

UNIVERSITÉ DE LIÈGE

Faculté des Sciences Appliquées

Ferdinand CAMPUS

Professeur ordinaire à l'Université de Liège

COURS D'
HYDRAULIQUE APPLIQUÉE
FLUVIALE ET MARITIME

Université de Liège

BST - Sciences Appliquées et Métr.

1, Chemin des Chevreuils; Bât

B-4000 LIEGE

Fascicule V.

6^{me} Section : **Notions d'hydraulique fluviale.**

7^{me} Section : **Notions sur les cours d'eau à marée et les estuaires.**

1 9 6 3

Copyright 1961 by F. Campus.

Tous droits de reproduction et de traduction réservés.

Reproduction et traduction même partielles ne sont permises qu'avec autorisation écrite de l'auteur.

SOCIÉTÉ COOPÉRATIVE DE L'A. E. E. S.

9, rue Sœurs de Hasque, LIEGE

TABLE DES MATIERES

SIXIEME SECTION.- NOTIONS D'HYDRAULIQUE MARITIME

<u>Chapitre XXIII.- Mouvements ondulatoires périodiques.</u>	5
1.- Ondes d'oscillations	5
2.- Houle cylindrique régulière en profondeur indéfinie	5
3.- Propriétés de la houle orbitaire trochoïdale de profondeur indéfinie.	14
4.- Vitesses et débits de la houle trochoïdale.	16
5.- Amortissement de la houle	18
6.- Energie de la houle trochoïdale	18
7.- Houle irrotationnelle	20
8.- Composition des houles de faible amplitude relative	23
9.- Clapotis simple en profondeur indéfinie	24
10.- Clapotis complexe en profondeur indéfinie	29
11.- Gaufrage en profondeur indéfinie.	32
12.- Houle cylindrique régulière de faible amplitude en profondeur finie	34
13.- Vitesses et débits de la houle trochoïdale de faible amplitude en profondeur finie	39
14.- Cas où la longueur d'onde $2l$ est très grande par rapport à l'amplitude $2h$	40
15.- Ondes capillaires	45
16.- Clapotis simple en profondeur finie	46
17.- Clapotis simple en profondeur finie, très grande longueur d'onde.	49
18.- Seiches	50
19.- Houle irrotationnelle de Stokes	52
20.- Spectre des mouvements d'oscillation périodique.	55
21.- Escarpement maximum des houles.	56
22.- Instabilité et déferlement des houles en profondeur décroissante.	57
23.- Observations sur la houle et les vagues	59
24.- Appendice	61
<u>Chapitre XXIV.- Notions sur les marées.</u>	65
1.- Phénomène de la marée, observation locale	65
2.- Notions théoriques sur les causes des marées.	67
3.- Propagation et caractères de l'onde de marée.	72
4.- Interférence des ondes de marée	74
5.- Marées complexes réelles.	77
6.- Théorie élémentaire des courants de marée	79
7.- Courants produits par la marée dans un canal horizontal de section rectangulaire et de longueur indéfinie, sans frottement.	81
8.- Courants produits par la marée dans un canal horizontal de section rectangulaire et de longueur finie, sans frottement.	84
9.- Courants produits par la marée dans un canal horizontal de section rectangulaire et de longueur finie présentant un tronçon élargi, sans intervention de frottement.	86
10.- Courants produits par la marée dans un canal horizontal de section rectangulaire et de longueur finie débouchant dans un lac, sans intervention de frottement.	88

11.- Courants produits par la marée dans un canal horizontal de section rectangulaire et de longueur indéfinie, présentant du frottement . . .	90
12.- Courants produits par la marée dans un canal horizontal de section rectangulaire et de longueur finie, présentant du frottement	94
13.- Application de ces méthodes à l'étude des courants de marée dans un réseau de canaux	97
14.- Application à l'étude de la modification des marées par suite de la fermeture du Zuiderzee	100
15.- Courants produits par la marée dans un canal prismatique en pente de section rectangulaire, en tenant compte des frottements.	101
16.- Courants de marée dans un bassin communiquant avec une mer à marée .	102
17.- Seiche amortie par le frottement	110

SEPTIEME SECTION.- NOTIONS SUR LES COURS D'EAU A MAREE ET DES ESTUAIRES

<u>Chapitre XXV.- Régime des cours d'eau à marée et des estuaires</u>	117
1.- Phénomène de la marée fluviale	117
2.- Propagation des ondes de marée fluviales, mascaret	123
3.- Courants de marée fluviaux - Etales.	125
4.- Débits et vitesses des courants de marée fluviaux.	127
5.- Cubatures des volumes de marées fluviales.	131
6.- Déplacements des eaux douces et salées - Salinité.	135
7.- Considérations théoriques sur le mouvement des eaux dans les cours d'eau à marée.	140
<u>Chapitre XXVI.- Formes des cours d'eau à marée et des estuaires.</u>	145
1.- Formes du lit des rivières à marée	145
2.- Débit solide, marche et alluvions.	148
3.- Forme des estuaires - Embouchures.	152
<u>Chapitre XXVII.- Aménagement des cours d'eau à marée, des estuaires et des embouchures</u>	159
1.- Principes généraux d'aménagement et d'amélioration des cours d'eau à marée.	159
2.- Travaux d'aménagement et d'entretien des rivières à marée.	162
3.- Aménagement des estuaires.	164

*

SIXIEME SECTION

NOTIONS D'HYDRAULIQUE MARITIME

CHAPITRE XXIII

MOUVEMENTS ONDULATOIRES PERIODIQUES

1.- ONDES D'OSCILLATION

On a étudié précédemment les ondes de translation, caractérisées par un déplacement des molécules, déterminé par la longueur de l'onde. Elles ne se retrouvent donc pas à leurs positions initiales après le passage de l'onde. Dans une eau calme, des vitesses et des débits prennent naissance du fait de l'onde de translation et dans l'étendue de celle-ci, mais sont nuls avant et après le passage de l'onde.

Une onde d'oscillation a des caractères différents (du moins en première approximation). En eau calme, les particules liquides décrivent des trajectoires fermées et reviennent occuper périodiquement les mêmes positions. Pour cette raison, ce mouvement est appelé orbitaire. Le phénomène étant périodique, si l'on considère un temps assez long, à travers une section déterminée en eau calme, il n'y a pas de débit véritable, mais pulsation alternative avec débit total nul. A la surface libre, au lieu d'intumescences isolées et se déplaçant d'une manière indépendante, on trouve un ensemble d'ondulations dépendantes et continues, se propageant identiquement. La vitesse de propagation est appelée célérité.

On verra que le phénomène peut être moins simple. Il peut aussi être compliqué par la combinaison des ondes d'oscillations avec un courant, par les effets du vent et des variations de la pression atmosphérique, par des séismes, par la composition ou interférence de plusieurs ondes d'oscillation, enfin par la superposition d'ondes de translation aux mouvements oscillatoires. Des mathématiciens ont poussé très loin l'étude théorique de ces mouvements, basée sur des hypothèses se rapprochant déjà d'un ensemble compliqué de conditions réelles. Mais les mouvements réels ondulatoires sont le plus souvent d'une complexité inextricable. De telle sorte que les résultats théoriques doivent être considérés comme possibles, mais non nécessaires ni même très probables. On peut croire que les mouvements naturels en diffèrent toujours plus ou moins. Mais il est possible de produire en laboratoire des mouvements relativement simples qui y satisfont.

2.- HOULE CYLINDRIQUE REGULIERE EN PROFONDEUR INDEFINIE

On suppose l'eau au repos initialement. En mouvement, la surface libre possède à tout instant l'aspect d'un cylindre ondulé à génératrices horizontales. Le mouvement est identique dans tous les plans verticaux perpendiculaires à ces génératrices. Il est donc plan.

Considérons dans un de ces plans un axe vertical OZ et un axe horizontal OX, confondu avec le plan moyen de la surface libre en l'état de

mouvement ondulatoire. Le sens positif de l'axe OZ est vers le bas. Le sens positif de l'axe OX correspond à celui de la propagation ou de la célérité.

La houle cylindrique régulière consiste en un mouvement périodique du liquide, dont toutes les particules décrivent des orbites dans le plan vertical XOZ et tel que, sur une même horizontale, les mêmes circonstances : déplacements, vitesses, etc..., se reproduisent périodiquement et à des intervalles de temps proportionnels aux distances à OZ en chaque point. F. von Gerstner (Prague, 1802) le premier a énoncé la loi qu'en profondeur indéfinie les orbites sont circulaires et que la vitesse de la molécule sur l'orbite est constante. La position moyenne de la particule en mouvement est au centre M du cercle orbital. Appelant X et Z les coordonnées de cette position moyenne, indépendantes du temps, ξ et ζ les composantes du déplacement par rapport à la position moyenne, les coordonnées de la position instantanée P d'une particule liquide sont :

$$x = X + \xi, \quad z = Z + \zeta. \quad (1)$$

La houle cylindrique régulière en profondeur indéfinie répond aux équations

$$\left. \begin{aligned} x = X + \xi &= X + r \sin \frac{\pi}{l} (V.t - X), \\ z = Z + \zeta &= Z - r \cos \frac{\pi}{l} (V.t - X). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

r est le rayon du cercle orbital : $r = \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}$.

l est la demi-longueur d'onde.

V est la célérité.

A la surface $r = h$, demi-amplitude des oscillations de la surface.

Pour satisfaire aux équations de l'hydrodynamique, il faut que

$$r = h \cdot e^{-\frac{\pi z}{l}} = h \cdot e^{-\frac{z}{R}} \quad (2)$$

en posant $R = \frac{l}{\pi}$.

Donc le rayon orbital décroît de la surface libre jusque sur le fond à l'infini, où il est nul.

La décroissance est très rapide.

$\frac{z}{l} = \frac{z}{\pi \cdot R} =$	0,1	0,5	1	2	3
$e^{-\frac{\pi z}{l}} = e^{-\frac{z}{R}} =$	0,730	0,208	0,043	0,0018	0,0008

La position du point P à l'état de repos (ou position d'équilibre) n'est pas confondue avec la position moyenne M. Elle est P₀, sur la même verticale que M, mais située en dessous d'une longueur :

$$\frac{r^2}{2 R} = \frac{\pi \cdot r^2}{2 l} = \frac{\pi}{2 l} \cdot h^2 \cdot e^{-\frac{2\pi Z}{l}} \quad (3)$$

Il en résulte que la position de repos de la surface libre ou plan d'eau d'équilibre $O'X'$ est située sous le plan moyen de la surface libre OX de la longueur

$$OO' = \frac{h^2}{2 R} = \frac{\pi \cdot h^2}{2 l} \quad (4)$$

On peut dès lors tracer la représentation de la figure 1.

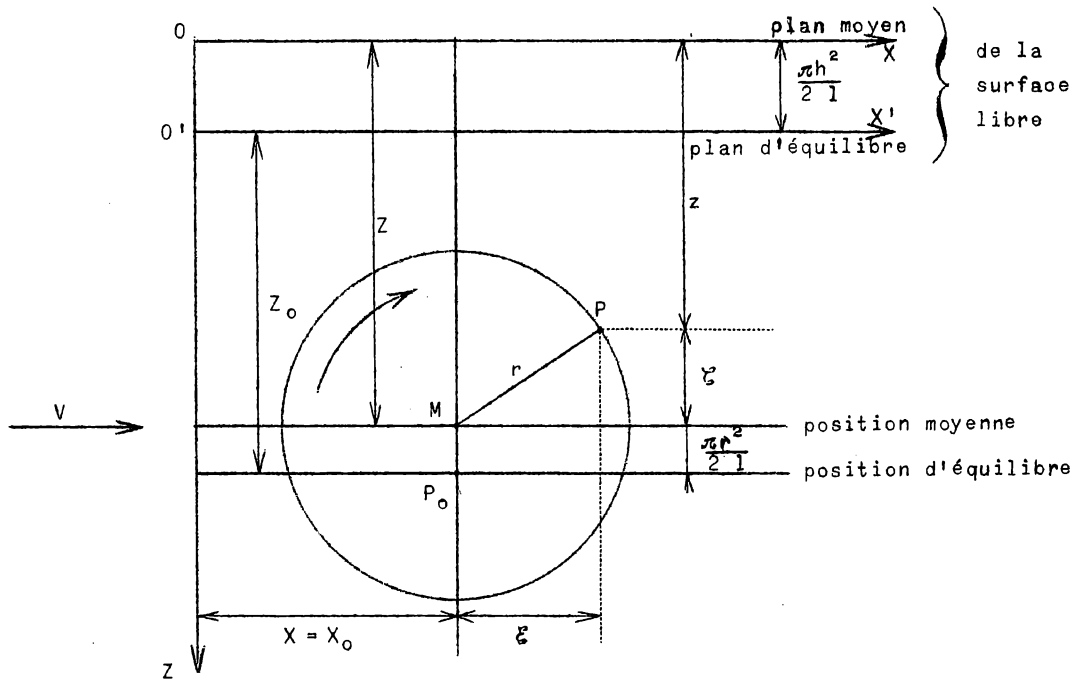


Fig. 1.

Les coordonnées de la position d'équilibre P_0 sont :

$$x_0 = X \quad (\text{par rapport à } OZ) \quad (5)$$

$$Z_0 = Z - \frac{\pi}{2 l} (h^2 - r^2) = Z - \frac{\pi \cdot h^2}{2 l} (1 - e^{-\frac{2\pi Z}{l}})$$

par rapport à l'axe $O'X'$ (plan d'équilibre de la surface libre). Donc, pour un point de la surface libre :

en mouvement $Z = 0$,

au repos $Z_0 = 0$.

On vérifie que ces formules satisfont aux lois générales de l'hydrodynamique des liquides parfaits. L'expérience montre que la viscosité de l'eau est négligeable; l'extinction de la houle est très lente. On se réfère donc aux équations d'Euler.

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{du}{dt}, \quad \frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = g - \frac{dw}{dt} \quad (6)$$

On a

$$\left. \begin{aligned} u = \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\pi \cdot r}{l} \cdot V \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) = \frac{\pi \cdot h \cdot V}{l} \cdot e^{-\frac{\pi z}{l}} \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) \\ w = \frac{d\zeta}{dt} &= \frac{\pi \cdot r}{l} \cdot V \cdot \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X) = \frac{\pi \cdot h \cdot V}{l} \cdot e^{-\frac{\pi z}{l}} \cdot \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Mais x et z sont fonction de X et Z .

$$\left. \begin{aligned} \text{Donc} \quad \frac{\partial p}{\partial X} &= \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial X}, \\ \frac{\partial p}{\partial Z} &= \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial Z} + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial Z}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

De (6) et (8), on déduit

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} = - \frac{du}{dt} \cdot \frac{dx}{dX} - \left(\frac{dw}{dt} - g \right) \cdot \frac{\partial z}{\partial X} \quad (9a)$$

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial Z} = - \frac{du}{dt} \cdot \frac{\partial x}{\partial Z} - \left(\frac{dw}{dt} - g \right) \cdot \frac{\partial z}{\partial Z} \quad (9b)$$

De (7) et (9a), on déduit :

$$\frac{du}{dt} = \frac{-\pi^2}{T^2} \cdot \xi, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{-\pi^2}{T^2} \cdot \zeta,$$

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} = \left[\frac{\pi \cdot h}{l} \cdot e^{-\frac{\pi z}{l}} \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X) \right] \cdot \left(\frac{\pi}{l} \cdot V^2 - g \right) \quad (10)$$

A la surface libre, pour $Z = 0$, la pression est constante et égale à la pression atmosphérique p_a .

$$\text{Donc} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial X} \right)_{z=0} = \left[\frac{\pi \cdot h}{l} \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X) \right] \cdot \left(\frac{\pi}{l} \cdot V^2 - g \right) = 0,$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\pi}{l} \cdot V^2 - g = 0, \quad V = \sqrt{\frac{g \cdot l}{\pi}} \quad (11)$$

$$\text{Comme} \quad V = \frac{l}{T},$$

$$\text{la demi-période est} \quad T = \sqrt{\frac{\pi \cdot l}{g}} \quad (12)$$

Il en résulte que $\frac{\partial p}{\partial X} = 0$ toujours, p est donc indépendant de X (et X_0).

De (7) et (9b), on déduit, après développement et en tenant compte de (11),

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial Z} = g \cdot \left(1 - \frac{\pi^2 \cdot h^2}{l^2} \cdot e^{-\frac{2\pi Z}{l}} \right)$$

Comme p est indépendant de X ,

$$p = p_a + \rho_e \cdot g \cdot \left[Z - \frac{\pi \cdot h^2}{2 l} \cdot \left(1 - e^{-\frac{2\pi Z}{l}} \right) \right]$$

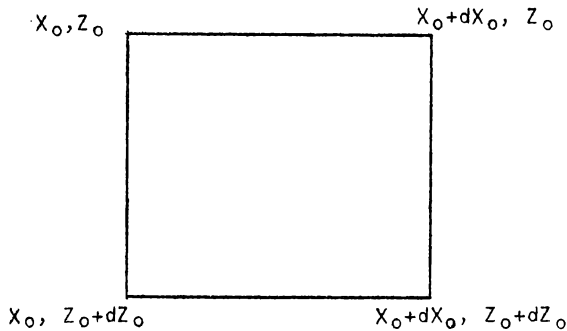
En tenant compte de (5),

$$p = p_a + \rho_e \cdot g \cdot Z_o \tag{13}$$

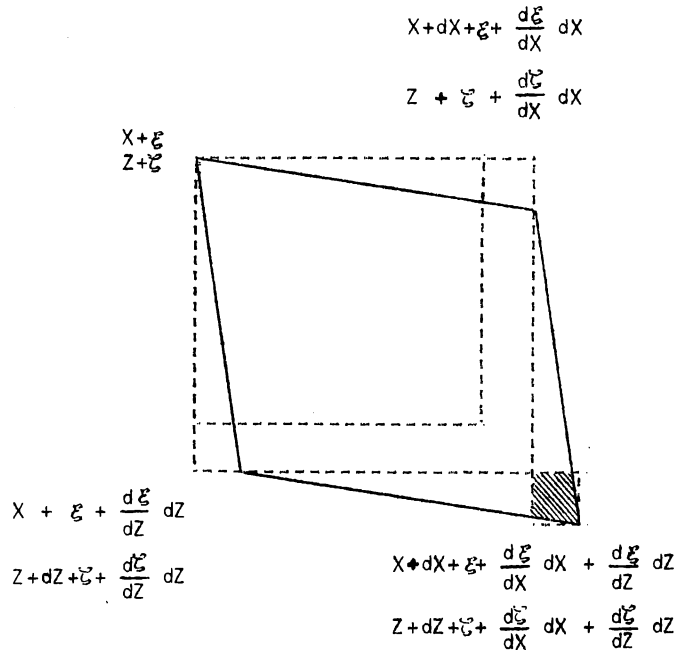
Donc, chaque particule d'eau reste soumise à la même pression en état de mouvement qu'à l'état de repos. Les particules situées à l'état de repos sur une même horizontale constituant à tout instant une surface d'égale pression appelée surface d'onde et définie par les équations (1), (13) et (5).

Il reste à vérifier que l'équation de continuité est satisfaite. On peut recourir à la forme suivante de l'équation de continuité due à M. Le Besnerais.

A l'état de repos (fig. 2a), on considère un rectangle dont les coordonnées initiales des deux sommets opposés sont X_o, Z_o , $X_o + dX_o$ et $Z_o + dZ_o$. Sa surface est $dX_o \cdot dZ_o$.



(a)



(b)

Fig. 2.

A l'état de mouvement, la surface doit être restée la même en grandeur, en vertu du principe de continuité des liquides incompressibles. Mais le rectangle est déformé en un parallélogramme dont les sommets ont comme coordonnées (fig. 2b) :

$$\begin{aligned}
 X + \zeta, \quad Z + \zeta & \quad X + dX + \zeta + \frac{d\zeta}{dX} \cdot dX, \\
 & \quad Z + \zeta + \frac{d\zeta}{dX} \cdot dX \\
 X + \zeta + \frac{d\zeta}{dZ} \cdot dZ, & \quad X + dX + \zeta + \frac{d\zeta}{dX} \cdot dX + \frac{d\zeta}{dZ} \cdot dZ, \\
 Z + dZ + \zeta + \frac{d\zeta}{dZ} \cdot dZ & \quad Z + dZ + \zeta + \frac{d\zeta}{dX} \cdot dX + \frac{d\zeta}{dZ} \cdot dZ
 \end{aligned}$$

L'expression de l'aire du parallélogramme déformé, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur peut s'écrire :

$$(dX + \frac{d\zeta}{dX} \cdot dX) \cdot (dZ + \frac{d\zeta}{dZ} \cdot dZ) - \frac{d\zeta}{dZ} \cdot dZ \cdot \frac{d\zeta}{dX} \cdot dX$$

En égalant à $dX_0 \cdot dZ_0$ et divisant par $dX \cdot dZ$, on obtient :

$$(1 + \frac{d\zeta}{dX}) \cdot (1 + \frac{d\zeta}{dZ}) - \frac{d\zeta}{dZ} \cdot \frac{d\zeta}{dX} = \frac{dX_0}{dX} \cdot \frac{dZ_0}{dZ}$$

ou
$$\frac{dx}{dX} \cdot \frac{dz}{dZ} - \frac{dx}{dZ} \cdot \frac{dz}{dX} = \frac{dZ_0}{dZ} \quad (14)$$

car
$$\frac{dX_0}{dX} = 1 .$$

En vertu des formules (1), on trouve

$$\frac{dZ_0}{dZ} = 1 - \frac{\pi^2 \cdot h^2}{l^2} \cdot e^{-\frac{2\pi Z}{l}}$$

ce qui est une identité, d'après les équations (5).

On peut vérifier l'équation de continuité sous sa forme classique

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (14 \text{ bis})$$

X et Z étant les variables indépendantes, on écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial X}, \quad \frac{\partial u}{\partial Z} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial Z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial Z},$$

d'où
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial X}}{\frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial x}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial X}} \quad (15 \text{ a})$$

$$\frac{\partial w}{\partial X} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial X}, \quad \frac{\partial w}{\partial Z} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial Z},$$

d'où
$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\frac{\partial w}{\partial Z} \frac{\partial x}{\partial X} - \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial x}{\partial Z}}{\frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial x}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial X}} \quad (15 \text{ b})$$

D'après les équations (1)

$$\frac{\partial x}{\partial X} = 1 + \frac{\pi}{l} \zeta, \quad \frac{\partial z}{\partial X} = -\frac{\pi}{l} \xi, \quad \frac{\partial x}{\partial Z} = -\frac{\pi}{l} \xi, \quad \frac{\partial z}{\partial Z} = 1 - \frac{\pi}{l} \zeta$$

D'après les formules (7),

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\pi^2}{T.l} \zeta, \quad \frac{\partial u}{\partial Z} = \frac{\pi^2}{T.l} \zeta, \quad \frac{\partial w}{\partial X} = \frac{\pi^2}{T.l} \zeta, \quad \frac{\partial w}{\partial Z} = -\frac{\pi^2}{T.l} \zeta$$

En introduisant ces termes dans (14 bis), (15 a) et (15 b), on a :

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial Z} \frac{\partial x}{\partial X} - \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial x}{\partial Z}}{\frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial x}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial X}} = 0 \quad (16)$$

ou

$$\frac{\pi^2}{T.l} \zeta \left(1 - \frac{\pi \zeta}{l}\right) + \frac{\pi^3}{T.l^2} \zeta^2 - \frac{\pi^2}{T.l} \zeta \left(1 + \frac{\pi \zeta}{l}\right) + \frac{\pi^3}{T.l^2} \zeta^2 = -\frac{\pi^2}{T.l} \zeta \cdot \frac{2 \pi \zeta}{l} - \frac{2 \pi^3}{T.l^2} \zeta^2 = 0$$

Donc l'équation de continuité est bien satisfaite.

La formule (16) peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial X} \right) \cdot \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial Z} \right) \cdot \frac{\partial z}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial Z} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial X} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial Z} = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial x}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial X} \right) = 0$$

ce qui vérifie la relation (14).

Les équations d'une surface d'onde sont donc :

$$\left. \begin{aligned} x &= X + h.e^{-\frac{\pi Z}{l}} \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X) \\ z &= Z - h.e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) \end{aligned} \right\} \quad (1 \text{ bis})$$

L'équation de la surface libre en mouvement est

$$\left. \begin{aligned} x &= X + h.\sin \frac{\pi}{l}(Vt-X) \\ z &= -h.\cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) \end{aligned} \right\} \quad (1 \text{ ter})$$

Ces courbes sont des trochoïdes d'amplitude

$$2r = 2h.e^{-\frac{\pi Z}{l}}$$

soit 2 h en surface.

L'aire d'une onde de trochoïde par rapport au plan moyen Z est

$$-h.e^{-\frac{\pi Z}{l}} \int_0^{2l} \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X).dx$$

pour t = constante.

$$\begin{aligned} \text{Pour } x &= 0 & V.t - X &= 0 \\ x &= 2l & V.t - X &= 2l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dx &= dX - \frac{\pi}{l} \cdot h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) dX = \left[1 - \frac{\pi \cdot h}{l} \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) \right] \cdot dX \\
 &- h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \int_0^{2l} \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) \cdot \left[1 - \frac{\pi \cdot h}{l} \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) \right] \cdot dX = \\
 &= 0 + \frac{\pi \cdot h^2 \cdot e^{-\frac{2\pi Z}{l}}}{l} \int_0^{2l} \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{l}(Vt-X)}{2} \cdot dX \\
 &= \pi \cdot h^2 \cdot e^{-\frac{2\pi Z}{l}}
 \end{aligned}$$

Donc l'ordonnée moyenne, correspondant à la position initiale ou d'équilibre est $\frac{\pi \cdot h^2 \cdot e^{-\frac{2\pi Z}{l}}}{2l}$.

Le plan d'équilibre de la surface libre est donc sous le plan moyen de $\frac{\pi \cdot h^2}{2l}$. Les indications de la figure 1 sont ainsi vérifiées et l'on a bien

$$Z_0 = Z - \frac{\pi \cdot h^2}{2l} \cdot \left(1 - e^{-\frac{2\pi Z}{l}} \right) \quad (5)$$

La trochoïde est la trajectoire d'un point situé à distance r du centre d'un cercle de rayon $R = \frac{1}{\pi}$ roulant sans glisser sur une horizontale en se déplaçant dans le sens de la propagation des ondes.

C'est aussi la courbe décrite par un point parcourant la circonférence de cercle de rayon r à la vitesse angulaire constante

$$\omega = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi \cdot V}{l}$$

dans le sens du mouvement orbital réel, tandis que le centre de ce cercle se déplace sur une horizontale à une vitesse uniforme V dans le sens de la propagation.

Si l'on imprime à toute la masse liquide en mouvement une vitesse de translation uniforme V en sens inverse de la propagation réelle des ondes, les surfaces d'ondes sont immobilisées. Ces trochoïdes peuvent être considérées comme engendrées par un point parcourant un cercle de rayon r à la vitesse angulaire ω dans le sens réel du mouvement orbital, dont le centre se déplace sur une horizontale en mouvement uniforme de vitesse égale à la célérité V et en sens inverse de celle-ci.

La figure 3 reproduit la forme des trochoïdes. On remarque que les crêtes sont moins longues que les creux.

La valeur supérieur de r est $R = \frac{1}{\pi}$.

Alors $\omega \cdot r = \omega \cdot R = \frac{\omega \cdot l}{\pi}$. Or $\omega = \frac{\pi}{T}$, donc $\omega \cdot R = \frac{l}{T} = V$. La trochoïde devient alors une cycloïde en surface ($h = R$). Les crêtes présentent des

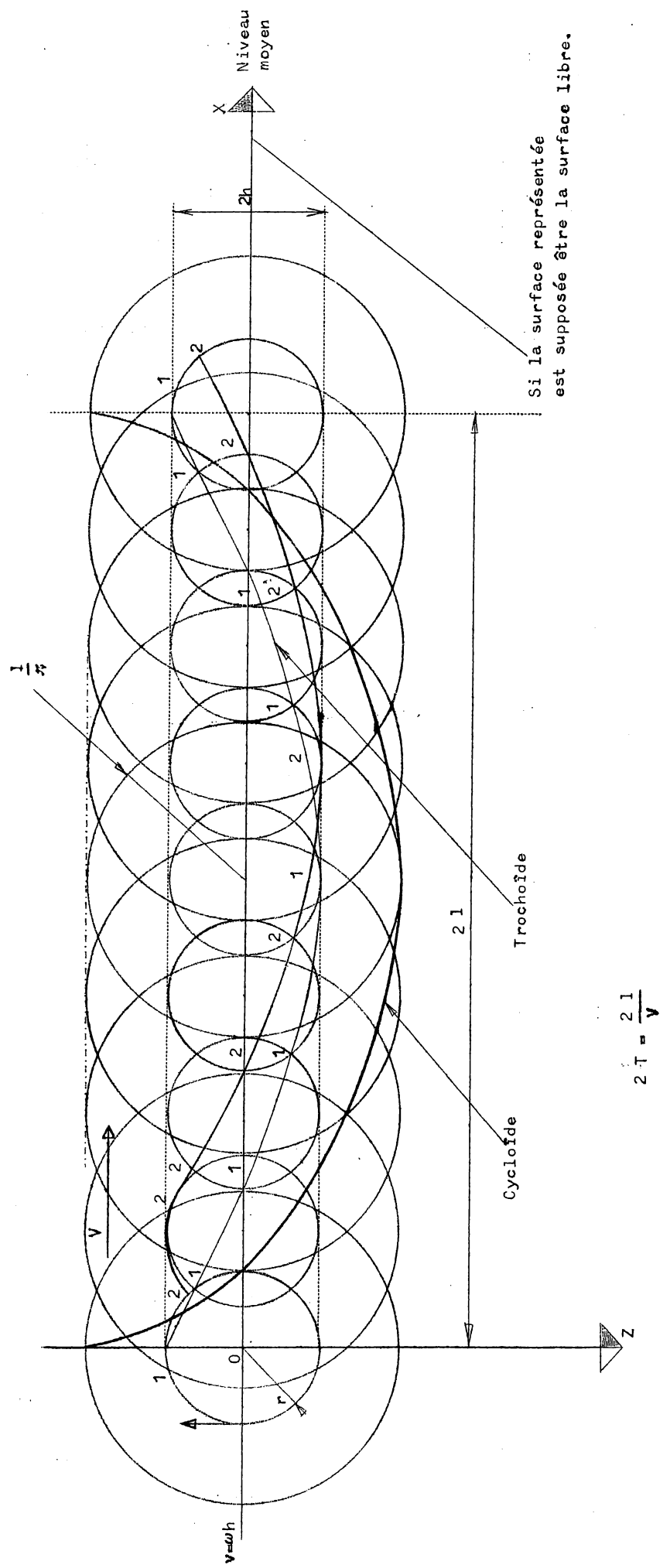


Fig. 3.

points de rebroussement. En dessous de la surface libre, $r < h$, donc $r < R$. La forme de cycloïde est une forme limite qui n'est concevable qu'à la surface libre. Si h était plus grand que R , la surface libre présenterait des points nodaux et des boucles aux crêtes, ce qui est physiquement impossible, comme il est montré plus loin.

3.- PROPRIETES DE LA HOULE ORBITAIRE TROCHOÏDALE EN PROFONDEUR INDEFINIE

Ainsi qu'il a été établi, tous les points situés à l'état de repos à une profondeur Z_0 sous la surface libre d'équilibre et soumis à une pression $p = p_a + \rho_e \cdot g \cdot Z_0$, sont situés à l'état de mouvement sur une surface d'onde trochoïdale et soumis à la même pression.

Toutes les molécules décrivent des orbites circulaires à vitesse angulaire constante

$$\omega = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi \cdot V}{l}$$

Les rayons des cercles orbitaires décroissent très rapidement à partir de la surface lorsque la profondeur augmente et ce d'autant plus que la houle est plus courte; c'est-à-dire que l ou $R = \frac{l}{\pi}$ est plus petit.

En effet $r = h \cdot e^{-\frac{\pi z}{l}} = h \cdot e^{-\frac{z}{R}}$

Le centre du cercle orbitaire est à la hauteur $\frac{r^2}{2R}$ au-dessus de la position de repos. Les surfaces d'onde se déplacent avec une célérité uniforme

$$V = \sqrt{\frac{g \cdot l}{\pi}} = R \cdot \omega = \frac{l \cdot \omega}{\pi}$$

De $\sqrt{\frac{g \cdot l}{\pi}} = \frac{l \cdot \omega}{\pi}$

on déduit $\frac{l}{\pi} = R = \frac{g}{\omega^2}$

D'où $V = \frac{l \cdot \omega}{\pi} = \frac{g}{\omega}$ (17)

Si l'on considère la trochoïde résultant du roulement du cercle de rayon R dans le sens de la célérité $V = R \cdot \omega$ et engendrée par le point M situé à distance r du centre C et invariablement lié au cercle de roulement (fig. 4), le point de contact A du cercle générateur sur l'horizontale de roulement est le centre instantané de rotation. AM est donc la normale au profil de l'onde. La poussée qui s'exerce sur la molécule M de masse m doit équilibrer son poids mg et la force d'inertie centrifuge $m \cdot \omega^2 \cdot r$.

Ces deux forces sont dirigées suivant AC et CM .

Comme $g = \frac{l \cdot \omega^2}{\pi} = R \cdot \omega^2$, ces deux forces sont égales à $m \cdot \omega^2 \cdot R$ et $m \cdot \omega^2 \cdot r$, ou $m \cdot \omega^2 \cdot AC$ et $m \cdot \omega^2 \cdot CM$.

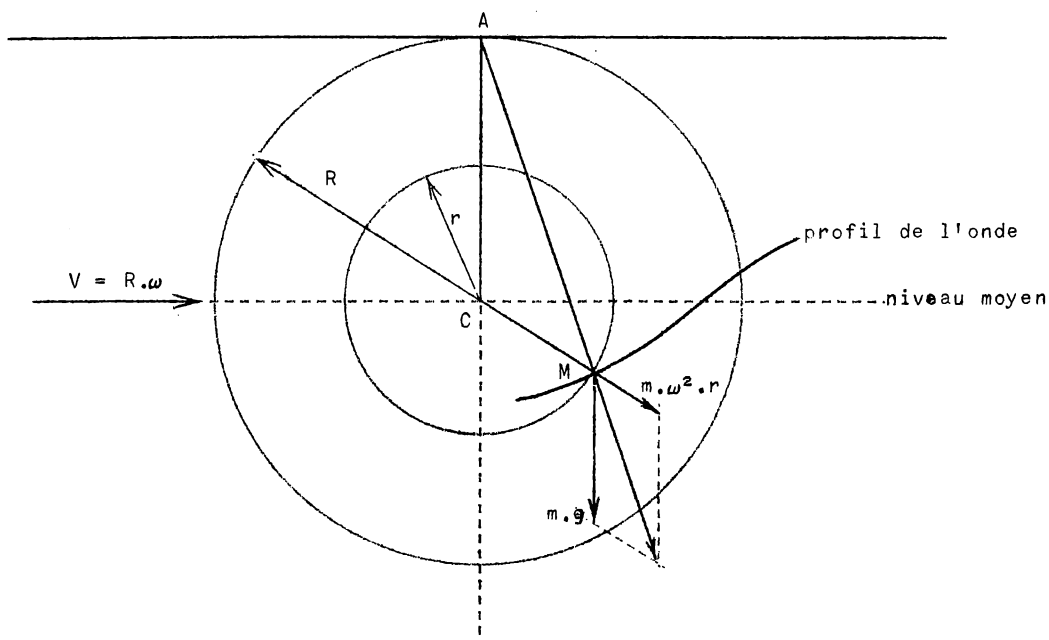


Fig. 4.

Par conséquent, leur résultante est dirigée suivant AM et égale à $m.\omega^2.AM$. La poussée s'exerçant sur la molécule est donc normale à la surface d'onde et vaut

$$m.\omega^2.AM = m.g. \frac{AM}{AC} = m.g. \frac{AM}{R}$$

Elle varie périodiquement entre $m.g.(1 - \frac{r}{R})$ aux crêtes et $m.g.(1 + \frac{r}{R})$

aux creux. L'angle ACM vaut $\frac{\pi}{l} . (V.t - X) = \frac{V.t - X}{R}$.

Si $r = R$, ce qui correspond à une houle qui serait cycloïdale à la surface libre : $r = h = R$, la poussée serait nulle en crête. On serait donc à la limite de la stabilité. Donc, il faut $h < R$ ainsi qu'il a été indiqué plus haut.

