnée, et une section donnée, on réalisera le plus grand  $I/h$  , donc le plus grand  $I$  . On réalisera le moment résistant

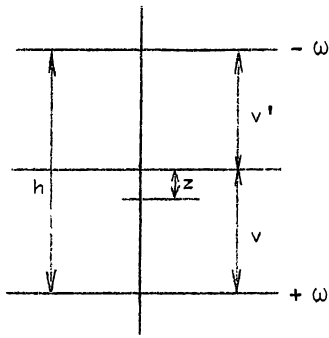
$$R'_b \frac{I}{h}$$

avec la précontrainte

$$\frac{R'_b}{h} v \omega_b$$

la plus petite possible.

Pour une section donnée  $\omega_b$  , c'est cependant la forme symétrique qui est la plus économique. Considérons une section symétrique de caractéristiques  $\omega_b$ ,  $I_o$  et  $v = v' = h/2$  . Ajoutons à la fibre inférieure et retranchons à la fibre supérieure une petite surface  $\omega$  . L'axe neutre se déplace de  $z$  vers le bas et



$$v' = \frac{h}{2} + z$$

$$v = \frac{h}{2} - z$$

$\omega_b$  ne change pas

$$z = \frac{\omega h}{\omega_b}$$

$$\begin{aligned} I_b &= I_o + \omega_b z^2 + \omega \left( \frac{h}{2} - z \right)^2 - \omega \left( \frac{h}{2} + z \right)^2 \\ &= I_o + \frac{\omega^2}{\omega_b} h^2 - \omega \left[ \left( \frac{h}{2} + z \right)^2 - \left( \frac{h}{2} - z \right)^2 \right] = I_o + \frac{\omega^2}{\omega_b} h^2 - 2 h z \omega \\ &= I_o + \frac{\omega^2}{\omega_b} h^2 - \frac{2 \omega^2}{\omega_b} h^2 = I_o - \frac{\omega^2}{\omega_b} h^2 . \end{aligned}$$

Dès lors

$$n'_b < R'_b \frac{\frac{h}{2} - z}{h} \qquad n'_b < \frac{R'_b}{2} - R'_b \frac{\omega}{\omega_b}$$

(au lieu de  $n'_b < R'_b/2$  ; la précontrainte diminue). Mais

$$M = \frac{R'_b}{h} \left( I_o - \frac{\omega^2}{\omega_b} h^2 \right)$$

au lieu de

$$\frac{R'_b I_o}{h} .$$

Si l'on faisait la modification en sens inverse, on aurait la même diminution de  $M$ , mais avec une précontrainte plus élevée, ce qui est encore moins indiqué.

Par la précontrainte, la résistance à l'extension est assurée. On peut donc porter  $R_b$  en compte, ce qui majore le moment de fissuration dans le rapport

$$\frac{R'_b + R_b}{R'_b}$$

tout en conservant le même coefficient de sécurité.

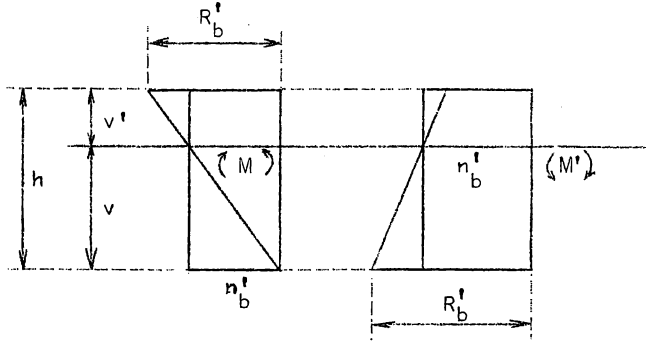
4. Moments de sens contraires et inégaux

Cas I

Soit

$$- M' < M \quad \text{et} \quad v' < v .$$

On a



$$M = \frac{I_b}{v} n'_b = R'_b \frac{I_b}{h}$$

et

$$n'_b \leq R'_b \frac{v}{h}$$

$$|M| = \frac{I_b}{v} (R'_b - n'_b)$$

et

$$\sigma_b = (R'_b - n'_b) \frac{v'}{v} \leq n'_b$$

$$R'_b < n'_b \frac{h}{v}$$

$$n'_b > R'_b \frac{v'}{h}$$

$$\frac{|M'|}{M} = \frac{R'_b - n'_b}{r'_b} \leq \left(\frac{h}{v} - 1\right) \quad \text{ou} \quad \frac{|M'|}{M} \leq \frac{v'}{v} .$$

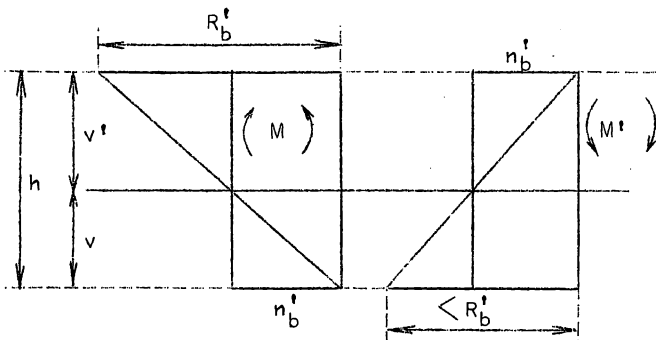
On pourra donc prendre

$$\frac{v'}{v} = \frac{M'}{M} .$$

D'autre part

$$R'_b \frac{v'}{h} < n'_b < R'_b \frac{v}{h} .$$

Toutes ces conditions sont compatibles si  $v' < v$  , si  $- M' < M$  et  $v' > v$  , on a



$$M = n'_b \frac{I_b}{v} = R'_b \frac{I_b}{h}$$

$$n'_b \leq R'_b \frac{v}{h}$$

$$|M'| = n'_b \frac{I_b}{v'}$$

$$n'_b + \frac{M'v}{I_b} < R'_b$$

$$n'_b \left(1 + \frac{v}{v'}\right) < R'_b, \quad n'_b \frac{h}{v'} < R'_b, \quad n'_b < R'_b \frac{v'}{h} > R'_b \cdot \frac{v}{h}.$$

Donc, il suffit que

$$n'_b \ll R'_b \frac{v}{h}$$

$$\frac{|M'|}{M} = \frac{v}{v'} < 1,$$

ces conditions sont compatibles.

Pour une même hauteur  $h = v + v'$ , la précontrainte sera moindre dans le cas  $v' > v$ ; elle a pour limite supérieure

$$R'_b \frac{v}{h} \omega_b$$

et l'on a

$$\frac{|M'|}{M} = \frac{v}{v'}.$$

Dans le cas  $v' < v$ , la limite supérieure a la même expression, mais est plus grande. On peut toutefois se rapprocher d'une limite supérieure

$$R'_b \frac{v'}{h} \omega_b.$$

Seulement, alors le moment  $M$  diminue et lorsque la précontrainte atteint sa valeur limite supérieure

$$M = R'_b \frac{I_b}{h} \frac{v'}{v} < R'_b \frac{I_b}{h}$$

tandis que

$$|M'| = R'_b \frac{I_b}{h}.$$

Les ordres de grandeur de  $M$  et  $M'$  sont donc inversés et on retombe dans le cas  $v' < v$  avec limite supérieure. Il faut donc, dans le cas  $v' < v$  s'en tenir à la limite supérieure de la précontrainte. Ce cas est donc le plus défavorable puisque, pour  $v' > v$ , il faut observer la limite inférieure de la précontrainte

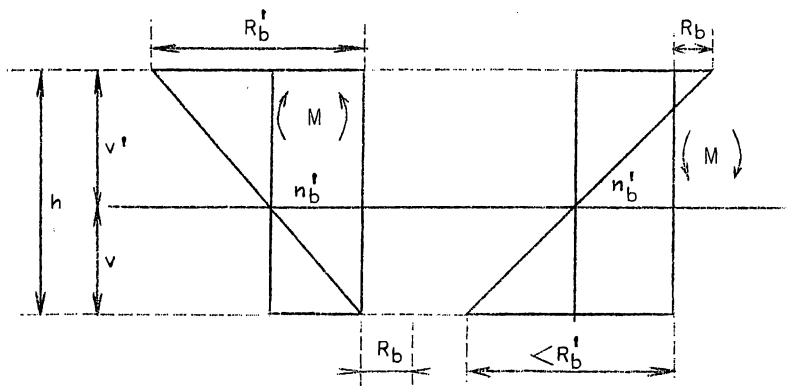
$$R'_b \frac{v}{h} \omega_b$$

tout en réalisant

$$M = R'_b \frac{I_b}{h} \quad \text{et} \quad |M'| = \frac{Mv}{v'} < M .$$

Cas II

On tient compte de la résistance  $R_b$  du béton à la traction par flexion. Envisageons encore le cas  $v' > v$  pour  $-M' < M$ .



$$M = \frac{I_b}{h} (R_b + R'_b)$$

$$n'_b < R'_b \frac{v}{h} - R_b \frac{v'}{h}$$

$$\frac{M'v'}{I_b} = n'_b + R_b = \frac{Mv}{I_b}$$

$$\frac{|M'|}{M} = \frac{v}{v'} < 1$$

$$n'_b + (n'_b + R_b) \frac{v}{v'} < R'_b$$

$$n'_b \frac{h}{v} < R'_b \frac{v'}{v} - R_b$$

$$n'_b < R'_b \frac{v'}{h} - R_b \frac{v'}{h} .$$

Cette condition est satisfaite si

$$n'_b < R'_b \frac{v}{h} - R_b \frac{v}{h} .$$

Le moment

$$M = \frac{I_b}{h} (R'_b + R_b)$$

est réalisé moyennant la précontrainte minimum

$$P = \omega_b \left( R'_b \frac{v}{h} - R_b \frac{v'}{h} \right) \quad \text{et} \quad |M'| = M \frac{v}{v'} < M .$$