Toutes les molécules qui se trouvent sur une même verticale X_0 à l'état de repos, sont à chaque instant en période de mouvement sur une courbe appelée verticale dynamique, dont l'équation est

$$\begin{aligned} x &= X + \xi = X_0 + \xi \\ z &= Z + \zeta = Z_0 + \frac{\pi.h^2}{2l} . (1 - e^{-\frac{2\pi Z}{l}}) + \zeta \end{aligned} \quad (18)$$

Ces courbes se déplacent périodiquement de part et d'autre de la verticale de repos moyenne. Les positions extrêmes correspondent à

$$x = X_0 \pm r, \quad z = Z = Z_0 + \frac{\pi.h^2}{2l} . (1 - e^{-\frac{2\pi Z}{l}})$$

Le coefficient angulaire de la tangente à la verticale dynamique est

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{dZ}}{\frac{dx}{dZ}} = \frac{1 + \frac{d\xi}{dZ}}{1 + \frac{d\xi}{dZ}} = \frac{1 + \frac{h}{R} \cdot e^{-\frac{Z}{R}} \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X)}{-\frac{h}{R} \cdot e^{-\frac{Z}{R}} \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X)} = - \frac{\frac{R}{r} + \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X)}{\sin \frac{\pi}{l}(Vt-X)}$$

Le coefficient angulaire de la trochoïde au même point correspond à

$$Z = \text{constante} = Z_0 + \frac{\pi \cdot h^2}{2l} \cdot \left(1 - e^{-\frac{2\pi Z}{l}}\right)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{dX}}{\frac{dx}{dX}} = \frac{\frac{d\xi}{dX}}{1 + \frac{d\xi}{dX}} = \frac{-\frac{r \cdot \pi}{l} \cdot \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X)}{1 + \frac{r \cdot \pi}{l} \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X)} = - \frac{\sin \frac{\pi}{l}(Vt-X)}{\frac{R}{r} + \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X)}$$

Il en résulte que la tangente à la verticale dynamique est symétrique de la normale à la courbe d'onde par rapport à la verticale.

La houle trochoïdale est entièrement définie par sa longueur d'onde $2l$ et son rayon orbital en surface h , égal à la demi-amplitude. La

période est $2T = 2 \sqrt{\frac{\pi \cdot l}{g}}$,

la pulsation $\omega = \frac{\pi}{T}$.

4.- VITESSES ET DEBITS DE LA HOULE TROCHOÏDALE

La molécule M (fig. 5) en mouvement est animée d'une vitesse $v = \omega \cdot r$ tangente au cercle orbital

$$v = \frac{\pi \cdot r}{l} V = \frac{r}{R} V$$

$$= \frac{h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}}}{R} V \quad (19)$$

Cette vitesse décroît donc depuis la surface, où elle vaut

$\frac{h}{R} \cdot V$, jusqu'au fond à l'infini, où elle est nulle.

Cette vitesse a une composante verticale

$$w = \xi \cdot \omega$$

$$= r \cdot \omega \cdot \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X) \quad (20)$$

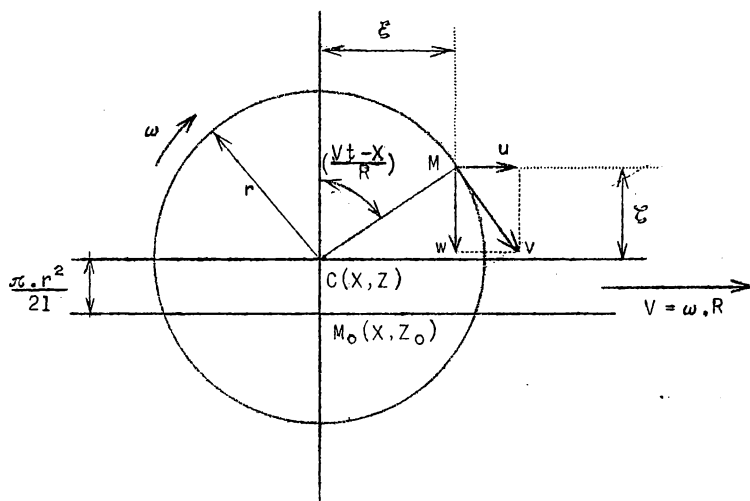


Fig. 5.

positive vers le bas. Elle s'annule à la crête et au creux. Elle est maximum et égale à $\omega \cdot r$ en valeur absolue pour

$$z = Z, \quad \zeta = 0.$$

La composante horizontale est

$$u = -\zeta \cdot \omega = r \cdot \omega \cdot \cos \frac{\pi}{l}(vt-X) \quad (20 \text{ bis})$$

Elle est positive dans le sens de la célérité. Elle est maximum en valeur absolue à la crête et au creux; elle y vaut

$$\pm \omega \cdot r = \pm \frac{h \cdot e^{-\frac{\pi \cdot z}{R}}}{R} \cdot \dot{V}$$

Elle est nulle au niveau moyen

$$z = Z, \quad \zeta = 0.$$

Il en résulte à travers les verticales dynamiques un débit alternatif périodique, maxima en valeur absolue, égaux et de sens contraire au sommet et au creux.

Au sommet, le débit est dans le sens de la célérité et vaut

$$Q_{\max} = \frac{\pi \cdot V}{l} \int_0^{\infty} r \cdot dz = \frac{\pi \cdot V \cdot h}{l} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi \cdot z}{l}} \left(1 + \frac{\pi \cdot h}{l} \cdot e^{-\frac{\pi \cdot z}{l}}\right) \cdot dz$$

$$Q_{\max} = \frac{\pi \cdot V \cdot h}{l} \cdot \left(\frac{1}{\pi} + \frac{h}{2}\right) = V \cdot \left(h + \frac{\pi \cdot h^2}{2l}\right) = V \cdot \eta_{\max},$$

en désignant par $\eta_{\max} = h + \frac{\pi \cdot h^2}{2l}$

l'élévation maximum des crêtes au dessus du plan d'eau d'équilibre.

Au creux, on a un débit en sens inverse de la célérité

$$Q_{\min} = -\frac{\pi \cdot V}{l} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi \cdot z}{l}} \cdot \left(1 - \frac{\pi \cdot h}{l} \cdot e^{-\frac{\pi \cdot z}{l}}\right) \cdot dz = -\frac{\pi \cdot V \cdot h}{l} \cdot \left(\frac{1}{\pi} - \frac{h}{2}\right)$$

$$Q_{\min} = -V \cdot \left(h - \frac{\pi \cdot h^2}{2l}\right) = -V \cdot \eta_{\min}$$

en appelant η_{\min} la profondeur maximum des creux sous le plan d'eau d'équilibre.

Si par approximation on considère pour le débit à travers une verticale dynamique

$$Q_{xt} = \frac{\pi \cdot V}{l} \cdot h \cdot \cos \frac{\pi}{l}(vt-X) \int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi \cdot z}{l}} \left[1 + \frac{\pi \cdot h}{l} \cdot e^{-\frac{\pi \cdot z}{l}} \cdot \cos \frac{\pi}{l}(vt-X)\right] \cdot dz$$

$$Q_{xt} = V \cdot \cos \frac{\pi}{l}(vt-X) \cdot \left[h + \frac{\pi \cdot h^2}{2l} \cdot \cos \frac{\pi}{l}(vt-X)\right]$$

Ce débit est maximum au sommet et minimum au creux de la houle; il est alors relatif à la section droite verticale de repos. Il s'annule au niveau moyen ($z = Z, \quad \zeta = 0$).

Les vitesses changent en effet, simultanément de sens sur les verticales dynamiques extrêmes.

5.- AMORTISSEMENT DE LA HOULE

On a admis, dans les exposés précédents, que la houle obéissait aux équations d'Euler, ce qui implique qu'il s'agit d'un liquide parfait. Les observations montrent que la viscosité et les frottements ont des effets très faibles. Il y a donc une faible dissipation d'énergie et un amortissement très lent.

Si h_0 est la demi-amplitude initiale de la houle, à une distance X de l'origine de la houle, elle sera réduite à

$$h = h_0 \cdot e^{-\alpha X}$$

d'après M. Boussinesq.

M. Le Besnerais écrit
$$h = h_0 \cdot e^{-\beta t}$$

t étant le temps nécessaire pour parcourir la distance X . Les deux coefficients α et β établissent que la décroissance est très lente et beaucoup plus lente pour les houles longues que pour les houles courtes.

M. Eydoux indique qu'en prenant pour le coefficient de viscosité l'expression de Poiseuille (cfr chapitre VI, par. 2), on a

$$\alpha = 3 \cdot 10^{-2} \cdot l^{-2,5} = 17 \cdot 10^{-9} \cdot T^{-5}$$

Pour $l = 100$ m, il faudrait que la houle parcourut 33 200 m pour décroître de $1/100^e$ de sa hauteur.

Lorsqu'un ouragan donne naissance à une agitation dans une région d'un océan, il se produit des houles diverses, généralement de périodes harmoniques de la période $2 T$ des rafales. Une épuration des ondes se produit au fur et à mesure de leur déplacement et, à une distance assez grande de l'origine, il ne subsistera plus qu'une onde de période $2 T$. Selon M. Boussinesq, le coefficient d'extinction est proportionnel à la 5^e puissance du degré de l'harmonique. C'est-à-dire que pour les harmoniques d'ordre :

1 (onde fondamentale)	2	3	4
les coefficients d'extinction sont proportionnels à			
1	32	243	1024

L'usure des harmoniques est donc beaucoup plus rapide que celle de l'onde fondamentale.

6.- ENERGIE DE LA HOULE TROCHOÏDALE

La vitesse de la molécule M de masse m est $v = \omega \cdot r$. La molécule possède donc une énergie cinétique

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r^2}{2} = \frac{m \cdot g \cdot \pi \cdot r^2}{2 l}$$

La molécule est aussi déplacée de sa position d'équilibre. Son énergie potentielle est égale au produit de son poids par l'élévation de la posi-

tion moyenne au-dessus du niveau d'équilibre $\frac{\pi \cdot r^2}{2 l}$. Elle est donc égale à $\frac{m \cdot g \cdot \pi \cdot r^2}{2 l}$, c'est-à-dire égale à l'énergie cinétique. L'énergie totale est $\frac{m \cdot g \cdot \pi \cdot r^2}{l}$.

Pour une tranche de houle égale à une longueur d'onde complète $2 l$ et de largeur égale à l'unité, sur toute la profondeur, l'énergie cinétique vaut

$$E_c = \int_0^\infty \varphi_e \cdot 2 l \cdot \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2} \cdot dZ_o = \varphi_e \cdot l \cdot \omega^2 \cdot \int_0^\infty r^2 \cdot dZ_o$$

Or $\omega^2 = \frac{\pi \cdot g}{l}$, donc $E_c = \pi \cdot \gamma_e \cdot \int_0^\infty r^2 \cdot dZ_o$ (21)

L'énergie potentielle est

$$E_p = \int_0^\infty \gamma_e \cdot 2 l \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{2 l} \cdot dZ_o = \pi \cdot \gamma_e \cdot \int_0^\infty r^2 \cdot dZ_o = E_c$$

Donc, l'énergie totale est

$$E = 2 \pi \cdot \gamma_e \cdot \int_0^\infty r^2 \cdot dZ_o$$
 (22)

Mais $Z_o = Z - \frac{\pi \cdot h^2}{2 l} \cdot (1 - e^{-\frac{2 \pi Z}{l}})$

$$dZ_o = dZ \cdot (1 - \frac{\pi^2 \cdot h^2}{l^2} \cdot e^{-\frac{2 \pi Z}{l}})$$

d'où $E = 2 \pi \cdot \gamma_e \cdot h^2 \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{2 \pi Z}{l}} \cdot (1 - \frac{\pi^2 \cdot h^2}{l^2} \cdot e^{-\frac{2 \pi Z}{l}}) \cdot dZ$

$$E = \gamma_e \cdot h^2 \cdot l \cdot (1 - \frac{\pi^2 \cdot h^2}{2 l^2})$$
 (23)

On se rend compte, par la rapidité de la décroissance de $r^2 = h^2 \cdot e^{-\frac{2 \pi Z}{l}}$, que la majeure partie de l'énergie est concentrée vers la surface. On peut considérer qu'elle est contenue presque toute entière dans la tranche de profondeur $Z = l$, puisque pour

$$\frac{Z}{l} = 1, \quad e^{-\frac{2 \pi Z}{l}} = 0,0018.$$

On peut écrire $E = \gamma_e \cdot h^2 \cdot \frac{\pi \cdot V^2}{g} \cdot (1 - \frac{\pi^2 \cdot h^2}{2 l^2})$

$$E = \rho_e \cdot \pi \cdot h^2 \cdot V^2 \left(1 - \frac{\pi^2 \cdot h^2}{2 l^2}\right) \quad (24)$$

Pour $2 l = 100$ m, $2 h = 4$ m, on trouve

$$E = 200.000 (1 - 0,008) \text{ kgm} = 198 400 \text{ kgm}$$

par m de largeur.

La moitié cinétique de cette énergie est stationnaire dans la houle orbitale examinée dans les paragraphes précédents. Seule l'énergie potentielle se propage.

7.- HOULE IRROTATIONNELLE

Le vecteur tourbillon de la houle de Gerstner n'est pas nul.

D'après le paragraphe 2, on a

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial x}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Z}}{\frac{\partial z}{\partial Z} \frac{\partial x}{\partial X} - \frac{\partial z}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Z}},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial w}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial X}}{\frac{\partial z}{\partial Z} \frac{\partial x}{\partial X} - \frac{\partial z}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Z}}$$

Le vecteur tourbillon $\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$ vaut donc :

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial x}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Z} \frac{\partial x}{\partial Z}}{\frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial z}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Z}}$$

En remplaçant ces dérivées partielles par leurs valeurs du paragraphe 2, on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\frac{2 \pi^3}{T \cdot l^2} \cdot r^2}{1 - \frac{\pi^2}{l^2} r^2} = \frac{2 \frac{\pi^2}{l^2} \omega \cdot r^2}{1 - \frac{\pi^2}{l^2} r^2} = \frac{2 \omega \cdot r^2}{R^2 - r^2} \quad (25)$$

car $T = \frac{\pi}{\omega}$ et $\frac{1}{\pi} = R$.

Donc, le vecteur tourbillon de la houle de Gerstner n'est pas nul; elle est donc rotationnelle. Ceci est en contradiction avec le théorème de Lagrange. La théorie de Gerstner suppose en effet que la houle se produit à partir de l'état de repos, c'est-à-dire avec des vitesses initiales nulles, et dans un liquide parfait, en négligeant la viscosité. Le mouvement doit dès lors être irrotationnel et posséder un potentiel de vitesse.

Le vecteur tourbillon vaut

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\omega \cdot r^2}{R^2 - r^2} \quad (25 \text{ bis})$$

la rotation est en sens inverse de ω . Il en résulte la nécessité d'une vitesse horizontale initiale

$$U = - \frac{r^2}{R^2} \cdot V \quad (26)$$

Ceci rétablit une anomalie qui n'a pas été signalée au paragraphe 4. En effet, on y a vu que

$$Q_{\max} = V \cdot \left(h + \frac{\pi \cdot h^2}{2 l} \right),$$

dans le sens de la célérité, et

$$Q_{\min} = - V \cdot \left(h - \frac{\pi \cdot h^2}{2 l} \right);$$

en sens inverse. D'après cela, la quantité d'eau traversant la verticale d'équilibre pendant la demi-période de montée serait supérieure à celle la traversant en sens inverse pendant la demi-période de descente. Cela est incompatible avec les orbites fermées.

Il faut retrancher de ces deux débits (en valeur absolue)

$$\begin{aligned} - \frac{V}{R^2} \int_0^\infty r^2 \cdot dz &= - \frac{V \cdot h^2}{R^2} \int_0^\infty e^{-\frac{2\pi z}{l}} dz \\ &= - \frac{\pi^2 \cdot V \cdot h^2}{l^2} \frac{1}{2 \pi} = - \frac{V \cdot \pi \cdot h^2}{2 l} \end{aligned}$$

Dès lors
$$Q_{\max} = - Q_{\min} = V \cdot h$$

La solution de Gerstner est une solution de seconde approximation; elle convient lorsque $\frac{h}{l}$ ou $\frac{\pi \cdot h}{l} = \frac{h}{R}$ est assez petit, à fortiori $\frac{r}{R}$. On peut alors négliger $\frac{\pi \cdot h^2}{2 l}$ et $\frac{\pi \cdot r^2}{2 l}$; le plan moyen est sensiblement confondu avec le plan d'équilibre et $Z_0 = \sim Z$.

On a toujours
$$x = X + r \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X),$$

$$z = Z - r \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X),$$

$$r = h \cdot e^{-\frac{\pi z}{l}}$$

$$p = p_a + \gamma_e \cdot Z_0 = \sim p_a + \gamma_e \cdot Z$$

L'inclinaison de la verticale dynamique varie de 0 à $\pm \frac{r}{R}$ sur la verticale au niveau Z , au maximum de 0 à $\pm \frac{h}{R}$ à la surface libre. La verticale dynamique diffère donc très peu partout de la verticale statique.

Les vitesses maxima des particules aux sommets et aux creux valent

$$u_{\max} = \pm \frac{\pi \cdot V \cdot h}{l}$$

Le débit maximum dans les deux sens, à la crête et au creux, est

$$Q_{\max} = \pm V.h.$$

A un instant quelconque, il vaut

$$Q_{xt} = \sim V.h.\cos \frac{\pi}{l}(Vt-X)$$

L'énergie d'une onde complète par unité de largeur est

$$E = \gamma_c . h^2 . l = \rho_e . \pi . h^2 . V^2 \quad (27)$$

C'est la force vive de la masse liquide contenue dans le cylindre horizontal ayant comme base le cercle orbitaire à la surface libre qui serait animée d'une vitesse égale à la célérité. Seule la moitié potentielle de cette énergie se propage; la moitié cinétique est stationnaire. Le vecteur tourbillon est sensiblement nul, le mouvement est irrotationnel.

Les vitesses dérivent du potentiel

$$\varphi = - V.h.e^{-\frac{\pi z}{l}} \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X) \quad (28)$$

En effet, on a sensiblement $dx = dX$ et $dz = dZ$, car

$$dx = dX. \left[1 - \frac{\pi.h}{l} . e^{-\frac{\pi z}{l}} . \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) \right] = \sim dX ,$$

$$dz = dZ. \left[1 - \frac{\pi.h}{l} . e^{-\frac{\pi z}{l}} \cos \frac{\pi}{l} (V.t - X) \right] = \sim dZ$$

Dès lors

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial X} = \frac{\pi.V}{l} . h . e^{-\frac{\pi z}{l}} . \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X), \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial Z} = \frac{\pi.V}{l} . h . e^{-\frac{\pi z}{l}} . \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X), \end{aligned} \right\} \quad (7 \text{ bis})$$

ce qui est conforme aux équations (7) du paragraphe 2.

Lorsque, d'une manière analogue à ce qui est indiqué au paragraphe 2, on imprime à cette houle irrotationnelle de faible amplitude relative une vitesse de translation d'ensemble égale et de sens contraire à la célérité V , les ondes deviennent fixes dans l'espace et on a le mouvement permanent trochoidal, mentionné au chapitre IX, paragraphe 1, dont la composante horizontale de vitesse est constante et égale à

$$- V = - \sqrt{\frac{g.l}{\pi}}$$

Pour la houle rotationnelle, de grande amplitude relative, ce mouvement n'est pas possible, car le débit ne serait pas le même aux sommets et aux creux.

8.- COMPOSITION DES HOULES DE FAIBLE AMPLITUDE RELATIVE

Lorsque $\frac{h}{l}$ est assez petit, $Z = \sim Z_0$, le plan moyen est sensiblement confondu avec le niveau d'équilibre ou de repos. Dans ces conditions, la composition de houles différentes peut être obtenue par la simple superposition de petits mouvements simples. Les équations obtenues de la sorte sont les plus simples qui correspondent aux phénomènes très complexes. Selon M. Le Besnerais, elles sont mêmes insuffisantes pour en rendre compte et il faut recourir à l'analyse harmonique des mouvements réels. Ce qui suit a pour seul but de donner une solution mathématique simple d'un phénomène d'apparence assez compliquée déjà et ce à titre d'exemple.

Il s'agit de la superposition de deux houles de même amplitude $2h$ et dont les longueurs d'ondes et les périodes diffèrent peu :

$$l_1 = l - \alpha, \quad l_2 = l + \alpha$$

$$T_1 = T - \beta, \quad T_2 = T + \beta$$

On a sensiblement
$$\beta = \frac{T \cdot \alpha}{2l}$$

L'équation de la houle complexe est

$$x = X + h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \left[\sin \pi \left(\frac{t}{T-\beta} - \frac{X}{l-\alpha} \right) + \sin \pi \left(\frac{t}{T+\beta} - \frac{X}{l+\alpha} \right) \right]$$

$$z = Z - h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \left[\cos \pi \left(\frac{t}{T-\beta} - \frac{X}{l-\alpha} \right) + \cos \pi \left(\frac{t}{T+\beta} - \frac{X}{l+\alpha} \right) \right]$$

ou
$$x = X + 2h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \sin \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{X}{l} \right) \cdot \cos \pi \left(\frac{\beta t}{T^2} - \frac{\alpha X}{l^2} \right)$$
 (29)

$$z = Z - 2h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \cos \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{X}{l} \right) \cdot \cos \pi \left(\frac{\beta t}{T^2} - \frac{\alpha X}{l^2} \right)$$

La hauteur maximum des vagues est doublée. Il y a en outre deux célérités à considérer. La première, fondamentale, est celle de la houle moyenne $V = \frac{l}{T}$. La deuxième résulte du 2^e cosinus et vaut

$$V' = \frac{\frac{l^2}{\alpha}}{\frac{T^2}{\beta}} = \frac{l^2}{T^2} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{l^2}{T^2} \cdot \frac{T}{2l} = \frac{l}{2T} = \frac{V}{2}$$
 (30)

La surface libre est formée d'une succession de groupes ou de trains d'onde, de longueur totale $\frac{2l^2}{\alpha}$, dont les demi-amplitudes varient de 0 à $2h$ et valent pour chacune d'elles $2h \cos \pi \left(\frac{\beta t}{T^2} - \frac{\alpha X}{l^2} \right)$. Ces vagues, de longueur $2l$ avancent avec une célérité V , tandis que les maxima se déplacent avec une célérité $\frac{V}{2}$. La surface est donc formée de trains d'ondes dans lesquels les ondes elles-mêmes avancent avec une vitesse double.

Il va de soi que l'énergie de la houle composée est la somme de l'énergie des deux houles composantes. Mais sa répartition est complexe. A ce propos, on définit ce que l'on appelle la vitesse de propagation de l'énergie à travers une section verticale. On se rappellera que seule la moitié potentielle de l'énergie se propage.

L'effort agissant sur un élément dz est $p \cdot dz$ et la puissance instantanée transmise à travers cet élément est $p \cdot u \cdot dz$ par unité de largeur.

Or, d'après (6)
$$\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p}{\partial z} = g - \frac{\partial w}{\partial t}$$

D'après (7 bis),
$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Donc
$$\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p}{\partial z} = g - \frac{d(\frac{\partial \varphi}{\partial z})}{dt}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_e \cdot g - \frac{\pi^2 \cdot V^2}{1^2} \cdot \rho_e \cdot h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{1}} \cdot \cos \frac{\pi}{1} (Vt-X)$$

$$p = p_a + \gamma_e \cdot Z + \frac{V^2 \cdot \pi}{1} \cdot \rho_e \cdot h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{1}} \cdot \cos \frac{\pi}{1} (Vt-X)$$

La puissance instantanée totale transmise à travers une verticale est, par unité de largeur

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p \cdot u \cdot dz &= \int_0^\infty \left[p_a + \gamma_e \cdot Z + \frac{\pi \cdot V^2}{1} \cdot \rho_e \cdot h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{1}} \cdot \cos \frac{\pi}{1} (Vt-X) \right] \cdot \frac{\pi \cdot V}{1} \cdot h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{1}} \cdot \cos \frac{\pi}{1} (Vt-X) \cdot dz \\ &= \frac{\pi \cdot V}{1} \cdot h \cdot \cos \frac{\pi}{1} (Vt-X) \int_0^\infty (p_a + \gamma_e \cdot Z) \cdot e^{-\frac{\pi Z}{1}} \cdot dz \\ &\quad + \frac{\pi^2 \cdot V^3}{1^2} \cdot \rho_e \cdot h^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{1} (Vt-X) \int_0^\infty e^{-\frac{2\pi Z}{1}} \cdot dz \end{aligned}$$

Cette puissance est variable avec le temps. Mais le premier terme en $\cos \frac{\pi}{1} (Vt-X)$ est alternatif et nul en moyenne pendant une période complexe. Tandis que le terme en $\cos^2 \frac{\pi}{1} (Vt-X)$ est toujours positif et vaut en moyenne pendant une période

$$\frac{1}{2} \frac{\pi^2 \cdot V^3}{1^2} \rho_e \cdot h^2 \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{4} \frac{\pi \cdot V^3}{1} \rho_e \cdot h^2$$

Comme $V^2 = \frac{g \cdot 1}{\pi}$, on trouve $\frac{1}{4} \gamma_e \cdot h^2 \cdot V^3 = \frac{1}{2} \gamma_e \cdot h^2 \cdot V'$.

L'énergie complète d'une onde par unité de largeur étant $\gamma_e \cdot h^2 \cdot 1$, par unité de surface horizontale elle est $\frac{\gamma_e \cdot h^2}{2}$ et par conséquent, elle traverse la section à la vitesse moyenne V' , qui est la vitesse de groupe. Cependant, comme seule l'énergie potentielle se propage et qu'elle est la moitié de l'énergie totale, on peut dire que l'énergie potentielle se propage à la vitesse V des vagues.

9.- CLAPOTIS SIMPLE EN PROFONDEUR INDEFINIE

Il résulte de la superposition de deux houles identiques, mais de sens contraire. Par exemple, une houle vient frapper une paroi verticale indé-

formable perpendiculaire au sens de la propagation. On suppose qu'elle s'y réfléchit sans perte d'énergie. Cette houle réfléchie se compose avec la houle incidente pour former le clapotis simple. Les vagues paraissent immobiles et semblent monter et descendre sur place. Notamment, près du mur, les déplacements sont purement verticaux. On admet, comme au paragraphe 7 et au paragraphe 8 que $\frac{h}{l}$ est petit.

L'équation du clapotis simple est

$$x = X + h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \left[\sin \frac{\pi}{l}(Vt-X) - \sin \frac{\pi}{l}(Vt+X) \right]$$

$$x = X - 2 h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt \cdot \sin \frac{\pi X}{l} \quad (31)$$

De même

$$z = Z - h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \left[\cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) + \cos \frac{\pi}{l}(Vt+X) \right]$$

$$= Z - 2 h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt \cdot \cos \frac{\pi X}{l} \quad (31)$$

D'où
$$\frac{\xi}{\zeta} = \operatorname{tg} \frac{\pi X}{l} = \text{constante}$$

sur une verticale déterminée. Les trajectoires des particules sont donc des segments de lignes droites, d'inclinaison périodiquement variable. Ce sont des verticales pour $X = 0$ (contre la paroi), puis pour $X = l, 2l, \dots$. Pour $X = \frac{l}{2}, \frac{3l}{2}, \dots$ ce sont des segments horizontaux. Intermédiairement, les inclinaisons varient régulièrement. L'amplitude des déplacements est

$$\sqrt{\xi^2 + \zeta^2} = 2 h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) ;$$

elle est donc constante pour tous les points qui sont initialement dans un même plan horizontal. La hauteur des ondes clapoteuses est donc double de celle de la houle initiale. La courbe de la surface libre est

$$\left. \begin{aligned} x &= X - 2 h \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt \cdot \sin \frac{\pi X}{l} \\ z &= - 2 h \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt \cdot \cos \frac{\pi X}{l} \end{aligned} \right\} \quad (31 \text{ bis})$$

Lorsque h est petit par rapport à l , ces équations représentent une cycloïde allongée.

La figure 6 (voir page suivante) reproduit le clapotis simple, qui est formé d'ondes stationnaires.

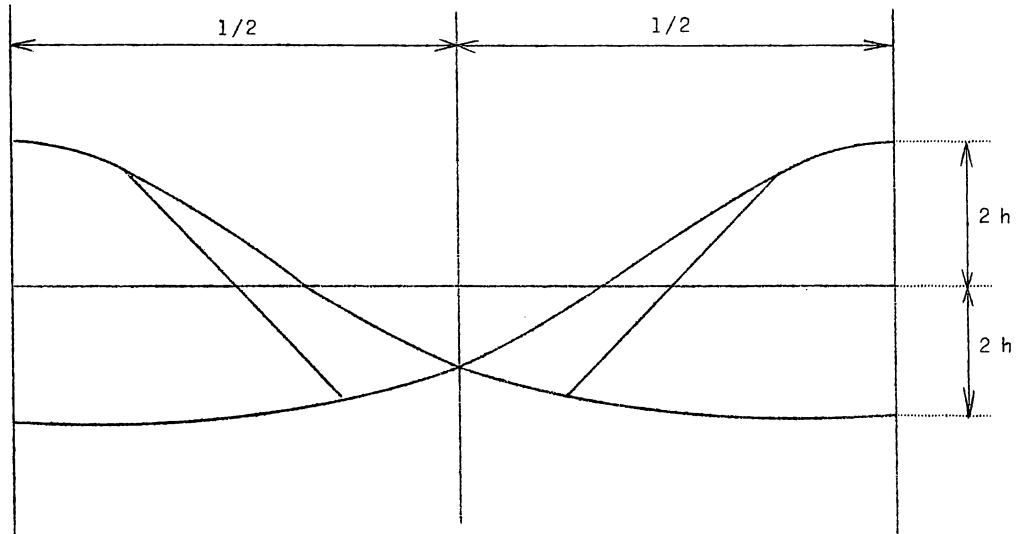


Fig. 6.

Les vitesses sont :

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = \frac{2 \pi \cdot h}{1} V \cdot e^{-\frac{\pi z}{l}} \sin \frac{\pi}{1} Vt \cdot \sin \frac{\pi X}{1} \\ w &= \frac{dz}{dt} = \frac{2 \pi \cdot h}{1} V \cdot e^{-\frac{\pi z}{l}} \sin \frac{\pi}{1} Vt \cos \frac{\pi X}{1} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$\frac{u}{v} = \operatorname{tg} \frac{\pi X}{1}$$

En surface :

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \frac{2 \pi \cdot h}{1} V \sin \frac{\pi}{1} Vt \cdot \sin \frac{\pi X}{1} \\ w_0 &= \frac{2 \pi \cdot h}{1} V \cdot \sin \frac{\pi}{1} Vt \cos \frac{\pi X}{1} \end{aligned} \right\} \quad (32 \text{ bis})$$

Aux sommets et aux creux ($X = 0, -1, -2 l, \text{ etc...}$).

$$z = \mp 2 h \cos \frac{\pi}{1} Vt, \quad u_0 = 0, \quad w_0 = \pm 2 h \frac{\pi}{1} V \cdot \sin \frac{\pi}{1} Vt.$$

Il n'y a donc pas de courant.

Au niveau moyen ($X = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} l, \text{ etc...}$)

$$x = X \pm 2 h \cdot \cos \frac{\pi}{1} Vt, \quad z = 0, \quad u = \mp \frac{2 \pi \cdot h}{1} V \cdot \sin \frac{\pi}{1} Vt, \quad w = 0.$$

Il y a un courant alternatif, dont la vitesse maximum est

$$u_{0\max} = \mp \frac{2 \pi \cdot h}{1} V = \frac{2 \pi \cdot h}{T}, \quad \text{pour } T = \frac{-T}{2}, \frac{-3T}{2}, \text{ etc...}$$

A ces temps là, la surface est horizontale partout (au niveau moyen). Aux temps $t = 0, -T, -2T, \text{ etc...}$, c'est-à-dire lors de l'élévation maximum ou minimum, $u_0 = 0$. Les vitesses

sont donc maxima au niveau moyen aux oppositions; elles s'y annulent aux positions extrêmes. La vitesse est dans le sens de la célérité de l'onde incidente pendant toute la montée; elle est en sens inverse pendant la descente.

En ce qui concerne les pressions, on peut établir ce qui suit (voir paragraphe 2) :

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} = - \frac{du}{dt} \cdot \frac{\partial x}{\partial X} - \left(\frac{dw}{dt} - g \right) \frac{\partial z}{\partial X} \quad (9 a)$$

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial Z} = - \frac{du}{dt} \cdot \frac{\partial x}{\partial Z} - \left(\frac{dw}{dt} - g \right) \frac{\partial z}{\partial X} \quad (9 b)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{2 \pi^2 \cdot h}{l^2} V^2 \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt \cdot \sin \frac{\pi X}{l}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{2 \pi^2 \cdot h}{l^2} V^2 \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt \cdot \cos \frac{\pi X}{l}$$

$$\frac{\partial x}{\partial X} = 1 - \frac{2 \pi \cdot h}{l} \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt \cdot \cos \frac{\pi X}{l}$$

$$\frac{\partial x}{\partial Z} = \frac{2 \pi \cdot h}{l} \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt \cdot \sin \frac{\pi X}{l}$$

$$\frac{\partial z}{\partial X} = \frac{2 \pi \cdot h}{l} \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt \cdot \sin \frac{\pi X}{l}$$

$$\frac{\partial z}{\partial Z} = 1 + \frac{2 \pi \cdot h}{l} \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt \cdot \cos \frac{\pi X}{l}$$

D'où l'on trouve

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} = \frac{2 \pi \cdot h}{l} \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt \cdot \sin \frac{\pi X}{l} \left(g - \frac{\pi V^2}{l} \right)$$

Or $\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} = 0$ pour $Z = 0$, d'où $V = \sqrt{\frac{g \cdot l}{\pi}}$ et $\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X}$ est nul partout.

On trouve
$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial Z} = g \cdot \left[1 - \frac{4 \pi^2 \cdot h^2}{l^2} \cdot e^{-\frac{2 \pi Z}{l}} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{l} Vt \right]$$

d'où
$$p = p_a + \gamma_e \cdot \left[Z - \frac{2 \pi \cdot h^2}{l} \cdot \left(1 - e^{-\frac{2 \pi Z}{l}} \right) \cdot \cos^2 \frac{\pi}{l} Vt \right] \quad (33)$$

Donc p ne dépend que de Z et est à chaque instant le même pour tous les points qui sont à l'état de repos sur une même horizontale. Donc, tous les points qui sont à l'état de repos à la même pression le sont aussi à l'état de mouvement, mais cette pression varie avec le temps, ce qui n'est pas le cas pour la houle simple.

Lorsque Z est grand par rapport à l :

$$p = p_a + \gamma_e \cdot \left[Z - \frac{2 \pi \cdot h^2}{l} \cos^2 \frac{\pi}{l} Vt \right]$$

Aux temps $t = 0, T, 2 T, 3 T, \text{etc.}$ pour toute valeur de X

$$p = p_a + \gamma_e \cdot \left[Z - \frac{2 \pi \cdot h^2}{l} \right]$$

Aux temps $t = \frac{T}{2}, \frac{3T}{2}, \frac{5T}{2}, \text{etc...}$, pour toute valeur de X

$$p = p_a + \gamma_e \cdot Z,$$

(la surface libre est alors horizontale).

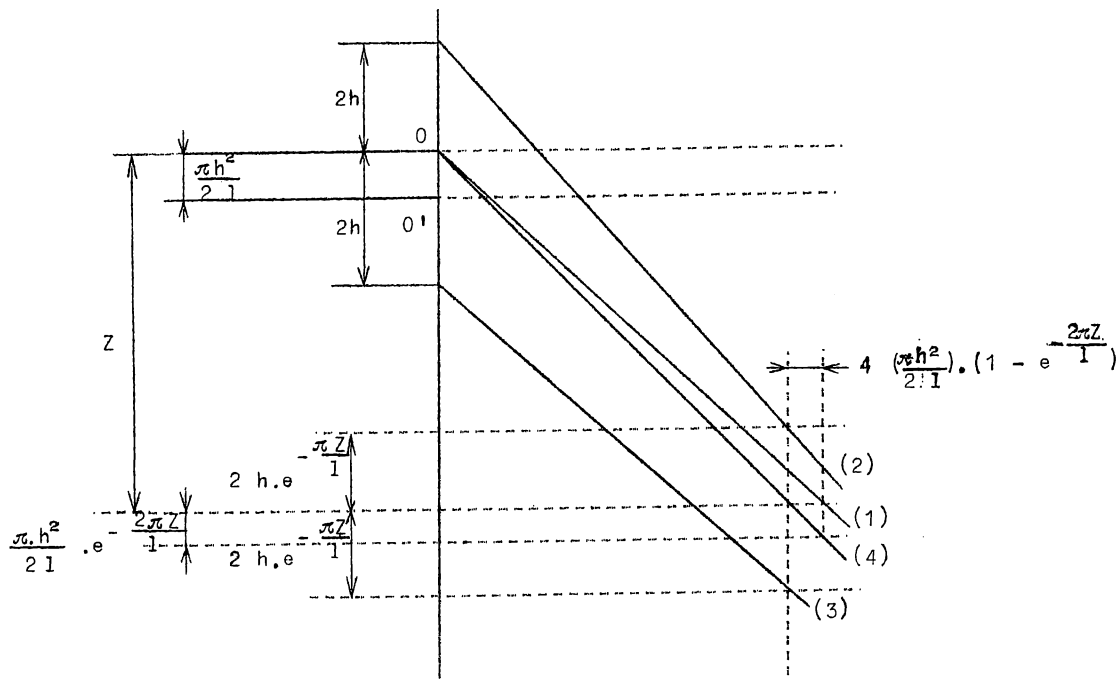


Fig. 7.

Légende de la figure 7

- (1) Diagramme linéaire des pressions suivant toutes verticales aux temps $t = \frac{T}{2}, \frac{3T}{2}, \text{etc...}$ ($\zeta = 0$).
- (2) Diagramme des pressions suivant la verticale $X = 0$ aux temps $t = 0, 2T, \text{etc...}$ (crêtes).
- (3) Diagramme des pressions suivant la verticale $X = 0$ aux temps $T, 3T, \text{etc...}$ (creux).
- (4) Diagramme des pressions suivant la verticale $X = -\frac{l}{2}$ (oppositions) aux temps $t = 0, T, 2T, 3T, \text{etc...}$

La figure 7 montre le diagramme des pressions variables rythmées qui se produisent sur une paroi verticale donnant lieu par réflexion au clapotis simple. La résultante de ces pressions peut être considérable, si par exemple sur la face opposée du mur le niveau est constant, ou davantage encore si sur la face opposée du mur règne un clapotis en opposition.

Le clapotis simple se modifie par amortissement, comme la houle régulière. D'après M. Nau, la loi d'extinction est :

$$h = h_0 \cdot e^{-\frac{2\mu\pi^2 t}{9e \cdot l^2}} = h_0 \cdot e^{-\frac{2\nu\pi^2 t}{l^2}}, \quad (34)$$

où μ est le coefficient de viscosité dynamique, ν le coefficient de viscosité cinématique. Il en résulte encore l'extinction plus rapide des ondes les plus courtes. Comme des causes perturbatrices nombreuses interviennent d'ordinaire dans le mouvement des ondes clapoteuses, elles n'ont pas le caractère de permanence de la houle et s'amortissent beaucoup plus vite.

L'énergie des ondes clapoteuses est double de celle de la houle initiale, comme l'est leur amplitude.

10.- CLAPOTIS COMPLEXE EN PROFONDEUR INDEFINIE

Il se produit lorsque les deux houles opposées ont la même longueur d'onde, mais des amplitudes légèrement différentes. Par exemple, la houle réfléchie a une demi-amplitude $h_2 < h_1$, demi-amplitude de la houle incidente : La différence provient éventuellement d'une perte d'énergie lors de la réflexion. Toutefois, la différence $h_1 - h_2$ est faible; de plus on est généralement dans le cas que h_1 et h_2 sont petits par rapport à l .

Dans ce cas :

$$\left. \begin{aligned} x &= X + [h_1 \cdot \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X) - h_2 \cdot \sin \frac{\pi}{l}(Vt+X)] \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \\ z &= Z - [h_1 \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) + h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt+X)] \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ce qui donne

$$\left. \begin{aligned} x &= X - 2 h_2 \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt \cdot \sin \frac{\pi X}{l} + \Delta h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X) \\ z &= Z - 2 h_2 \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt \cdot \cos \frac{\pi X}{l} - \Delta h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) \end{aligned} \right\} \quad (35 \text{ bis})$$

en posant

$$h_1 - h_2 = \Delta h.$$

Il y a donc superposition d'un clapotis simple de demi-amplitude $2 h_2$ et d'une houle simple de demi-amplitude

$$\Delta h = h_1 - h_2$$

de même longueur d'onde et de même célérité que la houle incidente.

L'équation de la surface libre est :

$$\left. \begin{aligned} x &= X - 2 h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt \cdot \sin \frac{\pi X}{l} + \Delta h \cdot \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X), \\ z &= - 2 h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt \cdot \cos \frac{\pi X}{l} - \Delta h \cdot \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X) \end{aligned} \right\} \quad (35 \text{ ter})$$

Les vitesses sont :

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = \frac{2 \pi \cdot h_2}{1} \cdot V \cdot e^{-\frac{\pi z}{1}} \cdot \sin \frac{\pi}{1} (Vt) \cdot \sin \frac{\pi X}{1} + \frac{\pi}{1} V \cdot (\Delta h) \cdot e^{-\frac{\pi z}{1}} \cdot \cos \frac{\pi}{1} (Vt-X), \\ w &= \frac{dz}{dt} = \frac{2 \pi \cdot h_2}{1} \cdot V \cdot e^{-\frac{\pi z}{1}} \cdot \sin \frac{\pi}{1} (Vt) \cos \frac{\pi X}{1} + \frac{\pi}{1} V \cdot (\Delta h) \cdot e^{-\frac{\pi z}{1}} \cdot \sin \frac{\pi}{1} (Vt-X). \end{aligned} \right\} (36)$$

En surface :

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \frac{2 \pi \cdot h_2}{1} \cdot V \cdot \sin \frac{\pi}{1} Vt \cdot \sin \frac{\pi X}{1} + \frac{\pi(\Delta h)}{1} \cdot V \cos \frac{\pi}{1} (Vt-X) \\ w_0 &= \frac{2 \pi \cdot h_2}{1} \cdot V \cdot \sin \frac{\pi}{1} Vt \cdot \cos \frac{\pi X}{1} + \frac{\pi(\Delta h)}{1} V \cdot \sin \frac{\pi}{1} (Vt-X) \end{aligned} \right\} (36 \text{ bis})$$

En éliminant t entre les équations (35 bis), on obtient l'équation d'orbites elliptiques, dépendant de X et de Z .

Les sommets et les creux correspondent à $\frac{\pi \cdot X}{1} = 0, -\pi, -2\pi, \text{ etc...}$ que l'on appelle les conjonctions,

$$x = X \pm \Delta h \cdot \sin \frac{\pi t}{T}$$

$$z = \mp (2 h_2 + \Delta h) \cos \frac{\pi t}{T}$$

Pour $X = 0$: $t = 0 \quad z = - (2 h_2 + \Delta h)$

$t = \frac{T}{2} \quad x = \Delta h \quad z = 0$

$t = T \quad x = 0 \quad z = (2 h_2 + \Delta h)$

$t = \frac{3 T}{2} \quad x = - \Delta h \quad z = 0$

$t = 2 T, \quad \text{comme} \quad t = 0.$

Pour $X = -1$, les x et les z sont changés de signe.

L'orbite est une ellipse à grand axe vertical, de longueur $2 (2 h_2 + \Delta h)$ et à petit axe horizontal de longueur $2 \Delta h$.

Aux oppositions : $X = -\frac{1}{2}, \quad X = -\frac{3}{2}, \quad \text{etc...}$

$$x = X \pm (2 h_2 + \Delta h) \cdot \cos \frac{\pi t}{T}$$

$$z = \pm \Delta h \cdot \sin \frac{\pi t}{T}$$

Pour $x = -\frac{1}{2}, \quad t = 0 \text{ ou } 2 T \quad x = X + (2 h_2 + \Delta h), \quad z = 0.$

$t = \frac{T}{2}, \quad x = X, \quad z = \Delta h$

$t = T, \quad x = X - (2 h_2 + \Delta h), \quad z = 0$

$t = \frac{3 T}{2}, \quad x = X, \quad z = - \Delta h.$

L'orbite elliptique a son grand axe horizontal, elle a par ailleurs les mêmes dimensions que l'ellipse orbitaire des sommets et des creux. En un point X quelconque, aux temps $t = 0, T, 2T, \text{etc...}$, on a

$$x = X \mp (2 h_2 + \Delta h) \cdot \sin \frac{\pi X}{l}, \quad z' = \mp (2 h_2 + \Delta h) \cdot \cos \frac{\pi X}{l}.$$

Les grands axes des ellipses ont tous comme longueur $2 (2 h_2 + \Delta h)$, et une inclinaison périodiquement variable $\frac{\xi}{\zeta} = \text{tg} \frac{\pi X}{l}$.

Aux temps $t = \frac{T}{2}, \frac{3T}{2}, \text{etc...}$

$$x = X \pm \Delta h \cdot \cos \frac{\pi X}{l}, \quad z = \mp \Delta h \cdot \sin \frac{\pi X}{l}.$$

Les petits axes des ellipses mesurent tous $2 \Delta h$ et ont une inclinaison périodiquement variable $\frac{\xi}{\zeta} = - \text{cotg} \frac{\pi X}{l}$.

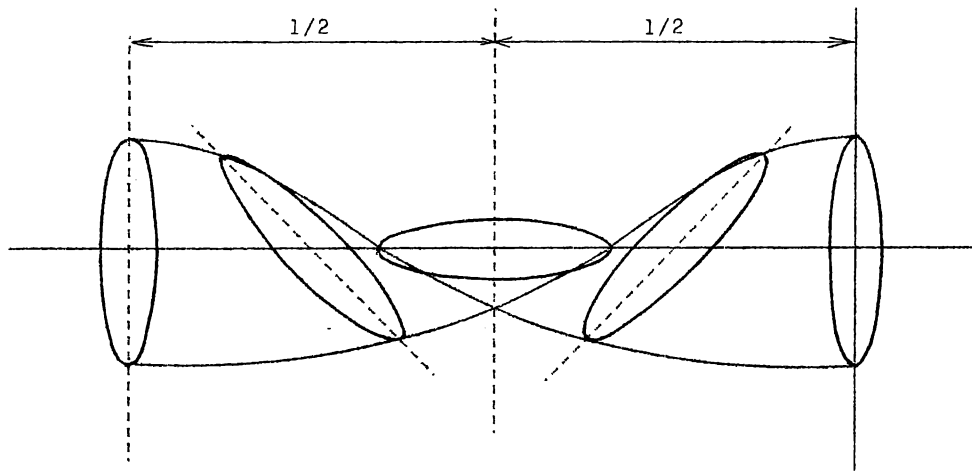


Fig. 8.

La figure 8 donne une image du mouvement purement figurative, car h_2 et Δh sont petits par rapport à l .

Pour ce qui est des vitesses, aux sommets et aux creux

$$u = \pm \frac{\pi}{l} \cdot V \cdot \Delta h \cdot \cos \frac{\pi t}{T} = \mp \frac{\pi}{T} \Delta h \cdot \cos \frac{\pi t}{T}$$

$$w = \pm (2 h_2 + \Delta h) \frac{\pi}{T} \sin \frac{\pi t}{T}$$

Aux oppositions $u = \mp (2 h_2 + \Delta h) \frac{\pi}{T} \sin \frac{\pi t}{T}$

$$w = \pm \Delta h \cdot \frac{\pi}{T} \cdot \cos \frac{\pi t}{T}$$

Aux conjonctions (crêtes et creux), les vitesses horizontales se

renversent aux temps $t = \frac{T}{2}$, $\frac{3T}{2}$, etc..., c'est-à-dire au niveau moyen. Aux oppositions, c'est aux temps $t = 0$, T , $2T$, etc... également au niveau moyen.

Pour ce qui est des pressions, on opère exactement comme au paragraphe 9.

$$\frac{du}{dt} = \frac{\pi^2 \cdot V^2}{l^2} \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot [2 h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt \cdot \sin \frac{\pi X}{l} - \Delta h \cdot \sin \frac{\pi}{l} (Vt-X)]$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\pi^2 \cdot V^2}{l^2} \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot [2 h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt \cdot \cos \frac{\pi X}{l} + \Delta h \cdot \cos \frac{\pi}{l} (Vt-X)]$$

$$\frac{\partial x}{\partial X} = 1 - \frac{\pi}{l} \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot [2 h_2 \cos \frac{\pi}{l} Vt \cos \frac{\pi X}{l} + \Delta h \cos \frac{\pi}{l} (Vt-X)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial X} = \frac{\pi}{l} \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot [2 h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt \cdot \sin \frac{\pi X}{l} - \Delta h \cdot \sin \frac{\pi}{l} (Vt-X)]$$

$$\frac{\partial x}{\partial Z} = \frac{\pi}{l} \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot [2 h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt \cdot \sin \frac{\pi X}{l} - \Delta h \cdot \sin \frac{\pi}{l} (Vt-X)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial Z} = 1 + \frac{\pi}{l} \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot [2 h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt \cdot \cos \frac{\pi X}{l} + \Delta h \cdot \cos \frac{\pi}{l} (Vt-X)]$$

On trouve de nouveau $\frac{\partial p}{\partial X} = 0$ et $v = \sqrt{\frac{g \cdot l}{\pi}}$

cependant que

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial Z} = g \cdot [1 - \frac{\pi^2}{l^2} \cdot e^{-\frac{2\pi Z}{l}} \cdot (2 h_2 \cos \frac{\pi}{l} Vt + \Delta h)^2]$$

d'où

$$p = p_a + \gamma_e \cdot [Z - \frac{\pi}{2l} (2 h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt + \Delta h)^2 + \frac{2\pi}{l} (2 h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt + \Delta h)^2 \cdot e^{-\frac{2\pi Z}{l}}] \quad (37)$$

Lorsque Z est grand par rapport à l ,

$$p = p_a + \gamma_e \cdot [Z - \frac{\pi}{2l} (2 h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{l} Vt + \Delta h)^2] \quad (37 \text{ bis})$$

Pour ce clapotis complexe également, à chaque instant la pression est la même pour tous les points ayant même valeur de Z , c'est-à-dire pour tous les points ayant même pression à l'état de repos, mais cette pression varie rythmiquement dans le temps suivant chaque verticale.

11.- GAUFRAGE EN PROFONDEUR INDEFINIE

Lorsqu'une houle de faible hauteur relative se réfléchit sur une paroi verticale oblique par rapport au plan vertical de propagation, les deux houles incidente et réfléchie se croisent. Aux points de croisement des crêtes, il y a une montée double en forme de cloche et au croisement des creux, un creux double. La surface ainsi gaufrée se déplace parallèlement à l'obstacle

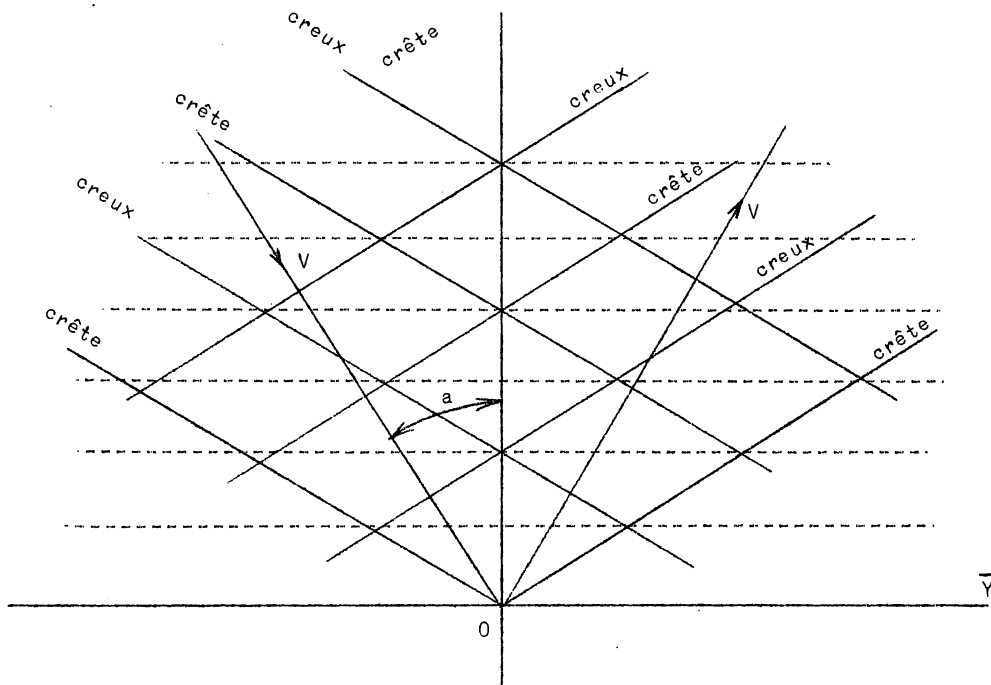


Fig. 9.

(fig. 9) réfléchissant. En considérant un axe des \bar{Y} horizontal situé dans le plan vertical de l'obstacle et un axe des \bar{X} horizontal normal au précédent, en admettant l'égalité de l'angle d'incidence et de l'angle de réflexion et en appelant α l'angle de la direction de propagation de la houle incidente avec l'axe OX , on a

$$z = Z - 2 h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cos \frac{\pi}{l} (Vt + \bar{y} \cdot \sin \alpha) \cos \left(\frac{\pi \bar{X} \cos \alpha}{l} \right) \quad (38)$$

En effet, pour l'onde incidente $X = \bar{X} \cdot \cos \alpha - \bar{Y} \cdot \sin \alpha$.

Pour l'onde réfléchie $X = \bar{X} \cdot \cos \alpha + \bar{Y} \cdot \sin \alpha$

Pour l'onde incidente $\xi = h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \sin \frac{\pi}{l} (Vt - \bar{X} \cos \alpha + \bar{Y} \sin \alpha)$

$$\zeta = h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \cos \frac{\pi}{l} (Vt - \bar{X} \cos \alpha + \bar{Y} \sin \alpha)$$

Pour l'onde réfléchie

$$\xi = h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \sin \frac{\pi}{l} (Vt + \bar{X} \cos \alpha + \bar{Y} \sin \alpha)$$

$$\zeta = - h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \cos \frac{\pi}{l} (Vt + \bar{X} \cos \alpha + \bar{Y} \sin \alpha)$$

Dès lors : $z = Z = - h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \left[\cos \frac{\pi}{l} (Vt - \bar{X} \cos \alpha + \bar{Y} \sin \alpha) + \cos \frac{\pi}{l} (Vt + \bar{X} \cos \alpha + \bar{Y} \sin \alpha) \right]$

$$z = Z = 2 h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \cos \frac{\pi}{l} (Vt + \bar{Y} \sin \alpha) \cdot \cos \frac{\pi}{l} (\bar{X} \cos \alpha)$$

Quant à

$$\begin{aligned} \bar{x} - \bar{X} &= h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \cos \alpha \cdot \left[\sin \frac{\pi}{l} (Vt - \bar{X} \cdot \cos \alpha + \bar{Y} \cdot \sin \alpha) - \sin \frac{\pi}{l} (Vt + \bar{X} \cdot \cos \alpha + \bar{Y} \cdot \sin \alpha) \right] \\ \bar{x} &= \bar{X} - 2 h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{l} (Vt + \bar{Y} \cdot \sin \alpha) \sin \frac{\pi}{l} (\bar{X} \cdot \cos \alpha) \\ \bar{y} - \bar{Y} &= h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \sin \alpha \cdot \left[\sin \frac{\pi}{l} (Vt - \bar{X} \cdot \cos \alpha + \bar{Y} \cdot \sin \alpha) + \sin \frac{\pi}{l} (Vt + \bar{X} \cdot \cos \alpha + \bar{Y} \cdot \sin \alpha) \right] \\ \bar{y} &= \bar{Y} + 2 h \cdot e^{-\frac{\pi Z}{l}} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{l} (Vt + \bar{Y} \cdot \sin \alpha) \cdot \cos \frac{\pi}{l} (\bar{X} \cdot \cos \alpha) \end{aligned}$$

12.- HOULE CYLINDRIQUE REGULIERE DE FAIBLE AMPLITUDE EN PROFONDEUR FINIE

Tous les cas examinés précédemment correspondent à une profondeur indéfinie. Dans ces conditions, les déplacements décroissent régulièrement de la surface vers le fond; ils sont nuls à l'infini. Mais, ainsi qu'il a été montré au paragraphe 2, à une profondeur $Z = l$, ils sont déjà très faibles; à une profondeur $Z = 2l$, ils sont insignifiants.

Les profondeurs sont toujours finies, mais les solutions précédentes sont admissibles lorsque la profondeur H du fond horizontal sous la surface est suffisamment plus grande que l . Il n'en est plus de même lorsque cette profondeur H est plus petite que l . Dans la solution suivante, on considère que la demi-amplitude h est faible par rapport à l et est plus petite sensiblement que H . Par ailleurs, les conventions, conditions et hypothèses sont les mêmes qu'en profondeur indéfinie (cfr paragraphe 7) La houle est irrotationnelle parce que $\frac{h}{l}$ est petit.

Les particules décrivent des orbites elliptiques à grand axe horizontal et à petit axe vertical.

Les équations de ces orbites sont :

$$x = X + r \cdot \sin \frac{\pi}{l} (Vt - X), \quad z = Z - r' \cdot \cos \frac{\pi}{l} (Vt - X) \quad (39)$$

$$r = h \cdot \frac{\cosh \pi \frac{H-Z}{l}}{\sinh \frac{\pi H}{l}}, \quad r' = h \cdot \frac{\sinh \pi \frac{H-Z}{l}}{\sinh \frac{\pi H}{l}} \quad (40)$$

(en désignant par $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}).$$

Le rapport
$$\frac{r}{r'} = \frac{1}{\operatorname{tgh} \pi \frac{H-Z}{l}} \quad (41)$$

Il tend vers l'unité dès que $\frac{H-Z}{l} > 1,40$.

En surface ($Z = 0$), $r_0 = h \cdot \operatorname{cotgh} \frac{\pi H}{l}$, $r'_0 = h$,

$$\frac{r_0}{r_c} = \operatorname{cotgh} \frac{\pi H}{l}$$

Sur le fond $Z = H$, $r = \frac{h}{\sinh \frac{\pi H}{l}}$, $r' = 0$.

Il y a donc un déplacement alternatif horizontal $2r$ sur le fond; le déplacement vertical est nul. La figure 10 montre l'allure comparative des orbites en profondeur finie et en profondeur indéfinie.

L'élévation du niveau moyen au dessus du plan horizontal d'équilibre est $\frac{\pi \cdot r \cdot r'}{2l}$ ou

$$\frac{\pi \cdot h^2}{2l} \cdot \frac{\sinh \pi \frac{H-Z}{l} \cdot \cosh \pi \frac{H-Z}{l}}{\sinh^2 \frac{\pi H}{l}} \quad (42)$$

A la surface, c'est $\frac{\pi \cdot h^2}{2l} \cdot \operatorname{cotgh} \frac{\pi H}{l}$, (42 bis)

sur le fond c'est évidemment 0. Les axes se présentent donc comme à la figure 11.

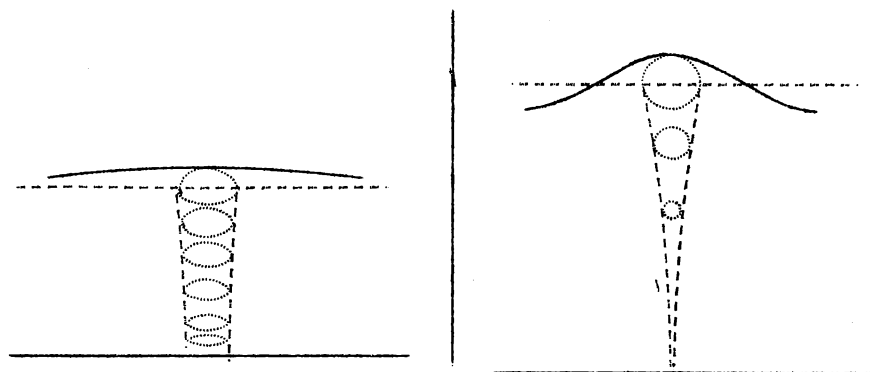


Fig. 10.

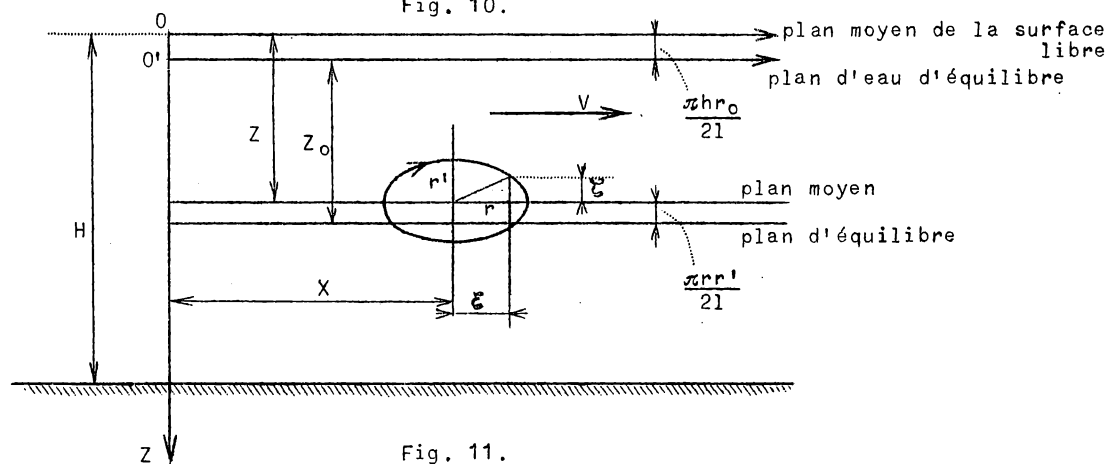


Fig. 11.

Donc

$$Z_0 = Z - \frac{\pi}{2} \frac{h^2}{l} (r_0 \cdot h - r \cdot r') = Z - \frac{\pi \cdot h^2}{2} \frac{1}{l} \left[\cotg h \frac{\pi H}{l} - \frac{\sinh \pi \frac{H-Z}{l} \cosh \pi \frac{H-Z}{l}}{\sinh^2 \frac{\pi H}{l}} \right] \quad (43)$$

Dans ce cas-ci, pour que la houle soit irrotationnelle, nous considérons que $\frac{\pi \cdot h^2}{2} \frac{1}{l}$ est négligeable, comme au paragraphe 7, et $Z_0 = Z$.

En suivant la même voie que pour la houle en profondeur indéfinie, on obtient ce qui suit.

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\pi \cdot V \cdot r}{l} \cdot \cos \frac{\pi}{l} (Vt - X)$$

$$w = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\pi \cdot V \cdot r'}{l} \cdot \sin \frac{\pi}{l} (Vt - X), \quad \text{est nulle sur le fond.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\pi^2}{l^2} \zeta \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\pi^2}{l^2} \zeta$$

$$\frac{\partial x}{\partial X} = 1 - \frac{\pi}{l} \cdot r \cdot \cos \frac{\pi}{l} (Vt - X), \quad \frac{\partial z}{\partial X} = -\frac{\pi}{l} \cdot r' \cdot \sin \frac{\pi}{l} (Vt - X);$$

$$\frac{\partial x}{\partial Z} = -\frac{\pi}{l} \cdot r' \cdot \sin \frac{\pi}{l} (Vt - X), \quad \frac{\partial z}{\partial Z} = 1 + \frac{\pi}{l} \cdot r \cdot \cos \frac{\pi}{l} (Vt - X)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} &= -\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial X} - \left(\frac{\partial w}{\partial t} - g \right) \frac{\partial z}{\partial X} \\ &= \frac{\pi^2}{l^2} \zeta \left[1 - \frac{\pi}{l} r \cdot \cos \frac{\pi}{l} (Vt - X) \right] + \left(\frac{\pi^2}{l^2} \zeta + g \right) \frac{\pi}{l} r' \cdot \sin \frac{\pi}{l} (Vt - X) \end{aligned}$$

A la surface, $Z = 0$ et $\left(\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p}{\partial X} \right)_0 = 0$.

En négligeant les termes en $\frac{h^2}{l^2}$, on trouve

$$\left(\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} \right)_0 = \frac{\pi \cdot h}{l} \left(\frac{\pi \cdot V^2}{l} \cotg h \frac{\pi H}{l} - g \right) \cdot \sin \frac{\pi}{l} (Vt - X) = 0$$

$$\text{d'où} \quad V = \sqrt{\frac{g \cdot l}{\pi} \operatorname{tgh} \frac{\pi H}{l}} \quad (44)$$

$$\text{Si } \frac{H}{l} = 0 \quad 0,02 \quad 0,06 \quad 0,10 \quad 0,15 \quad 0,20 \quad 0,50 \quad 0,80$$

$$\operatorname{tgh} \frac{\pi H}{l} = 0 \quad 0,063 \quad 0,186 \quad 0,304 \quad 0,439 \quad 0,557 \quad 0,878 \quad 0,987$$

$$\text{Si } \frac{H}{l} \geq 1,40, \quad \operatorname{tgh} \frac{\pi H}{l} = 1 \quad \text{et} \quad V = \sqrt{\frac{g \cdot l}{\pi}} \quad \text{comme en profondeur indé-$$

finie. Pour $\frac{H}{l} < 0,20$, on a sensiblement $\operatorname{tgh} \frac{\pi H}{l} = \frac{\pi \cdot H}{l}$, d'autant plus

que $\frac{H}{l}$ est plus petit. Alors $V = \sqrt{g \cdot H}$, ce qui reproduit la formule de

Lagrange de la célérité des ondes allongées de faible hauteur.

Pour une valeur quelconque de Z , toujours en négligeant $\frac{h^2}{l^2}$,

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} = \frac{\pi^2 \cdot V^2 \cdot r'}{l^2} \left[\operatorname{cotgh} \frac{\pi(H-Z)}{l} - \operatorname{cotg} \frac{\pi H}{l} \right] \cdot \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X) \quad (45)$$

Donc $\frac{\partial p}{\partial X}$ n'est pas nul pour toutes les valeurs de Z , seulement pour $Z = 0$.

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial Z} = - \frac{\pi^2}{l^2} \zeta \frac{\pi}{l} r' \cdot \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X) + \left(\frac{\pi^2}{l^2} \zeta + g \right) \left[1 + \frac{\pi}{l} \cdot r \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) \right]$$

Après développement et réduction,

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial Z} = \frac{\pi \cdot g \cdot h}{l} \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) \frac{\cosh \frac{\pi Z}{l}}{\cosh \frac{\pi H}{l} \sinh \frac{\pi H}{l}} + g - \frac{\pi \cdot h^2}{l^2} \cdot g \cdot \frac{\cosh \pi \frac{H-Z}{l} \sinh \pi \frac{H-Z}{l}}{\cosh \frac{\pi H}{l} \sinh \frac{\pi H}{l}}$$

En négligeant le terme en $\frac{h^2}{l^2}$

$$\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p}{\partial Z} = g \cdot \left[1 + \frac{\pi \cdot h}{l} \frac{\cosh \frac{\pi Z}{l}}{\cosh \frac{\pi H}{l} \sinh \frac{\pi H}{l}} \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) \right]$$

d'où

$$p = p_a + \gamma_e \left[Z + \frac{h \sinh \frac{\pi Z}{l}}{\cosh \frac{\pi H}{l} \sinh \frac{\pi H}{l}} \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) \right] \quad (46)$$

Sur le fond
$$p = p_a + \gamma_e \cdot H + \gamma_e \cdot \frac{h \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X)}{\cosh \frac{\pi H}{l}}$$

$$p_{\max} = p_a + \gamma_e \cdot \left(H + \frac{h}{\cosh \frac{\pi H}{l}} \right) \approx p_a + \gamma_e \cdot (H + h)$$

On peut vérifier que la formule (46) satisfait à la formule (45) en tenant compte des propriétés des fonctions hyperboliques

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} = \frac{\pi}{l} \cdot g \cdot h \cdot \frac{\sinh \frac{\pi Z}{l}}{\cosh \frac{\pi H}{l} \sinh \frac{\pi H}{l}} \cdot \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X) \quad (45 \text{ bis})$$

L'équation de continuité se vérifie comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial X} \cdot \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial u}{\partial Z} \cdot \frac{\partial z}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial Z} \cdot \frac{\partial x}{\partial X} - \frac{\partial w}{\partial X} \cdot \frac{\partial x}{\partial Z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot V \cdot r \cdot \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X), \quad \frac{\partial w}{\partial X} = - \frac{\pi^2}{l^2} \cdot V \cdot r' \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X),$$

$$\frac{\partial u}{\partial Z} = - \frac{\pi^2}{l^2} \cdot V \cdot r' \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X), \quad \frac{\partial w}{\partial Z} = - \frac{\pi^2}{l^2} \cdot V \cdot r \cdot \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X).$$

Après développement et réduction de

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ,$$

on trouve
$$\frac{2 \pi^3 \cdot V \cdot h^2}{l^3 \cdot \sinh \frac{\pi H}{l}} \cdot \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X) \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) = 0 ,$$

ce qui est sensiblement vérifié parce que $\frac{h^2}{l^2}$ est négligeable.

La forme de l'équation de continuité de M. Le Besnerais ne conduit à aucun résultat.

L'aire d'une onde de trochoïde par rapport au plan moyen $Z = \text{constante}$ s'écrit :

$$\int_0^{2l} (z - Z) \cdot dx = - \int_0^{2l} r' \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) \cdot \left[1 - \frac{\pi}{l} \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X) \right] dX = \pi \cdot r \cdot r' \quad (47)$$

Donc l'ordonnée moyenne est située à la distance vorticale $\frac{\pi \cdot r \cdot r'}{2 l}$ sous le plan moyen. Elle correspond au plan d'eau d'équilibre au repos et vérifie la relation (42). Comme $\frac{h}{l}$ est très petit, $\frac{\pi \cdot r \cdot r'}{2 l}$ est d'ailleurs négligeable.

En ce qui concerne l'énergie, la partie cinétique est égale à la partie potentielle, comme au paragraphe 6. Donc, par unité de largeur et pour une onde complète,

$$E = 4 \gamma_e \cdot l \cdot \int_0^H \frac{\pi}{2 l} r \cdot r' \cdot dZ = \frac{2 \pi \cdot \gamma \cdot h^2}{\sinh^2 \frac{\pi H}{l}} \cdot \int_0^H \cosh \frac{\pi(H-Z)}{l} \cdot \sinh \frac{\pi(H-Z)}{l} \cdot dZ$$

$$E = \gamma_e \cdot h^2 \cdot l = \gamma_e \cdot r_o \cdot r'_o \cdot l \cdot \text{tg} \frac{\pi H}{l} = \rho_e \cdot \pi \cdot r_o \cdot r'_o \cdot V^2$$

L'énergie d'une onde complète par unité de largeur peut donc s'exprimer par la force vive de la masse liquide contenue dans le cylindre horizontal dont la base est l'ellipse orbitaire à la surface libre et dont la vitesse serait égale à la célérité.

La valeur exacte de E est

$$E = \frac{2 \pi \cdot \gamma_e \cdot h^2}{\sinh^2 \frac{\pi H}{l}} \cdot \int_0^H \cosh \frac{\pi(H-Z)}{l} \cdot \sinh \frac{\pi(H-Z)}{l} \cdot dZ_o$$

et $dZ_o = dZ \cdot \left[1 - \frac{\pi^2 \cdot h^2}{2 l^2} \frac{\cosh \frac{2\pi(H-Z)}{l}}{\sinh^2 \frac{\pi H}{l}} \right]$

Après développement et réduction, on trouve

$$E = \gamma_e \cdot h^2 \cdot l \cdot \left[1 - \frac{\pi^2 \cdot r_o^2}{2 l^2} \right]$$

13.- VITESSES ET DEBITS DE LA HOULE TROCHOÏDALE DE FAIBLE AMPLITUDE EN PROFONDEUR FINIE

Au sommet et au creux de l'onde,

$$z = Z \mp h \cdot \frac{\sinh \frac{\pi(H-Z)}{l}}{\sinh \frac{\pi H}{l}}$$

$$u = \pm \frac{\pi \cdot V \cdot h}{l} \cdot \frac{\cosh \frac{\pi(H-Z)}{l}}{\sinh \frac{\pi H}{l}}$$

$$dz = \left(1 \pm \frac{\pi \cdot h}{l} \frac{\cosh \frac{\pi(H-Z)}{l}}{\sinh \frac{\pi H}{l}}\right) \cdot dZ$$

$$Q_{\max \text{ ou } \min} = \pm \frac{\pi \cdot V \cdot h}{l} \int_0^H \frac{\cosh \frac{\pi(H-Z)}{l}}{\sinh \frac{\pi H}{l}} \left(1 \pm \frac{\pi \cdot h}{l} \frac{\cosh \frac{\pi(H-Z)}{l}}{\sinh \frac{\pi H}{l}}\right) \cdot dZ$$

On obtient, après intégration et réduction :

$$Q_{\max \text{ ou } \min} = \pm V \cdot h + \frac{\pi^2 \cdot h^2 \cdot H \cdot V}{2 l^2 \cdot \sinh^2 \frac{\pi H}{l}} + \frac{\pi \cdot V \cdot h^2}{2 l \cdot \operatorname{tgh} \frac{\pi H}{l}}$$

$\frac{h^2}{l^2}$ étant négligeable

$$Q_{\max \text{ ou } \min} = \pm V \cdot h + \frac{\pi \cdot V \cdot h^2}{2 l \cdot \operatorname{tgh} \frac{\pi H}{l}} = \pm V \cdot h + \frac{\pi \cdot r_0 \cdot r_0'}{2 l} \cdot V$$

Donc, au sommet $Q_{\max} = V \cdot \left(h + \frac{\pi \cdot r_0 \cdot r_0'}{2 l}\right) = V \cdot \eta_{\max}$

Au creux $Q_{\min} = -V \cdot \left(h - \frac{\pi \cdot r_0 \cdot r_0'}{2 l}\right) = -V \cdot \eta_{\min}$

Les η sont mesurés par rapport au plan d'eau d'équilibre.

Les amplitudes étant faibles, $\frac{\pi \cdot r_0 \cdot r_0'}{2 l}$ est négligeable et l'on peut écrire

$$Q_{\max} = -Q_{\min} = V \cdot h$$

Donc aux sommets, $u_{\max} = \frac{\pi \cdot r_0}{l}$, $w = 0$.

$$Q_{\max} = V \cdot \left(h + \frac{\pi \cdot r_0 \cdot r_0'}{2 l}\right) \approx V \cdot h$$

Aux creux : $u_{\min} = -\frac{\pi \cdot r_0}{l}$, $w = 0$.

$$Q_{\min} = -V \cdot \left[h - \frac{\pi \cdot r_0 \cdot r_0'}{2 l}\right] \approx -V \cdot h$$

Entre ces deux extrêmes, le débit varie rythmiquement en s'annulant deux fois; ces positions constituent ce que l'on appelle les étales.