5. Résistance à l'effort tranchant.

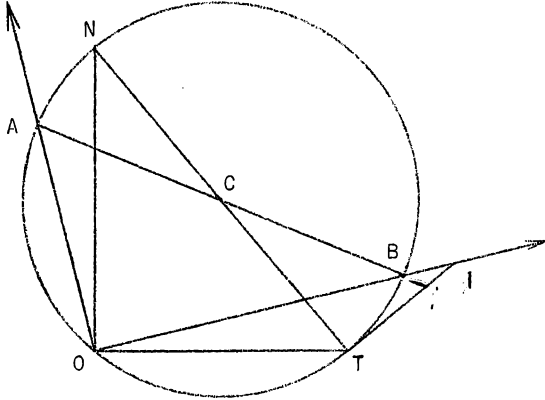
Rappelons que

$$\sigma''_b = \frac{T \pi}{I_b b} = \frac{(Tt) v}{I_b}$$

$$t = \frac{\pi}{vb} .$$

Cas I

Sur l'axe neutre, il y a superposition de cisaillement simple  $\sigma_b''$  et de compression simple  $n_b'$ . Dans le cercle des tensions,  $OT = n_b'$  et  $TI = \sigma_b''$ . D'où, comme



$$n_b' \leq \frac{R_b' v}{h} ,$$

$$\begin{aligned} IB &= \sigma_{b \max} \\ &= -\frac{n_b'}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_b'}{2}\right)^2 + \sigma_b''^2} \leq R_b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} IA &= \sigma_{b \max}' \\ &= \frac{n_b'}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_b'}{2}\right)^2 + \sigma_b''^2} \leq R_b' \end{aligned}$$

ou encore

$$\sigma_{b \max} = -\frac{n_b'}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_b'}{2}\right)^2 + \left(\frac{Tt v}{I}\right)^2} \leq R_b \quad (a)$$

$$\sigma_{b \max}' = \frac{n_b'}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_b'}{2}\right)^2 + \left(\frac{Tt v}{I}\right)^2} \leq R_b' . \quad (b)$$

Condition (a)

$$\left(\frac{R_b' v}{2 h}\right)^2 + (Tt)^2 \frac{v^2}{I^2} \leq \left(R_b + \frac{R_b' v}{2 h}\right)^2$$

d'où

$$Tt < \frac{I_b}{v} R_b \sqrt{1 + \frac{R_b' v}{R_b h}} .$$

Rappelons que pour le béton non précontraint

$$(Tt)_o \leq R_b \frac{I}{v} .$$

Pour une section rectangulaire (b,h)

$$T \leq \frac{2}{3} bh R_b \sqrt{1 + \frac{R_b'}{2 R_b}} \quad (T_o = \frac{2}{3} bh R_b) .$$

Condition (b)  $\left(\frac{R_b' v}{2 h}\right)^2 + (Tt)^2 \frac{v^2}{I^2} \leq \left(R_b' - \frac{R_b' v}{2 h}\right)^2$

d'où

$$Tt \ll \frac{I_b}{v} R'_b \sqrt{\frac{v'}{h}} = M \frac{h}{v} \sqrt{\frac{v'}{h}} .$$

Pour la section rectangulaire,

$$T \ll \frac{2}{3} bh R'_b \sqrt{\frac{1}{2}} .$$

Cette valeur ne peut pas être prise en considération; elle dépasse celle de la condition (a), qui est la limite supérieure.

Cas II.

$$n'_b \ll \frac{R'_b v}{h} - \frac{R_b v'}{h} .$$

Condition (a)

$$\frac{1}{4} \left( \frac{R'_b v}{h} - \frac{R_b v'}{h} \right)^2 + (Tt)^2 \frac{v^2}{I^2} \ll \left( R_b + \frac{R'_b v}{2h} - \frac{R_b v'}{2h} \right)^2$$

d'où

$$Tt \ll \frac{I_b}{v} R_b \sqrt{\frac{v}{h} \left( 1 + \frac{R'_b}{R_b} \right)} .$$

Pour une section rectangulaire

$$T < \frac{2}{3} bh R_b \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{R'_b}{R_b} \right)} .$$

Condition (b)

$$\frac{1}{4} \left( \frac{R'_b v}{h} - \frac{R_b v'}{h} \right)^2 + (Tt)^2 \frac{v^2}{I^2} \ll \left( R'_b - \frac{R'_b v}{2h} - \frac{R_b v'}{2h} \right)^2$$

$$Tt \ll \frac{I_b}{v} R'_b \sqrt{\frac{v'}{h} \left( 1 + \frac{R_b}{R'_b} \right)} ,$$

valeur trop élevée.

Pour une section rectangulaire

$$T \ll \frac{2}{3} bh R'_b \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{R_b}{R'_b} \right)} .$$

On remarque que dans le cas de précontrainte uniforme longitudinale, on ne peut éviter des tractions principales maxima, agissant toutefois sur des facettes faisant avec la fibre neutre un angle inférieur à 45° et d'autant plus petit

que  $n'_b$  est plus grand. La valeur de  $T_{\max}$  admissible est fortement majorée par rapport à celle du prisme de béton simple  $T_0$  et, pour une poutre assez élancée, les effets de  $T$  seront toujours relativement faibles, d'autant plus que  $n'_b$  est plus grand. Cependant, pour des poutres importantes et très chargées, il faudrait éventuellement recourir à des étriers sans tension préalable, ou à une précontrainte perpendiculaire à la précontrainte longitudinale et dans le plan de la flexion qui serait suffisante pour annuler ou inverser les tensions principales de traction.

### 6. Exemples.

Peu favorables d'ailleurs, car pour avoir des calculs simples, on envisagera une forme de section peu appropriée, le rectangle.

Soit  $b = 10$  cm,  $h = 40$  cm,  $v = v' = 20$  cm,  $R'_b = 125$  kg/cm<sup>2</sup>,  $R_b = 25$  kg/cm<sup>2</sup>.

#### Cas I

$$n'_b \ll 62,5 \text{ kg/cm}^2$$

$$M = \frac{I_b}{h} R'_b = \frac{bh^2}{12} R'_b = \frac{10 \times 1600}{12} \times 125 = 166.667 \text{ kgcm ou } 1.667 \text{ kgm}$$

$$T \ll \frac{2}{3} \times 10 \times 40 \times 25 \sqrt{1 + 2,5} = 12.500 \text{ kg}.$$

#### Cas II

$$n'_b \ll 50 \text{ kg/cm}^2$$

$$M = \frac{I_b}{h} (R'_b + R_b) = \frac{10 \times 1600}{12} \times 150 = 200.000 \text{ kgcm ou } 2.000 \text{ kgm}$$

$$T \ll \frac{2}{3} \times 10 \times 40 \times 25 \sqrt{3} = 11.550 \text{ kg}.$$

La prise en compte de la résistance à la traction réduit l'effort tranchant admissible, à cause de la réduction de  $n'_b$ .

Supposons  $R_b = 50$  kg/cm<sup>2</sup>. Pour  $n'_b = 50$  kg/cm<sup>2</sup>, la tension de fissuration sera atteinte lorsque  $R'_b = 150$  kg/cm<sup>2</sup>. Alors

$$M_{fiss} = \frac{10 \times 1600}{12} 200 = 266.667 \text{ kgcm ou } 2.667 \text{ km}$$



sécurité à la fissuration

$$\frac{2667}{2000} = 1,33 .$$

Si l'on ne porte pas en compte la résistance à la traction du béton, la sécurité devient

$$\frac{2667}{1667} = 1,60 ,$$

valeur assez normale, mais avec une précontrainte plus élevée. Si l'on considère une valeur donnée de  $n'_b$  et que la limite  $R_b$ , soit atteinte, le coefficient de sécurité à la fissuration par rapport au calcul sans tenir compte de la traction du béton est égal à

$$\frac{2 n'_b + 2 R_b}{2 n'_b} = 1 + \frac{R_b}{n'_b} = s_f$$

d'où

$$n'_b = \frac{R_b}{s_f - 1} .$$

Pour avoir une sécurité suffisante à la fissuration, il ne faut pas dépasser une certaine précontrainte qui est fonction de la résistance à la traction, non de la résistance à la compression. Si l'on veut  $s_f = 1,50$ , il faut  $n'_b = 2 R_b$ , d'où  $\sigma'_b = 2 n'_b = 4 R_b = \sim R'_b/2,5$ , si  $R'_b = \sim 10 R_b$ .

## 7. Rupture.

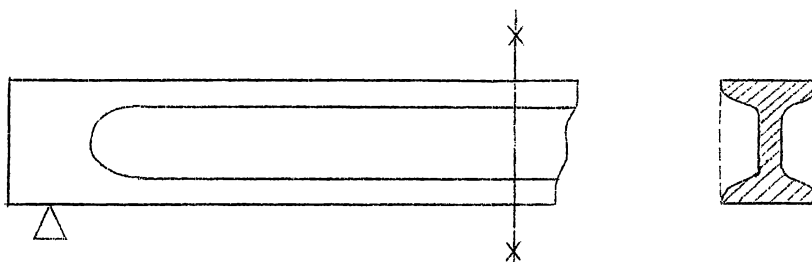
Après fissuration, si l'on continue à faire croître le moment, la pièce fissurée se comporte comme une pièce en béton armé et se rompt comme telle, par compression en béton ou par traction des armatures tendues, selon l'importance relative de cette armature.

La limite de fissuration (inférieure) a, en quelque sorte, la signification d'une limite élastique pratique, par rapport à laquelle il faut un coefficient de sécurité supérieur à 1 si la pièce est monolithique; supérieur à 1,5 si la pièce est formée de tronçons serrés entre eux par la précontrainte. La sécurité doit être prise évidemment par rapport à la valeur finale de la précontrainte.