Les verticales dynamiques sont définies comme au paragraphe 3, par

$$X = X_0 = \text{constante et } t = \text{constante.}$$

Les extrêmes correspondent à $x - X_0 = \pm r$

Si h est assez petit par rapport à l et à H , on peut par approximation considérer le débit à travers les verticales dynamiques, qui diffèrent alors peu des verticales. On trouve :

$$Q_{Xt} = V \cdot h \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) + \frac{\pi \cdot r_0 \cdot r_0'}{2 l} \cdot V \cdot \cos^2 \frac{\pi}{l}(Vt-X) + \frac{\pi^2 \cdot h^2 \cdot H \cdot V}{2 l^2 \cdot \sinh^2 \frac{\pi H}{l}} \cos^2 \frac{\pi}{l}(Vt-X)$$

Le troisième terme, qui vaut $\frac{\pi^2 \cdot h^2 \cdot H \cdot V}{2 l^2 \cdot \sinh^2 \frac{\pi H}{l}} \cos^2 \frac{\pi}{l}(Vt-X)$,

est négligeable. Le débit Q_{Xt} est maximum au sommet et minimum au creux de la houle. Il s'annule au niveau moyen; les vitesses u changent en effet simultanément de sens sur les verticales dynamiques extrêmes. Cela n'est pas tout à fait exact sur la verticale moyenne.

Si l'on imprime à l'eau en mouvement une vitesse de translation d'ensemble U , positive dans le même sens que V , la vitesse horizontale résultante devient

$$u_r = U + u, \text{ variant entre } U + \frac{\pi \cdot r_0}{T} \text{ et } U - \frac{\pi \cdot r_0}{T}$$

Les vitesses superficielles peuvent changer de sens si

$$-\frac{\pi \cdot r_0}{T} < \pm U < \frac{\pi \cdot r_0}{T}$$

ou $-\frac{\pi \cdot r_0}{l} \cdot V < \pm U < \frac{\pi \cdot r_0}{l} \cdot V$

Dans ce cas, l'époque de renversement des vitesses dépend de la grandeur de U et de son sens. Elle n'a plus lieu au niveau moyen ni simultanément pour toutes les valeurs de Z .

Le débit au sommet est $Q_{\max} = U \cdot H + (U + V) \cdot h + \frac{V \cdot \pi \cdot r_0 \cdot r_0'}{2 l}$

$$Q_{\min} = U \cdot H - (U + V) \cdot h + \frac{V \cdot \pi \cdot r_0 \cdot r_0'}{2 l}$$

Si $U = -V$, la houle est figée. On a le mouvement permanent trochoïdal en profondeur finie sur fond horizontal (cfr chapitre IX, paragraphe 1). La composante horizontale de vitesse est constante $U = -V$ et le débit est constant

$$Q = -V \cdot (H - \frac{\pi \cdot r_0 \cdot r_0'}{2 l}) \approx -V \cdot H$$

14.- CAS OU LA LONGUEUR D'ONDE $2 l$ EST TRES GRANDE PAR RAPPORT A L'AMPLITUDE $2 h$.

Dans le cas de la profondeur finie à fond horizontal, H étant un multiple de h , les formules des paragraphe 12 et paragraphe 13 se transforment comme suit :

$$x = X + r \cdot \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X), \quad z = Z - r' \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X)$$

$$r = \frac{h \cdot l}{\pi \cdot H}, \quad \text{constant sur toute la hauteur et grand,}$$

$$r' = h \cdot \frac{H - Z}{H}$$

A la surface $Z = 0$, $r' = h$

Sur le fond, $Z = H$, $r' = 0$

Donc
$$x = X + \frac{l \cdot h}{\pi \cdot H} \cdot \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X) \tag{48}$$

$$z = Z - h \cdot \frac{H - Z}{H} \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X)$$

A la surface $z_0 = -h \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X)$, $Z = 0$.

Sur le fond $Z = h$, $z = H$.

La houle est donc quasi sinusoïdale.

La correspondance entre x et X peut être considérée sous la forme

$$\frac{\pi \cdot x}{l} = \frac{\pi \cdot X}{l} + \frac{h}{H} \cdot \sin \left(\frac{\pi t}{T} - \frac{\pi X}{l} \right)$$

Cette correspondance est représentée au diagramme de la figure 12, dans l'étendue d'une onde en fonction du temps. On voit que si $\frac{h}{H}$ est assez

petit, on peut écrire :

$$\frac{x}{l} = \frac{X}{l} \tag{49}$$

et

$$z = Z - h \cdot \frac{H - Z}{H} \cos \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{X}{l} \right)$$

Cette houle est donc sinusoïdale.

Dans le cas où h et H ne seraient pas négligeables vis-à-vis de l , la correspondance entre $\frac{x}{l}$ et $\frac{X}{l}$

s'écrirait

$$\begin{aligned} \frac{\pi \cdot x}{l} &= \frac{\pi \cdot X}{l} \\ &+ \frac{\pi \cdot r}{l} \cdot \sin \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{X}{l} \right) \end{aligned}$$

Elle pourrait être représentée par un diagramme ana-

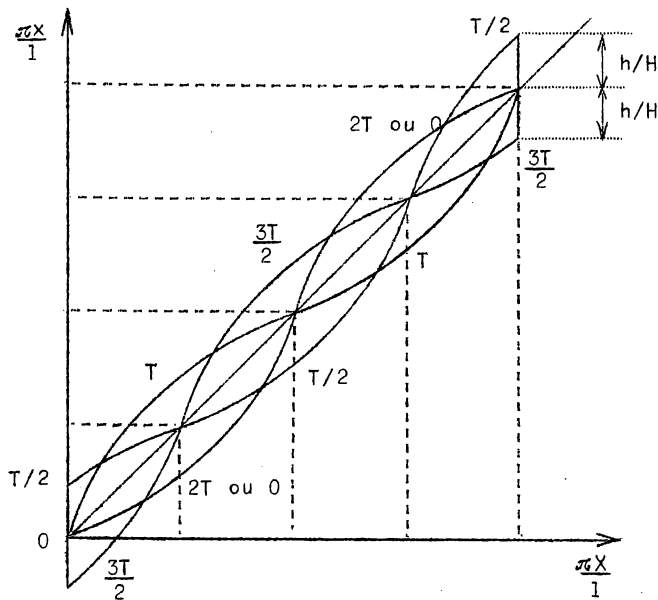


Fig. 12.

logue à celui de la figure 12, en substituant $\frac{\pi \cdot r}{1}$ à $\frac{h}{H}$, pour une valeur donnée de Z . Cette représentation subsiste en cas de profondeur infinie. Il en résulte que l'on a très approximativement $\frac{x}{1} = \frac{X}{1}$ et une houle sinusoidale pourvu que $\frac{\pi \cdot r}{1}$ et $\frac{h}{H}$ soient très petits, donc pour de très grandes valeurs de 1 , des valeurs suffisantes de H et des valeurs relativement faibles de h .

Dans ces conditions
$$V = \sqrt{g \cdot H} \quad (50)$$

et
$$u = \frac{h \cdot V}{H} \cdot \cos \frac{\pi}{1}(Vt-X) \quad (51)$$

$$w = \frac{\pi \cdot V \cdot h}{1} \cdot \frac{H-Z}{H} \cdot \sin \frac{\pi}{1}(Vt-X)$$

Donc, la vitesse horizontale est constante à chaque instant sur toute la profondeur. La vitesse verticale est nulle sur le fond $w_H = 0$. En surface

$$w_0 = \frac{\pi \cdot V \cdot h}{1} \cdot \sin \frac{\pi}{1}(Vt-X)$$

En ce qui concerne les pressions :

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} = - \frac{h^2}{H^2} \cdot \frac{V^2}{1} \cdot \sin \frac{\pi}{1}(Vt-X) \cdot \cos \frac{\pi}{1}(Vt-X) + \frac{\pi \cdot V^2 \cdot h \cdot Z}{H^2 \cdot 1} \cdot \sin \frac{\pi}{1}(Vt-X) \quad (50)$$

Pour $Z = 0$, $\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} = 0$.

Le premier terme du second membre est négligeable

Pour $Z = H$, sur le fond,

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} \approx \frac{\pi \cdot V^2 \cdot h}{1 \cdot H} \cdot \sin \frac{\pi}{1}(Vt-X) \quad (50 \text{ bis})$$

D'autre part :

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial Z} = \frac{g \cdot h}{H} \cdot \cos \frac{\pi}{1}(Vt-X) + g \cdot \left(1 - \frac{\pi \cdot h^2}{1^2} \cdot \frac{H-Z}{H}\right)$$

d'où

$$p = p_a + \gamma_e \cdot Z + \gamma_e \cdot \frac{h \cdot Z}{H} \cdot \cos \frac{\pi}{1}(Vt-X) - \frac{\pi \cdot h^2}{1^2} \cdot g \cdot Z \cdot \left(1 - \frac{Z}{2H}\right) \\ \approx p_a + \gamma_e \cdot Z + \gamma_e \cdot \frac{h \cdot Z}{H} \cdot \cos \frac{\pi}{1}(Vt-X) = p_a + \gamma_e \cdot (Z + \zeta - \xi_0) \quad (51)$$

Sur le fond
$$p_H = p_a + \gamma_e \cdot H + \gamma_e \cdot h \cos \frac{\pi}{1}(Vt-X)$$

$$p_H = p_a + \gamma_e \cdot (H - \zeta_0)$$

A chaque instant, la loi des pressions est donc hydrostatique suivant les verticales.

L'expression (50) correspond à la formule (45) du paragraphe 12; comme elle, elle satisfait à la formule de p en fonction de Z .

En effet, de (51), on déduit :

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} = \frac{\pi}{l} \cdot g \cdot h \cdot \frac{Z}{H} \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X) = \frac{\pi \cdot V^2 \cdot h \cdot Z}{l \cdot h^2} \sin \frac{\pi}{l}(Vt-X)$$

L'énergie d'une onde complète d'une largeur égale à l'unité est

$$E = \gamma_e \cdot h^2 \cdot l = \gamma_e \cdot h^2 \cdot \sqrt{g \cdot H} \cdot T$$

Comme la vitesse horizontale est à chaque instant constante sur toute la hauteur, ainsi que r , les verticales dynamiques sont toutes droites et verticales. Le débit à travers une verticale correspond à

$$x = X = \text{constante} \quad \text{et} \quad t = \text{constante}$$

$$Q_{xt} = \int_0^H \frac{h}{H} \cdot V \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) \cdot \left[1 + \frac{h}{H} \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) \right] \cdot dZ$$

$$Q_{xt} = V \cdot h \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) + \frac{V \cdot h^2}{H} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{l}(Vt-X)$$

Le 2^e terme est négligeable.

Donc, aux sommets et aux creux des ondes

$$Q_{\max} \text{ ou } \min = \pm V \cdot h \cdot \left(1 + \frac{h}{H} \right) \quad (52)$$

Les étales (débit nul) se produisent au niveau moyen, u est alors nul sur toute la profondeur suivant la verticale considérée. Les renversements de sens des vitesses horizontales sont donc simultanés sur toute la profondeur suivant chaque verticale.

Le volume total passant à travers une verticale pendant toute une période doit être nulle.

On trouve

$$\begin{aligned} \int_0^{2T} Q \cdot dt &= V \cdot h \cdot \int_0^{2\pi} \cos \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{X}{l} \right) \cdot dt \\ &+ \frac{V \cdot h^2}{H} \int_0^{2T} \frac{1 + \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{X}{l} \right)}{2} \cdot dt \\ \int_0^{2T} Q \cdot dt &= \frac{V \cdot T \cdot h^2}{H} = \frac{l \cdot h^2}{H} = l \cdot h \cdot \left(\frac{h}{H} \right) \approx 0 \end{aligned}$$

Ceci correspond aux hypothèses faites sur les ordres de grandeur de l , H et h , c'est-à-dire h très petit, et $\frac{h}{H}$ aussi petit.

Si l'on se réfère à la formule de Q_{xt} du paragraphe 13, on obtient

$$Q_{xt} = V \cdot h \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X) + \frac{V \cdot h^2}{2H} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{l}(Vt-X) + \frac{V \cdot h^2}{2H} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{l}(Vt-X)$$

Donc, le 2^e terme et le 3^e terme de l'expression de Q_{xt} du paragraphe 13 sont négligeables simultanément et sont du même ordre de grandeur. Lorsque H n'est pas très grand par rapport à h , il y a un relèvement du niveau

moyen par rapport au niveau d'équilibre, égal à

$$\frac{\pi \cdot h^2 \cdot l \cdot (H - Z)}{2 l \cdot \pi \cdot H^2} = \frac{(H - Z)}{2} \cdot \frac{h^2}{H^2} \quad (53)$$

En surface, c'est $\frac{h^2}{2 H}$.

Dans ce cas là, il faudrait aussi tenir compte de la formule exacte du débit

$$Q_{xt} = [V \cdot h \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X)] [1 + \frac{h}{H} \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X)]$$

et

$$\int_0^{2\tau} Q \cdot dt = l \cdot h \cdot (\frac{h}{H})$$

serait plus appréciable.

Si au mouvement ondulatoire sinusoïdal se superpose une vitesse de translation horizontale uniforme U , positive dans le sens de V , on a comme vitesse horizontale résultante :

$$u_r = U + u = U + \frac{V \cdot h}{H} \cdot \cos \frac{\pi}{l}(Vt-X)$$

Elle varie entre $U + \frac{V \cdot h}{H}$ et $U - \frac{V \cdot h}{H}$.

Les vitesses superficielles peuvent varier de sens si

$$- \frac{V \cdot h}{H} < \pm U < \frac{V \cdot h}{H}$$

Dans ce cas, l'époque de renversement du courant dépend de U , mais ce renversement continue à se produire simultanément sur chaque verticale.

Si $U = 0$, le renversement se produit au niveau moyen.

Si $0 < U < \frac{V \cdot h}{H}$, le renversement se produit après le niveau moyen mais avant le minimum, puis après le minimum, avant le niveau moyen.

Pour $U = \frac{V \cdot h}{H}$, les étales disparaissent; le courant est en permanence dans le sens de la propagation.

Si $-\frac{V \cdot h}{H} < U \leq 0$, le renversement se produit après le niveau moyen avant le maximum, puis après le maximum, avant le niveau moyen.

Si $U \leq -\frac{V \cdot h}{H}$, les étales disparaissent et le courant existe toujours en sens inverse de la célérité. Le cas de $U < 0$ est celui d'une onde se propageant en sens inverse d'un courant, par exemple une onde de marée dans un fleuve (à marée). Le courant de sens normal, d'amont vers aval, dit courant de jusant, dure plus que celui de sens inverse d'aval vers amont, dit courant de flot (fig. 13).

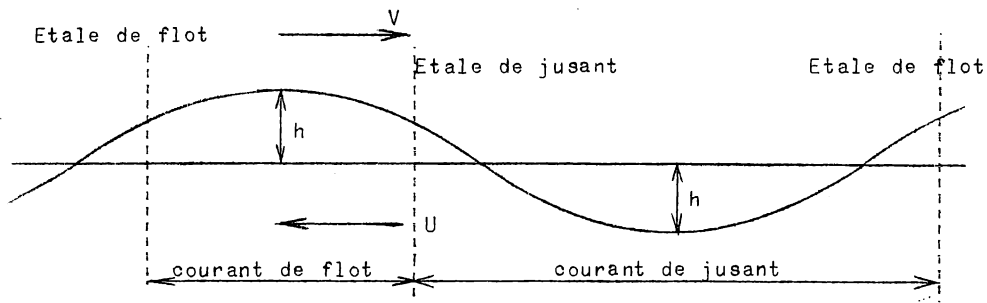


Fig. 13.

L'étale de flot se produit en retard sur le sommet de l'onde, avant le niveau moyen (mi-marée). L'étale de jusant non seulement après le creux de l'onde, mais même après la mi-marée consécutive.

On verra plus loin que dans les fleuves à marée, le courant d'amont n'influence caractéristiquement les époques des étales qu'au voisinage de la limite du domaine fluvio-maritime, c'est-à-dire vers l'extrémité amont du cours influencé par la marée. Dans la partie aval du domaine fluvio-maritime, les étales ne se présentent plus comme à la figure 13. L'étale de flot est toujours en retard sur la marée haute mais voisin de celle-ci. Mais l'étale de jusant est voisin de la marée basse et généralement en retard sur celle-ci. Les caractères de l'onde de marée fluviale ne correspondent donc pas à la théorie simple exposée ci-dessus.

Le débit au sommet est
$$Q = U.H + (U + V).h + \frac{V.h^2}{H}$$

Au creux, il est
$$Q = U.H - (U + V).h + \frac{V.h^2}{H}$$

15.- ONDES CAPILLAIRES

Ce sont des ondes dont la longueur d'onde $2 l$ est de l'ordre du décimètre (ou inférieure), la période $2 T$ inférieur à 0,1 sec. et de faible amplitude absolue. Dès lors, la profondeur est en général relativement grande. D'après Lamb, en tenant compte à la fois de la gravité et de la tension superficielle A , (voir chapitre VII, paragraphe 11)

$$V = \sqrt{\left(\frac{g.l}{\pi} + \frac{\pi.A}{\gamma_e.l}\right) \operatorname{tgh} \frac{\pi H}{l}} \quad (54)$$

en profondeur finie H .
En profondeur indéfinie

$$V = \sqrt{\frac{g.l}{\pi} + \frac{\pi.A}{\gamma_e.l}} \quad (54 \text{ bis})$$

Le deuxième terme l'emporte pour les très faibles valeurs de $2 l$, inférieures à 0,03 m (ondes capillaires); il devient négligeable pour des valeurs de $2 l$ supérieures à 0,30 m.

16.- CLAPOTIS SIMPLE EN PROFONDEUR FINIE

On admet que h est petit par rapport à l , selon les hypothèses du paragraphe 12. En appliquant aux résultats du paragraphe 12 les opérations du paragraphe 9, on obtient les résultats suivants pour le clapotis simple en profondeur finie :

$$\begin{aligned}
 x &= X - 2 r \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \sin \frac{\pi X}{l} \\
 z &= Z - 2 r' \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cos \frac{\pi X}{l} \\
 r &= h \cdot \frac{\cosh \frac{\pi(H-Z)}{l}}{\sinh \frac{\pi H}{l}}, \quad r' = h \cdot \frac{\sinh \frac{\pi(H-Z)}{l}}{\sinh \frac{\pi H}{l}} \\
 V &= \sqrt{\frac{g \cdot l}{\pi} \operatorname{tgh} \frac{\pi H}{l}}
 \end{aligned} \tag{55}$$

Donc
$$\frac{\xi}{\zeta} = \frac{r}{r'} \operatorname{tg} \frac{\pi X}{l}$$

Les trajectoires sont des droites d'inclinaison périodiquement variables suivant $\frac{\pi \cdot X}{l}$ et variable avec la profondeur Z . L'amplitude du mouvement alternatif sur les segments de trajectoires rectilignes varie avec X et Z ; elle est donnée par

$$2 \sqrt{\xi^2 + \zeta^2} = 4 \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 \frac{\pi X}{l} + r'^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi X}{l}} \cdot \cos \frac{\pi}{l} (Vt - X)$$

Les sommets et les creux se produisent aux conjonctions $X = 0, -l, -2l, \dots$

$$\xi = 0, \quad x = X, \quad \sqrt{\xi^2 + \zeta^2} = 2 r' \cdot \cos \frac{\pi}{l} (Vt - X)$$

Aux oppositions,
$$X = -\frac{l}{2}, -\frac{3l}{2}, \dots$$

$$\zeta = 0, \quad z = Z, \quad \sqrt{\xi^2 + \zeta^2} = 2 r \cdot \cos \frac{\pi}{l} (Vt - X)$$

Pour les vitesses :

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{dx}{dt} = 2 \frac{\pi}{l} V \cdot r \cdot \sin \frac{\pi}{l} V t \sin \frac{\pi X}{l} \\
 w &= \frac{dz}{dt} = 2 \frac{\pi}{l} V \cdot r' \cdot \sin \frac{\pi}{l} V t \cos \frac{\pi X}{l}
 \end{aligned} \tag{56}$$

Aux crêtes et aux creux $u = 0$

Aux oppositions $u = \frac{2 \cdot \pi}{l} \cdot V \cdot r \cdot \sin \frac{\pi}{l} V t,$

variant entre $\pm \frac{2 \cdot \pi}{l} V \cdot r.$

Les débits sont toujours nuls aux crêtes et aux creux. Aux oppositions, en admettant $dz = dZ$,

$$Q_{\max \text{ ou } \min} = \mp \frac{2 V \cdot h}{\sinh \frac{\pi H}{l}} \int_0^H \frac{\pi}{l} \cosh \frac{\pi(H-Z)}{l} \cdot dZ$$

$$= \mp \frac{2 V \cdot h}{\sinh \frac{\pi H}{l}} \left[- \sinh \frac{\pi(H-Z)}{l} \right]_0^H = \mp 2 V \cdot h$$

Ces débits extrêmes sont indépendants de la profondeur; ils sont les mêmes en profondeur indéfinie.

Le relèvement du plan moyen par rapport au plan d'équilibre est $\frac{\pi \cdot r \cdot r'}{2 l}$, à la surface libre $\frac{\pi \cdot h \cdot r_0}{2 l}$.

A la surface libre, $Z = 0$

$$x = X - \frac{2 h}{\operatorname{tgh} \frac{\pi H}{l}} \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \sin \frac{\pi X}{l},$$

$$z = - 2 h \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \cos \frac{\pi X}{l} \quad (57)$$

$$u = \frac{2 \pi}{l} \cdot V \cdot \frac{h}{\operatorname{tgh} \frac{\pi H}{l}} \sin \frac{\pi}{l} V t \cdot \sin \frac{\pi X}{l}$$

Cette vitesse est maximum et minimum aux oppositions, elle vaut alors

$$\pm \frac{2 \pi}{l} \cdot V \cdot \frac{h}{\operatorname{tgh} \frac{\pi H}{l}}.$$

Le clapotis est une ondulation stationnaire; un courant uniforme peut s'y superposer. Pour les pressions, on opère comme aux paragraphes précédents

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2 \pi^2}{l^2} \cdot V^2 \cdot r \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \sin \frac{\pi X}{l}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{2 \pi^2}{l^2} \cdot V^2 \cdot r' \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \cos \frac{\pi X}{l},$$

$$\frac{\partial x}{\partial X} = 1 - \frac{2 \pi}{l} \cdot r \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \cos \frac{\pi X}{l}, \quad \frac{\partial z}{\partial X} = \frac{2 \pi}{l} \cdot r' \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \sin \frac{\pi X}{l},$$

$$\frac{\partial x}{\partial Z} = - \frac{2 \pi}{l} \cdot r' \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \sin \frac{\pi X}{l}, \quad \frac{dz}{dZ} = 1 + \frac{2 \pi}{l} \cdot r \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \cos \frac{\pi X}{l}$$

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} = - \frac{2 \pi^2}{l^2} \cdot V^2 \cdot r \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \sin \frac{\pi X}{l} \left(1 - \frac{2 \pi}{l} \cdot r \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \cos \frac{\pi X}{l} \right)$$

$$- \left(\frac{2 \pi^2}{l^2} \cdot V^2 \cdot r' \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \cos \frac{\pi X}{l} - g \right) \cdot \frac{2 \pi}{l} \cdot r' \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \sin \frac{\pi X}{l}$$

$$= \frac{2 \pi}{l} \cdot r' \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \sin \frac{\pi X}{l} \left[g - \frac{\pi}{l} \cdot V^2 \cdot \operatorname{cotgh} \frac{\pi(H-Z)}{l} \right]$$

$$+ 4 \frac{\pi^3}{l^3} \cdot \frac{V^2 \cdot h^2}{\sinh^2 \frac{\pi H}{l}} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{l} V t \cdot \cos \frac{\pi X}{l} \cdot \sin \frac{\pi X}{l}$$

Le dernier terme est négligeable.

Pour $z = 0$, $\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} = 0$

d'où $V = \sqrt{\frac{g \cdot l}{\pi} \operatorname{tgh} \frac{\pi H}{l}}$ (44)

Donc $\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} = \frac{2 \pi^2}{l^2} \cdot V^2 \cdot r' \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \sin \frac{\pi X}{l} \cdot [\operatorname{cotg} \frac{\pi H}{l} - \operatorname{cotg} \frac{\pi(H-Z)}{l}]$
 $+ \frac{4 \pi^3}{l^3} \cdot \frac{V^2 \cdot h^2}{\sinh^2 \frac{\pi H}{l}} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{l} V t \cdot \cos \frac{\pi X}{l} \cdot \sin \frac{\pi X}{l}$

$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial Z} = (-\frac{2 \pi^2}{l^2} \cdot V^2 \cdot r \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \sin \frac{\pi X}{l}) (\frac{2 \pi}{l} \cdot r' \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \sin \frac{\pi X}{l})$
 $- [\frac{2 \pi^2}{l^2} \cdot V^2 \cdot r' \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \cos \frac{\pi X}{l} - g] (1 + \frac{2 \pi}{l} \cdot r \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \cos \frac{\pi X}{l})$

Après développement et réduction, il vient :

$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial Z} = g \cdot [1 + \frac{2 \pi \cdot h}{l} \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \cos \frac{\pi X}{l} \frac{\cosh \frac{\pi Z}{l}}{\cosh \frac{\pi H}{l} \cdot \sinh \frac{\pi H}{l}}$
 $- \frac{4 \pi^2 \cdot h^2}{l^2} \cdot \frac{\cosh \pi \frac{H-Z}{l} \cdot \sinh \pi \frac{H-Z}{l}}{\sinh \frac{\pi H}{l} \cdot \cosh \frac{\pi H}{l}}]$

En négligeant le dernier terme :

$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial Z} = g \cdot [1 + \frac{2 \pi \cdot h}{l} \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \cos \frac{\pi X}{l} \cdot \frac{\cosh \frac{\pi Z}{l}}{\cosh \frac{\pi H}{l} \sinh \frac{\pi H}{l}}]$

Sur une verticale dynamique, pour $X = \text{constante}$

$p = p_a + \gamma_e \cdot [Z + \frac{2 h \cdot \sinh \frac{\pi Z}{l}}{\cosh \frac{\pi H}{l} \cdot \sinh \frac{\pi H}{l}} \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \cos \frac{\pi X}{l}]$

Sur le fond, $Z = H$

$p_H = p_a + \gamma_e \cdot H + \gamma_e \cdot \frac{2 h \cdot \cos \frac{\pi}{l} V t \cdot \cos \frac{\pi X}{l}}{\cosh \frac{\pi H}{l}}$ } (58)
 $p_H = p_a + \gamma_e \cdot (H + \frac{\zeta_o}{\cosh \frac{\pi H}{l}})$

Si H est petit par rapport à l , $p_H = p_a + \gamma_e \cdot (H + \zeta_0)$.

La pression maximum sur le fond est donc

$$p_{\max} = p_a + \gamma_e \cdot (H + 2 h).$$

17.- CLAPOTIS SIMPLE EN PROFONDEUR FINIE, TRES GRANDE LONGUEUR D'ONDE

Ce cas correspond aux hypothèses du paragraphe 14

$$r = \frac{h \cdot l}{\pi \cdot H}, \quad r' = h \cdot \frac{H - Z}{H}, \quad x = X - \frac{2 l \cdot h}{\pi \cdot H} \cdot \cos \frac{\pi t}{T} \cdot \sin \frac{\pi X}{l}, \quad (59)$$

$$z = Z - 2 h \cdot \frac{(H - Z)}{H} \cdot \cos \frac{\pi t}{T} \cdot \cos \frac{\pi X}{l}$$

$$\frac{\xi}{\zeta} = \frac{1}{\pi \cdot (H - Z)} \operatorname{tg} \frac{\pi X}{l}, \quad \sqrt{\xi^2 + \zeta^2} = \frac{2 h}{H} \sqrt{\frac{l^2}{\pi^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi X}{l} + (H - Z)^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi X}{l}} \cdot \cos \frac{\pi t}{T}$$

Le relèvement du plan moyen par rapport au plan d'équilibre est $\frac{h^2 \cdot (H - Z)}{2 H^2}$.

Sur le fond, $Z = H$, $r' = 0$, $\zeta = 0$ et le relèvement est nul.

A la surface, $Z = 0$, $r' = h$, $\zeta = -2 h \cdot \cos \frac{\pi t}{T} \cdot \cos \frac{\pi X}{l}$.

Le relèvement du plan moyen est $\frac{h^2}{2 H}$.

$$w_0 = \frac{2 \pi \cdot h}{l} \cdot \sin \frac{\pi t}{T} \cdot \cos \frac{\pi X}{l}$$

$$\frac{\xi}{\zeta} = \frac{1}{\pi \cdot H} \operatorname{tg} \frac{\pi X}{l}, \quad \sqrt{\xi^2 + \zeta^2} = \frac{2 h}{H} \sqrt{\frac{l^2}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi X}{l} + H^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi X}{l}} \cdot \cos \frac{\pi t}{T}$$

Aux crêtes et aux creux, $x = X$, $\xi = 0$, $\zeta = 2 h \cdot \cos \frac{\pi t}{T}$.

Aux oppositions, $z = Z$, $\zeta = 0$, $\xi = \frac{2 l \cdot h}{\pi \cdot H} \cdot \cos \frac{\pi t}{T}$

$$u = \frac{2 h}{H} \sqrt{g \cdot H} \cdot \sin \frac{\pi t}{T}, \quad u_{\max} \text{ ou } \min = \pm \sqrt{\frac{2 g}{H}} \cdot h$$

$$Q_{\max} \text{ ou } \min = \pm 2 V \cdot h$$

A ces ondulations stationnaires peut se superposer un courant uniforme.

Pour les pressions, en simplifiant les expressions du paragraphe 16 :

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} = \frac{2 \pi^2}{l^2} \cdot v^2 \cdot \frac{h}{H} \cdot \cos \frac{\pi t}{T} \cdot \sin \frac{\pi X}{l} \left\{ (H - Z) \left[\frac{1}{\pi \cdot H} - \frac{1}{\pi \cdot (H - Z)} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{2 \pi}{l} \frac{h \cdot l^2}{\pi^2 \cdot H} \cdot \cos \frac{\pi t}{T} \cdot \cos \frac{\pi X}{l} \right\}$$

ou :

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} = \frac{2 \pi}{l} \cdot g \cdot \frac{h}{H} \cdot \cos \frac{\pi t}{T} \sin \frac{\pi X}{l} \left[Z + 2 h \cdot \cos \frac{\pi t}{T} \cos \frac{\pi X}{l} \right]$$

On peut négliger le terme en h^2 et écrire

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} = \frac{2 \pi \cdot Z}{1} \cdot g \cdot \frac{h}{H} \cdot \cos \frac{\pi t}{T} \cdot \sin \frac{\pi X}{1}$$

Nul en surface, sur le fond

$$\left(\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} \right)_H = 2 \pi \cdot g \cdot \frac{h}{1} \cdot \cos \frac{\pi t}{T} \cdot \sin \frac{\pi X}{1}$$

$$\frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial Z} = g \cdot \left[1 + \frac{2 h}{H} \cdot \cos \frac{\pi t}{T} \cdot \cos \frac{\pi X}{1} - \frac{4 \pi^2 \cdot h^2}{1^2} \cdot \frac{H - Z'}{H} \right]$$

$$p = p_a + \gamma_e \cdot \left[Z + \frac{2 h \cdot Z}{H} \cdot \cos \frac{\pi t}{T} \cdot \cos \frac{\pi X}{1} - \frac{4 \pi^2 \cdot h^2}{1^2} \cdot Z \cdot \left(1 - \frac{Z}{2 H} \right) \right]$$

En négligeant le 4^e terme

$$p = p_a + \gamma_e \cdot \left[z + 2 h \cdot \cos \frac{\pi t}{T} \cdot \cos \frac{\pi X}{1} \right]$$

Sur le fond

$$p_H = p_a + \gamma_e \cdot \left(H + 2 h \cdot \cos \frac{\pi t}{T} \cdot \cos \frac{\pi X}{1} \right)$$

Ces formules correspondent à la pression hydrostatique suivant toute verticale $X = \text{constante}$

$$\begin{aligned} p &= p_a + \gamma_e \cdot (Z + \zeta - \zeta_0) \\ p_H &= p_a + \gamma_e \cdot (H - \zeta_0) \end{aligned} \quad (51)$$

Comme les vitesses et les déplacements horizontaux sont les mêmes à chaque instant sur toute la profondeur, les verticales dynamiques restent des droites verticales.

18.- SEICHES

Ces clapotis de grande longueur d'onde en profondeur finie sont souvent observés dans la nature. Par exemple dans les lacs de forme assez allongés. Le professeur Forel les a observés sur le lac de Genève. On les appelle seiches. Elles se produisent lorsque la demi-longueur d'onde est un sous-multiple de la longueur du lac $L:l = \frac{L}{n}$. n est un nombre entier peu élevé, souvent 1.

La demi-période est
$$T = \frac{1}{V} = \sqrt{\frac{\pi \cdot L}{n \cdot g \cdot \operatorname{tgh} \frac{\pi n H}{L}}}$$

Comme $\frac{H}{l} = \frac{n \cdot H}{L}$ est généralement très faible dans les grands lacs,

$$V = \sqrt{g \cdot H} \quad \text{et} \quad T = \frac{L}{n \sqrt{g \cdot H}}$$

Ces formules sont vérifiées au lac Léman avec une exactitude suffisante. Des seiches longitudinales de 73 minutes et de 35 minutes de périodicité correspondent à $l = L$ et $l = \frac{L}{2}$. Il y a aussi des seiches transversales

de 10 minutes. Les seiches de 73 minutes ont 1.20 à 1.50 m d'amplitude maximum, celles de 10 minutes 0,12 m seulement. Les oscillations peuvent être engendrées par des différences de pression barométrique.

Le débit maximum (en valeur absolue) à travers une verticale est

$$2 V \cdot h = \frac{2 l \cdot h}{T}$$

La vitesse maximum en valeur absolue à travers une verticale est

$$\frac{2 \pi}{l} \cdot V \cdot r = \pm \frac{2 V \cdot h}{H}$$

Comme $V = \sqrt{g \cdot H}$, $u_{\max} \text{ ou } u_{\min} = \pm 2 h \sqrt{\frac{g}{H}}$

Pour $H = 10 \text{ m}$, $u_{\max} \text{ ou } u_{\min} \approx \pm 2 h \text{ m/sec.}$

Dans les avant-ports on observe souvent des oscillations stationnaires, analogues à des seiches et généralement de faible amplitude. Sur les côtes du Pacifique des Etats-Unis, généralement l'amplitude est de 0,10 m. La période est intermédiaire entre celle des houles ordinaires et celle des ondes de marée, c'est-à-dire de quelques minutes à une heure.

Les causes de ces seiches dans des bassins non fermés en communication avec la mer ne sont pas les mêmes que dans les lacs. Elles proviennent d'ondes à longue période de la mer dont une certaine énergie peut pénétrer dans l'avant-port. Ces ondes à longues périodes peuvent provenir de séismes sous-marins, on les appelle des "tsunamis". Mais ces phénomènes sont peu fréquents. Une cause plus fréquente consiste dans les ondes de longue période résultant de la réflexion d'une faible portion de l'énergie des vagues qui se brisent en déferlant sur la côte. Par exemple, une tempête dans une région éloignée d'un bassin océanique peut produire une période de déferlement et de ressac sur une côte éloignée. Des ondes à longue période sont réfléchies par cette côte et peuvent produire des seiches dans des ports situés à des milliers de kilomètres de distance.

Pour $H = 10 \text{ m}$ et $4 h = 0,10 \text{ m}$, la vitesse maximum, constante sur toute la hauteur, est environ 0,05 m/sec ou 0,18 km/h. Ces vitesses peuvent exercer sur les grands navires amarrés des efforts considérables, qui exigent des amarrages importants et des dispositifs d'amarrage très solides. Des dégâts peuvent être causés aux dispositifs d'amarrage insuffisants. Pour éviter ces seiches, on peut réduire les entrées des avant-ports, de manière à réduire la quantité d'énergie des ondes à longue période qui peut y pénétrer.

La vitesse moyenne du mouvement est

$$\frac{T}{2} \cdot u_{\text{moy}} = \frac{2 V \cdot h}{H} \int_0^{T/2} \sin \frac{\pi t}{T} \cdot dt$$

d'où $u_{\text{moy}} = \frac{4 V \cdot h}{\pi \cdot H} = \frac{4 h}{\pi} \sqrt{\frac{g}{H}} = \frac{2}{\pi} \cdot u_{\max}$

D'après le professeur B. Hellström (Wind effect on lakes and rivers,

Stockholm, 1941), lorsqu'un vent de tempête souffle sur un bassin fermé, le gradient de la surface dans la direction du vent est

$$\frac{dZ_s}{dx} = \frac{1,5 \mathcal{C}_s}{\gamma_e \cdot (Z_s - Z_f)}$$

Z_f étant l'ordonnée verticale du fond, Z_s celle de la surface,

$$H = Z_s - Z_f.$$

\mathcal{C}_s représente la force tangentielle exercée par le vent à la surface de l'eau par unité de surface. D'après M.B. Hellström

$$\mathcal{C}_s = 0,0004 v^{1,8} \text{ kg/m}^2,$$

v étant la vitesse du vent en m/sec.

L'auteur admet que le mouvement est uni-dimensionnel dans la direction du vent, c'est-à-dire que Z_s est invariable dans tous les plans verticaux perpendiculaires à la direction du vent. Pour Z_f , on admet l'ordonnée moyenne du fond dans chacun de ces plans verticaux. L'intégration graphique de $\frac{dZ_s}{dx}$ permet le tracé de la ligne d'eau, la ligne nodale étant déterminée par la constance du volume d'eau. La formule a été vérifiée sur le fjord fermé de Ringköbing (Danemark) et sur le Lac Okeechobee en Floride (E.U.A). Dans ce dernier cas, on a trouvé

$$\mathcal{C}_s = 0,00037 v^{1,8}$$

Lorsque l'action du vent a cessé, le profil déformé se met à osciller suivant une seiche et s'amortit lentement (cf chapitre XXVI, paragraphe 16).

19.- HOULE IRRIGATIONNELLE DE STOKES

Les mouvements irrotationnels du paragraphe 7 et des suivants sont approximatifs et fondés sur l'hypothèse que $\frac{h}{l}$ est assez petit pour que $(\frac{h}{l})^2$ soit négligeable. Stokes a donné en 1847 des équations plus complètes de la houle irrotationnelle, lorsque $\frac{h}{l}$ n'est pas aussi petit, la masse d'eau étant initialement à l'état de repos.

En profondeur finie H , la célérité est :

$$V = \sqrt{\frac{g \cdot l}{\pi} \cdot \operatorname{tgh} \frac{\pi H}{l} \left[1 + \frac{\pi^2 \cdot h^2}{l^2} \cdot \left(\frac{2 \cosh^2 \frac{2\pi H}{l} + 2 \cosh \frac{2\pi H}{l} + 5}{8 \sinh^4 \frac{\pi H}{l}} \right) \right]} \quad (60)$$

Si $H \equiv \infty$,
$$V = \sqrt{\frac{g \cdot l}{\pi} \cdot \left(1 + \frac{\pi^2 \cdot h^2}{l^2} \right)} \quad (61)$$

Les expressions de z , de u et de w sont très complexes. Pour les déplacements de la particule par rapport à sa position moyenne, on trouve :

$$\begin{aligned} \xi = h. & \frac{\cosh \frac{\pi(H-Z)}{1}}{\sinh \frac{\pi H}{1}} \cdot \sin \frac{\pi}{1}(Vt-X) \\ & + \frac{\pi \cdot h^2}{2 \cdot 1 \cdot \sinh^2 \frac{\pi H}{1}} \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \frac{\cosh \frac{2\pi(H-Z)}{1}}{\sinh^2 \frac{\pi H}{1}} \right] \cdot \sin \frac{2\pi}{1}(Vt-X) \\ & + \frac{\pi^2 \cdot h^2}{2 \cdot 1^2} \cdot V \cdot \frac{\cosh \frac{2\pi(H-Z)}{1}}{\sinh^2 \frac{\pi H}{1}} \cdot t \end{aligned} \quad (62)$$

$$\zeta = h. \frac{\sinh \frac{\pi(H-Z)}{1}}{\sinh \frac{\pi H}{1}} \cdot \cos \frac{\pi}{1}(Vt-X) - \frac{3}{8} \frac{\pi \cdot h^2}{1} \cdot \frac{\sinh \frac{2\pi(H-Z)}{1}}{\sinh^4 \frac{\pi H}{1}} \cdot \cos \frac{2\pi}{1}(Vt-X) \quad (63)$$

D'après ces formules, l'orbite est un peu plus élevée que l'ellipse aux crêtes et un peu plus aplatie aux creux, en outre l'orbite n'est pas fermée, mais la particule subit un déplacement d'ensemble dans le sens de la célérité. Donc, le mouvement des particules ne dépend pas seulement de leur position moyenne, mais aussi de leurs déplacements par rapport à cette position moyenne. La vitesse horizontale de la particule est plus grande pendant la montée que pendant la descente, d'où un déplacement d'ensemble qui, pour une période complète est

$$\frac{\pi^2 \cdot h^2}{1^2} \cdot V \cdot T \cdot \frac{\cosh \frac{2\pi(H-Z)}{1}}{\sinh^2 \frac{\pi H}{1}} = \frac{\pi^2 \cdot h^2}{1} \cdot \frac{\cosh \frac{2\pi(H-Z)}{1}}{\sinh^2 \frac{\pi H}{1}} \quad (64)$$

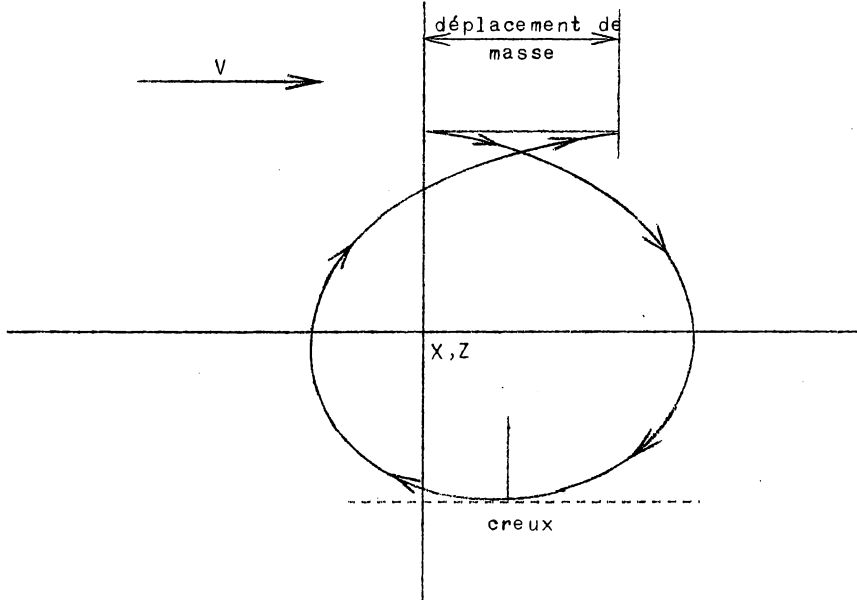


Fig. 14.

En profondeur indéfinie, le déplacement serait pendant une période $2 T$.

$$\frac{2 \pi^2 \cdot h^2}{1} \cdot e^{-\frac{2\pi Z}{1}} \quad (65)$$

Il y correspond une vitesse de transport en masse :

$$\text{en profondeur finie} \quad U = \frac{\pi^2 \cdot h^2}{2 \cdot 1^2} \cdot V \cdot \frac{\cosh \frac{2\pi(H-Z)}{1}}{\sinh^2 \frac{\pi H}{1}} \quad (66)$$

$$\text{en profondeur indéfinie} \quad U = \frac{\pi^2 \cdot h^2}{1^2} \cdot V \cdot e^{-\frac{2\pi Z}{1}} = V \cdot \frac{r^2}{R^2} \quad (67)$$

Cette vitesse de la formule (67) est égale et de sens contraire à celle de la formule (26) du paragraphe 7.

Les observations et les expériences vérifient la théorie de Stokes lorsque $\frac{h}{1}$ n'est pas négligeable. Cependant, les erreurs d'observation sont le plus souvent du même ordre de grandeur que les écarts par rapport aux théories qui négligent $\frac{h}{1}$, aussi a-t-on généralement recours à ces dernières.

Lorsque 1 est très grand, on retrouve à fortiori les formules du paragraphe 14, $V = \sqrt{g \cdot H}$. Lorsque H devient relativement petit, de telle sorte que $\frac{\pi \cdot H}{1}$ devient petit, on peut écrire

$$\cosh \frac{\pi H}{1} = 1 + \frac{\pi^2 \cdot h^2}{2 \cdot 1^2}$$

$$\sinh \frac{\pi H}{1} = \frac{\pi \cdot H}{1}$$

La formule (60) devient

$$V = \sqrt{g \cdot H \left(1 + \frac{\pi^2 \cdot h^2}{1^2} + \frac{h^2}{H^2} + \frac{9}{8} \frac{1^2 \cdot h^2}{\pi^2 \cdot H^4} \right)} \quad (68)$$

Il est clair que cette formule n'est valable que si $H > h$.

Le déplacement de la formule (64) devient

$$\frac{\pi \cdot 1 \cdot h^2}{H^2} + \frac{2 \pi^3 \cdot h^2}{1} \left(1 + \frac{Z^2}{H^2} - 2 \frac{Z}{H} \right) \quad (69)$$

Il y correspond une vitesse de transport de masse

$$U = V \cdot \left[\frac{\pi \cdot h^2}{2 \cdot H^2} + \pi^3 \frac{h^2}{1^2} \left(1 + \frac{Z^2}{H^2} - 2 \frac{Z}{H} \right) \right] \quad (70)$$

Les déplacements et les vitesses augmentent donc considérablement lorsque H diminue et que $\frac{h}{H}$ augmente. Il y a donc aussi une propagation de l'énergie cinétique.

20.- SPECTRE DES MOUVEMENTS D'OSCILLATION PERIODIQUES

On peut classer les divers mouvements d'oscillation des masses océaniques d'après leurs périodes $2 T$. On peut distinguer les ondes suivantes :

1) Capillaires	$2 T < 0,1 \text{ sec.}$
2) Ultra-gravifiques	$2 T \text{ de } 0,1 \text{ à } 1 \text{ sec.}$
3) Ordinaires gravifiques	$2 T \text{ de } 1 \text{ à } 30 \text{ sec.}$
4) Infra-gravifiques	$2 T \text{ de } 30 \text{ sec. à } 5 \text{ min.}$
5) Ondes à longue période	$2 T \text{ de } 5 \text{ min. à } 12 \text{ h.}$
6) Marées ordinaires	$2 T \text{ de } 12 \text{ à } 24 \text{ h.}$
7) Ondes trans-tidales (ou marées-tempêtes)	$2 T \geq 24 \text{ h.}$

Les ondes 1) à 3) sont engendrées par les effets du vent; les ondes 4) par le vent et l'action des ondes 3; les ondes 5) par les tempêtes et les séismes, les ondes 6) par l'action de la lune et du soleil; enfin les ondes 7) par la superposition de l'action des tempêtes à celle de la marée ordinaire. La figure 15 reproduit schématiquement ce spectre.

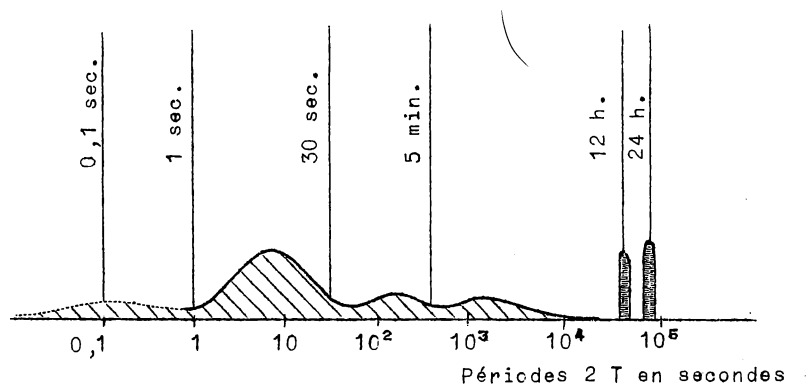


Fig. 15.

Ce spectre étendu a une importance pratique. Un avant-port ayant une période propre de 2 minutes pourra être affecté par des ondes infra-gravifiques de même période, ce qui y produira des seiches (voir paragraphe 18), même si les ondes infra-gravifiques ont moins de 0,10 m d'amplitude et ne sont pas discernables. Un navire ayant une période de roulis de 5 sec. sera très affecté par une houle de même période, même si l'amplitude en est faible; il sera moins affecté par une houle plus forte de 14 sec. de période. Il s'agit là de phénomènes de résonance. L'efficacité du radar est limitée par la réflexion et la diffraction par les ondes capillaires plus que par les hautes vagues.

Les ondes capillaires sont engendrées par le vent soufflant à une vitesse de plus d'un mètre par seconde. Elles produisent le miroitement de la mer. Elles rendent la surface rugueuse et permettent ainsi au vent d'exercer une forte action à la surface de l'eau. Elles sont donc importantes pour la génération des courants et des houles de période plus longue. Les agents tensio-actifs, tels que les huiles et les détergents, les atténuent considérablement. Elles sont aussi amorties rapidement par la viscosité.

Les houles ultra-gravifiques et gravifiques ordinaires sont engendrées par les vents vifs et persistants. Il y a accumulation prolongée d'énergie et génération initiale de houles de divers hauts et périodes. Les houles les plus longues, qui sont souvent de faible amplitude

se propagent beaucoup plus vite que les autres et s'amortissent très peu. Elles peuvent ainsi précéder de longtemps à grande distance les fortes houles de plus courtes périodes engendrées dans l'océan par la tempête ou la tempête elle-même. Une faible houle d'assez longue période peut donc annoncer la tempête.

Les ondes infra-gravifiques peuvent résulter de la succession périodique de vagues de grande hauteur et de faible hauteur déferlant près du rivage. Il peut en résulter une élévation et un abaissement alternatifs du niveau moyen, produisant des ondes de plus longue période, mais dont l'amplitude ne dépasse pas 0,10 de celle des vagues principales. Elles se propagent à grande vitesse, mais sont très influencées par la topographie du fond et des rivages; elles peuvent même se renverser et revenir vers le rivage. A la profondeur de plusieurs centaines de mètres, la vitesse sur le fond peut être supérieure à celle des vagues ordinaires qui ont donné naissance aux ondes infra-gravifiques.

Les ondes de longue période observées dans le Pacifique ont une période de 15 à 20 min. et une amplitude qui ne dépasse pas 5 cm. Elles dépendent des conditions météorologiques. Les séismes sous-marins peuvent produire des vagues de même période, mais beaucoup plus hautes, appelées "tsunamis", qui produisent de grands dégâts sur les côtes du Japon et des îles Hawaï.

Fin mai 1960, de violents tremblements de terre secouèrent le nord du Chili, dans la région de Conception. Six volcans éteints rentrèrent en activité. L'origine de ces séismes réside dans les failles de la croûte terrestre, situées dans les fonds du Pacifique voisins de la côte et se développant sous la Cordillère des Andes. La croûte terrestre présente des points faibles dans le bassin du Pacifique, où se produisent 80 % des tremblements de terre.

Le séisme a engendré des "tsunamis", trains de vagues de 0,60 à 0,90 m d'amplitude, se propageant vers l'ouest à la célérité de 790 km à l'heure (225 m/sec). Elles ont atteint les îles Hawaï après 16 heures. Quatre hautes vagues successives ont balayé le rivage dans le temps d'une heure, la plus haute atteignant 4,50 m. La ville de Hélo a été détruite. Les côtes japonaises ont été atteintes après 25 heures et balayées par des vagues atteignant 6 m de hauteur. Il y a eu plus de 150.000 personnes sans abris et de très nombreuses victimes. Auparavant, les vagues avaient frappé plus légèrement les Philippines. Ces raz-de-marée s'élèvent comme des murailles d'eau quand ils abordent la plage et s'avancent de centaines de mètres dans l'hinterland, en détruisant tout sur leur passage.

Les ondes de marée sont dues aux attractions lunaires et solaires. Leur étude fait l'objet du chapitre suivant. Les marées ordinaires sont peu affectées par le vent. Mais certaines circonstances météorologiques, éventuellement à longue période, des tempêtes violentes, des variations des courants marins peuvent produire des variations des niveaux des marées indépendants des facteurs de marée ordinaires.

Les cycles climatiques à très longue période peuvent agir; par exemple, on admet que le niveau des océans s'élève d'environ 15 cm par siècle.

21.- ESCARPEMENT MAXIMUM DES HOULES

D'après la théorie de Gerstner, en profondeur indéfinie, la houle la plus escarpée est cycloïdale en surface et présente des points de rebroussement à tangente verticale. Elle correspond à

$$h = R = \frac{1}{\pi} \quad (\text{paragraphe 2})$$

d'où
$$\left(\frac{h}{l}\right)_{\max} = \frac{1}{\pi} = 0,317.$$

D'après la théorie de la houle irrotationnelle de Stokes (paragraphe 19), le maximum d'escarpement correspond en crête à des points anguleux dont les tangentes font entre elles un angle de 120° et chacune un angle de 30° avec l'horizontale.

Selon Mitchell (1893)
$$\left(\frac{h}{l}\right)_{\max} = 0,14.$$

22.- INSTABILITE ET DEFERLEMENT DES HOULES EN PROFONDEUR DECROISSANTE

Lorsque la profondeur est $H > l_0$, l'énergie par unité de largeur d'une onde complète est

$$E_0 = \gamma_e \cdot h_0^2 \cdot l_0 \cdot \left(1 - \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{h_0^2}{l_0^2}\right)$$

En profondeur $H < l$, on a pour l'énergie

$$E = \gamma_e \cdot h^2 \cdot l \cdot \left(1 - \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{r_0^2}{l^2}\right)$$

On écrira en général,

$$E = \gamma_e \cdot h^2 \cdot l \cdot \left(1 - M \cdot \frac{h^2}{l^2}\right)$$

M étant un paramètre fonction de $\frac{H}{l}$ et valant $\frac{\pi^2}{2}$ lorsque $H \geq l$.

La puissance potentielle transmise à la crête par unité de largeur est

$$P = \frac{E}{4 T} = \frac{E \cdot V}{4 l}$$

D'après Lord Rayleigh, cette expression est généralisée sous la forme

$$P = n \cdot \frac{E V}{2 l} \quad \text{avec} \quad n = \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \frac{\frac{2 \pi \cdot H}{1}}{\sinh \frac{2 \pi H}{1}}\right]$$

en écrivant
$$\frac{E \cdot V}{2 l} = \gamma_e \cdot h^2 \cdot \sqrt{\frac{g \cdot l}{\pi}}$$

donc
$$P = \frac{n}{2} \cdot \gamma_e \cdot h^2 \cdot \sqrt{\frac{g \cdot l}{\pi}} \tag{71}$$

$n = \frac{1}{2}$ en eau très profonde et 1 en eau profonde. Cela signifie qu'en eau très peu profonde, l'énergie totale se propage, à la vitesse V, et pas seulement la moitié potentielle de l'énergie. En ce sens, les ondes d'oscillation de faible amplitude et en faible profondeur se comportent comme des ondes solitaires.

Lorsque la profondeur diminue, la célérité diminue :

$$V_0 = \sqrt{\frac{g \cdot l_0}{\pi}}, \quad V = \sqrt{\frac{g \cdot l}{\pi} \cdot \operatorname{tgh} \frac{\pi H}{l}} \approx \sqrt{\frac{g \cdot l}{\pi} \frac{\frac{\pi \cdot H}{l}}{1 + \frac{\pi^2 \cdot H^2}{l^2}}}$$

Si l est très grand, $V = \sqrt{g \cdot H}$

Mais T ne varie pas avec la profondeur

$$T = \frac{l_0}{V_0} = \frac{l}{V}, \quad \text{donc } l = l_0 \cdot \frac{V}{V_0}$$

Si la puissance transmise reste constante

$$\frac{1}{4} \cdot \gamma_e \cdot h_0^2 \cdot \sqrt{\frac{g \cdot l_0}{\pi}} = \frac{n}{2} \cdot \gamma_e \cdot h^2 \cdot \sqrt{\frac{g \cdot l}{\pi}}$$

d'où
$$h = h_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{2n} \cdot \frac{V_0}{V}} \quad (72)$$

Ceci suppose qu'il n'y a pas d'énergie ajoutée ni retranchée par m de largeur lorsque la profondeur diminue.

Lorsqu'une lame venant de profondeurs supérieures à l atteint des profondeurs moindres, l'escarpement augmente, la crête s'allonge, le creux paraît atténué et assez plat. Si la rampe du fond est douce, il se produit un ou plusieurs déferlements partiels suivi d'un déferlement final. Si la rampe est raide, il n'y a généralement qu'un seul déferlement plongeant. Sur une rampe douce, le déferlement peut être plongeant ou se présenter sous forme d'une onde à front assez raide couverte d'écume et roulant. L'écoulement en retour après le déferlement final est lisse.

En eau profonde, seule l'énergie potentielle se propage; l'énergie cinétique est périodique. Au fur et à mesure que la profondeur diminue, les orbites deviennent des ellipses. Dès lors, l'énergie cinétique devient de moins en moins périodique et l'énergie qui se propage devient plus grande

D'après la formule
$$h = h_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{2n} \frac{V_0}{V}}$$

lorsque H devient plus petit que l , la croissance de n l'emporte d'abord sur celle de $\frac{V_0}{V}$ et h diminue. Lorsque H devient plus petit que $0,12 l$, l'inverse se produit et h s'accroît.

Lorsque la profondeur devient très faible, les vagues déferlent et se brisent, parfois en plusieurs fois. En général $h < 0,14 l$, mais est souvent beaucoup moindre, par exemple en cas de courant contraire ou de vent soufflant dans le sens de la propagation. Lorsque les vagues sont près de briser, elles peuvent prendre la forme d'une succession d'ondes solitaires, séparées par des creux allongés et plats. La majeure partie de l'énergie est alors concentrée dans la région étroite voisine de la crête. On admet donc que le déferlement est analogue à celui de l'onde solitaire. Celle-ci se brise lorsque l'angle de crête atteint 120° , ce qui correspond à

$$\frac{2h}{H} = 0,7813 \quad \text{ou} \quad H = 2,56 h = 1,28 (2 h).$$

Toutefois, cette condition n'a rien d'absolu. Le déferlement se produit lorsque la vitesse u_{\max} en crête dépasse la célérité V de la vague. Cela ne dépend pas seulement du rapport $\frac{2h}{H}$, mais aussi du vent soufflant dans le sens de la célérité, qui accélère la crête, ou d'un courant en sens inverse de la célérité, qui freine le pied. Au contraire, le vent soufflant en sens inverse de la célérité retarde la tête et le déferlement; la crête peut même être soufflée en arrière. Enfin, le principe de continuité et l'équilibre des pressions interviennent également. Le phénomène du déferlement est donc très complexe et plutôt aléatoire.

Lorsque la profondeur devient faible, le caractère des vagues, même en trains complexes, se rapproche de celui des ondes solitaires. Si l'amplitude est relativement faible, les vagues se comporteraient comme des ondes solitaires isolées dès que la distance entre crêtes successives devient su-

périeure à $2\pi.H.\sqrt{\frac{H}{6h}}$. Leur énergie n'est plus alors proportionnelle à h^2 , mais à $h^{3/2}$ (chapitre XIII, paragraphe 6). Il en résulterait une plus rapide croissance de h lorsque H augmente que l'indique la formule (72).

Il y a lieu d'observer encore que des courants peuvent influencer le phénomène et aussi des réflexions plus ou moins importantes (de 0,08 pour un talus à 10/1 et de 1 sur une paroi verticale), pouvant créer un état partiellement stationnaire et augmentant l'amplitude. Même des plages en pente de 2 % peuvent réfléchir 1 % des lames déferlantes sous forme d'ondes de longue période et de faible amplitude.

23.- OBSERVATIONS SUR LA HOULE ET LES VAGUES

La houle prend naissance dans les océans par l'action prolongée du vent ou par les ouragans. Il se produit une agitation de la surface plus ou moins régulière, formée de vagues et de lames. Lorsque l'ouragan cède, la masse liquide reste soumise aux seules actions de la pesanteur, de la force d'inertie et de la viscosité. Les ondulations persistent et se propagent en prenant une forme de plus en plus régulière, constituant la houle.

La houle simple ne pourra se réaliser approximativement qu'au large, loin des actions perturbatrices des côtes et des hauts fonds. Elle sera d'autant plus régulière que la direction et la vitesse du vent auront été plus constantes sur une plus grande étendue.

Si l'on immerge un corps dans une eau houleuse, il participe au mouvement au niveau de son centre de gravité. Comme le mouvement vertical s'atténue assez rapidement en profondeur, une longue perche flottant verticalement et portant un lest à sa partie inférieure restera sensiblement immobile verticalement dans une eau houleuse. Un flotteur mobile le long de cette perche suivra le mouvement de la surface libre. Sur ce principe est basé le trace-vagues de l'amiral Pâris, qui enregistre les mouvements du flotteur, convenablement réduits, sur un tambour tournant d'un mouvement continu. Près du rivage, on peut employer des appareils pneumatiques et électroniques ou électriques, ou aussi des perches verticales fixées au fond.

En pleine mer, on peut recourir à la photographie aérienne et à la restitution photogrammétrique. Pour les vitesses de propagation, on peut observer l'intervalle de temps entre le passage de deux crêtes successives en un point de repère. Ou le temps que met une crête à parcourir la longueur d'un bateau. En tenant compte de la vitesse du navire et de la direction de sa route par rapport à celle de la houle, on peut déterminer l et T .

On a constaté que la relation $T = \sqrt{\frac{\pi \cdot l}{g}}$ est sensiblement satisfaite en plein océan. L'amiral Pâris a relevé les houles moyennes suivantes dans diverses mers.

Alizés de l'Atlantique	$2 T = 6''$	$2 l = 65 \text{ m}$	$2 h = 1,90$	$\frac{h}{l} = 0,029$
Atlantique Sud	$9,5''$	133 m	$4,30$	$0,032$
Mer des Indes Sud	$7,6''$	96 m	$2,80$	$0,029$
Mers de Chine et du Japon	$7''$	79 m	$3,20$	$0,040$
Pacifique Ouest	$8,2''$	102 m	$3,10$	$0,030$

Exceptionnellement, on a observé dans l'Atlantique Nord

$$2 T = 23'' \quad 2 l = 824 \text{ m} \quad V = 36 \text{ m/sec.}$$

Le maximum relevé par l'Amiral Pâris est :

$$2 T = 19'' \quad 2 l = 500 \text{ m} \quad V = 26,30 \text{ m/sec.}$$

$2 T$ dépasse rarement $10''$, $\frac{h}{l}$ dépasse rarement $0,5$, ce qui correspond à $\frac{h}{R} = 0,16$. On a observé exceptionnellement $\frac{h}{l} = 0,10$, d'où $\frac{r_0}{R} = 0,30$ environ.

Les clapotis et les gaufrages observés dans la nature sont généralement trop complexes pour vérifier les théories simples exposées. On peut les réaliser conformément à la théorie dans des bassins expérimentaux et observer par la stroboscopie les trajectoires des particules.

*
* * *

24.- APPENDICE

Si on se réfère aux formules de la houle irrotationnelle de Stokes en profondeur finie (paragraphe 19), on trouve

$$\begin{aligned}
 u = \frac{d\xi}{dt} = V. \left\{ \frac{\pi \cdot h}{1} \frac{\cosh \frac{\pi(H-Z)}{1}}{\sinh \frac{\pi H}{1}} \cdot \cos \frac{\pi}{1}(Vt-X) \right. \\
 + \frac{\pi^2 \cdot h^2}{1^2 \cdot \sinh^2 \frac{\pi H}{1}} \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \frac{\cosh \frac{2\pi(H-Z)}{1}}{\sinh^2 \frac{\pi H}{1}} \right] \cdot \cos \frac{2\pi}{1}(Vt-X) \\
 \left. + \frac{\pi^2 \cdot h^2}{2 \cdot 1^2} \cdot \frac{\cosh \frac{2\pi(H-Z)}{1}}{\sinh^2 \frac{\pi H}{1}} \right\} \quad (73)
 \end{aligned}$$

A la surface :

$$\begin{aligned}
 u_s = V. \left\{ \frac{\pi \cdot H}{1} \operatorname{cotgh} \frac{\pi H}{1} \cos \frac{\pi}{1}(Vt-X) - \frac{\pi^2 \cdot h^2}{1^2 \cdot \sinh^2 \frac{\pi H}{1}} \right. \\
 \left. \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \frac{\cosh \frac{2\pi H}{1}}{\sinh^2 \frac{\pi H}{1}} \right] \cdot \cos \frac{2\pi}{1}(Vt-X) + \frac{\pi^2 \cdot h^2}{2 \cdot 1^2} \frac{\cosh \frac{2\pi H}{1}}{\sinh^2 \frac{\pi H}{1}} \right\} \quad (74)
 \end{aligned}$$

Si H est assez petit, on a :

$$u_s = V. \left\{ \frac{h}{H} \cos \frac{\pi}{1}(Vt-X) + \frac{h^2}{H^2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \frac{1^2}{\pi^2 \cdot H^2} \right) \cdot \cos \frac{2\pi}{1}(Vt-X) + \frac{h^2}{H^2} \right\} \quad (75)$$

$$\text{D'où} \quad u_{s \max} = V. \left[\frac{h}{H} + \frac{3}{4} \cdot \frac{h^2 \cdot 1^2}{\pi^2 \cdot H^2} \right] \quad (76)$$

$$u_{s \min} = V. \left[-\frac{h}{H} + \frac{3}{4} \cdot \frac{h^2 \cdot 1^2}{\pi^2 \cdot H^2} \right]$$

Pour que $u_{s \max}$ soit $> V$, ce qui correspond au déferlement, il faut que

$$\frac{h}{H} + \frac{3}{4} \cdot \frac{h^2 \cdot 1^2}{\pi^2 \cdot H^4} > 1$$

$$\text{d'où} \quad 2h > 2H \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi \cdot H}{1} \left(\sqrt{\frac{\pi^2 \cdot H^2}{1^2} + 3} - \frac{\pi \cdot H}{1} \right) \right] \quad (77)$$

Pour que $2h$ soit plus grand que $0,7813 H$, hauteur théorique de déferlement, il faut que

$$\frac{\pi^2 \cdot H^2}{1^2} \leq 0,171 \quad \text{ou} \quad \frac{H}{1} \leq 0,132 \text{ environ.} \quad (78)$$

Si l'on considère au large, où $H > l_0$, une houle de période $2 T$.
A l'endroit du déferlement de profondeur H , on a (cfr paragraphe 22)

$$l_0 = \frac{g}{\pi} \cdot T^2 = 3,12 T^2$$

$$l = l_0 \cdot \frac{V}{V_0} = \frac{l_0 \cdot \sqrt{g \cdot H} \cdot T}{l_0} = T \cdot \sqrt{g \cdot H}$$

Donc $\frac{H}{l} \leq 0,132$ s'écrit $\frac{\sqrt{H}}{T \cdot \sqrt{g}} \leq 0,132$

$$H \leq \overline{0,132}^2 g \cdot T^2 \quad \text{ou} \quad H \leq 0,171 T^2 \quad (79)$$

Par exemple : $T = 2,5$ sec. $l_0 = 19,5$ m $2 l_0 = 39$ m.
 $H \leq 1,07$ $l = 8,10$ $2 l = 16,20$ m.

Si l'on se réfère aux formules (72) et (77), on trouve

$$h_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{2n} \cdot \frac{g \cdot T}{\pi \cdot \sqrt{g \cdot H}}} > H \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi \cdot \sqrt{H}}{T \cdot \sqrt{g}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi^2 \cdot H}{g \cdot T^2} + 3} - \frac{\pi \cdot \sqrt{H}}{T \cdot \sqrt{g}} \right) \right]$$

d'où

$$h_0 > H \frac{\frac{2}{3} \frac{\pi \cdot \sqrt{H}}{T \cdot \sqrt{g}} \left[\sqrt{\frac{\pi^2 \cdot H}{g \cdot T^2} + 3} - \frac{\pi \cdot \sqrt{H}}{T \cdot \sqrt{g}} \right]}{\sqrt{\frac{1}{2n} \cdot \frac{g \cdot T}{\pi \cdot \sqrt{g \cdot H}}}} \quad (80)$$

La profondeur minimum de déferlement H dépend donc de T et aussi de h_0 , escarpement de la houle au large. Il en est de même d'ailleurs de la valeur de H_{\min} donnée par la formule (79), car il y correspond

$$2 h \geq 0,7813 H \quad \text{ou} \quad 2 h \geq 0,133 T^2 .$$

D'après (72) $2 h_0 = 2 h \cdot \sqrt{2n \frac{V}{V_0}}, \quad V = \sqrt{g \cdot H}$

D'après (17) $V_0 = \frac{g}{\omega} = \frac{g \cdot T}{\pi}$

d'où $2 h_0 = 2 h \cdot \sqrt{2n \frac{\pi \cdot \sqrt{H}}{T \cdot \sqrt{g}}}$

et $2 h_0 > 0,133 \sqrt{\frac{2n \pi \cdot \sqrt{H}}{T \cdot \sqrt{g}}} T^2$

$$2 h_0 \geq 0,133 \sqrt{\frac{2n \pi \sqrt{0,171}}{\sqrt{g}}} T^2$$

Les indications données par ces formules sont purement qualitatives. Elles rendent compte globalement des modifications des ondes au cours de leur propagation sur des fonds de profondeur décroissante conduisant au déferlement.

Reprenons l'exemple $T = 2,5$ sec et

$$2 h > 0,7813 H \quad l_0 = 19,5 \text{ m} \quad 2 l_0 = 39 \text{ m}$$
$$V_0 = \frac{g \cdot T}{\pi} = 7,80 \text{ m/sec} \quad H = 1,07 \text{ m} \quad V = \sqrt{g \cdot H} = 3,24 \text{ m/sec.}$$
$$l = T \cdot V = 8,10 \text{ m} \quad 2 l = 16,20 \text{ m} \quad 2 h \geq 0,7813 H \text{ ou } 0,875 \text{ m}$$
$$2 h_0 = 2 h \sqrt{\frac{3 \cdot 24}{7 \cdot 80}} \quad 2 n, \quad n = 1$$
$$2 h_0 \geq 0,645 (2 h) \quad \text{ou} \quad 0,565 \text{ m.}$$

Il s'agit donc d'une houle modérée.

CHAPITRE XXIV

NOTIONS SUR LES MAREES

REMARQUE GENERALE

Dans ce chapitre, tous les déplacements verticaux ζ sont ceux de la surface libre au-dessus du niveau moyen. Ils sont considérés comme positifs vers le haut, contrairement à ce qui est fait dans le chapitre précédent.

1.- PHENOMENE DE LA MAREE, OBSERVATION LOCALE

Près de la plupart des rivages de la mer, on observe le phénomène de la marée, consistant en une variation périodique du niveau moyen de la surface de l'eau entre un minimum et un maximum. La période est sensiblement semi-diurne, en moyenne 12 h. 25 min. La marée retarde d'un jour à l'autre en moyenne de 50 minutes, retard quotidien du passage de la lune au méridien.

Si l'on trace en fonction du temps une courbe de variation du niveau de l'eau en un point, on obtient une courbe locale de marée pour une marée déterminée (planche 23, fig. 1). Elle varie d'une marée à l'autre. On peut déterminer des courbes moyennes diverses et des enveloppes extrêmes.

Les courbes locales ont généralement une allure sinusoïdale, plus ou moins régulière selon les circonstances locales (planche 23, fig. 1). Le minimum correspond à la basse mer, le maximum à la haute mer (fig. 16). La différence constitue l'amplitude de la marée ou marnage.

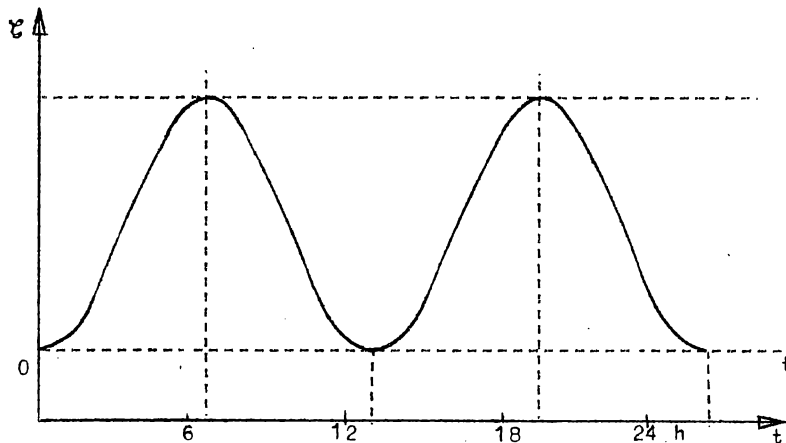


Fig. 16.

Lorsque la mer monte, il y a flot, flux, montant ou gagnant.

Lorsqu'elle descend, il y a èbe, reflux, jusant ou perdant.

Les courbes locales des marées successives ont généralement la même allure, mais leur amplitude varie périodiquement. La période est d'une lu-

naison (29 jours $1/2$). Les maxima d'amplitudes se produisent aux syzygies (nouvelle et pleine lune). Les marées sont dites de vive eau. Les minima d'amplitude se produisent aux quadratures (premier et dernier quartier); les marées sont dites de morte eau. Les marées de vive eau produisent les plus grandes élévations du niveau de haute mer et les plus basses hauteurs de basse mer. Malgré ces variations, le niveau moyen de la mer entre la haute mer et la basse mer de chaque marée reste sensiblement constant au point considéré.

En un tel point, généralement un port, on distingue les niveaux caractéristiques suivants, par ordre décroissant :

P.H.M. plus haute mer.
H.M.V.E.E. haute mer de vive eau d'équinoxe,
H.M.V.E.M. haute mer de vive eau moyenne,
H.M.M.E.M. haute mer de morte eau moyenne,
B.M.M.E.M. basse mer de morte eau moyenne,
B.M.V.E.M. basse mer de vive eau moyenne,
B.M.V.E.E. basse mer de vive eau d'équinoxe,
P.B.M. plus basse mer.

Pour les marées d'équinoxe, on devrait aussi considérer les niveaux moyens d'un grand nombre d'années.

Les basses mers de vive eau ou les plus basses mers définissent généralement les zéros de nivellement pour les cartes marines et même pour les cartes terrestres. C'est ainsi que le zéro du nivellement général de la Belgique est défini par le niveau moyen des basses mer de vive eau à Ostende.

D'après ces éléments d'observation en relation avec les circonstances géographiques du lieu et les éléments astronomiques, on définit certaines caractéristiques, servant principalement à la prévision des marées figurant dans les éphémérides nautiques. Les suivantes présentent de l'intérêt pour l'ingénieur.

L'unité de hauteur en un lieu est la hauteur au-dessus du niveau moyen de la haute mer maximum après une syzygie, le soleil et la lune étant à la fois dans le plan de l'équateur et à leurs distances moyenne de la terre. La plus forte marée se produit en effet généralement quelques jours (1 ou 2, parfois jusqu'à 4) après la syzygie; ce retard est appelé l'âge de la marée.