## 8. Applications.

La précontrainte uniforme convient pour toutes les pièces fléchies dont le moment peut fortement varier de sens, par

exemple des poteaux, des pylônes, des poutres continues. Pour l'économie, il sera favorable d'employer des bétons de très bonne qualité, ayant des  $R'_b$  et  $R_b$  élevés, donc ayant une très bonne granulométrie et très compacts. La précontrainte uniforme peut être alors assez élevée. Pour des valeurs de  $\Omega$  et de  $h$  données, on peut augmenter  $I$  et  $M = R'_b \frac{I}{h}$  en adoptant une section en double-té, en diminuant l'épaisseur de l'âme. Cependant, les tensions tangentielles d'effort peuvent alors devenir élevées. Pour y parer, on peut renforcer l'épaisseur de l'âme aux appuis. Ce renforcement aux extrémités facilite l'adhérence des fils aux extrémités sur une longueur suffisante (voir 9 b), la poutre restant allégée dans la partie centrale. La précontrainte uniforme est favorable pour les pièces préfabriquées auxquelles elle confère un caractère analogue à celui des pièces métalliques.



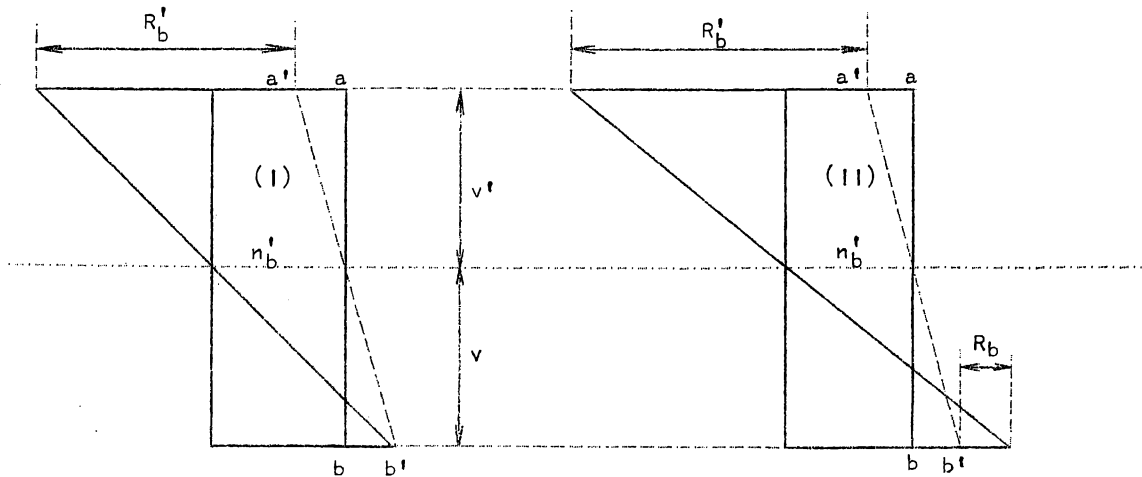
### 9. Variation de la précontrainte sous l'effet de la flexion

Si l'armature de précontrainte est unique et disposée suivant l'axe de la pièce, dans la fibre neutre, elle ne subit aucune déformation et la force résultante de précontrainte n'est pas modifiée par la précontrainte, ni en grandeur ni en position. La précontrainte reste uniforme.

Il y a intérêt, tout en réalisant initialement une précontrainte uniforme, d'éloigner les armatures le plus possible de l'axe neutre. D'abord, le moment d'inertie augmente

$$I_{tot} = I_b + m I a .$$

Ensuite, les armatures se raccourcissent dans la zone comprimée et s'allongent dans la zone tendue. La précontrainte diminue donc dans la région comprimée et augmente dans la région tendue. Il en résulte que la force totale de précontrainte conserve sa valeur, mais est excentrée vers la région tendue. La précontrainte ne reste donc pas uniforme, mais développe un moment de flexion de sens inverse à celui qui sollicite la pièce. C'est comme si la loi de précontrainte uniforme ab devenait  $a'b'$  .



On compte les barres pour  $m\omega a$ ,  $m = E_a/E_b$  pour les efforts instantanés, si leur répétition ne donne pas lieu à déformations permanentes. On sait que la répétition des sollicitations du béton entre deux limites invariables entraîne une diminution de  $E_b$  avec le nombre des répétitions, donc une augmentation de  $m$ . (Voir cours de procédés généraux de construction de lère épreuve) tandis que

$$m = \frac{E_a n (1 - \varepsilon)}{E_b} = \frac{E'_a}{E'_b}$$

pour les charges permanentes.

a) Considérons d'abord le cas des armatures adhérentes

La dilatation d'une fibre distante de  $z$  de la fibre neutre est

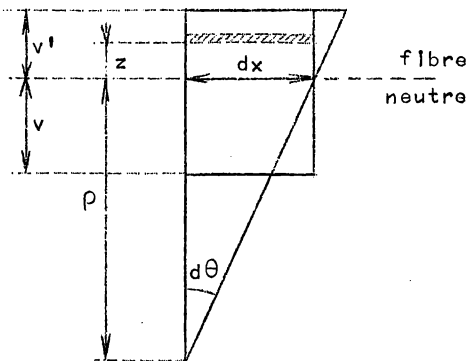
$$\delta = \frac{zd\theta}{dx} = \frac{z}{\rho} = \frac{Mz}{EI}$$

Puisque la précontrainte est uniforme on a

$$P = \sum \omega_a n_a = n_a \sum \omega_a$$

$$\sum \omega_a n_a z = n_a \sum \omega_a z = 0$$

Soient  $\xi$  et  $\xi'$  les distances des armatures extrêmes à la fibre neutre. Puisque les forces extérieures ne changent pas, on a



$$\Sigma_{\xi}^{\xi} \omega_a (\delta n_a) z = \int_{v'}^v bz (\delta p_b) dz .$$

Or,

$$\frac{(\delta p_b)}{z} = \frac{\Delta p_b}{v}$$

$$\int_{v'}^v bz (\delta p_b) dz = \frac{\Delta p_b}{v} \int_{v'}^v bz^2 dz = \Sigma_{\xi}^{\xi} \omega_a (\delta n_a) z$$

$$\Delta p_b = v \frac{\Sigma_{\xi}^{\xi} \omega_a (\delta n_a) z}{\int_{v'}^v bz^2 dz} ; \delta p_b = \frac{\Sigma_{\xi}^{\xi} \omega_a (\delta n_a) z}{\int_{v'}^v bz^2 dz}$$

$$\delta = \frac{Mz}{E_b I_b} - \frac{\delta p_b}{E_b} = \frac{z}{E_b I_b} [M - \Sigma_{\xi}^{\xi} \omega_a (\delta n_a) z]$$

$$(\delta n_a) = E_a \delta \quad \omega_a (\delta n_a) z = E_a \omega_a \delta z$$

$$\Sigma_{\xi}^{\xi} \omega_a (\delta n_a) z = \frac{E_a}{E_b I_b} [M \Sigma_{\xi}^{\xi} \omega_a z^2 - \Sigma_{\xi}^{\xi} \omega_a z^2 \Sigma_{\xi}^{\xi} \omega_a (\delta n_a) z]$$

$$\left[ \Sigma_{\xi}^{\xi} \omega_a (\delta n_a) z \right] \left( 1 + \frac{m I_a}{I_b} \right) = \frac{m I_a}{I_b} M$$

$$\Sigma_{\xi}^{\xi} \omega_a (\delta n_a) z = \frac{m I_a}{I_b + m I_a} M = \frac{m I_a}{I_{tot}} M$$

d'où

$$\delta = \frac{zM}{E_b I_b} \left[ 1 - \frac{m I_a}{I_b + m I_a} \right] = \frac{MZ}{E_b I_{tot}}$$

$$\delta n_a = \frac{m M z}{I_{tot}} \quad \delta p_b = \frac{m M z}{I_{tot}} \frac{I_a}{I_b}$$

$$\Delta n_a = \frac{m M \xi}{I_{tot}} \quad \Delta p_b = \frac{m M v}{I_{tot}} \frac{I_a}{I_b} .$$

L'excentricité de la résultante de précontrainte est

$$\frac{\Sigma_{\xi}^{\xi} \omega_a (\delta n_a) z}{P} = \frac{m I_a}{I_{tot}} \cdot \frac{M}{P} = e$$

d'autant plus grande que  $I_a$  est plus grand et proportionnelle à  $M$ .