Le coefficient d'une marée quelconque est le rapport de l'élévation de sa haute mer au-dessus du niveau moyen à l'unité de hauteur. Le coefficient des vives eaux moyennes est par exemple 94; celui des basses eaux moyennes par exemple 45. Les coefficients extrêmes sont par exemple 118 et 23.

Les courbes locales de marée sont enregistrées par des marégraphes, appareils analogues aux fluviographes enregistreurs. L'installation de

marégraphes à flotteurs peut être incommode à cause du déplacement important de la laisse d'eau entre la basse mer et la haute mer. Les flotteurs doivent être établis dans des puits à l'abri des agitations superficielles. Les marégraphes enregistreurs des variations de pression, à cloche pneumatique et manomètre, à compresseur et manomètre, à capsule mesureuse de pression électronique, à jauge électrique (variation de résistance) ou électronique (variation d'impédance) sont plus commodes, mais demandent un contrôle attentif, assurant une précision convenable.

Le médimarémètre Lallemand a pour objet de déceler les très faibles fluctuations du niveau moyen. Il consiste en un vase communiquant avec la mer par l'intermédiaire d'une enveloppe poreuse très peu perméable. Les oscillations du niveau de la mer n'influencent presque pas le niveau de l'eau à l'intérieur du tube, qui indique le niveau moyen.

2.- NOTIONS THEORIQUES SUR LES CAUSES DES MAREES

L'action attirante d'un astre sur une particule matérielle de masse m à la surface de la terre dérive d'un potentiel de la forme

$$\Phi = - A.m. [f(\lambda, \delta) + \sin 2\lambda.\sin 2\delta.\cos \hat{H} + \cos^2 \lambda.\sin^2 \delta.\cos 2\hat{H}],$$

A étant une constante caractéristique de l'astre, λ la latitude du lieu, δ la distance polaire de l'astre et \hat{H} son angle horaire.

En effet, en désignant par Δ la distance entre le centre de l'astre L et le centre C de la terre (fig. 17), par R le rayon de la terre assimilée à une sphère parfaite et par θ l'angle \widehat{MCL} , M étant le lieu considéré, l'action de l'astre L sur la masse m au point M dérive du potentiel de l'attraction universelle.

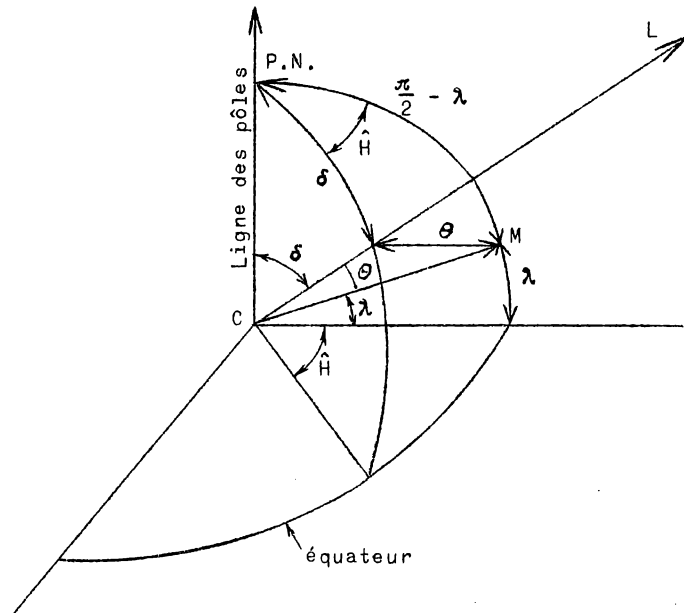


Fig. 17.

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= - \frac{K^2.m}{M.L} = \\ &= - \frac{K^2.m}{\sqrt{\Delta^2 + R^2 - \Delta.R.\cos \theta}} \end{aligned}$$

En posant

$$\varphi = \frac{R}{\Delta}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= - \frac{K^2.m}{\Delta} [1 + \varphi.\cos \theta \\ &+ \varphi^2.\frac{3\cos^2 \theta - 1}{2}] \end{aligned}$$

Il en résulte (fig. 18) dans le plan du grand cercle terrestre

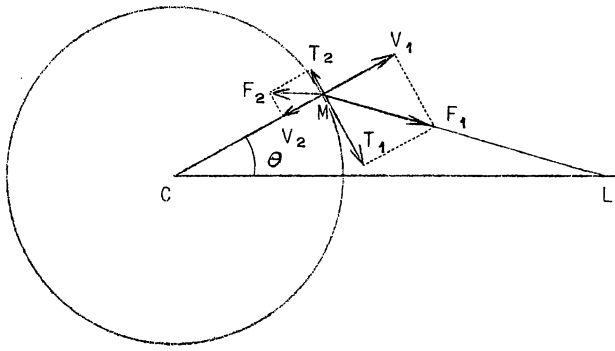


Fig. 18.

MCL : une action verticale

$$V_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial R} = - \frac{K^2 \cdot m}{\Delta^2} \cdot [\cos \theta + 3\varrho (\cos^2 \theta - 1)];$$

et une action tangentielle dans le sens des angles décroissants

$$T_1 = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = - \frac{K^2 \cdot m}{\Delta^2} \cdot [\sin \theta + 3\varrho \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta] .$$

Il faut considérer les effets relatifs par rapport à la masse du globe. Il faut donc ajouter aux actions précédentes les composantes

de la force $\frac{K^2 \cdot m}{\Delta}$ parallèle à LC, qui valent :

$$V_2 = \frac{K^2 \cdot m}{\Delta^2} \cos \theta \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{K^2 \cdot m}{\Delta^2} \sin \theta$$

Ces actions dérivent d'un potentiel

$$\Phi_2 = \frac{K^2 \cdot m \cdot R}{\Delta^2} \cos \theta = \frac{K^2 \cdot m \cdot \varrho}{\Delta} \cos \theta$$

Il en résulte que le potentiel relatif est

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = - \frac{K^2 \cdot m}{\Delta} (1 + \varrho^2 \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2})$$

Or, d'après la trigonométrie sphérique,

$$\cos \theta = \sin \lambda \cdot \cos \delta + \cos \lambda \cdot \sin \delta \cdot \cos H .$$

D'où finalement :

$$\Phi = \frac{-3 K^2 \cdot R^2}{4 \Delta^3} \cdot m \cdot [f(\lambda, \delta) + \sin 2\lambda \cdot \cos 2\delta \cdot \cos H + \cos^2 \lambda \cdot \sin^2 \delta \cdot \cos 2H] \quad (81)$$

Cette démonstration est due à Bouasse. δ varie avec une longue période (29,5 jours pour la lune, 365 pour le soleil). Les termes en δ produisent donc une variation périodique à longue période. La période de variation de H est d'un jour; les termes en $\cos H$ produisent la variation diurne, ceux en $\cos 2H$ la variation semi-diurne.

Les forces agissant sur la particule M sont :

- suivant la verticale $V = \frac{\partial \Phi}{\partial R} ;$
- suivant la tangente au méridien $T_m = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} ;$
- suivant la tangente au parallèle $T_p = \frac{1}{R \cdot \cos \lambda} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial H} .$

La réduction de la pesanteur résultant de V a peu d'influence. C'est la force tangentielle, très petite également, qui est la cause des marées.

Cette action ne peut cependant produire au centre d'un très vaste bassin océanique qu'une très faible oscillation verticale, provenant d'un déplacement tangentiel périodique des eaux. Mais les côtes des continents, en arrêtant ce mouvement horizontal des eaux, produisent leur accumulation et leur élévation sur des hauteurs considérables. Elles produisent d'ailleurs des perturbations qui peuvent compliquer considérablement le phénomène.

M. Hatt a donné l'expression suivante de la variation du niveau de la mer au point considéré M (fig. 17).

$$\zeta = A_0 + \frac{A_1}{\Delta^3} \sin \delta \cdot \cos \delta (H - \alpha_1) + \frac{A_2}{\Delta^3} \sin^2 \delta \cdot \cos 2(H - \alpha_2) \quad (82)$$

A_0 est un terme à longue période dépendant de δ et d'ailleurs très petit, A_1 , A_2 , α_1 et α_2 sont des constantes afférentes au lieu M .

L'action des astres décroît selon le cube de leur distance. Il en résulte que c'est l'astre le plus rapproché, la lune, qui, bien que sa masse soit relativement faible, produit le plus grand effet.

Le terme principal correspond à l'onde semi-diurne, dont la période est de 12 heures 25 minutes pour la lune. C'est la période moyenne d'un grand nombre de marées. Mais les périodes peuvent présenter des écarts sensibles par rapport à cette moyenne.

Les termes A_0 , $\frac{A_1}{\Delta^3} \cdot \sin \delta \cdot \cos \delta$ et $\frac{A_2}{\Delta^3} \cdot \sin^2 \delta$

varient avec la périodicité de 29,5 jours; ils ne produisent toutefois pas les variations d'amplitude des marées observées au cours d'une lunaison. Mais l'action du soleil se superpose à celle de la lune; elle en vaut environ la moitié. Sa période semi-diurne est de 12 heures, donc voisine de celle de la lune. Sa variation à longue période est de un an; son effet est faible vis-à-vis de la variation semi-diurne. Le terme semi-diurne des actions superposées de la lune et du soleil s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= A_2 \cdot \cos 2(H - \alpha_2) + A_2' \cdot \cos 2(H' - \alpha_2') , \\ \zeta &= A_2 \cdot \cos 2H_1 + A_2' \cdot \cos 2(H_1 - \varepsilon - \varphi) , \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

en posant :

$$H - \alpha_2 = H_1 \quad , \quad H' = H - \varepsilon \quad \text{et} \quad \varphi = \alpha_2' - \alpha_2$$

ζ est donc une fonction périodique à amplitude variable, maximum lorsque

$$\varepsilon + \varphi = n \cdot \pi \quad ,$$

alors

$$\zeta = (A_2 + A_2') \cdot \cos 2H_1 \quad ;$$

et minimum lorsque

$$\varepsilon + \varphi = \frac{2n + 1}{2} \cdot \pi$$

alors

$$\zeta = (A_2 - A_2') \cdot \cos 2H_1$$

Comme $A_2' \approx \frac{A_2}{2}$

l'amplitude de l'oscillation varie dans la proportion de 3 aux syzygies à 1 aux quadratures, au cours d'une même lunaison. Elle varie d'ailleurs d'une lunaison à l'autre par suite de la variation à longue période de A_2 et de A_2' . A_2' est le plus grand aux équinoxes, d'où les fortes marées d'équinoxe, particulièrement si la lune est aussi près de l'équateur. On a observé sur les côtes françaises de la Manche un rapport moyen des marnages extrêmes d'environ 3 à 1, exceptionnellement 6 à 1 pour des marées hautes et basses anormales.

La combinaison des actions de la lune et du soleil n'est pas seulement la cause principale des variations périodiques de l'amplitude des marées; elle produit aussi la variation de la période du phénomène semi-diurne. La fonction ζ de la formule (83) peut en effet s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= B \cdot \cos 2(H_1 - \beta) , \\ \text{avec } B^2 &= A_2^2 + A_2'^2 + 2 A_2 \cdot A_2' \cdot \cos 2(\varepsilon + \varphi) \\ \text{et } \operatorname{tg} 2\beta &= \frac{A_2' \cdot \sin 2(\varepsilon + \varphi)}{A_2 + A_2' \cdot \cos 2(\varepsilon + \varphi)} \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Posons $2(H_1 - \beta) = 2\pi(\omega - \psi) \cdot t$,

ω étant la pulsation fondamentale de la lune. La pulsation perturbée $\omega - \psi$ est donnée par

$$\left. \begin{aligned} \pi \cdot \omega - \frac{d\beta}{dt} &= \pi \cdot (\omega - \psi) \\ \omega - \psi &= \omega - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d\beta}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

φ est constant, seul ε varie avec t .

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{d\beta}{dt} = \frac{A_2'}{\pi \cdot B^2} \cdot [A_2 \cos 2(\varepsilon + \varphi) + A_2'] \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Les extrêmes sont

$$\left. \begin{aligned} (\omega - \psi)_{\max} &= \omega - \frac{A_2'}{\pi \cdot (A_2 + A_2')} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = \omega - \frac{1}{3\pi} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \\ (\omega - \psi)_{\min} &= \omega + \frac{A_2'}{\pi \cdot (A_2 + A_2')} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = \omega + \frac{1}{3\pi} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Pour la lune $\omega = \frac{1}{2T} = \frac{1}{745}$

et $\varepsilon = H - H' = \pi \cdot \left[\frac{1}{745} - \frac{1}{720} \right] \cdot t$ (86 bis)

$$\varepsilon = - \frac{25\pi}{745 \cdot 720} \cdot t \quad (86 \text{ bis})$$

$$\left. \begin{aligned} (\omega - \Psi)_{\max} &= \frac{1}{745} + \frac{25}{3 \cdot 745 \cdot 720} = \frac{1}{745} \cdot \left(1 + \frac{25}{3 \cdot 720}\right) = \frac{1,0116}{745} = \frac{1}{737} \\ (\omega - \Psi)_{\min} &= \frac{1}{745} \cdot \left(1 - \frac{25}{3 \cdot 720}\right) = \frac{0,9884}{745} = \frac{1}{754} \end{aligned} \right\} (86 \text{ ter})$$

En considérant donc des périodes lunaire et solaire de 745 et de 720 minutes, la période combinée peut varier entre un maximum de 754 minutes et un minimum de 737'.

De plus, la différence de phase entre le passage de la lune au méridien et la haute mer varie aussi d'après les positions relatives de la lune et du soleil et toutes ces variations sont les plus fortes aux équinoxes.

L'onde diurne correspond au terme $\frac{A_1}{\Delta^3} \cdot \sin \delta \cdot \cos \delta \cdot \cos (H - \alpha_1)$.

La vive eau correspond aux conjonctions de la lune et du soleil (pleine lune), la morte eau aux oppositions (nouvelle lune). Le maximum ne correspond pas à $\delta = \frac{\pi}{2}$ (équinoxes) mais à $\delta = \frac{\pi}{4}$, ce qui ne peut être réalisé. Mais le phénomène est donc d'autant plus marqué que le soleil est plus haut au-dessus de l'horizon. Il est faible sur les côtes européennes; il ne se manifeste guère que dans le bassin du Pacifique, surtout par les différences entre les niveaux et les temps de deux marées consécutives, aux hautes mers comme aux basses mers.

La figure 19 schématise les effets de la superposition d'une onde diurne et d'une onde semi-diurne en phase. Un déphasage éventuel compliquerait encore les effets. Dans le golfe du Tonkin, la marée diurne existe seule.

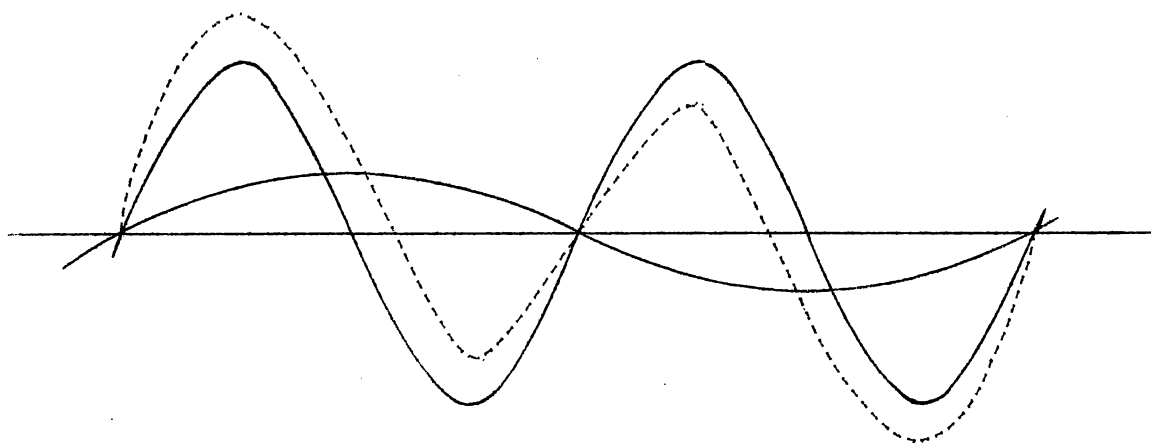


Fig. 19.

3.- PROPAGATION ET CARACTERES DE L'ONDE DE MAREE

Sous l'effet des actions indiquées au paragraphe précédent, un mouvement ondulatoire prend naissance dans les grands bassins océaniques et se manifeste par le mouvement d'ondes de marée, qui s'accusent près des côtes. Dans les petits bassins fermés, tels que la Méditerranée, la marée est à peine perceptible. L'amplitude maximum est de 0,25 m à Marseille, de 0,60 m à Venise. Sur les côtes libres des grands bassins, tels que l'Océan Atlantique, les courbes locales de marée ont une forme sinusoïdale assez régulière, correspondant assez bien à la théorie.

On peut observer la célérité de l'onde, on constate qu'elle satisfait avec une bonne approximation à la formule de Lagrange

$$V = \sqrt{g \cdot H'}$$

La période $2 T$ est connue, d'où

$$l = T \cdot V = T \cdot \sqrt{g \cdot H'}$$

La longueur d'onde $2 l$ est donc très grande (1400 km pour 100 m de profondeur, 447 km pour 10 m de profondeur).

Dans un bassin indéfini, l'onde de marée constitue une onde d'oscillation sinusoïdale, de grande longueur d'onde $2 l$ et à longue période, de faible amplitude $2 h$ et de faible profondeur H par rapport à l , mais assez grande par rapport à h . Cela correspond au cas étudié au chapitre XXIII, paragraphe 14.

Les orbites sont très allongées, $2 r = \frac{2 l \cdot h}{\pi \cdot H}$, et peu élevées,

$2 r' = 2 h$. Les particules liquides subissent donc de grands déplacements horizontaux. La vitesse horizontale est constante sur toute la profondeur, comme le sont d'ailleurs les déplacements horizontaux. La constance de la vitesse horizontale a été vérifiée sur des profondeurs de plus de 900 m.

On a
$$u_{\max} = \frac{h \cdot V}{H} = h \cdot \sqrt{\frac{g}{H}} \quad (87)$$

A cela s'ajoute la vitesse de transport de masse (chapitre XXIII, par. 19)

$$U = V \cdot \frac{\pi \cdot h^2}{2 H^2} = \frac{\pi \cdot h^2}{2 H} \cdot \sqrt{\frac{g}{H}}$$

d'où la vitesse résultante

$$u_{r \max} = h \cdot \left(1 + \frac{\pi \cdot h}{2 H}\right) \cdot \sqrt{\frac{g}{H}} \quad (87 \text{ bis})$$

La correction est généralement négligeable, sauf aux très faibles profondeurs. Les courants se développent comme à la figure 20, s'il n'y a pas de courant propre se superposant aux courants de marée. En un point déterminé, pendant la marée montante, le courant est dans le sens de la propagation; c'est le courant de flot. Il se renverse au niveau moyen à mi-marée, c'est l'étale de flot. Pendant la marée descendante, le courant est en sens inverse de la propagation, c'est le courant de jusant. Il se renverse à mi-marée au niveau moyen; c'est l'étale de jusant. Il y a donc un déplacement alternatif de liquide.

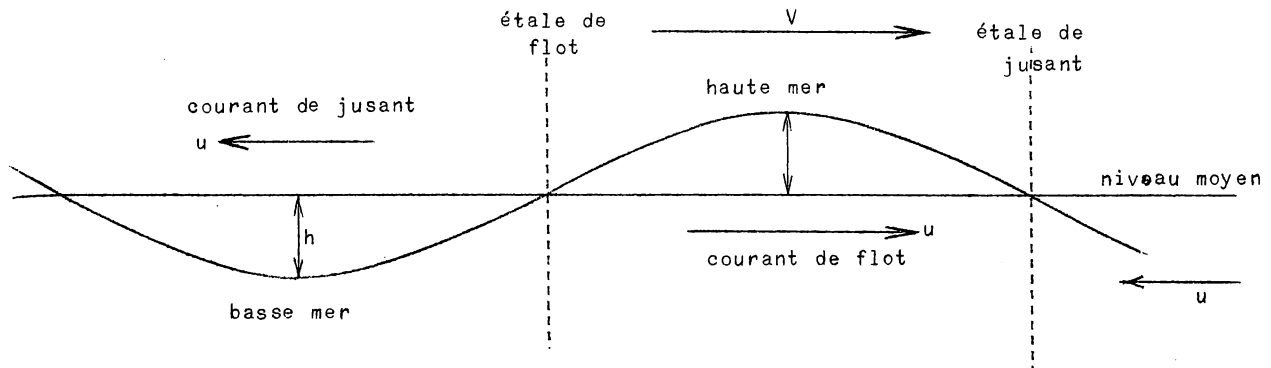


Fig. 20.

Le débit maximum de flot est

$$Q_f = h \cdot \sqrt{g \cdot H} \cdot \left(1 + \frac{\pi \cdot h}{2H}\right) ;$$

Le débit minimum de jusant

$$Q_f = - h \cdot \sqrt{g \cdot H} \cdot \left(1 - \frac{\pi \cdot h}{2H}\right).$$

En moyenne

$$Q_{\max} = \pm h \cdot \sqrt{g \cdot H}$$

min

L'énergie d'une onde de marée complète, par m de largeur, est

$$\gamma_e \cdot h^2 \cdot l = \gamma_e \cdot h_2 \cdot \sqrt{g \cdot H} \cdot T .$$

Abstraction faite des frottements, elle doit être constante, donc

$$h^2 \cdot \sqrt{H} = \text{constante}.$$

[M. Comoy a indiqué $h \cdot \sqrt{H} = 20$ d'après des observations, mais cette formule est mal établie, car elle se fonde sur la formule de l'énergie en profondeur infinie

$$\gamma_e \cdot \pi \cdot h^2 \cdot V^2 = \frac{\gamma_e \cdot h^2 \cdot g \cdot T^2}{\pi} ,$$

ce qui conduit à $h = \text{constante}$ en profondeur infinie, pour laquelle la vitesse est $V = \frac{g \cdot T}{\pi}$ et non $\sqrt{g \cdot H}$].

De l'étale de jusant à l'étale de flot, une particule superficielle ou un flotteur parcourt un trajet

$$d = 2r = \frac{2l}{\pi} \cdot \frac{h}{H} = \frac{u_{\max}}{V} \cdot \frac{2l}{\pi} = u_{\max} \cdot \frac{2T}{\pi} .$$

La vitesse moyenne est donc, pour une demi-onde

$$u_{\text{moy}} = \frac{2}{\pi} \cdot u_{\max} . \tag{88}$$

Le déplacement théorique n'est donc pas $\frac{l \cdot h}{H}$, comme on l'indique dans la plupart des traités.

Ces caractères de l'onde d'oscillation sinusoïdale de la marée ne diffèrent pas essentiellement de ceux d'un train d'ondes de translation, allongées, alternativement en intumescence et en creux, se déplaçant à la vitesse de propagation à la célérité

$$V = \sqrt{g \cdot H},$$

les courants subissant la même propagation. Seulement, les particules décrivent en un temps assez long des trajectoires sensiblement fermées. Une vitesse de translation d'ensemble peut éventuellement se superposer au mouvement ondulatoire (cf chapitre XXIII, par. 14).

Les formules précédentes montrent qu'à l'approche des côtes, où la profondeur décroît fortement, la célérité de l'onde de marée diminue, cependant que son amplitude augmente, ainsi que la vitesse maximum du courant, inversement proportionnelle à $H^{3/4}$, ainsi que les déplacements de liquide. Dans ces conditions, ses caractères semblent se confondre de plus en plus avec ceux d'une onde de translation.

La propagation de la marée se représente au moyen de courbes cotidales, lignes représentant la position de la crête de l'onde à des intervalles de temps réguliers (en général une heure). Elles ont une allure assez régulière dans les grands bassins, au large et près des longues côtes assez régulières (cfr planche 21, fig. 3; planche 22, fig. 3 et planche 23, fig. 2).

4.- INTERFERENCE DES ONDES DE MAREE

Les courbes cotidales (planches 22 et 23) montrent que les ondes de marée ont en général un caractère propagatoire; les crêtes et les creux se déplacent et la célérité est mesurable et connue. Ceci est indépendant du caractère d'onde d'oscillation lorsqu'on considère un temps assez long, ou d'un caractère apparent instantané d'onde de translation lorsque la mer est haute ou basse. Ce caractère n'est en général pas troublé par la réflexion sur les côtes. L'influence des courants, conditionnés par les formes des rivages, et celle de la rotation de la terre, n'altèrent pas non plus d'une manière générale le caractère propagatoire de l'onde de marée.

Mais une ondulation stationnaire peut naître de la rencontre de deux ondes de marée opposées. C'est ce qui se produit dans la Canal d'Irlande. Une partie de la grande onde qui produit la marée de l'Atlantique Nord contourne les Iles Britanniques par l'ouest (cfr planche 23, fig. 2) et redescend du Nord vers le Sud par le Canal d'Irlande et par la Mer du Nord. Elle rencontre dans le Canal d'Irlande et dans la Manche l'onde venant de l'Atlantique, ce qui donne lieu à des interférences qui sont très accusées dans le Canal d'Irlande. Elles sont perceptibles aussi dans la Manche, mais l'onde de l'Atlantique y domine nettement (amplitude 6,10 m à Cherbourg, 9,80 m à Cayeux) et l'onde de la Mer du Nord est déjà atténuée avant le Pas de Calais (amplitude 1,80 m à Yarmouth). Son amplitude augmente dans le Détroit (Pas-de-Calais), mais s'atténue immédiatement après, en raison de l'épanouissement dans la Manche (cfr H.L. Partiot, Recherches sur les rivières à marée).

Le phénomène est analogue à un clapotis (cfr chapitre XXIII, paragraphes 9, 10, 16, 17 et 18).

Les deux ondes

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= h_1 \cdot \sin \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{X}{l} \right), \\ \zeta_2 &= h_2 \cdot \sin \pi \left(\frac{t}{T} + \frac{X}{l} \right), \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

avec

$$h_2 = h_1 - \Delta h,$$

donnent par superposition

$$\zeta = 2 h_2 \cdot \sin \frac{\pi t}{T} \cdot \cos \frac{\pi X}{l} + \Delta h \cdot \sin \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{X}{l} \right). \quad (90)$$

Cette équation représente un clapotis simple d'amplitude $4 h_2$ et de période $2 T$, auquel se superpose une onde sinusoidale d'amplitude $2 \Delta h$, de même période. L'amplitude varie du maximum

$$4 h_2 + \Delta h = 2 (h_1 + h_2)$$

au minimum

$$2 \Delta h = 2 \cdot (h_1 - h_2).$$

Le maximum se produit aux conjonctions (coïncidence des sommets des ondes), le minimum aux oppositions (coïncidence des sommets et des creux). Les conjonctions sont distantes entre elles de la demi-longueur d'onde l ; les oppositions se trouvent à mi-chemin. Les conjonctions et les oppositions sont d'ailleurs fixes dans l'espace. La célérité moyenne des ondes est $V = \frac{l}{T}$, la célérité instantanée est variable.

En effet, posons :

$$\zeta = H \cdot \sin \left(\frac{\pi t}{T} - \varphi \right) = h_1 \cdot \sin \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{X}{l} \right) + h_2 \cdot \sin \pi \left(\frac{t}{T} + \frac{X}{l} \right)$$

$$\text{Pour } t = 0 \quad - H \cdot \sin \varphi = - h_1 \cdot \sin \frac{\pi X}{l} + h_2 \cdot \sin \frac{\pi X}{l}$$

$$\text{Pour } t = \frac{T}{2}, \quad H \cdot \cos \varphi = h_1 \cdot \cos \frac{\pi X}{l} + h_2 \cdot \cos \frac{\pi X}{l}.$$

$$\text{D'où} \quad \text{tg } \varphi = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \cdot \text{tg } \frac{\pi X}{l}$$

Pour une valeur donnée de $X = x$, le maximum de ζ correspond à

$$h_1 \cdot \cos \left(\frac{\pi t}{T} - \frac{X}{l} \right) + h_2 \cdot \cos \pi \left(\frac{t}{T} + \frac{X}{l} \right) = 0 \quad (92)$$

De (91) et (92) on tire :

$$\begin{aligned} H^2 &= \zeta_{\max}^2 = h_1^2 + h_2^2 + 2 h_1 \cdot h_2 \cdot \sin \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{X}{l} \right) \cdot \sin \pi \left(\frac{t}{T} + \frac{X}{l} \right) \\ &\quad + 2 h_1 \cdot h_2 \cdot \cos \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{X}{l} \right) \cdot \cos \pi \left(\frac{t}{T} + \frac{X}{l} \right) \\ &= h_1^2 + h_2^2 + 2 h_1 \cdot h_2 \cdot \left[\sin \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{X}{l} \right) \cdot \sin \pi \left(\frac{t}{T} + \frac{X}{l} \right) + \cos \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{X}{l} \right) \cdot \cos \pi \left(\frac{t}{T} + \frac{X}{l} \right) \right] \\ H &= \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + 2 h_1 \cdot h_2 \cdot \cos \frac{2\pi X}{l}} \quad (93) \end{aligned}$$

Les maxima de H sont donc écartés de l, les minima sont à mi-distance. Leurs positions sont fixes. Les lignes de conjonctions correspondant à $x = 0, l, 2l, \text{etc...}$, celles des oppositions à $x = \frac{l}{2}, \frac{3l}{2}, \text{etc...}$. Aux conjonctions, $\varphi = 0$; aux oppositions, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. La célérité instantanée s'établit comme suit :

Pour $\zeta = 0, \quad \varphi = \frac{\pi \cdot t}{T}$

d'où
$$\text{tg } \frac{\pi X}{l} = \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2} \cdot \text{tg } \frac{\pi t}{T}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{V}{\frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \cdot \cos^2 \frac{\pi t}{T} + \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2} \cdot \sin^2 \frac{\pi t}{T}} \quad (94)$$

La vitesse est minimum au temps $t = \frac{T}{2}$, c'est-à-dire aux conjonctions et vaut $\frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \cdot V$

Elle est maximum au temps $t = 0$, c'est-à-dire aux oppositions et vaut alors $\frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2} \cdot V$.

Les points de rencontre des deux ondes inverses, qui déterminent les lignes de flux et de reflux, sont données par $\zeta_1 = \zeta_2$

ou
$$h_1 \cdot \sin \frac{\pi}{l}(Vt - X) = h_2 \cdot \sin \frac{\pi}{l}(Vt + X)$$

d'où
$$\text{tg } \frac{\pi X}{l} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \cdot \text{tg } \frac{\pi t}{T} \quad (95)$$

Ces lignes sont donc espacées d'une demi-longueur d'onde et leur célérité est variable entre un maximum et un minimum comme ci-dessus :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{V}{\frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2} \cdot \cos^2 \frac{\pi t}{T} + \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \cdot \sin^2 \frac{\pi t}{T}} \quad (96)$$

Lorsque $h_1 = h_2, \Delta h = 0$, l'onde marée prend la forme clapoteuse simple et les interférences sont les plus caractérisées. Les lignes des conjonctions sont distantes de l, les lignes des oppositions sont à mi-distance. Aux conjonctions, l'amplitude est $4h$ et les célérités sont nulles. Aux oppositions, l'amplitude est nulle, l'eau est partout au niveau moyen et la célérité est théoriquement infinie, pratiquement maximum. Les lignes de flux et de reflux sont définies par

$$\text{tg } \frac{\pi X}{l} = 0$$

c'est-à-dire qu'elles sont invariables et confondues avec les lignes des conjonctions.

Ces lois, énoncées par Ribière, sont vérifiées dans le Canal d'Irlande. La ligne de conjonctions est en face de l'Ile de Man. L'amplitude y est maximum. Pendant le flot, deux courants de directions inverses se rencon-

trent sur cette ligne en se détruisant et en faisant monter la mer. A marée haute, il y a étale général de flot. Puis deux courants de jusant partent de la ligne de conjonction dans des directions inverse et font baisser la mer. A marée basse, il y a étale général de jusant. Les étales de jusant et de flot ne se produisent donc plus à mi-marée, comme pour l'onde de marée ordinaire, mais bien à marée haute et à marée basse.

Le maximum de vitesse se produit à mi-marée, au lieu de marée haute et basse. Le Canal est horizontal à mi-marée. Le ligne des oppositions, à Constown, 50 miles au sud de Dublin, est caractérisé par un niveau constant.

5.- MAREES COMPLEXES REELLES

Si l'on peut considérer qu'au large les marées sont analogues à des ondes d'oscillations sinusoïdales, présentant des étales à mi-marée, près des côtes où on les observe, elles peuvent subir des altérations considérables. Le caractère d'onde d'oscillation propagatoire, analogue à celui d'une onde de translation, avec débit nul au niveau moyen, peut être altéré par des réflexions, interférences ou des courants; les étales peuvent se rapprocher de la haute et de la basse mer. On l'observe aussi dans la Manche, à un moindre degré que dans le Canal d'Irlande. La ligne des conjonctions est Cayeux-Hastings; celle des oppositions Cherbourg-Swanage. Comme influences dans les bras de mer et les fonds peu profonds peuvent s'ajouter les frottements de fond et latéraux.

Le frottement de fond retarde les couches inférieures et altère l'égalité théorique des vitesses sur toute la profondeur.

Les renversements de courant commencent généralement par le fond et on peut avoir simultanément, vers les étales, des vitesses opposées au fond et à la surface sur une même verticale. Les frottements latéraux des côtes, par exemple dans les détroits et les golfes, peuvent retarder les ondes sur les rivages et accentuer la courbure des lignes cotidales (cfr planche 22, fig. 1 et planche 23, fig. 2) et même dans les golfes, provoquer des changements et même des renversements de la direction et de la vitesse de propagation par rapport à la direction générale de propagation, ce qui produit des courants locaux complexes. (Planche 22, fig. 3).

Dans les golfes et les baies, la réduction de profondeur et le rétrécissement de l'onde donnent lieu à des dissipations d'énergie importantes sur les fonds et les rivages, par frottement et par turbulence. Cependant, il s'y produit généralement un accroissement d'amplitude et de célérité, souvent très marqué. Dans le Golfe de Gascogne, la célérité est de 100 m/sec, alors que la profondeur moyenne n'est que de 100 m. ($\sqrt{g.H} = 31,4$ m/sec). Dans la Baie de Fundy (Nouvelle-Ecosse), la célérité est de 81 m/sec, alors que la profondeur est inférieure à 100 m. L'amplitude de 2,00 à 2,60 m à l'entrée de la baie, s'élève à 12,40 et même à 13,60 m au fond.

Cependant, cette élévation du niveau des marées produite par le rétrécissement des baies ne se produit que si certaines conditions sont réalisées. Assimilons une telle baie à un canal convergent de section rectangulaire. Dans une section (H.1), la vitesse est u à la crête de l'onde.

Considérons la section infiniment voisine ($H + dH$, $l + dl$). En négligeant le frottement, on peut écrire :

$$H + \frac{u^2}{2g} = H + dH + \frac{u^2}{2g} \frac{l^2 \cdot H^2}{(l + dl)^2 \cdot (H + dH)^2}$$

$$d'où \quad dH = \frac{u^2}{2g} \cdot \left[1 - \frac{l^2 \cdot h^2}{l^2 \cdot H^2 + 2 l \cdot H^2 \cdot dl + 2 l^2 \cdot H \cdot dH} \right]$$

$$dH = \frac{u^2}{g} \cdot \left(\frac{dl}{l} + \frac{dH}{H} \right)$$

$$d'où \quad dH = \frac{dl}{l \cdot \left(1 - \frac{u^2}{g \cdot H} \right)} \cdot \frac{u^2}{g}$$

Comme dl est négatif (rétrécissement), dH est positif si $u > \sqrt{g \cdot H}$ et négatif dans le cas contraire.

Les ondes de marée deviennent donc souvent complexes au voisinage des côtes. Les courbes cotidales présentent des courbures accusées, même des irrégularités (cfr planches 22 et 23). Les courbes locales ne sont plus des sinusoïdes régulières. Leurs branches ne sont plus égales. Le jusant dure plus longtemps que le flot sur les côtes françaises de la Manche, avec une différence maximum au Hâvre. C'est l'inverse sur les côtes anglaises (Southampton) (cfr planche 23, fig. 1, a et c). Au Hâvre, au moment du plein, le niveau ne varie pas de plus de 0,10 m, pendant 1 h. 30 min. en vive eau et 2 heures en morte eau (cfr. planche 23, fig. 1 a). Cela est très avantageux pour les accès du port. A Southampton (cfr planche 23, fig. 1 c), il y a plusieurs maxima et minima successifs, par suite d'ondes locales successives.

Les courbes locales présentant de telles irrégularités ne peuvent plus être représentées par des fonctions harmoniques simples.

Par l'analyse harmonique, on les décompose en sinusoïdes de fréquences diverses. On opère cette analyse harmonique sur un grand nombre de courbes de marées relevées en un même lieu. Lorsque ce travail est fait pour des points successifs d'une côte, on possède, conjointement avec les données astronomiques, les éléments nécessaires pour l'étude complète des phénomènes et notamment pour les prévisions de marée.

Cependant, des influences atmosphériques aléatoires, peuvent influencer sur les marées. Les variations de la pression atmosphérique dans l'étendue du bassin océanique et près des côtes influencent les niveaux. Cette influence est surtout sensible dans les petites mers fermées, presque dépourvues de marée, comme la Méditerranée. Des tables de correction permettent d'en tenir compte. L'action du vent près d'une côte, selon qu'il souffle dans le sens de la célérité de l'onde de marée ou en sens inverse, peut provoquer un relèvement ou un abaissement important de la marée, ce qui peut produire des effets très graves en vives eaux (cfr chapitre XXIII, par. 20). Dans la Méditerranée, ces fluctuations peuvent atteindre 1,50 m.