Puisque

$$\Delta p_b = \frac{mI_a}{I_{tot}} \frac{M_v}{I_b} \quad \Delta' p_b = \frac{mI_a}{I_{tot}} \frac{M_v'}{I_b} .$$

$$I) \quad \frac{M_v}{I_b} = n'_b + \frac{mI_a}{I_{tot}} \frac{M_v}{I_b} , \quad R'_b + \frac{mI_a}{I_{tot}} \frac{M_v'}{I_b} \geq n'_b + \frac{v'}{v} (n'_b + \frac{mI_a}{I_{tot}} \frac{M_v}{I_b})$$

$$M = \frac{I_b n'_b}{v} + M \frac{mI_a}{I_{tot}} , \quad R'_b \geq n'_b \frac{h}{v} \quad n'_b \leq R'_b \frac{v}{h}$$

$$M (1 - \frac{mI_a}{I_{tot}}) \leq \frac{I_b}{h} R'_b \quad M \leq \frac{I_b R'_b}{h (1 - \frac{mI_a}{I_{tot}})} = \frac{I_{tot} R'_b}{h} .$$

$$II) \quad \frac{M_v}{I_b} = n'_b + R_b + \frac{mI_a}{I_{tot}} \cdot \frac{M_v}{I_b} ,$$

$$R'_b + \frac{mI_a}{I_{tot}} \frac{M_v}{I_b} \geq n'_b + \frac{v'}{v} (n'_b + R_b + \frac{mI_a}{I_{tot}} \cdot \frac{M_v}{I_b})$$

$$M = \frac{I_b}{v} (n'_b + R_b) + \frac{mI_a}{I_{tot}} M \quad n'_b \leq R'_b \frac{v}{h} - R_b \frac{v'}{h}$$

$$M (1 - \frac{mI_a}{I_{tot}}) \leq \frac{I_b}{h} (R'_b + R_b) \quad M = \frac{I_{tot}}{h} (R'_b + R_b) .$$

Les moments de fissuration sont majorés dans le rapport de

$$\frac{I_{tot}}{I_b} = 1 + \frac{mI_a}{I_b} .$$

Remarquons que  $\omega_a (\delta n_a) = E_a \omega_a \delta$

$$\begin{aligned} \sum_{\xi'}^{\xi} \omega_a (\delta n_a) &= \frac{E_a}{E_b I_b} [M \sum_{\xi'}^{\xi} \omega_a z - \sum_{\xi'}^{\xi} \omega_a z \sum_{\xi'}^{\xi} \omega_a (\delta n_a) z] \\ &= \frac{m}{I_b} \sum_{\xi'}^{\xi} \omega_a z (M - \frac{mI_a}{I_b} M) = 0 \end{aligned}$$

car, en précontrainte uniforme,  $\sum_{\xi'}^{\xi} \omega_a z = 0$ , d'où  $\sum \omega_a (\delta n_a) = 0$  et P ne change pas.

b) Si les armatures ne sont pas adhérentes mais ancrées à leurs extrémités distantes de  $\ell'$

On a

$$\delta_m = \frac{\int_0^{\ell} \delta dx}{\ell'} = \frac{1}{\ell'} \int_0^{\ell} \frac{Mz}{EI} dx = \frac{z}{\ell' EI_b} \int_0^{\ell} M dx$$

Il faut donc dans les formules précédentes remplacer M par

$$\frac{\int_0^{\ell} M dx}{\ell'}$$

Par exemple,

$$M = \frac{px (\ell - x)}{2} \qquad \int_0^{\ell} M dx = \frac{p\ell^3}{12}$$

$$\delta_m = \frac{z p \ell^3}{12 \ell' EI}$$

alors qu'en cas d'adhérence

$$\delta = \frac{Mz}{EI} = \frac{px (\ell - x) z}{2 EI}, \qquad \delta_{\max} = \frac{z p \ell^2}{8 EI}$$

Donc, en cas d'adhérence, l'effet antiflechissant de la précontrainte est en chaque section transversale proportionnel au moment correspondant. En absence d'adhérence, il est uniforme et proportionnel à la valeur moyenne du moment sur la longueur non adhérente. La variation de longueur totale de chaque armature est la même, qu'il y ait adhérence ou non, à condition toutefois, lorsqu'il n'y a pas d'adhérence, que les armatures soient contraintes, par des liaisons appropriées, de fléchir de la même quantité que la poutre. Mais en cas d'adhérence, la dilatation spécifique est en chaque cas proportionnelle au moment; en cas de non adhérence elle est constante sur la longueur non adhérente et égale à la dilatation moyenne sur cette longueur en cas de non adhérence.

L'adhérence est donc préférable; elle est plus rationnelle et elle augmente la sécurité. Elle rend impossible les ruptures des fils dans les ancrages aux extrémités, qui peuvent se produire par fatigue ou corrosion s'il n'y a pas d'adhérence. L'adhérence protège aussi contre la corrosion.

Elle peut être obtenue par la mise en tension des fils dans le moule avant bétonnage, c'est la précontrainte proprement dite. Elle a comme inconvénient une plus grande perte de précontrainte.

En cas de mise sous tension des armatures après bétonnage (post-contrainte), on peut avoir les trois dispositions suivantes :

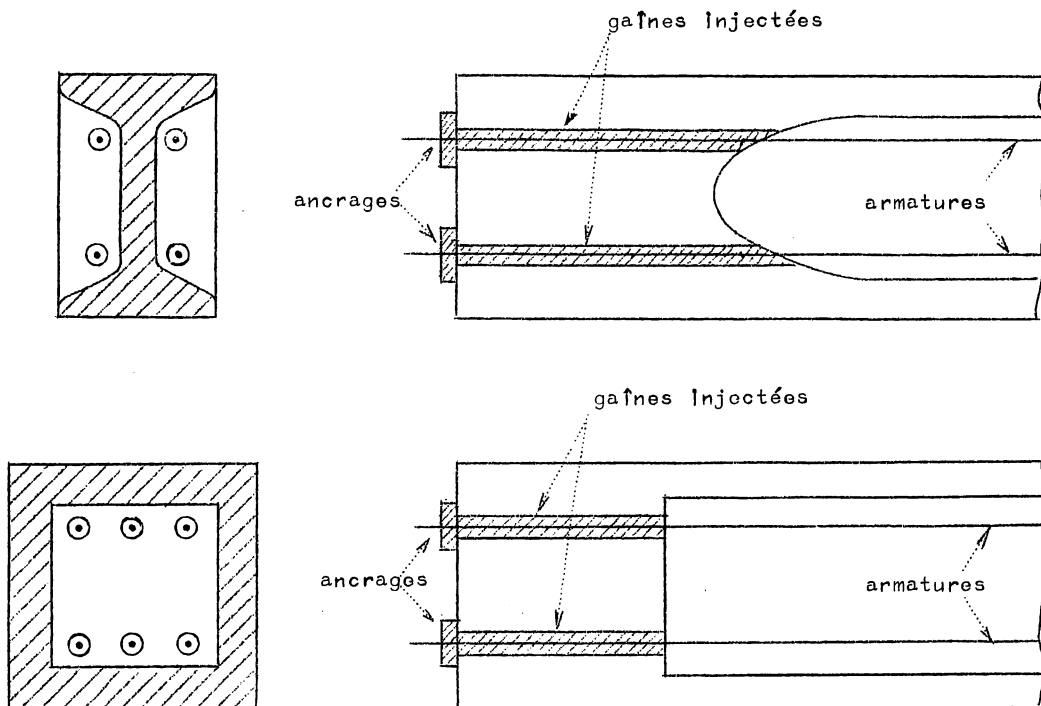
a) les armatures sont introduites dans des gaines ménagées à l'intérieur de la pièce en béton, mises sous tension et an-

crées dans des dispositifs qui s'appuient sur le béton. Ensuite, on remplit les gaines par injection de mortier de ciment. On peut contrôler que l'injection est complète, mais le mortier étant très fluide peut sédimenter et une partie de la gaine (supérieure) est remplie d'eau. L'adhérence est donc incomplète et l'eau peut corroder les armatures qu'elle baigne.

b) les armatures sont extérieures à la pièce et sont ancrées à ses extrémités, comme en a). Il faut que la liaison des armatures à la pièce les oblige à suivre sa flexion et on peut les recouvrir de mortier pour la protection contre la corrosion. Il faudrait des dispositions spéciales pour que ce revêtement assure l'adhérence.

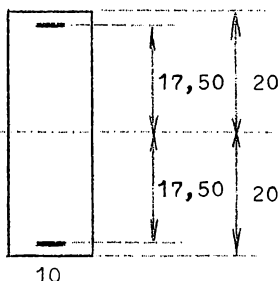
c) la pièce est en caisson; les armatures sont à l'intérieur et prennent appui sur les extrémités pleines des caissons, comme en a) et b). La liaison des armatures au caisson doit les obliger à suivre sa flexion. On recouvre les armatures de revêtement de protection contre la corrosion. Ils peuvent être en mortier, mais n'assurent pas d'adhérence.

Les dispositifs b) et c) laissent subsister le risque de rupture des armatures aux ancrages par fatigue. Il est recommandable de rendre les fils adhérents aux abouts de la pièce sur une longueur suffisante (200 à 300 fois le diamètre de l'armature).



Dans toutes les dispositions, il est essentiel que les armatures suivent la flexion de la pièce. Si cela n'était pas le cas, il y aurait déplacement relatif et diminution de la précontrainte, effet qui est très sensible. On voit qu'en cas de précontrainte uniforme, de l'extension ne peut se produire que sous l'effet des sollicitations extérieures. Comme pour les pièces métalliques, la sollicitation longitudinale est plus favorable que la sollicitation transversale.

A titre d'exemple simple (mais peu favorable) reprenons la barre de section  $h = 40$  cm,  $b = 10$  cm



$$\omega_b = 400 \text{ cm}^2$$

$$\omega_a = 4 \text{ cm}^2$$

$$m = 6$$

$$\frac{m\omega_a}{\omega_b} = 0,06$$

$$I_b = \frac{10 \times 40^3}{12} = 53.300 \text{ cm}^4$$

$$I_a = 4 \times 17,5^2 = 1.225 \text{ cm}^4$$

$$mI_a = 6 \times 1.225 = 7.350 \text{ cm}^4 ;$$

$$\frac{mI_a}{I_b} = 0,138$$

$$I_{\text{tot}} = 60.650 \text{ cm}^4$$

$$\frac{mI_a}{I_{\text{tot}}} = \frac{67.350}{60.650} = 0,121.$$

$$R_b = 50 \text{ kg/cm}^2$$

$$R'_b = 500 \text{ kg/cm}^2$$

$$n'_b = 100 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma'_{b \text{ max}} = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$M = \frac{I}{h} R'_b = \frac{10 \times 1600 \times 200}{12} = 266.700 \text{ kg}\chi\text{cm}.$$

En fait, ce moment est majoré de 1,138, soit élevé à 3000 kgm. L'excentricité de la précontrainte devient

$$0,121 \times \frac{310.000}{40.000} = 0,94 \text{ cm}.$$

Si l'on cherche le moment de première fissuration

$$n'_b = 100 \text{ kg/cm}^2 \quad R_b = 50 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma'_{b \text{ max}} = 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$M = \frac{I}{h} (\sigma'_{b \text{ max}} + R_b) = \frac{10 \times 1600 \times 300}{12} = 400.000 \text{ kg}\chi\text{cm}^2$$



qui est majoré à 4.550 kgm, l'excentricité étant 1,375 cm. La valeur  $m = 6$  envisagée correspond aux sollicitations instantanées. En cas de sollicitations permanentes ou très fréquemment répétées, il faudrait prendre  $m = 12$  à 18, en moyenne 15. Le coefficient de majoration des moments deviendrait 1,345 au lieu de 1,138.