En raison de toutes ces influences complexes, seule l'observation est concluante et peut servir de support à l'étude. Par l'observation prolongée, on peut établir pour le lieu considéré une expression du niveau

variable h par la relation

$$\begin{aligned}
 h = & H + M_1 \cdot \cos 2\pi(mt - \mu_1) + M_2 \cdot \cos 2\pi(2mt - \mu_2) \\
 & + M_3 \cdot \cos 2\pi(3mt - \mu_3) + \dots \\
 & + N_1 \cdot \cos 2\pi(nt - \nu_1) + N_2 \cdot \cos 2\pi(2nt - \nu_2) + \dots \\
 & + P_1 \cdot \cos 2\pi(pt - \zeta_1) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{97}$$

Les valeurs de M , N , P , ... et μ , ν , ζ , ... sont établies par l'analyse harmonique des courbes marégraphiques. Le développement de h ainsi connu permet les prévisions de marées, sous réserve des variations des conditions atmosphériques. Les fréquences m , n , p , ... des forces astrales sont déterminées par les données astronomiques. On admet donc, selon Laplace, que, malgré les perturbations et l'amortissement des ondes initiales, les périodes restent les périodes fondamentales et partielles des forces qui ont donné naissance aux ondes de marée (cfr paragraphes 2 et 3).

Lorsque toutefois l'on considère les effets d'une marée dans un espace limité : estuaire, bassin, fleuve à marée, canal, on doit considérer les masses d'eau comme trop restreintes pour posséder une marée propre. L'analyse harmonique n'est utilisée que pour exprimer la marée de la mer à l'embouchure, représentée par une somme de termes sinusoidaux. Dans l'estuaire, le bassin, le fleuve ou le canal, on peut étudier l'effet de chaque terme comme constituant une marée partielle indépendante et superposer les effets de tous les termes de la marée fondamentale, d'après le principe de superposition des oscillations de petite amplitude. D'autre part, en eau peu profonde, lorsque les amplitudes ne sont pas négligeables vis-à-vis de la profondeur à mi-marée, où le flot est plus court que le jusant, il faut ajouter aux ondes dont les fréquences sont des multiples des fréquences astronomiques des termes de correction, qui sont des ondes dont les fréquences sont des sommes ou des différences de fréquences astronomiques.

6.- THEORIE ELEMENTAIRE DES COURANTS DE MAREE

Selon le paragraphe 3, l'onde de marée est une onde d'oscillation sinusoidale, de grande longueur d'onde et à longue période, de faible amplitude $2h$ et de faible profondeur H par rapport à l , mais grande par rapport à h . A ces ondes s'appliquent les équations des ondes de translation allongées de faible hauteur relative, du chapitre XIII, par. 3, b).

$$\text{Donc} \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g \cdot H \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \tag{98}$$

Cette équation est celle des cordes vibrantes, dont la solution générale est

$$\zeta = F_1 \left(t - \frac{x}{\sqrt{gH}} \right) + F_2 \left(t + \frac{x}{\sqrt{gH}} \right) \tag{99}$$

F_1 représente une onde se propageant sans se déformer dans le sens des x positifs à la célérité $V = \sqrt{g \cdot H}$. Car si t croît de Δt et x de

$V \cdot \Delta t$, F_1 ne change pas. De même, F_2 représente une onde indéformable se propageant à la célérité $-V$ dans le sens des x négatifs. Ceci résulte de ce que l'on néglige les effets de la viscosité et des frottements. On déduit de (99) :

$$\mu = \frac{g}{V} \cdot F_1 \left(t - \frac{x}{V} \right) - \frac{g}{V} \cdot F_2 \left(t + \frac{x}{V} \right) \quad (100)$$

car [voir chapitre XIII, par. 3, b), formule (154 ter)]

on a
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (101)$$

Or
$$u = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$$

L'équation de continuité s'écrit [voir chapitre XIII, par. 3, b), formule 154 quater)].

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -H \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -H \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \cdot \partial t}$$

d'où
$$\zeta = -H \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (102)$$

[C'est bien là l'équation de continuité, car il en résulte

$$\zeta \frac{\partial x}{\partial t} = -H \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

ou
$$\zeta \cdot V = H \cdot u$$

D'ailleurs, l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \text{avec} \quad q = H \cdot u = H \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

Donc
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \cdot \partial t} = 0, \quad \text{d'où (102)].}$$

L'équation (101) donne alors

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g \cdot H \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (103)$$

Cependant, cette équation ne porte en compte que les seules forces d'inertie. Or, le mouvement de l'onde est entretenu par une force périodique provenant des astres et de période $2T$. On doit donc ajouter un terme périodique et écrire :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g \cdot H \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + A \cdot \sin \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} \right) \quad (103 \text{ bis})$$

C'est l'équation du courant de l'onde de marée dans un canal de largeur et de longueur indéfinies à fond horizontal, sans amortissement. La force est périodiquement variable et se propage avec la célérité

$$V = \frac{1}{T}.$$

La solution est :

$$\zeta = f_1\left(t - \frac{x}{V}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{V}\right) - \frac{A \cdot T^2}{\pi^2} \cdot \sin \frac{\pi}{T}\left(t - \frac{x}{V}\right) \quad (104)$$

On peut considérer f_1 et f_2 comme des termes circonstanciels (ondes de translation) n'affectant pas les termes périodiques, que l'on considère seuls dans la suite.

$$u = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = - A \cdot \frac{T}{\pi} \cos \frac{\pi}{T}\left(t - \frac{x}{V}\right) \quad (105)$$

$$\zeta = - H \frac{\partial \zeta}{\partial x} = + A \cdot \frac{T}{\pi} \cdot \frac{H}{V} \cdot \cos \frac{\pi}{T}\left(t - \frac{x}{V}\right) \quad (106)$$

Si le courant est établi par exemple suivant un parallèle de latitude λ pour l'onde semi-diurne, la longueur d'onde de la marée est

$$2 l = \pi \cdot R \cdot \cos \lambda$$

Il y a deux ondes complètes suivant le parallèle, 2 hautes mers et 2 basses mers avec des courants maxima et 4 étales au niveau moyen, à courants nuls. Donc, pour les termes d'oscillation pure de marée, ζ et u sont maxima, minima et nuls en même temps, ce qui correspond bien aux propriétés des courants provenant d'ondes d'oscillation pure.

Les termes arbitraires circonstanciels $f_1\left(t - \frac{x}{V}\right)$ et $f_2\left(t + \frac{x}{V}\right)$ correspondent à la superposition d'ondes de translation, avec des vitesses de courant correspondantes :

$$u = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = f_1'\left(t - \frac{x}{V}\right) + f_2'\left(t + \frac{x}{V}\right) \quad (100 \text{ bis})$$

$$\text{Or } \zeta = - \frac{H \cdot \partial \zeta}{\partial x} = \frac{H}{V} \cdot [f_1'\left(t - \frac{x}{V}\right) - f_2'\left(t + \frac{x}{V}\right)] = F_1\left(t - \frac{x}{V}\right) + F_2\left(t + \frac{x}{V}\right)$$

$$\text{d'où } F_1 = \frac{H}{V} \cdot f_1' \quad \text{et} \quad F_2 = - \frac{H}{V} \cdot f_2' , \quad (107)$$

$$\text{et } u = \frac{V}{H} \cdot [F_1\left(t - \frac{x}{V}\right) - F_2\left(t + \frac{x}{V}\right)] = \frac{V}{H} \cdot [F_1\left(t - \frac{x}{V}\right) - F_2\left(t + \frac{x}{V}\right)] ,$$

ce qui reproduit la formule (100).

Cette superposition d'ondes allongées de faible amplitude ne modifie pas les propriétés communes aux ondes simples d'oscillation et aux ondes de translation. Il en est de même des courants éventuellement superposés. Toutefois, les époques des courants maxima et minima et des étales sont modifiées.

Au voisinage des côtes, dans les bras de mer, entre les côtes et les îles et entre-elles, les caractères des ondes de marée et de leurs courants peuvent être fortement modifiés par les interférences (cfr par. 4).

7.- COURANTS PRODUITS PAR LA MAREE DANS UN CANAL HORIZONTAL DE SECTION RECTANGULAIRE ET DE LONGUEUR INDEFINIE, SANS FROTTEMENT.

Soit H la profondeur moyenne, qui est aussi la profondeur aux points assez éloignés où la marée n'est pas encore perceptible. La marée à l'embouchure du canal obéit à la loi

$$\zeta_0 = h \cdot \sin \frac{\pi t}{T} + F_1(t, 0) + F_2(t, 0)$$

Au temps $t = 0$, $\zeta_0 = 0$ et $F_1(0, 0) + F_2(0, 0) = 0$

On a aussi $\zeta_0 = 0$ et $u_0 = 0$ pour $x = l = V \cdot T$,

d'où $F_1(0) + F_2(2T) = 0$

$$F_1(0) - F_2(2T) = 0$$

d'où $F_1(0) = 0$ et $F_2(2T) = 0$

pour toute valeur de t , donc

$$F_2 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \text{et} \quad \zeta &= h \cdot \sin \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} \right) \\ u &= \frac{g}{V} \cdot h \cdot \sin \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} \right) = \frac{V}{H} \cdot h \cdot \sin \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} \right) \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

La vitesse varie harmoniquement en phase avec l'élévation.

Comme
$$V = \sqrt{g \cdot H} = \frac{dx}{dt}, \quad x = \sqrt{g \cdot H} \cdot t + f(\zeta)$$

Pour $x = 0$,
$$0 = \sqrt{g \cdot H} \cdot \frac{T}{\pi} \arcsin \frac{\zeta_0}{h} + f(\zeta)$$

d'où
$$x = \sqrt{g \cdot H} \cdot \left(t - \frac{T}{\pi} \arcsin \frac{\zeta_0}{h} \right) \quad (108)$$

Les formules (107) et (108) représentent l'équation de la surface libre à tout instant.

On voit que
$$u = \frac{V \cdot \zeta}{H}$$

Ces formules correspondent à h et ζ négligeables vis-à-vis de H .

Certains auteurs écrivent :

$$V = \sqrt{g \cdot H} \cdot \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{\zeta}{H} \right)$$

[Cfr chapitre XIII, par. 3, a), formule (156 ter)]

$$u = \frac{V \cdot \zeta}{H + \zeta}$$

et
$$x = \sqrt{g \cdot H} \cdot \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{\zeta}{H} \right) \cdot \left(t - \frac{T}{\pi} \arcsin \frac{\zeta_0}{H} \right)$$

Ces formules correspondent au cas où $\frac{\zeta}{H}$ et $\frac{h}{H}$ ne sont pas négligeables. Mais alors, on ne peut recourir aux formules du paragraphe 6, établies d'après le chapitre XIII, par. 3, b), mais il faut utiliser les formules du chapitre XIII, par. 3, a), à savoir la formule (154 bis).

$$g \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (109)$$

et la formule (152 bis) :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + H. \frac{\partial u}{\partial x} + \zeta. \frac{\partial u}{\partial x} + u. \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (110)$$

Si on introduit dans ces équations les valeurs de $u. \frac{\partial u}{\partial x}$, $\zeta. \frac{\partial u}{\partial x}$ et $u. \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ tirées de (107), on obtient :

$$\zeta = \frac{H}{V} . u$$

$$\zeta. \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{H}{V} . u. \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u. \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{H}{V} . u. \frac{\partial u}{\partial x}$$

d'où
$$g. \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u. \partial u}{\partial x} = 0 \quad (111 a)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + H. \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2H}{V} . u. \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (111 b)$$

De (111 b), on tire :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = - H. \frac{\partial^2 u}{\partial x. \partial t} - \frac{H}{V} . \frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x. \partial t}$$

De (111 a), on tire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x. \partial t} = - g. \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{1}{2} . \frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x^2}$$

D'où
$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g.H. \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{H}{2} . \frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x^2} - \frac{H}{V} . \frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x. \partial t}$$

Après développement et simplification

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g.H. \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{3}{H} \frac{h^2}{\pi^2} . \sin \frac{2\pi}{T} (t - \frac{x}{V}) \quad (103 ter)$$

La solution est :

$$\zeta = h. \sin \frac{\pi}{T} (t - \frac{x}{V}) - \frac{3}{4} . \frac{h^2}{V.H} . \frac{\pi}{T} . x. \cos \frac{2\pi}{T} (t - \frac{x}{V}) \quad (112)$$

De (111 a) on tire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= - g. \frac{\partial \zeta}{\partial x} - u. \frac{\partial u}{\partial x} = - g. \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{V^2}{H^2} . \zeta. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{g.h}{V} . \frac{\pi}{T} . \cos \frac{\pi}{T} (t - \frac{x}{V}) + \frac{3}{2} . \frac{g.h^2}{V^2.H} . \frac{\pi^2}{T^2} . x. \sin \frac{2\pi}{T} (t - \frac{x}{V}) \\ &\quad + \frac{3}{4} . g. \frac{h^2}{V.H} . \frac{\pi}{T} . \cos \frac{2\pi}{T} (t - \frac{x}{V}) \\ u &= \frac{g.h}{V} . \sin \frac{\pi}{T} (t - \frac{x}{V}) - \frac{3}{8} . \frac{g.h^2}{V.H} . \sin \frac{2\pi}{T} (t - \frac{x}{V}) \\ &\quad + \frac{3}{4} . \frac{g.h^2}{V^2.H} . \frac{\pi}{T} . x. \cos \frac{2\pi}{T} (t - \frac{x}{V}) \quad (113) \end{aligned}$$

Les formules (112) et (113) constituent une seconde approximation lorsque h n'est pas tout-à-fait négligeable. On voit qu'à l'expression de ζ

s'ajoute un deuxième terme qui représente une onde supplémentaire du 2^e ordre dont la fréquence est double de celle de la marée à l'embouchure.

On pourrait poursuivre la méthode d'approximations successives employée ci-dessus, en introduisant dans (109) et (110) les nouvelles expressions de $u \frac{\partial u}{\partial x}$, $\zeta \frac{\partial u}{\partial x}$ et $u \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ tirées de (112) et (113). On obtiendrait des solutions comportant des ondes du 3^e, du 4^e ordres, etc..., présentant des fréquences triples, quadruples, etc..., de celle de la marée à l'embouchure du canal ce qui est à rapprocher de la formule (97).

Si la marée à l'embouchure était représentée par

$$\zeta_0 = h \cdot \sin \frac{\pi}{T}t + h' \cdot \cos \frac{\pi}{T}t(t + \varphi) ,$$

on établirait par la méthode d'approximation indiquée ci-dessus qu'il se produirait dans le canal des ondes de périodes $\frac{T + T'}{2 T \cdot T'}$ et $\frac{T - T'}{2 T \cdot T'}$, ce qui correspond aux termes de correction qu'il faut appliquer dans l'analyse harmonique des marées dans un canal ou un fleuve dont la profondeur à mi-marée n'est pas très grande par rapport à l'amplitude de celle-ci (cfr par. 5, in fine).

Ces résultats ne tiennent compte que des forces d'inertie, en l'absence de débit propre du canal et de tout amortissement. Si le canal est indéfini, cette solution s'applique au domaine $x < V \cdot t$ à partir de l'origine des temps. Pour le domaine $x > V \cdot t$, $\zeta = 0$ et $u = 0$, l'onde n'y étant pas parvenue.

8.- COURANTS PRODUITS PAR LA MAREE DANS UN CANAL HORIZONTAL DE SECTION RECTANGULAIRE ET DE LONGUEUR FINIE, SANS FROTTEMENT

Pratiquement, les canaux ont une longueur finie; soit L cette longueur. En $x = L$, le canal est terminé par un mur ou un barrage et on y a $u = 0$ en tous temps. A l'embouchure du canal, pour $x = 0$,

$$\zeta = \zeta_0 = h \cdot \cos \frac{\pi}{T}t \quad \setminus$$

Il se produit dans l'étendue du canal un phénomène périodique dont la solution est

$$\zeta = h_1 \cdot \cos \frac{\pi}{T}(t - \frac{x}{V} + \varepsilon_1) + h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{T}(t + \frac{x}{V} + \varepsilon_2) \quad (114)$$

Elle satisfait à la solution de la formule (99). D'après la formule (100)

$$u = \frac{g}{V} \cdot h_1 \cdot \cos \frac{\pi}{T}(t - \frac{x}{V} + \varepsilon_1) - \frac{g}{V} \cdot h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{T}(t + \frac{x}{V} + \varepsilon_2) \quad (115)$$

h_1 , h_2 , ε_1 et ε_2 sont déterminées par les conditions aux limites, qui sont $\zeta = \zeta_0$ pour $x = 0$ et $u = 0$ pour $x = L$.

On trouve
$$h_1 \cdot \cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_1 = h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_2 = \frac{h}{2}$$

$$h_1 \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon_1 = - h_2 \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon_2 = \frac{h}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \frac{L}{V}$$

d'où
$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \varepsilon_1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \frac{L}{V} = - \operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \varepsilon_2$$

Donc
$$\varepsilon_1 = \frac{L}{V} = - \varepsilon_2$$

et
$$h_1 = h_2 = \frac{h}{2 \cos \frac{\pi}{T} \frac{L}{V}} = \frac{h}{2 \cos \frac{\pi L}{l}}$$

Donc
$$\zeta = \frac{h}{2 \cos \frac{\pi}{T} \frac{L}{V}} \cdot \left[\cos \frac{\pi}{T} \left(t + \frac{L-x}{V} \right) + \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{L-x}{V} \right) \right]$$

$$\zeta = h \cdot \cos \frac{\pi t}{T} \frac{\cos \pi \frac{L-x}{l}}{\cos \frac{\pi L}{l}} \quad (114 \text{ bis})$$

$$u = \frac{g \cdot h}{2 V \cdot \cos \frac{\pi}{T} \frac{L}{V}} \cdot \left[\cos \frac{\pi}{T} \left(t + \frac{L-x}{V} \right) - \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{L-x}{V} \right) \right]$$

$$u = - \frac{g \cdot h}{V} \cdot \sin \frac{\pi t}{T} \cdot \frac{\sin \pi \frac{L-x}{l}}{\cos \frac{\pi L}{l}} \quad (115 \text{ bis})$$

La vitesse est en retard de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur les dénivellations.

Le mouvement ondulatoire dans le canal est donc stationnaire; il n'y

a pas de propagation. L'amplitude $2 h \cdot \frac{\cos \pi \frac{L-x}{l}}{\cos \frac{\pi L}{l}}$ varie de $2 h$ à l'embouchure à $\frac{2 h}{\cos \frac{\pi L}{l}}$ à l'extrémité du canal. Il y a donc amplification

de l'amplitude en l'absence de frottement. Si L est un multiple de l , on retrouve l'équation d'une seiche. Mais comme il s'agit d'une marée, l est probablement beaucoup plus grand que L . De telle sorte que si L est négligeable vis-à-vis de l ,

$$\zeta = h \cdot \cos \frac{\pi t}{T} = \zeta_0$$

$$u = - \frac{g \cdot h}{V} \cdot \frac{\pi \cdot (L-x)}{l} \cdot \sin \frac{\pi t}{T} = - \frac{g \cdot h}{V^2} \cdot \frac{\pi}{T} \cdot (L-x) \cdot \sin \frac{\pi t}{T}$$

$$u = - \frac{h}{H} \cdot \frac{\pi}{T} \cdot (L-x) \cdot \sin \frac{\pi t}{T} \quad (115 \text{ ter})$$

Le courant est nul à l'embouchure et en tous points aux marées hautes et basses. Donc l'étale de jusant est à la basse mer, l'étale de flot à

la mer haute. Les courants sont maxima au niveau moyen

$$u_{\max} = \pm \frac{h}{H} \cdot \frac{\pi}{T} \cdot (L - x) = \pm \frac{h \cdot V}{H} \cdot \frac{\pi}{l} \cdot (L - x)$$

A l'embouchure

$$u_{o \max} = \pm \frac{h}{H} \cdot \frac{\pi \cdot L}{l}$$

Les vitesses sont d'autant plus grandes que L est plus grand (tout en étant petit par rapport à l).

9.- COURANTS PRODUITS PAR LA MAREE DANS UN CANAL HORIZONTAL DE SECTION RECTANGULAIRE ET DE LONGUEUR FINIE PRESENTANT UN TRONCON ELARGI; SANS INTERVENTION DE FROTTEMENT

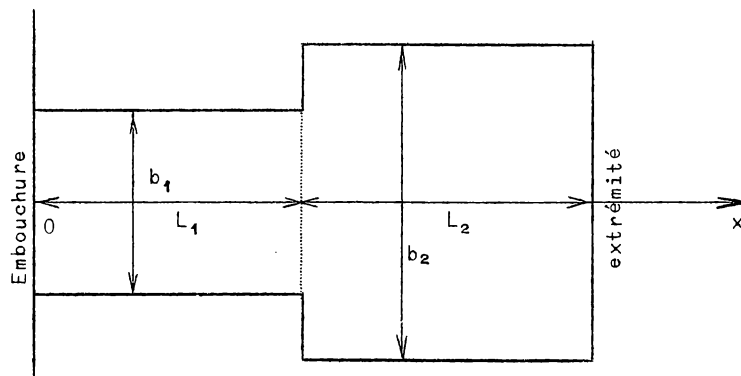


Fig. 21.

Soit (fig.21), un canal présentant à l'embouchure une largeur b_1 sur une longueur L_1 , suivi d'un tronçon de largeur b_2 sur une longueur L_2 . Les profondeurs sont H_1 et H_2 . A l'embouchure

$$\zeta_1 = \zeta_0 = h \cdot \cos \frac{\pi}{T} t$$

Dans le 1er canal, on aura

$$\zeta_1 = h_1' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} + \varepsilon_1' \right) + h_1'' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t + \frac{x}{V} + \varepsilon_1'' \right)$$

$$u_1 = \frac{g}{V} \cdot h_1' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} + \varepsilon_1' \right) - \frac{g}{V} \cdot h_1'' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t + \frac{x}{V} + \varepsilon_1'' \right)$$

Dans le 2^e tronçon, on aura

$$\zeta_2 = h_2' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} + \varepsilon_2' \right) + h_2'' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t + \frac{x}{V} + \varepsilon_2'' \right)$$

$$u_2 = \frac{g}{V} \cdot h_2' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} + \varepsilon_2' \right) - \frac{g}{V} \cdot h_2'' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t + \frac{x}{V} + \varepsilon_2'' \right)$$

A l'embouchure $\zeta_1 = \zeta_0$, (x = 0)

A la jonction des deux canaux $\zeta_1 = \zeta_2$.

et $H_1 \cdot b_1 \cdot u_1 = H_2 \cdot b_2 \cdot u_2$ ($x = L_1$)

Enfin, à l'extrémité du canal

$$u = 0 \quad .(x = L_1 + L_2)$$

On en déduit les valeurs des 8 paramètres h_1' , h_1'' , h_2' , h_2'' , ε_1' , ε_1'' , ε_2' et ε_2'' en fonction de h , $\frac{\pi}{T}$, L_1 , L_2 , b_1 , b_2 , H_1 , H_2 et V .

Le mouvement est encore stationnaire.

Considérons comme cas particulier $L_2 \equiv \infty$ et $H_1 = H_2 = H$.

Alors $\zeta_1 = \zeta_0 = h \cdot \cos \frac{\pi}{T} t$, pour $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= h_1' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} + \varepsilon_1' \right) + h_1'' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t + \frac{x}{V} + \varepsilon_1'' \right) \\ u_1' &= \frac{g}{V} \cdot h_1 \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} + \varepsilon_1' \right) - \frac{g}{V} \cdot h_1'' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t + \frac{x}{V} + \varepsilon_1'' \right) \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Dans le deuxième tronçon (cfr par. 7) :

$$\left. \begin{aligned} \zeta_2 &= h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x-L_1}{V} + \varepsilon_2 \right) \\ u_2 &= \frac{g \cdot h_2}{V} \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x-L_1}{V} + \varepsilon_2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

Pour $x = L_1$, on a $\zeta_1 = \zeta_2$ et $b_1 \cdot u_1 = b_2 \cdot u_2$.

$$\text{Donc } h_1' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{L_1}{V} + \varepsilon_1' \right) + h_1'' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t + \frac{L_1}{V} + \varepsilon_1'' \right) = h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{T} (t + \varepsilon_2)$$

$$b_1 \cdot \left[h_1' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{L_1}{V} + \varepsilon_1' \right) - h_1'' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t + \frac{L_1}{V} + \varepsilon_1'' \right) \right] = b_2 \cdot h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{T} (t + \varepsilon_2)$$

pour toute valeur de t . D'où

$$\begin{aligned} - \frac{L_1}{V} + \varepsilon_1' &= \frac{L_1}{V} + \varepsilon_1'' = \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1' &= \varepsilon_2 + \frac{L_1}{V}, \quad \varepsilon_1'' = \varepsilon_2 - \frac{L_1}{V} \end{aligned} \quad (118)$$

$$h_1' + h_1'' = h_2$$

$$b_1 \cdot (h_2' - h_1'') = b_2 \cdot h_2$$

$$h_1' = \frac{h_2}{2} \cdot \frac{b_1 + b_2}{b_1}, \quad h_1'' = \frac{h_2}{2} \cdot \frac{b_1 - b_2}{b_1} \quad (118 \text{ bis})$$

à l'embouchure, $x = 0$ et au temps $t = 0$.

$$h = h_1' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_2 + \frac{L_1}{V} \right) + h_1'' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_2 - \frac{L_1}{V} \right), \quad (\zeta_1 = \zeta_0)$$

$$0 = h_1' \cdot \sin \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_2 + \frac{L_1}{V} \right) + h_1'' \cdot \sin \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_2 - \frac{L_1}{V} \right), \quad \left(\frac{d\zeta_1}{dt} \right)_0 = 0$$

D'où
$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \varepsilon_2 = - \frac{b_2}{b_1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \frac{L_1}{V} \quad (119)$$

et
$$h_2 = h \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_2}{\cos \frac{\pi}{T} \frac{L_1}{V}} = h \cdot \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{T} \frac{L_1}{V}}}{\sqrt{1 + \frac{b_2^2}{b_1^2} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{T} \frac{L}{V}}}$$

Si $b_2 > b_1$, h_1'' est négatif. Il est positif si $b_2 < b_1$.

Si $b_2 = b_1$, $\varepsilon_2 = - \frac{L_1}{V}$, $h_2 = h$, $h_1' = h$ et $h_1'' = 0$,

on retrouve les équations du paragraphe 7.

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= h \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} \right) \\ u &= \frac{g \cdot h}{V} \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} \right) \end{aligned} \right\} \quad (107 \text{ bis})$$

Si $b_2 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_1' = \frac{L_1}{V} = - \varepsilon_1''$

$$h_1' = h_1'' = \frac{h}{2 \cos \frac{\pi}{T} \frac{L_1}{V}}$$

On retrouve les résultats du paragraphe 8.

10.- COURANTS PRODUITS PAR LA MAREE DANS UN CANAL HORIZONTAL DE SECTION RECTANGULAIRE ET DE LONGUEUR FINIE DEBOUCHANT DANS UN LAC, SANS INTERVENTION DE FROTTEMENT

Si la longueur du canal est L et sa largeur b , il suffit de reprendre les formules (116), (117), (118), (119) et du paragraphe 9, et d'y faire $L_1 = L$, $b_1 = b$, $b_2 \equiv \infty$.

Il en résulte,
$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \varepsilon_2 \equiv - \infty , \quad \varepsilon_2 = - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{T}{\pi} = - \frac{T}{2}$$

$$h_2 = 0 , \quad h_1' = - h_1'' = h_1 , \quad \varepsilon_1' = - \frac{T}{2} + \frac{L}{V} , \quad \varepsilon_1'' = - \frac{T}{2} - \frac{L}{V}$$

$$\zeta_1 = h_1 \cdot \left[\cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{T}{2} - \frac{x-L}{V} \right) - \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{T}{2} + \frac{x-L}{V} \right) \right]$$

$$\zeta_1 = 2 h_1 \cdot \cos \frac{\pi t}{T} \cdot \sin \frac{\pi}{T} \frac{(x-L)}{V}$$

$$\zeta_0 = h \cdot \cos \frac{\pi t}{T} = 2 h_1 \cdot \sin \frac{\pi L}{TV} \cdot \cos \frac{\pi t}{T}$$

$$\text{d'où} \quad \zeta_1 = h \cdot \frac{\sin \frac{\pi(x-L)}{TV}}{\sin \frac{\pi L}{TV}} \cdot \cos \frac{\pi t}{T} \quad (121)$$

$$\text{Pour} \quad \begin{aligned} x = 0, \quad \zeta_1 &= h \cdot \cos \frac{\pi t}{T} = \zeta_0 \\ x = L, \quad \zeta_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{g \cdot h_1}{V} \cdot \left[\cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{T}{2} - \frac{x-L}{V} \right) + \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{T}{2} + \frac{x-L}{V} \right) \right] \\ &= \frac{2 g \cdot h_1}{V} \cdot \cos \frac{\pi(x-L)}{TV} \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{T}{2} \right) \\ u_1 &= - \frac{g \cdot h}{V} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{T} \left(\frac{x-L}{V} \right)}{\sin \frac{\pi L}{TV}} \cdot \sin \frac{\pi t}{T} \end{aligned} \quad (122)$$

La vitesse est en retard de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur les dénivellations.

$$\begin{aligned} \text{A l'embouchure} \quad u_{1_0} &= - \frac{g \cdot h}{V} \cdot \cotg \frac{\pi L}{TV} \cdot \sin \frac{\pi t}{T} \\ \text{A l'entrée du lac} \quad u_{1_L} &= - \frac{g \cdot h}{V} \cdot \frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\sin \frac{\pi L}{TV}} \end{aligned} \quad (123)$$

Dans le cas où le même canal est terminé par un barrage, on a [paragraphe 8, formule (115 bis)]

$$u_b = - \frac{g \cdot h}{V} \cdot \frac{\sin \frac{\pi(L-x)}{TV}}{\cos \frac{\pi L}{TV}} \cdot \sin \frac{\pi t}{T} \quad (115 \text{ bis})$$

Donc

$$\frac{u_1}{u_b} = \cotg \frac{\pi(L-x)}{TV} \cdot \cotg \frac{\pi L}{TV} = \cotg \frac{\pi(L-x)}{L} \cdot \cotg \frac{\pi L}{L} \quad (124)$$

Lorsque $L < \frac{1}{4}$, $\frac{u_1}{u_b}$ est > 1 en tout point du canal. Il n'en est pas de même si $\frac{1}{4} < L < \frac{1}{2}$.

$$\text{A l'embouchure} \quad \left(\frac{u_1}{u_b} \right)_0 = \cotg^2 \frac{\pi L}{L}$$

$$\text{A l'extrémité} \quad \left(\frac{u_1}{u_b} \right)_L \equiv \infty$$

Si le canal est indéfini, selon la formule (107) du paragraphe 7,

$$\text{si} \quad \zeta_0 = h \cdot \cos \frac{\pi t}{T} \quad u_\infty = \frac{g \cdot h}{V} \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} \right)$$

A l'embouchure

$$\left(\frac{u_b}{u_\infty}\right)_0 = \operatorname{tg} \frac{\pi L}{TV} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi t}{T}$$

Ce rapport varie de 0 à ∞ .

Si $L < \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi L}{TV} < 1$.

$$\left(\frac{u_1}{u_\infty}\right)_0 = \operatorname{cotg} \frac{\pi L}{TV} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi t}{T}$$

il varie aussi de 0 à ∞ , mais si $L < \frac{1}{4}$, $\operatorname{cotg} \frac{\pi L}{TV} > 1$.

Les rapports des vitesses maxima sont

$$\left(\frac{u_{b \max}}{u_{\infty \max}}\right)_0 = \operatorname{tg} \frac{\pi L}{TV}$$

$$\left(\frac{u_{1 \max}}{u_{\infty \max}}\right)_0 = \operatorname{cotg} \frac{\pi L}{TV}$$

11.- COURANTS PRODUITS PAR LA MAREE DANS UN CANAL HORIZONTAL DE SECTION RECTANGULAIRE ET DE LONGUEUR INDEFINIE, PRESENTANT DU FROTTEMENT.

Au chapitre XIII, paragraphe 11, on a établi l'équation du mouvement variable dans un canal rugueux [formules (163) et (163 bis)].

On a donc :

$$i_s = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2g} \cdot \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{u^2}{C^2 \cdot R} \quad (124)$$

Le canal étant horizontal,

$$i_s = - \frac{\partial \zeta}{\partial x} .$$

La demi-amplitude h étant faible par rapport à la profondeur moyenne H et la largeur du canal étant assez grande, on peut admettre $R = H$.

Donc :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2g} \cdot \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{u^2}{C^2 \cdot H} = 0 \quad (125)$$

Il faut associer à cette équation l'équation de continuité [cfr chapitre XIII, par. 1, formule (152 bis)].

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (126)$$

Le terme $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ est généralement négligeable [cfr chapitre XIII, par. 11].

De plus, comme dans la théorie simplifiée des axes hydrauliques du mouvement permanent graduellement varié dans un canal prismatique, on néglige le terme $\frac{1}{2g} \frac{\partial(u^2)}{\partial x}$. [cfr chapitre X, par. 10, C)]. Dès lors :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u^2}{C^2 \cdot H} = 0 \quad (125 \text{ bis})$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + H. \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (126 \text{ bis})$$

Pour pouvoir intégrer, on doit substituer au terme quadratique $\frac{u^2}{C^2.H}$ un terme linéaire $k.u$, le coefficient k devant être déterminé de manière adéquate en fonction de C .

Donc
$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + k.u = 0 \quad (125 \text{ ter})$$

D'où
$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial t} + k. \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Or
$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial \zeta}{H \cdot \partial t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial t} = - \frac{\partial^2 \zeta}{H \cdot \partial t^2}$$

Donc
$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{1}{g.H} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{k}{H} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$$

ou, en posant $K = k.g$,

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + K. \frac{\partial \zeta}{\partial t} - g.H. \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0 \quad (127)$$

Cette équation aux dérivées partielles est connue sous le nom d'équation des télégraphistes.

Le débit est $Q = b.H.u.$

Si dans les équations (125 ter) et (126 bis), on remplace u par $\frac{Q}{b.H}$, on obtient :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial Q}{g.b.H \cdot \partial t} + \frac{k.Q}{b.H} = 0$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{b \cdot \partial x} = 0$$

d'où
$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \cdot \partial t} + \frac{\partial^2 Q}{g.b.H \cdot \partial t^2} + \frac{k \cdot \partial Q}{b.H \cdot \partial t} = 0$$

et
$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \cdot \partial t} = - \frac{\partial^2 Q}{b \cdot \partial x^2}$$

Eliminant $\frac{\partial \zeta}{\partial x \cdot \partial t}$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + K. \frac{\partial Q}{\partial t} - g.H. \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0 \quad (128)$$

Q satisfait à la même équation des télégraphistes que ζ .

La solution générale de (127) est de la forme

$$\zeta = a_2 \cdot e^{int + \sigma x} + a_1 \cdot e^{int - \sigma x}, \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (129)$$

En effet : $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -n^2 \cdot \zeta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = i.n \cdot \zeta, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \sigma^2 \cdot \zeta$

Remplaçant dans (127)

$$- n^2 + K.i.n - g.H.\sigma^2 = 0$$

d'où
$$\sigma^2 = \frac{-n^2}{g.H} \cdot \left(1 - \frac{K.i}{n}\right) \quad (130)$$

Posons $\frac{K}{n} = \operatorname{tg} \delta$,

$$\sigma^2 = \frac{-n^2}{g.H.\cos \delta} \cdot (\cos \delta - i.\sin \delta) = \frac{-n^2}{g.H.\cos \delta} \cdot e^{-i\delta} \quad (130 \text{ bis})$$

D'après (126 bis)

$$H. \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = - i.n.\zeta$$

d'où
$$H.u = \frac{i.n}{\sigma} \cdot [- a_2 \cdot e^{int + \sigma x} + a_1 \cdot e^{int - \sigma x}]$$

et
$$Q = \frac{i.b.n}{\sigma} \cdot [- a_2 \cdot e^{int + \sigma x} + a_1 \cdot e^{int - \sigma x}] \quad (131)$$

Pour passer aux valeurs réelles de ζ et Q , on part de

$$\sigma = \frac{i.n}{\sqrt{g.H.\cos \delta}} \cdot e^{-\frac{i\delta}{2}}$$

$$\sigma = \frac{n}{\sqrt{g.H.\cos \delta}} \cdot \left(\sin \frac{\delta}{2} + i.\cos \frac{\delta}{2}\right) \quad (132)$$

Posons
$$V = \frac{\sqrt{g.H.\cos \delta}}{\cos \frac{\delta}{2}} \quad (133)$$

et
$$\varphi = \frac{n.\sin \frac{\delta}{2}}{V.\cos \frac{\delta}{2}} = \frac{n.\sin \frac{\delta}{2}}{\sqrt{g.H.\cos \delta}} \quad (134)$$

D'après (132), (133) et (134) :

$$\sigma = \varphi + \frac{i.n}{V}$$

Posons $a_2 = h_2 \cdot e^{in \varepsilon_2}$, $a_1 = h_1 \cdot e^{in \varepsilon_1}$

La formule (129) devient :

$$\zeta = h_2 \cdot e^{-\varphi x} \cdot e^{in(t + \frac{x}{V} + \varepsilon_2)} + h_1 \cdot e^{-\varphi x} \cdot e^{in(t - \frac{x}{V} + \varepsilon_1)}$$

Pour la partie réelle :

$$\zeta = h_2 \cdot e^{-\varphi x} \cdot \cos n(t + \frac{x}{V} + \varepsilon_2) + h_1 \cdot e^{-\varphi x} \cdot \cos n(t - \frac{x}{V} + \varepsilon_1) \quad (135)$$

Comme expression réelle du débit, on a donc, d'après (131)

$$Q = b \cdot \sqrt{g \cdot H \cdot \cos \delta} \cdot \left[-h_2 \cdot e^{\rho x} \cdot \cos n \left(t + \frac{x}{V} + \varepsilon_2 + \frac{\delta}{2n} \right) + h_1 \cdot e^{-\rho x} \cdot \cos n \left(t - \frac{x}{V} + \varepsilon_1 + \frac{\delta}{2n} \right) \right] \quad (136)$$

Le second terme de ζ représente une onde se déplaçant dans le sens positif, le premier terme une onde se déplaçant en sens inverse. Les multiplicateurs $e^{-\rho x}$ et $e^{\rho x}$ expriment l'amortissement des ondes par le frottement, ε_1 et ε_2 sont des déphasages. La célérité des ondes est

$$V = \frac{\sqrt{g \cdot H \cdot \cos \delta}}{\cos \frac{\delta}{2}} < \sqrt{g \cdot H} \quad (137)$$

La célérité est réduite par suite du frottement. Les deux paramètres exprimant l'effet du frottement sont :

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{K}{n} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{n \cdot \sin \frac{\delta}{2}}{\sqrt{g \cdot H \cdot \cos \delta}}$$

Mais

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{\pi}{T}, \quad \text{donc} \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{K \cdot T}{\pi} \\ \sin \delta &= \frac{K \cdot T}{\sqrt{\pi^2 + K^2 \cdot T^2}}, \quad \cos \delta = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + K^2 \cdot T^2}} \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{T \cdot \sqrt{g \cdot H}} \sqrt{\frac{1 - \cos \delta}{2 \cos \delta}} = \frac{\pi}{T \cdot \sqrt{g \cdot H}} \sqrt{\frac{\sqrt{\pi^2 + K^2 \cdot T^2} - \pi}{2 \pi}} \quad (139)$$

k a comme dimension $l^{-1} \cdot t$, $K = k \cdot g$ a comme dimension t^{-1} .