#### D. CAS DE LA FLEXION EN PRECONTRAINTE NON UNIFORME.

##### 1. Théorie générale.

La précontrainte non uniforme ne convient que pour la flexion. Elle crée un moment en sens inverse de la flexion à laquelle doit être soumise la pièce, des tensions de sens contraire de la flexion à subir. Si le poids mort devient actif par la mise en précontrainte, (qui décintre la poutre, ce que la précontrainte uniforme ne peut réaliser), comme il est permanent, il fait en somme partie de la précontrainte et on peut considérer la précontrainte poids mort compris. Dès lors la flexion n'est plus à considérer que sous l'effet des surcharges accidentelles.

Si l'on considère le poids mort avec les charges accidentelles, on raisonne sur un état de précontrainte pur ou fictif, sans effet de poids mort, qui n'a éventuellement pas de réalité (sauf si la pièce est moulée couchée sur une face parallèle au plan de flexion, mais même dans ce cas, elle doit être redressée pour la mise en service et le poids mort se superpose alors à la précontrainte). Cet état fictif ou théorique (normalement) de précontrainte peut comporter des tractions de précontrainte, qui n'ont cependant pas de réalité lorsqu'elles sont dès le début compensées par l'effet du poids mort. Il est donc en général convenable de considérer la précontrainte non uniforme avec l'effet de poids mort compris.

α) On peut dans ces conditions réaliser une précontrainte combinée uniforme (Cela a été réalisé dans une poutre expérimentale essayée en 1946 - Cfr C. Wets, Science et Technique, n° 9-10 de 1946).

On a

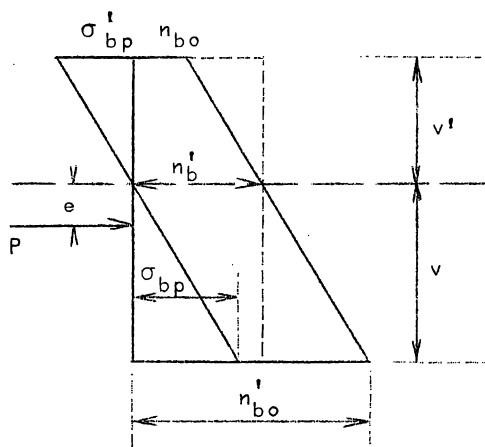
$$\sigma'_{bp} = \frac{M_{pv}'}{I_b}$$

$$\sigma_{bp} = \frac{M_{pv}}{I_b}$$

$$n_{bo} = n'_b - \frac{M_{pv}'}{I_b}$$

$$n'_{bo} = n'_b + \frac{M_{pv}}{I} .$$

Faisons



$$P = \omega_b n'_b \quad e = \frac{M_p}{P} = \frac{M_p}{\omega_b n'_b}$$

Alors

$$n'_{bo} = \frac{P}{\omega_b} + \frac{P \cdot e \cdot v}{I_b} = n'_b + \frac{M_p v}{I_b}$$

$$n_{bo} = \frac{P}{\omega_b} - \frac{P_e v'}{I_b} = n'_b - \frac{M_p v'}{I_b}$$

La force de précontrainte excentrée de  $e$  produit donc, en combinaison avec le moment de poids mort  $M_p$  une précontrainte uniforme  $n'_b$ .

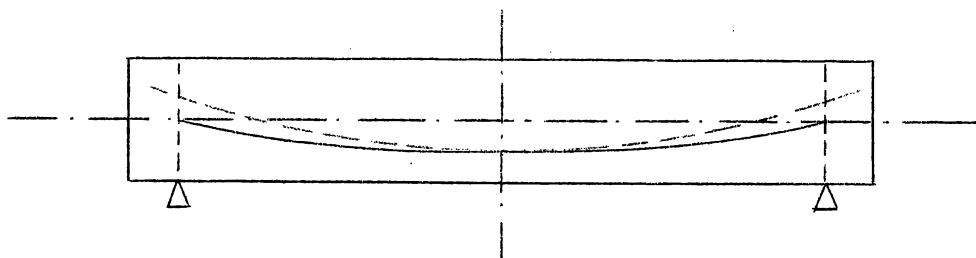
L'effet du poids mort annule donc l'excentricité de la précontrainte.

Les effets des charges accidentelles, peuvent alors se traiter comme dans le cas de la précontrainte uniforme. Si le poids mort lors de la mise en précontrainte est invariable, l'excentricité de la précontrainte est compensée par le poids mort; la sécurité ne se rapporte donc qu'aux charges supplémentaires.

On peut réaliser ainsi la précontrainte uniforme dans toute l'étendue d'une pièce, l'excentricité du câble étant partout égale à  $e = M_p/P$ . Si la pièce est sur deux appuis d'extrémité et si le poids mort est uniformément réparti,

$$e = \frac{M_p}{P} = \frac{px(\ell - x)}{2P}$$

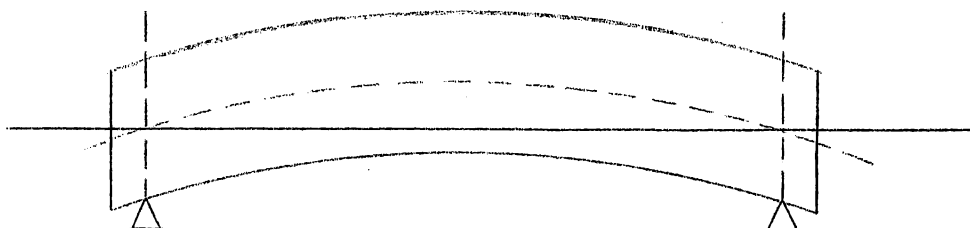
Le câble est parabolique et agit comme un câble de pont suspendu annulant l'effet du poids. Ceci entraîne des réactions verticales entre le câble et le béton égales au poids. Il en résulte des frottements, qui font varier la précontrainte tout le long du câble courbe et qu'il faut réduire au minimum ou annuler autant que possible, par exemple en guipant les fils du câble d'une spirale de ruban de clinquant très mince. L'excentricité serait donc nulle au droit des appuis. Cette dispo-



sition du câble a un autre avantage : l'effet de la précontrainte n'est pas purement transversal; il y a une composante de précontrainte perpendiculaire aux facettes longitudinales, ce qui diminue les tensions de traction principales dues à l'effort tranchant. La courbure du câble reprend une partie de l'effort tranchant (d'ailleurs égale à celle due au poids mort).

Cet effet sera d'autant plus grand que la flèche du câble est plus grande. Aussi va-t-on jusqu'à donner au câble une excentricité négative au droit des appuis, qui n'a d'autre objet que de diminuer l'effet de l'effort tranchant. On peut aussi, dans les grandes poutres, disposer des tirants obliques (inclinés de moins de 45° par rapport à la verticale) ou de préférence verticaux, dans les régions où les efforts tranchants dominent.

Pour éviter les tirants courbes, on peut arquer légèrement la poutre en sens inverse, suivant la même loi  $e = M_p/P$  ou davantage, pour obtenir les mêmes effets que ci-dessus. On a alors affaire à un arc à tirant de grand élanement. Le câble rectiligne facilite la mise en tension.



β) Précontrainte combinée non uniforme

1. Etat initial de précontrainte

a) sans poids mort.

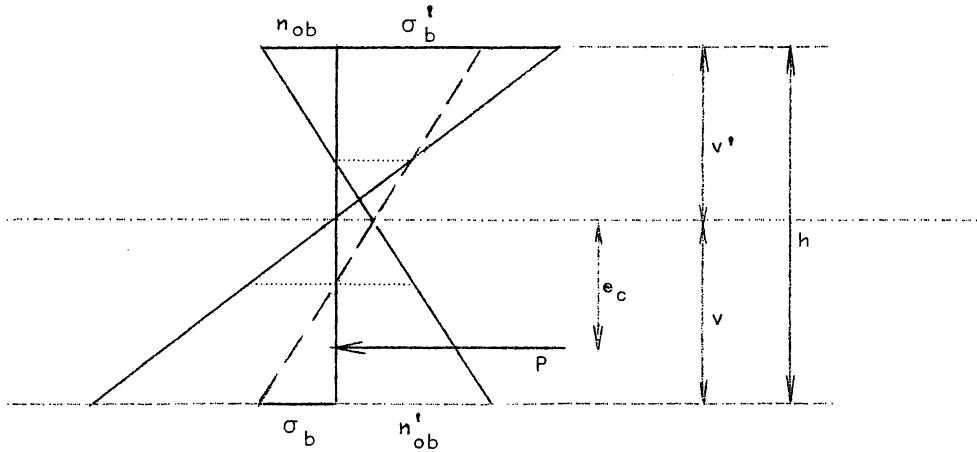
La résultante de précontrainte est  $P$ , son extrémité  $e_0$ .

$$n_{ob} = \frac{P}{\omega_b} - \frac{P \cdot e_c \cdot v'}{I_b} \qquad n'_{ob} = \frac{P}{\omega_b} + \frac{P \cdot e_c \cdot v}{I_b}$$

$$P = \omega_b \frac{n'_{ob} v' + n_{ob} v}{h}$$

$$e_c = \frac{(n'_{ob} - n_{ob}) I_b}{Ph} .$$

Remarque importante : Les signes de  $n'_{ob} > 0$  et de  $n_{ob}$  sont implicites;  $n'_{ob}$  peut être  $< 0$ .



b) poids mort compris.

L'excentricité du câble de précontrainte doit être majorée de  $M_p/P$  par rapport à la formule précédente

$$e_c = e_p + \frac{M_p}{P} = \frac{(n'_{ob} - n_{ob}) I_b}{Ph} + \frac{M_p}{P} .$$

P est inchangé.

2. Cas des surcharges agissant dans le même sens que  $M_p$  .

La valeur maximum du moment de surcharge est  $M_s$  ; il ne comprend pas le poids mort. On se réfère donc au cas 1.b) de la précontrainte combinée avec le poids mort. Le plus petit moment de flexion est  $M_p$  , le plus grand  $M_p + M_s$  . Leur différence est  $M_s$  .

$$\sigma'_b = n_{ob} + \frac{M_s v'}{I_b} \qquad \sigma_b = n'_{ob} - \frac{M_s v}{I_b}$$

$$P = \omega_b \frac{\sigma'_b v + \sigma_b v'}{h} = \omega_b \frac{n_{ob} v + n'_{ob} v'}{h}$$

$$e_s = \frac{(\sigma_b - \sigma'_b) I_b}{Ph} = \frac{(n'_{ob} - n_{ob}) I_b}{Ph} - \frac{M_s}{P} = e_p - \frac{M_s}{P} .$$

On a donc

$$\frac{M_s}{I_b} = \frac{\sigma'_b - n_{ob}}{v'} = \frac{n'_{ob} - \sigma_b}{v}$$

$$\frac{v'}{v} = \frac{\sigma'_b - n_{ob}}{n'_{ob} - \sigma_b} .$$

Si l'on donne  $\sigma'_b$ ,  $\sigma_b$ ,  $n'_{ob}$  et  $n_{ob}$ , on a  $v/v'$ . Si on donne en outre  $h$ , on a  $v$  et  $v'$ . Dès lors

$$M_s = (\sigma'_b - n_{ob}) \frac{I_b}{v'} = (n'_{ob} - \sigma_b) \frac{I_b}{v}$$

d'où

$$I_b = \frac{M_s v'}{\sigma'_b - n_{ob}} = \frac{M_s v}{n'_{ob} - \sigma_b}$$

$$P = \omega_b \frac{\sigma'_b v + \sigma_b v'}{h} = \omega_b \frac{n_{ob} v + n'_{ob} v'}{h} .$$

On cherchera à réaliser  $\omega_b$  et  $P$  les plus petits possibles pour les valeurs considérées de  $M_s$  et de  $h$ . On peut d'ailleurs envisager, le cas échéant, diverses valeurs de  $h$ . Donc la section ne dépend que de  $M_s$ , aussi la sécurité.

Pour la sécurité, on peut admettre

$$n_{ob} = \sigma_b = R_b < 0 \quad \text{et} \quad n'_{ob} = \sigma'_b = R'_b > 0 .$$

Alors

$$\frac{v'}{v} = 1 , \quad v' = v = \frac{h}{2}$$

$$I_b = \frac{M_s h}{2 (R'_b - R_b)} \quad P = \frac{\omega_b}{2} (R'_b + R_b) .$$

$R_b$  est pris avec son signe  $R_b = - |R_b|$

$$M_s = \frac{2 I_b}{h} (R'_b - R_b) ,$$

valeur double de celle obtenue en cas de précontrainte uniforme

$$e_p = \frac{(R'_b - R_b) I_b}{Ph} = \frac{2 I_b}{h \omega_b} \quad \frac{R'_b - R_b}{R'_b + R_b} = \frac{M_s}{\omega_b (R'_b + R_b)} = \frac{M_s}{2 P}$$

$$e_s = e_p - \frac{M_s}{P} = - \frac{M_s}{2 P} = - e_p$$

$$e_o = e_p + \frac{M_p}{P} = \frac{M_s}{2P} + \frac{M_p}{P} = \frac{M_s + 2M_p}{2P} .$$

L'excentricité du câble dépend de  $M_s$  et de  $M_p$ . Donc la solution qui utilise le mieux la matière est la section symétrique  $v = v' = h/2$ . Il faut que  $I_b/h\omega_b$  soit le plus grand possible. Pour un rectangle  $I_b/h\omega_b = h/12$ ; donc  $h$  doit être le plus grand possible.

### 3. Cas des surcharges de sens variable.

Soit  $M_s$  le moment maximum des surcharges de même sens que  $M_p$ ,  $M'_s$  le moment maximum des surcharges de sens contraire (le signe étant inclus). Posons  $M_p > 0$ ,  $M_s > 0$ ,  $M'_s < 0$

$$M_{min} = M_p + M_s$$

$$M_{max} = M_p + M'_s$$

$$\Delta M = M_{max} - M_{min} = M'_s - M_s .$$

On prendra comme état initial de référence  $M_{min} = M_p + M'_s$ , avec l'état de tension  $n'_{ob}$  et  $n_{ob}$

$$e_{min} = \frac{(n'_{ob} - n_{ob}) I_b}{Ph}$$

$$P = \omega_b \frac{n'_{ob} v' + n_{ob} v}{h}$$

$$e_c = e_{min} + \frac{M_p + M'_s}{P} .$$

Les formules sont les mêmes que précédemment en substituant  $\Delta M$  à  $M_s$  et  $e_{min}$  à  $e_p$

$$\sigma'_b = n_{ob} + \frac{\Delta M v'}{I_b} \quad \sigma_b = n'_{ob} - \frac{\Delta M v}{I_b} .$$

On a toujours

$$P = \omega_b \frac{n_{ob} v + n'_{ob} v'}{h}$$

$$e_{max} = \left( \frac{\sigma_b - \sigma'_b}{Ph} \right) I_b = \frac{(n'_{ob} - n_{ob}) I_b}{Ph} - \frac{\Delta M}{P} = e_{min} - \frac{\Delta M}{P}$$

$$\frac{v'}{v} = \frac{\sigma'_b - n_{ob}}{n'_{ob} - \sigma_b} .$$

Les conclusions sont les mêmes que sous 2. Il y a avantage à prendre

$$n_{ob} = \sigma_b = R_b \leq 0$$

$$n'_{ob} = \sigma'_b = R'_b$$

$$\frac{v'}{v} = 1$$

$$v' = v = \frac{h}{2}$$

$$I_b = \frac{\Delta M h}{2 (R'_b - R_b)}$$

$$\Delta M = \frac{2 I_b (R'_b - R_b)}{h}$$

$$P = \frac{\omega_b}{2} (R'_b + R_b)$$

$$e_{min} = \frac{\Delta M}{\omega_b (R'_b + R_b)} = \frac{\Delta M}{2 P}$$

$$e_{max} = - \frac{\Delta M}{2 P} = - e_{min}$$

$$e_c = \frac{\Delta M}{2 P} + \frac{M_p + M'_s}{P} = \frac{M_s + M'_s + 2 M_p}{2 P} .$$

Rappelons que  $M'_s < 0$  .

La section, la sécurité et  $P$  dépendent seulement de  $\Delta M$  , mais l'excentricité du câble dépend des valeurs de  $M_p$  ,  $M_s$  et  $M'_s$  .

### Cas particuliers

a)  $M'_s = - M_s$

$$\Delta M = 2 M_s$$

$$I_b = \frac{M_s h}{R'_b - R_b}$$

$$M_s = \frac{I_b (R'_b - R_b)}{h}$$

(même formule que pour la précontrainte uniforme)

$$P = \frac{\omega_b}{2} (R'_b + R_b)$$

$$e_{min} = \frac{M_s}{P}$$

$$e_{max} = - \frac{M_s}{P} = - e_{min}$$

$$e_c = \frac{M_p}{P}$$

$$e_p = e_c - \frac{M_p}{P} = 0 .$$

C'est l'état uniforme de précontrainte en combinaison avec le

poids mort.

$$b) \quad M'_s = -M_p \quad M_{\min} = 0 \quad M_{\max} = M_p + M_s$$

$$\Delta M = M_{\max}$$

$$e_{\min} = \frac{M_{\max}}{2P} = e_c \quad e_{\max} = -\frac{M_{\max}}{2P} = -e_c$$

$$e_p = e_c - \frac{M_p}{P} = \frac{M_s - M_p}{2P} .$$

$$c) \quad M_p + M'_s = -(M_p + M_s) = -M_{\max}$$

$$M'_s = -(2M_p + M_s)$$

$$\begin{aligned} \Delta M &= M_p + M_s - M_p - M'_s = M_s - M'_s = M_s + 2M_p + M_s \\ &= 2(M_p + M_s) = 2M_{\max} \end{aligned}$$

$$e_{\min} = +\frac{M_{\max}}{P} \quad e_{\max} = -\frac{M_{\max}}{P}$$

$$e_c = \frac{\Delta M}{2P} + \frac{M_{\min}}{P} = \frac{2M_{\max}}{2P} - \frac{M_{\max}}{P} = 0 .$$

C'est le cas de la précontrainte uniforme.

### Exemples

Poutre rectangulaire de  $40 \times 10$

$$I_b = 53.300 \text{ cm}^4$$

$$p = 100 \text{ kg/m}$$

$$\ell = 4 \text{ m}$$

$$M_p = \frac{100 \times 16}{8} = 200 \text{ kgm} .$$

$$a) \quad R'_b = 100 \text{ kg/cm}^2 \quad R_b = 0$$

$$P = \frac{40 \times 10}{2} \times 100 = 20.000 \text{ kg} \quad \omega_a = 2 \text{ cm}^2 \quad \frac{\omega_a}{\omega_b} = 0,005$$

$$M_s = \frac{2 \times 53.300}{40} \times 100 = 266.500 \text{ kg/cm}^2 \text{ ou } 2.665 \text{ kgm}$$



$$e_p = \frac{266.500}{40.000} = 6,67 \text{ cm} \quad e_c = 6,67 + \frac{20.000}{20.000} = 7,67 \text{ cm}$$

b)  $R'_b = 100 \text{ kg/cm}^2 \quad R'_b = -10 \text{ kg/cm}^2$

$$P = \frac{40 \times 10}{2} (100 - 10) = 18.000 \text{ kg}$$

$$M_s = \frac{2 \times 53.300}{40} \times 110 = 293.150 \text{ kg cm ou } 2.931,5 \text{ kgm}$$

$$e_p = \frac{293.150}{36.000} = 8,15 \text{ cm}$$

$$e_c = 8,5 + \frac{20.000}{18.000} = 9,61 \text{ cm} .$$

c)  $M'_s = -M_s \quad R'_b = 100 \text{ kg/cm}^2 \quad R_b = 0$

$$P = 20.000 \text{ kg} \quad M_s = \frac{53.300 \times 100}{40} = 133.000 \text{ kg cm ou } 1.330 \text{ kgm}$$

$$e_{\min} = \frac{133.000}{20.000} = 6,67 \text{ cm} \quad e_c = \frac{20.000}{20.000} = 1 \text{ cm}$$
$$e_p = 0$$

(précontrainte uniforme sous l'effet du poids mort).

Si  $R'_b = 100 \text{ kg/cm}^2$  ,  $R_b = -10 \text{ kg/cm}^2$

$$P = 18.000 \text{ kg} \quad M_s = \frac{53.300 \times 110}{40} = 146.575 \text{ kgcm ou } 1465,75 \text{ kgm}$$

$$e_{\min} = \frac{146.575}{18.000} = 8,15 \text{ cm} \quad e_c = \frac{20.000}{18.000} = 1,11 \text{ cm}$$
$$e_p = 0 .$$

d)  $M_p + M'_s = - (M_p + M_s) = -M_{\max}$

$$R'_b = 100 \text{ kg/cm}^2 \quad R_b = 0 \quad P = 20.000 \text{ kg}$$

$$M_{\max} = 1.330 \text{ kgm} \quad M_s = 1.130 \text{ kgm}$$

$$e_{\min} = \frac{133.000}{20.000} = 6,67 \text{ cm} \quad e_c = 0 .$$

C'est la précontrainte uniforme. Voir c) b),  $n'_b = 50 \text{ kg/cm}^2$  .

Si  $R'_b = 100 \text{ kg/cm}^2$  ,  $R_b = -10 \text{ kg/cm}^2$

$$P = 18.000 \text{ kg} \quad M_{\max} = 1.465,75 \text{ kgm} \quad M_s = 1.265,75 \text{ kgm}$$

$$e_{\min} = \frac{146.575}{18.000} = 8,15 \text{ cm}$$

$$e_c = 0$$

$$n'_b = 45 \text{ kg/cm}^2.$$

#### 4. Effets de la continuité.

On remarque que la sollicitation des poutres précontraintes non uniformément dépend entièrement de la différence des moments fléchissants extrêmes, c'est-à-dire de la différence des moments maximum et minimum sous l'effet des surcharges variables. Dans les poutres sur deux appuis simples, le moment minimum est nul et les moments ne changent pas de sens, c'est le moment maximum des surcharges qui est déterminant.

En cas de continuité (poutres sur plusieurs appuis de niveau), le moment des surcharges change de sens. Il n'en résulterait qu'un changement de l'excentricité de la précontrainte, sans changement de sa valeur, si le  $\Delta M = M'_s - M_s$  ne changeait pas.

Si l'on considère une poutre sur deux appuis de portée  $\ell$  et supportant une surcharge uniforme accidentelle  $q$ , on a

$$M'_s = 0 \quad M_s = \frac{q\ell^2}{8} \quad \Delta M = \frac{q\ell^2}{8} = 0,125 q\ell^2.$$

Si l'on considère une poutre continue prismatique, à plusieurs travées de portée  $\ell$ , on a

a) pour deux travées

$$\begin{array}{ll} \text{à l'appui central} & \Delta M = - 0,125 q\ell^2 \\ \text{dans chaque travée} & \Delta M = + 0,125 q\ell^2 \end{array}$$

b) pour trois travées

$$\begin{array}{ll} \text{à l'appui intermédiaire} & \Delta M = - 0,1333 q\ell^2 \\ \text{dans chaque travée} & \Delta M = 0,125 q\ell^2 \end{array}$$

c) pour quatre travées

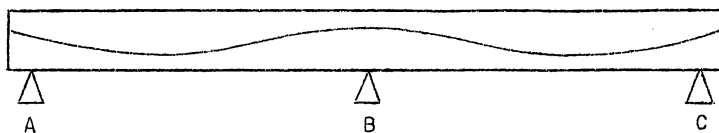
$$\begin{array}{ll} \text{aux appuis voisins} & \\ \text{de l'extrémité} & \Delta M = - 0,14399 q\ell^2 \\ \text{à l'appui central} & \Delta M = - 0,1429 q\ell^2 \\ \text{dans chaque travée} & \Delta M = 0,125 q\ell^2 \end{array}$$

Donc, dans les travées, les  $M$  ne diffèrent pas de ceux de la poutre simple sur deux appuis, mais bien l'excentricité. Mais aux appuis, le  $M$  est plus grand et, en outre, le moment est inverse de sens à celui en travée, donc aussi l'excentricité. Il faut donc des câbles à multiple courbure, donnant lieu à frottement en cas de postcontrainte, en outre la section doit être plus grande et donc vraisemblablement aussi la précontrainte.

La continuité se prête mal aussi à la préfabrication, qui est fréquente en béton précontraint. Il en résulte que la continuité ne présente pas un grand intérêt pour les poutres droites en béton précontraint. D'autre part, la précontrainte non uniforme est la plus économique pour les poutres dont le moment des surcharges ne change pas de sens. Mais un renversement accidentel du sens de la flexion peut leur être fatal. Il est survenu quelquefois que des poutres préfabriquées à contrainte non uniforme se sont brisées au cours des manipulations par un renversement ou une chute accidentels. De même, elles pourraient ne pas résister à des pressions inversées accidentelles, par exemple résultant d'explosions.

En somme, le béton précontraint est intérieurement hyperstatique. Cette hyperstaticité interne influe sur l'hyperstaticité externe si elle existe. Considérons par exemple une poutre continue sur trois appuis  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Supposons que la précontrainte produise en  $B$  une flèche négative  $f_{pc}$ . Si la flèche de poids mort en  $B$  est  $f_p$  et si la flèche en  $B$  sous une charge unitaire en  $B$  est  $Y$ , on aura

$$R_{Bp} = \frac{f_p - f_{pc}}{Y} .$$



Si  $f_{pc} = f_p$ , compensation du poids mort par la précontrainte,  $R_{Bp} = 0$  et la poutre ne serait continue que sous l'effet des surcharges. Si  $f_{pc} = 0$  et n'intervient donc pas dans les inconnues hyperstatiques externes, on dit que le câble est concordant. Il est en réalité très difficile, même impossible de déterminer  $f_{pc}$ , par le calcul comme par l'expérience. La concordance théorique des câbles n'est donc pas assurée pratiquement. Il se recommanderait donc de procéder plutôt à un réglage initial des réactions d'appui des poutres continues (ou des systèmes hyperstatiques en général) au moyen des vérins par exemple, de manière à les faire correspondre au calcul ainsi que l'état initial de sollicitation sans surcharges.

On peut admettre que le calcul du système élastique hyperstatique extérieurement est alors valable sous l'effet des surcharges.

Bien entendu, si l'on considère la forme complexe du câble, son influence sur la précontrainte par le frottement éventuel et si l'on y ajoute la complication du réglage initial, la précontrainte non uniforme n'est pas très favorable ni très intéressante pour les constructions continues ou hyperstatiques et cela d'autant plus que les surcharges sont plus importantes et que les variations de sens des moments fléchissants sont plus accusées.

La précontrainte uniforme ne produit qu'un raccourcissement, mais pas de flexion. Elle n'a donc pas d'influence sur la sollicitation extérieure des poutres continues; elle peut en exercer dans les portiques, les cadres et les arcs. Elle est en principe moins économique que la précontrainte non uniforme mais elle peut devenir très intéressante lorsque les moments des surcharges varient fortement de sens.

### 5. Effets des surcharges sur la précontrainte.

Ce qui précède ne tient pas compte de l'hyperstaticité interne, c'est-à-dire de la variation de la précontrainte sous l'effet des sollicitations.

Le calcul en est analogue à celui qui a été fait pour la précontrainte uniforme. On a recours aux mêmes notations. On a

$$\sum_{\xi}^{\xi} \omega_a n_a = P \qquad \sum_{\xi}^{\xi} \omega_a n_a z = P \cdot e_c \neq 0 .$$

En cas de câbles adhérents

$$\delta n_a = \frac{mMz}{I_{tot}} \qquad \sum_{\xi}^{\xi} \omega_a \delta n_a = \frac{mM}{I_{tot}} \sum_{\xi}^{\xi} \omega_a z$$

$$\sum_{\xi}^{\xi} \omega_a \delta n_a = \frac{mM}{I_{tot}} \times \frac{P \cdot e_c}{n_a} = \frac{Mm e_c}{I_{tot}} \sum_{\xi}^{\xi} \omega_a$$

$$\sum_{\xi}^{\xi} \omega_a \delta n_a z = mM \frac{I_a}{I_{tot}} .$$

Il y a donc à la fois un accroissement de précontrainte et un accroissement de l'excentricité

$$P + \delta P = \sum_{\xi}^{\xi} \omega_a \left( n_a + \frac{mM e_c}{I_{tot}} \right)$$

$$e_c + \delta e_c = \frac{\sum_{\xi}^{\xi} \omega_a (n_a + \delta n_a) z}{P + \delta P} = \frac{\sum_{\xi}^{\xi} \omega_a n_a z + \frac{mM}{I_{tot}} \sum_{\xi}^{\xi} \omega_a z^2}{\frac{n_a + m M e_c}{I_{tot}} \sum_{\xi}^{\xi} \omega_a}$$

$$= \frac{P e_c + \frac{m M I_a}{I_{tot}}}{n_a + \frac{m M e_c}{I_{tot}} \sum_{\xi}^{\xi} \omega_a} .$$

On se réfère ici à l'excentricité effective  $e_c$  du câble (ou de sa résultante), non aux excentricités fictives de la précontrainte lors des diverses sollicitations. On devrait écrire pour ces excentricités fictives.

$$e_p = e_c + \delta e_c - \frac{M_p}{P + \delta P}, \quad \text{avec } M = M_p$$

$$e_{min} = e_c + \delta e_c - \frac{M_p + M'_s}{P + \delta P}, \quad \text{avec } M = M_p + M'_s$$

$$e_{max} = e_c + \delta e_c - \frac{M_p + M_s}{P + \delta P}, \quad \text{avec } M = M_p + M_s .$$

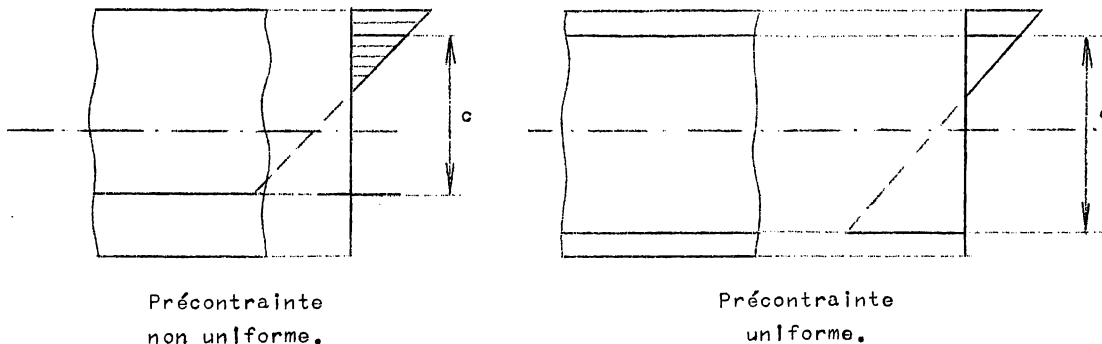
$\xi$  En général, dans le cas de la précontrainte non uniforme,  $\sum_{\xi}^{\xi} \omega_a$  et  $I_a$  sont plus petits qu'en précontrainte uniforme et d'autant plus qu'elle est plus éloignée de la précontrainte uniforme. L'effet est donc moins sensible qu'en précontrainte uniforme, ce qui atténue le désavantage économique de cette dernière. Cependant il semble que l'on ne tienne généralement pas compte de ces efforts dans les calculs.

## 6. Rupture.

Lorsque l'on dépasse le moment de fissuration, le béton précontraint non uniformément se comporte comme du béton armé et se rompt comme tel. Son comportement n'est pas toujours très favorable sous ce rapport, notamment en précontrainte non uniforme, parce que la section d'armature est éventuellement assez faible et que cette armature est moins éloignée de la fibre neutre que les armatures non tendues du béton armé. Le coefficient de sécurité à la rupture peut éventuellement ne pas être très supérieur à la fissuration. La rupture se produira le plus souvent par écrasement du béton; moins souvent par rupture de l'armature tendue, lorsque celle-ci est assez faible mais relativement très excentrée (voir A.T.P.B., février et avril 1950).

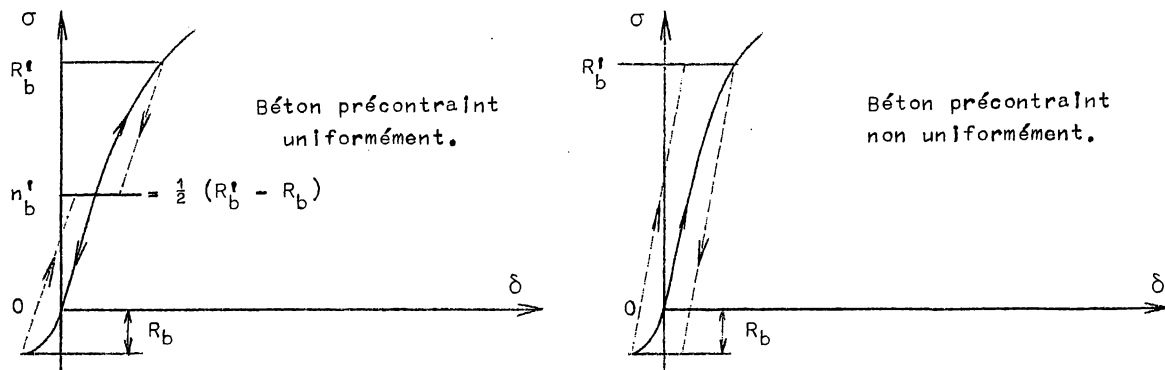
Dans le cas de la précontrainte uniforme, l'armature sera plus forte ( $\sim$  double de celle de la précontrainte non uniforme)

et le plus favorablement disposée de part et d'autre de la fibre neutre et le plus loin possible de celle-ci. Après fissuration, il n'y a donc qu'une moitié de l'armature tendue; la résistance à la rupture sera du même ordre que celle de la poutre précontrainte non uniformément, mais avatagée tout de même par la plus grande excentricité de l'armature tendue.



### 7. Déformations.

L'expérience montre que, toutes choses égales, les flèches instantanées du béton précontraint sont inférieures à celles du béton armé. Cela provient de la non fissuration du béton et du fait que les variations de tension sous l'effet de la flexion sont toutes différentes de celles du béton armé. Certaines fibres sont décomprimées; il y a donc détente, avec une dilatation unitaire moindre. D'autres, il est vrai, sont comprimées plus fortement. Néanmoins l'expérience montre que tout se passe comme si  $E_b$  moyen instantané était plus grand. Naturellement pour les charges permanentes et les charges très fréquemment répétées, le fluage doit à la longue faire croître les flèches, correspondant d'ailleurs à une diminution de  $P$ . Celle-ci est cependant atténuée dans une mesure variable selon la constitution de la poutre précontrainte, par l'effet de la sollicitation, ainsi qu'il a été montré. Cet effet est majoré sous l'effet des charges permanentes ou fréquemment répétées, pourvu qu'il n'y ait pas de glissement des armatures.



### 8. Résistance aux efforts tranchants.

Les tensions tangentiellles et les tensions principales sur la fibre neutre se déterminent comme dans le cas de la précontrainte uniforme, moyennant l'observation des remarques suivantes.

a) Sur l'axe neutre

$$n'_b = \frac{n'_{ob} + n_{ob}}{2}$$

(voir page 36).

$n_{ob}$  étant pris avec son signe. En général,

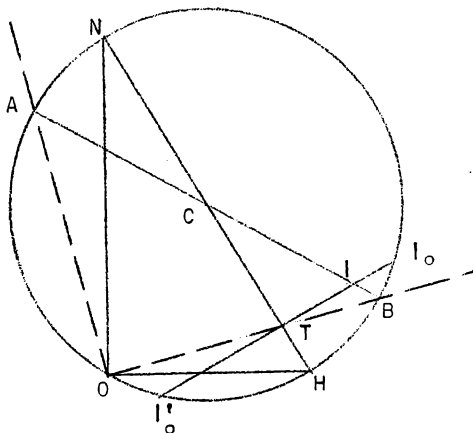
$$n'_b = \frac{R'_b + R_b}{2} \quad (= \frac{R'_b - |R_b|}{2} \text{ si } R_b \text{ est négatif}).$$

b) Si le câble est incliné par rapport à la fibre neutre dans la section considérée et admettant que la précontrainte  $P$  ne soit pas affectée de l'inclinaison, c'est-à-dire par le frottement, on se rapportera à l'effort tranchant réduit

$$T_r = T - P \sin \alpha$$

$\alpha$  étant l'angle entre  $P$  et la fibre neutre.

c) S'il y a des armatures d'effort tranchant non prétendues, généralement des étriers, on en tient compte comme dans le béton armé, mais elles n'entrent guère en jeu qu'après fissuration.



d) S'il y a des armatures de précontrainte normales à la fibre neutre, dans le plan de flexion, produisant une précontrainte  $n'_{obt}$  sur les facettes perpendiculaires au plan de flexion et passant par la fibre neutre, si  $\sigma''_{br}$  est la tension tangentielle réduite calculée, l'état de contrainte sur la fibre neutre se représente par le cercle ci-contre:

$$NT = n'_{ob}$$

$$TH = n'_{obt}$$

$$TI = \sigma''_{br}$$

$$AI = a = \sigma'_{b \max}$$

$$IB = b = \sigma'_{b \min}$$

$$IB = b = \frac{n'_{ob} + n'_{obt}}{2} - \sqrt{\left(\frac{n'_{ob} - n'_{obt}}{2}\right)^2 + \sigma''_{br}{}^2} .$$

Pour qu'il n'y ait pas de tension principale d'extension, il faut que IB soit  $\geq 0$  ou

$$\sigma''_{br} \leq \sqrt{n'_{ob} n'_{obt}} .$$

Donc

$$n'_{obt} \geq \frac{\sigma''_{br}{}^2}{n'_{ob}} .$$

1960.

\*\*\*\*\*