Donc $\operatorname{tg} \delta = \frac{K \cdot T}{\pi}$ est sans dimension et φ a comme dimension l^{-1} , c'est-à-dire que $\varphi \cdot x$ est sans dimension.

De la même manière, on trouve

$$V = \sqrt{g \cdot H} \cdot \sqrt{\frac{2 \pi}{\pi + \sqrt{\pi^2 + K^2 \cdot T^2}}} \quad (140)$$

Si $k = K = 0$ (absence de frottement), $\delta = 0$, $\varphi = 0$ et $V = \sqrt{g \cdot H}$; l'équation (135) devient identique à l'équation (114) du paragraphe 8.

Dans ce qui précède, aucune définition n'est donnée de la longueur du canal. Si elle est indéfinie, le 2^e terme existe seul et

$$\zeta = h \cdot e^{-\rho x} \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} + \varepsilon \right) \quad (141)$$

$$Q = b \cdot \sqrt{\frac{g \cdot H}{\pi}} \cdot \sqrt{\pi^2 + K^2 \cdot T^2} \cdot h \cdot e^{-\rho x} \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} + \varepsilon + \frac{T}{2 \pi} \operatorname{arctg} \frac{KT}{\pi} \right) \quad (142)$$

ζ et Q s'annulent pour $x \equiv \infty$.

La fréquence est invariable, elle est celle de la marée à l'embouchure $\frac{1}{2T}$. La célérité étant invariable, il en est de même de la longueur d'onde $2l = 2V.T$, mais elle est plus petite que $2T \cdot \sqrt{g.H}$ par suite de l'effet des frottements. L'amplitude $2h.e^{-\rho x}$ va en décroissant à partir de l'origine du canal, également sous l'influence des frottements. Mais elle est constante en chaque point; elle s'amortit suivant la distance, mais pas dans le temps. Cela résulte de ce que l'oscillation est entretenue par la marée à l'origine du canal et que, le canal étant indéfini, le mouvement est propagatoire et non stationnaire.

12.- COURANTS PRODUITS PAR LA MAREE DANS UN CANAL HORIZONTAL DE SECTION RECTANGULAIRE ET DE LONGUEUR FINIE, PRESENTANT DU FROTEMENT

La longueur du canal est L .

La solution générale du problème est donnée par les formules (135) et (136) du paragraphe précédent. A l'origine du canal, pour $x = 0$, il faut

que
$$\zeta = \zeta_0 = h \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} \right) \quad \text{pour toute valeur de } t .$$

$$\zeta = h_1 \cdot e^{-\rho x} \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} + \varepsilon_1 \right) + h_2 \cdot e^{\rho x} \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t + \frac{x}{V} + \varepsilon_2 \right)$$

Pour $x = L$, $Q = 0$.

$$\text{Donc} \quad h = h_1 \cdot \cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_1 + h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_2 \quad (143 \text{ a})$$

D'autre part, pour $x = 0$ et $t - \frac{x}{V} = 0$, $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$

$$\text{ou} \quad h_1 \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon_1 + h_2 \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon_2 = 0 \quad (143 \text{ b})$$

Enfin :

$$0 = h_1 \cdot e^{-\rho L} \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{L}{V} + \varepsilon_1 + \frac{\delta T}{2\pi} \right) - h_2 \cdot e^{\rho L} \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t + \frac{L}{V} + \varepsilon_2 + \frac{\delta T}{2\pi} \right)$$

pour toute valeur de t . En faisant $t = -\frac{\delta \cdot T}{2\pi}$

$$0 = h_1 \cdot e^{-\rho L} \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_1 - \frac{L}{V} \right) - h_2 \cdot e^{\rho L} \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_2 + \frac{L}{V} \right) \quad (143 \text{ c})$$

La partie imaginaire de la solution (ou la dérivée) est aussi nulle

$$0 = h_1 \cdot e^{-\rho L} \cdot \sin \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_1 - \frac{L}{V} \right) - h_2 \cdot e^{\rho L} \cdot \sin \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_2 + \frac{L}{V} \right) \quad (143 \text{ d})$$

Les 4 équations (143, a, b, c et d) linéaires à 4 inconnues

$h_1 \cdot \cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_1$, $h_1 \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon_1$, $h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_2$ et $h_2 \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon_2$ permettent de

déterminer ces inconnues.

Comme
$$h_1 \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon_1 = - h_2 \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon_2$$

et
$$h_1 \cdot \cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_1 = h - h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_2 ,$$

on élimine facilement h_2 et ε_2 des équations (143, c et d) et l'on trouve :

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } \frac{\pi}{T} \varepsilon_1 &= \text{tg } \frac{\pi L}{TV} \frac{1 - \text{tgh } \varphi L}{\text{tg}^2 \frac{\pi L}{TV} \cdot \text{tgh } \varphi L + 1} \\ \text{enfin } \text{tg } \frac{\pi}{T} \varepsilon_2 &= \text{tg } \frac{\pi L}{TV} \frac{1 + \text{tgh } \varphi L}{\text{tg}^2 \frac{\pi L}{TV} \cdot \text{tgh } \varphi L - 1} \end{aligned} \right\} \quad (144)$$

On constate que

$$\text{tg } \frac{\pi}{T} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \frac{\text{tg } \frac{\pi}{T} \varepsilon_1 \cdot \text{tg } \frac{\pi}{T} \varepsilon_2}{1 + \text{tg } \frac{\pi}{T} \varepsilon_1 \cdot \text{tg } \frac{\pi}{T} \varepsilon_2} = \frac{2 \text{tg } \frac{\pi L}{TV}}{1 - \text{tg}^2 \frac{\pi L}{TV}}$$

ou
$$\text{tg } \frac{\pi}{T} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \text{tg } \frac{2\pi L}{TV}$$

$$\frac{\pi}{T} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \frac{2 \pi \cdot L}{T \cdot V} \quad (145)$$

ou
$$\frac{L}{V} - \varepsilon_1 = - \left(\frac{L}{V} + \varepsilon_2 \right) = \varepsilon_L \quad (145 \text{ bis})$$

ε_L est le déphasage à l'extrémité amont du canal par rapport à son origine ($x = 0$).

On a
$$h_1 = - h \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{T} \varepsilon_2}{\sin \frac{2\pi L}{TV}} \quad \text{et} \quad h_2 = \frac{h \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon_1}{\sin \frac{2\pi L}{TV}} \quad (146)$$

Si le frottement est nul, $\varphi = 0$, on retrouve

$$\text{tg } \frac{\pi \varepsilon_1}{T} = - \text{tg } \frac{\pi \varepsilon_2}{T} = \text{tg } \frac{\pi L}{TV}, \quad v = \sqrt{g \cdot H} \quad \text{et} \quad \varepsilon_L = 0$$

$$h_1 = h_2 = \frac{h}{2 \cos \frac{\pi L}{TV}}$$

qui sont les résultats du paragraphe 8.

Considérons le cas ou $\frac{K}{n} = \frac{K \cdot T}{\pi} = \text{tg } \delta$ et $\frac{\pi \cdot L}{T \cdot V}$ sont très petits.

On a alors :

$$\delta = \text{tg } \delta = \sin \delta = \frac{K \cdot T}{\pi}, \quad \cos \delta = 1, \quad \frac{\delta}{2n} = \frac{\delta \cdot T}{2\pi} = \frac{K \cdot T^2}{2\pi^2}, \quad v = \sqrt{g \cdot H}.$$

D'après (144) :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{L}{V} \cdot \frac{1 - \varphi \cdot L}{\varphi \frac{L^3 \cdot \pi^2}{T^2 \cdot V^2} + 1} = \frac{L}{V} \cdot (1 - \varphi \cdot L - \varphi \cdot \frac{L^3 \cdot \pi^2}{L^2}) \\ \varepsilon_2 &= - \frac{L}{V} \frac{1 + \varphi \cdot L}{1 - \varphi \cdot \frac{L^3 \cdot \pi^2}{T^2 \cdot V^2}} = - \frac{L}{V} \cdot (1 + \varphi \cdot L + \varphi \cdot \frac{L^3 \cdot \pi^2}{L^2}) \end{aligned} \right\} (144 \text{ bis})$$

$$h_1 = \frac{h}{2} \cdot (1 + \varphi \cdot L + \varphi \cdot \frac{L^3 \cdot \pi^2}{L^2}), \quad h_2 = \frac{h}{2} \cdot (1 - \varphi \cdot L - \varphi \cdot \frac{L^3 \cdot \pi^2}{L^2}) \quad (146 \text{ bis})$$

$$\zeta = \frac{h}{2} \left[(1 + \varphi \cdot L + \varphi \cdot \frac{L^3 \cdot \pi^2}{L^2}) \cdot e^{-\varphi x} \cdot \cos \frac{\pi}{T} (t - \varphi \frac{L^2}{V} - \varphi \frac{L^4 \pi^2}{V L^2} + \frac{L-x}{V}) \right. \\ \left. + (1 - \varphi \cdot L - \varphi \cdot \frac{L^3 \cdot \pi^2}{L^2}) \cdot e^{\varphi x} \cdot \cos \frac{\pi}{T} (t - \varphi \frac{L^2}{V} - \varphi \frac{L^4 \pi^2}{V L^2} - \frac{L-x}{V}) \right]$$

Comme $0 < x < L$, on peut écrire $e^{-\varphi x} = 1 - \varphi \cdot x$ et $e^{\varphi x} = 1 + \varphi \cdot x$
d'où :

$$\zeta = \frac{h}{2} \cdot \left[(1 + \varphi \cdot L + \varphi \cdot \frac{L^3 \cdot \pi^2}{L^2}) \cdot (1 - \varphi \cdot x) \cdot \cos \frac{\pi}{T} (t - \varphi \frac{L^2}{V} - \varphi \frac{L^4 \pi^2}{V L^2} + \frac{L-x}{V}) \right. \\ \left. + (1 - \varphi \cdot L - \varphi \cdot \frac{L^3 \cdot \pi^2}{L^2}) \cdot (1 + \varphi \cdot x) \cdot \cos \frac{\pi}{T} (t - \varphi \frac{L^2}{V} - \varphi \frac{L^4 \pi^2}{V L^2} - \frac{L-x}{V}) \right]$$

ou :

$$\zeta = h \cdot \left[\cos \frac{\pi}{T} (t - \varphi \frac{L^2}{V} - \varphi \frac{L^4 \pi^2}{V L^2}) \cdot \cos \frac{\pi}{T} \frac{(L-x)}{V} \right. \\ \left. - \varphi \cdot (L - x) \cdot \sin \frac{\pi}{T} (t - \varphi \frac{L^2}{V} - \varphi \frac{L^4 \pi^2}{V L^2}) \cdot \sin \frac{\pi}{T} \frac{(L-x)}{V} \right] \quad (135 \text{ bis})$$

De même :

$$Q = \frac{b \cdot h \cdot \sqrt{g \cdot H}}{2} \left[(1 + \varphi \cdot L + \varphi \cdot \frac{L^3 \cdot \pi^2}{L^2}) \cdot (1 - \varphi \cdot x) \cdot \cos \frac{\pi}{T} (t - \varphi \frac{L^2}{V} - \varphi \frac{L^4 \pi^2}{V L^2} + \frac{L-x}{V} + \frac{\delta T}{2T}) \right. \\ \left. - (1 - \varphi \cdot L - \varphi \cdot \frac{L^3 \cdot \pi^2}{L^2}) \cdot (1 + \varphi \cdot x) \cdot \cos \frac{\pi}{T} (t - \varphi \frac{L^2}{V} - \varphi \frac{L^4 \pi^2}{V L^2} - \frac{L-x}{V} + \frac{\delta T}{2T}) \right]$$

On remarque que $Q_L = 0$ pour $x = L$.

Comme $\varphi = \frac{K}{2V}$, $\frac{\varphi \cdot L^2}{V} = \frac{K \cdot T^2}{2}$ et $\frac{\varphi \cdot L^4 \cdot \pi^2}{V \cdot L^2} = \frac{K \cdot T^2 \cdot \pi^2 \cdot L^2}{2 L^2}$, $\varphi \cdot L = \frac{K \cdot T}{2}$

et $\frac{\varphi \cdot L^3 \cdot \pi}{L^2} = \frac{K \cdot T}{2} \cdot \frac{\pi^2 \cdot L^2}{L^2}$, on trouve finalement :

$$Q = b \cdot h \cdot \sqrt{g \cdot H} \cdot \left\{ \sin \frac{\pi}{T} \left[t - \frac{KT^2}{2} \left(1 + \frac{\pi^2 L^2}{L^2} - \frac{1}{\pi^2} \right) \right] \cdot \sin \frac{\pi}{T} \frac{(L-x)}{V} \right. \\ \left. - \varphi \cdot (L - x) \cos \frac{\pi}{T} \left[t - \frac{KT^2}{2} \left(1 + \frac{\pi^2 L^2}{L^2} - \frac{1}{\pi^2} \right) \right] \cdot \cos \frac{\pi}{T} \frac{(L-x)}{V} \right\} \quad (136 \text{ bis})$$

Par analogie avec le paragraphe 8, on pourrait diviser ces expressions par $\cos \frac{\pi L}{TV} = \cos \frac{\pi l}{L} \approx 1$.

A l'embouchure, $x = 0$.

$$Q_0 = - b.h.\sqrt{g.H} \left\{ \sin \frac{\pi}{T} \left[t - \frac{KT^2}{2} \left(1 + \frac{\pi^2 L^2}{1^2} - \frac{1}{\pi^2} \right) \right] \cdot \sin \frac{\pi L}{1} \right. \\ \left. - \varphi.L \cos \frac{\pi}{T} \left[t - \frac{KT^2}{2} \left(1 + \frac{\pi^2 L^2}{1^2} - \frac{1}{\pi^2} \right) \right] \cdot \cos \frac{\pi L}{1} \right\}$$

Le volume entrant et sortant pendant une demi-période est

$$V^{\mp} = \pm 2 b.h.\sqrt{g.H} \cdot \frac{T}{\pi} \cdot \left[\sin \frac{\pi L}{1} - 2 \varphi.L \cos \frac{\pi L}{1} \right]$$

Si $K = 0$

$$V_0^{\mp} = \pm 2 b.h.\sqrt{g.H} \cdot \frac{T}{\pi} \sin \frac{\pi L}{1}$$

Si $\sin \frac{\pi L}{1} = \frac{\pi.L}{1}$, $\cos \frac{\pi L}{1} = 1$

$$V^{\mp} = \pm 2 b.h.\sqrt{g.H} \cdot \frac{T.L}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{1} - 2 \varphi \right) = \pm \frac{2 b.H.L.h.T.g}{V.1} \cdot \left(1 - \frac{2 \varphi.L}{\pi} \right)$$

$$V_0^{\mp} = \pm 2 b.h.\sqrt{g.H} \cdot \frac{T.L}{1} = \pm \frac{2 b.H.h.L.T.g}{V.1}$$

$$\frac{2 \varphi.L}{\pi} = \frac{2 l}{T \sqrt{g.H}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{\pi^2 + K^2.T^2} - \pi}{2 \pi}} = \frac{2 l}{T \sqrt{g.H}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \frac{K^2.T^2}{\pi^2}}}{2} - \frac{1}{2}}$$

Le mouvement est donc stationnaire. L'amplitude et le débit augmentent lorsque L augmente. Le débit et le déplacement vertical varient en chaque point suivant une loi harmonique simple, mais ζ_{\max} et Q_{\max} varient d'un point à un autre.

Pour $x = 0$, $\zeta_{0 \max} = h$ et $Q_{0 \max} = b.h.\sqrt{g.H}$

Pour $x = L$, $\zeta_{L \max} \approx h$ et $Q_{\max} = 0$

Ceci semble indiquer que lorsque K est faible et L pas très grand, les effets du frottement ne sont guère sensibles.

13.- APPLICATION DE CES METHODES A L'ETUDE DES COURANTS DE MAREE DANS UN RESEAU DE CANAUX

A l'embouchure du canal du paragraphe précédent :

$$\zeta_0 = h \cdot \cos \frac{\pi t}{T} = \frac{h}{\sin \frac{2\pi L}{TV}} \left[- e^{-\varphi x} \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon_2 \cdot \cos \frac{\pi}{T} (t + \varepsilon_1) \right. \\ \left. + e^{\varphi x} \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon_1 \cdot \cos \frac{\pi}{T} (t + \varepsilon_2) \right]$$

$$u_0 = u_{\max} \cdot \cos \frac{\pi t}{T} = - \frac{b \cdot h \cdot \sqrt{g \cdot H \cdot \cos \delta}}{H \cdot \sin \frac{2\pi L}{TV}} \left[e^{-\sigma x} \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon_2 \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t + \varepsilon_1 + \frac{\delta T}{2\pi} \right) + e^{\sigma x} \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon_1 \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t + \varepsilon_2 + \frac{\delta T}{2\pi} \right) \right]$$

En un point quelconque x :

$$\zeta = h_1 \cdot e^{-\sigma x} \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} + \varepsilon_1 \right) + h_2 \cdot e^{\sigma x} \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t + \frac{x}{V} + \varepsilon_2 \right)$$

qui peut s'écrire :

$$\zeta = h_1 \cdot e^{-\sigma x} \cdot \cos \frac{\pi t}{T} + h_2 \cdot e^{\sigma x} \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(t + \frac{2x}{V} + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \right)$$

Par une transformation analogue à celle des formules (83) et (84) du paragraphe 2, on obtient :

$$\zeta = \zeta_{\max} \cdot \cos \frac{\pi}{T} (t - \varepsilon)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{\max}^2 &= h_1^2 \cdot e^{-2\sigma x} + h_2^2 \cdot e^{2\sigma x} + 2 h_1 \cdot h_2 \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(\frac{2x}{V} + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \right) \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \varepsilon &= \frac{h_2 \cdot e^{\sigma x} \cdot \sin \frac{\pi}{T} \left(\frac{2x}{V} + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \right)}{h_1 \cdot e^{-\sigma x} + h_2 \cdot e^{\sigma x} \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(\frac{2x}{V} + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \right)} \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

Donc, en tout point du canal, le déplacement vertical de la surface libre est une fonction harmonique simple du temps, de période $2T$, mais dont l'amplitude et la phase varient d'un point à l'autre. Il en est de même pour u et Q en un point déterminé.

Dès lors, connaissant ζ_0 et Q_0 en un point $x = 0$, on peut en déduire ζ_L et Q_L en un point $x = L$.

En effet, d'après (129) et (131)

$$\begin{aligned} \zeta &= a_1 \cdot e^{\operatorname{int} - \sigma x} + a_2 \cdot e^{\operatorname{int} + \sigma x} \\ Q &= \frac{i \cdot b \cdot n}{\sigma} [a_1 \cdot e^{\operatorname{int} - \sigma x} - a_2 \cdot e^{\operatorname{int} + \sigma x}] \end{aligned}$$

Au temps $t = 0$

$$\zeta_0 = a_1 + a_2$$

$$Q_0 = \frac{i \cdot b \cdot n}{\sigma} \cdot (a_1 - a_2)$$

$$\zeta_L = a_1 \cdot e^{-\sigma L} + a_2 \cdot e^{\sigma L}$$

$$Q_L = \frac{i \cdot b \cdot n}{\sigma} \cdot [a_1 \cdot e^{-\sigma L} - a_2 \cdot e^{\sigma L}]$$

Posons

$$\left. \begin{aligned} \zeta_L &= Z^* \cdot \zeta_0 + Q' \cdot Q_0 \\ Q_L &= Z' \cdot \zeta_0 + Q^* \cdot Q_0 \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

On trouve

$$\left. \begin{aligned} Z^* &= Q^* = \frac{e^{\sigma L} + e^{-\sigma L}}{2} \\ Q' &= \frac{\sigma \cdot (e^{-\sigma L} - e^{\sigma L})}{2 \text{ i.b.n}} \\ Z' &= \frac{\text{i.b.n}}{\sigma} \cdot \frac{e^{-\sigma L} - e^{\sigma L}}{2} \end{aligned} \right\} (149)$$

En valeurs réelles :

$$\left. \begin{aligned} Z^* &= Q^* = \cos \frac{\pi L}{TV} \cdot \cosh \varphi L \\ Q' &= \frac{\varphi \cdot T}{b \cdot \pi} \cdot \sin \frac{\pi L}{TV} \cdot \cosh \varphi L - \frac{1}{bV} \cdot \cos \frac{\pi L}{TV} \cdot \sinh \varphi L \\ Z' &= \frac{b \cdot \pi \cdot V^2 \cdot \varphi \cdot T}{\pi^2 + \varphi^2 \cdot V^2 \cdot T^2} \cdot \sin \frac{\pi L}{TV} \cdot \cosh \varphi L - \frac{b \cdot \pi^2 \cdot V}{\pi^2 + \varphi^2 \cdot V^2 \cdot T^2} \cdot \cos \frac{\pi L}{TV} \cdot \sinh \varphi L \end{aligned} \right\} (150)$$

Les termes en $\sinh \varphi L$ sont souvent négligeables.

Il résulte des formules (148), (149) et (150) que si l'on connaît à l'origine d'un tronçon de canal de section sensiblement constante les valeurs de ζ et de Q , on peut en déduire les valeurs de mêmes éléments à l'autre extrémité du canal. Si la configuration d'un canal change assez considérablement suivant la longueur, on peut le diviser en tronçons sensiblement prismatiques.

On applique alors de proche en proche et successivement les relations (148), (149) et (150) aux extrémités contigues des divers tronçons. Lorsqu'il existe un réseau de canaux s'embranchant entre eux, on prend comme inconnues les ζ et les Q aux extrémités des divers canaux et tronçons prismatiques. S'il y a N canaux, il y a donc $2N$ inconnues. Les conditions aux extrémités et aux points de jonction des canaux permettent d'établir un nombre égal d'équations linéaires. On peut en déduire les effets de la marée dans chacun des canaux et tronçons. La résolution peut notamment être obtenues par des calculatrices électroniques.

Il faut déterminer la valeur de K pour chaque canal ou tronçon de canal. On le fait généralement en égalant, pour une demi-période de courant, le travail de la résistance équivalente fictive mesurée par K au travail de la résistance réelle mesurée par C .

$$\int_{-T/2}^{T/2} k \cdot u^2 \cdot dt = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{g \cdot u^3}{C^2 \cdot H} dt \quad \text{et} \quad u = u_{\max} \cdot \cos \frac{\pi t}{T}$$

d'où
$$K = \frac{3}{8 \pi} \frac{g \cdot u_{\max}}{C^2 \cdot H} \quad (151)$$

D'après cela, K est petit, $\text{tg} \delta = \frac{K \cdot T}{\pi}$ est généralement petit et φ également. Il en résulte, d'après les formules du type (147), que ζ_{\max} et u_{\max} varient relativement peu sur de longues distances. On procède par approximations successives, à partir d'une valeur plausible de u_{\max} , que l'on corrige d'après les résultats des calculs.

14.- APPLICATION A L'ETUDE DE LA MODIFICATION DES MAREES PAR SUITE DE LA FERMETURE DU ZUIDERZEE

La figure 22 est extraite du mémoire intitulé : "Sur l'hydraulique des fleuves à marée", de M. J. Lamoën (Revue Générale de l'Hydraulique, 1936). Les marées dans le Zuiderzee sont régies par les variations de ζ (et de Q) aux passes A, B, C et D entre les îles de la Frise dans la Mer du Nord.

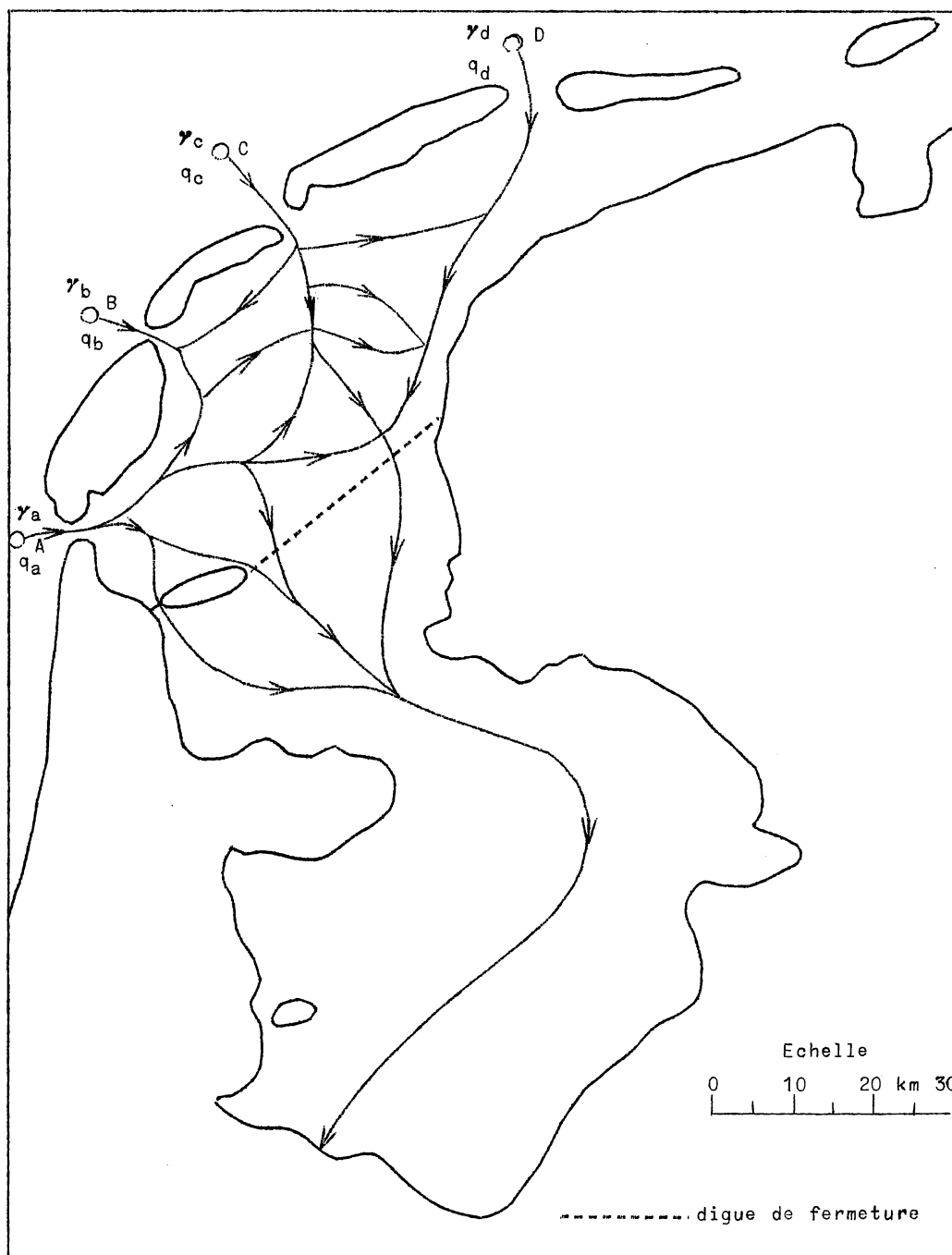


Fig. 22.

On peut donc définir le mouvement en chaque point du Zuiderzee en fonction de ζ_a , ζ_b , ζ_c et ζ_d . La configuration du fond est telle que le problème des marées ordinaires (moyenne) peut se ramener à l'étude des mouvements dans un réseau de N canaux (fig. 22). En prenant comme inconnues les ζ et les Q à une extrémité de chacun de ces canaux, on peut déterminer les éléments correspondants à l'autre extrémité. Il y a donc 2 N inconnues. Certains de ces canaux débouchent dans la Mer du Nord, où l'on connaît ζ .

D'autres se terminent sur les côtes du Zuiderzee, où $Q = 0$. Enfin, aux jonctions, ζ est commun et $\sum Q = 0$. Ceci permet d'écrire un nombre d'équations linéaires égal au nombre des inconnues.

Cette théorie appliquée au régime des marées existant avant la fermeture du Zuiderzee a donné une bonne concordance avec les observations. La méthode ainsi contrôlée a alors été utilisée pour prédéterminer les effets de la fermeture sur le régime des marées. On a conservé les valeurs de ζ_a , ζ_b , ζ_c et ζ_d et refait le même calcul pour le réseau de canaux modifié. Le résultat a permis de prévoir que dans la région du Zuiderzee comprise entre les îles de la Frise et la digue de fermeture, l'amplitude des marées serait doublée. L'observation a également confirmé ces prévisions. Le rapport $\frac{\zeta}{H}$ pour les canaux du Zuiderzee est aux environs de 0,04. Des recherches spéciales ont dû être faites pour l'évaluation des dénivellations produites par les effets du vent.

15.- COURANTS PRODUITS PAR LA MAREE DANS UN CANAL PRISMATIQUE EN PENTE DE SECTION RECTANGULAIRE, EN TENANT COMPTE DES FROTTEMENTS.

On a repris au paragraphe 11 les équations du chapitre XIII, par. 11, à savoir

$$- i_s = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2g} \cdot \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{u^2}{C^2 \cdot R} \quad (124)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (126)$$

Le canal ayant une pente de fond j, on a

$$i_s = j + \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

(en considérant la pente dans le sens décroissant des x).

Cependant, en général, j est très faible dans les canaux à marée et peut être négligée. D'autre part, la grande largeur permet d'écrire

$$R = H.$$

On peut donc se référer en première approximation aux équations (125) et (126) du paragraphe 11.

Le terme $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ est généralement négligeable. Dans un canal prismatique, le terme $\frac{\partial u^2}{\partial x}$ l'est également.

Par des observations, on peut déterminer des valeurs simultanées et successives de ζ . On peut déterminer indirectement les vitesses u

(ou les débits Q), par des méthodes indiquées dans le chapitre suivant. On peut alors déterminer C à partir de (125). Ces déterminations sont cependant encore beaucoup plus aléatoires que sur les rivières ou canaux à courant unique. Les valeurs de K de la formule de résistance linéaire sont donc également incertaines.

15.- COURANTS DE MAREE DANS UN BASSIN COMMUNIQUANT AVEC UNE MER A MAREE

A.- Un avant-port ou une lagune peut communiquer par un chenal avec une mer à marée. On les assimilera à deux canaux rectangulaires respectivement de longueurs L_1 et L_2 , de largeur b_1 et b_2 et de profondeur H_1 et H_2 . C'est le problème du paragraphe 9, figure 21.

Les conditions à réaliser sont donc, pour toutes valeurs de t :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad h \cdot \cos \frac{\pi t}{T} &= h_1' \cdot \cos \frac{\pi}{T}(t + \varepsilon_1') + h_1'' \cdot \cos \frac{\pi}{T}(t + \varepsilon_1'') \\ (b) \quad h_1' \cdot \cos \frac{\pi}{T}(t - \frac{L_1}{V_1} + \varepsilon_1') + h_1'' \cdot \cos \frac{\pi}{T}(t + \frac{L_1}{V_1} + \varepsilon_1'') &= h_2' \cdot \cos \frac{\pi}{T}(t + \varepsilon_2') \\ &\quad + h_2'' \cdot \cos \frac{\pi}{T}(t + \varepsilon_2'') \\ (c) \quad b_1 \cdot H_1 \cdot [h_1' \cdot \cos \frac{\pi}{T}(t - \frac{L_1}{V_1} + \varepsilon_1') - h_1'' \cdot \cos \frac{\pi}{T}(t + \frac{L_1}{V_1} + \varepsilon_1'')] & \\ &= b_2 \cdot H_2 \cdot [h_2' \cdot \cos \frac{\pi}{T}(t + \varepsilon_2') - h_2'' \cdot \cos \frac{\pi}{T}(t + \varepsilon_2'')] \\ (d) \quad h_2' \cdot \cos \frac{\pi}{T}(t - \frac{L_2}{V_2} + \varepsilon_2') - h_2'' \cdot \cos \frac{\pi}{T}(t + \frac{L_2}{V_2} + \varepsilon_2'') &= 0 \end{aligned} \right\} (152)$$

Ce qui donne les 8 équations suivantes entre les 8 inconnues

h_1' , h_1'' , h_2' , h_2'' , ε_1' , ε_1'' , ε_2' et ε_2'' :

$$\left(\begin{aligned} (a) \quad \left\{ \begin{aligned} h &= h_1' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_1' + h_1'' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_1'' \\ 0 &= h_1' \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon_1' + h_1'' \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon_1'' \end{aligned} \right. \\ (b) \quad \left\{ \begin{aligned} h_1' \cdot \cos \frac{\pi}{T}(\varepsilon_1' - \frac{L_1}{V_1}) + h_1'' \cdot \cos \frac{\pi}{T}(\varepsilon_1' + \frac{L_1}{V_1}) &= h_2' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_2' + h_2'' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_2'' \\ h_1' \cdot \sin \frac{\pi}{T}(\varepsilon_1' - \frac{L_1}{V_1}) + h_1'' \cdot \sin \frac{\pi}{T}(\varepsilon_1' + \frac{L_1}{V_1}) &= h_2' \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon_2' + h_2'' \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon_2'' \end{aligned} \right. \\ (c) \quad \left\{ \begin{aligned} b_1 \cdot H_1 \cdot [h_1' \cdot \cos \frac{\pi}{T}(\varepsilon_1' - \frac{L_1}{V_1}) - h_1'' \cdot \cos \frac{\pi}{T}(\varepsilon_1' + \frac{L_1}{V_1})] & \\ &= b_2 \cdot H_2 \cdot [h_2' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_2' - h_2'' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_2''] \\ b_1 \cdot H_1 \cdot [h_1' \cdot \sin \frac{\pi}{T}(\varepsilon_1' - \frac{L_1}{V_1}) - h_1'' \cdot \sin \frac{\pi}{T}(\varepsilon_1' + \frac{L_1}{V_1})] & \\ &= b_2 \cdot H_2 \cdot [h_2' \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon_2' - h_2'' \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon_2''] \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

$$(d) \begin{cases} h_2' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_2' - \frac{L_2}{V_2} \right) - h_2'' \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_2'' + \frac{L_2}{V_2} \right) = 0 \\ h_2' \cdot \sin \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_2' - \frac{L_2}{V_2} \right) - h_2'' \cdot \sin \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_2'' + \frac{L_2}{V_2} \right) = 0 \end{cases}$$

Les résultats sont les suivants :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_2' = -\varepsilon_2'' = \frac{L_2}{V_2}, \quad \varepsilon_1' = -\varepsilon_1'' = \varepsilon_1 \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_1 - \frac{L_1}{V_1} \right) = \frac{b_2 \cdot H_2}{b_1 \cdot H_1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \frac{L_2}{V_2} \end{aligned} \right\} \quad (153)$$

$$\left. \begin{aligned} h_1' = h_1'' = \frac{h}{2 \cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_1} > \frac{h}{2} \\ h_2' = h_2'' = \frac{h}{2 \cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_1} \cdot \frac{b_1 \cdot H_1}{b_2 \cdot H_2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_1 - \frac{L_1}{V_1} \right)}{\sin \frac{\pi}{T} \frac{L_2}{V_2}} = \frac{h}{2 \cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_1} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_1 - \frac{L_1}{V_1} \right)}{\cos \frac{\pi}{T} \frac{L_2}{V_2}} \end{aligned} \right\} \quad (154)$$

On en déduit :

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \varepsilon_1 = \frac{\frac{b_2 \cdot H_2}{b_1 \cdot H_1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \frac{L_2}{V_2} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \frac{L_1}{V_1}}{1 - \frac{b_2 \cdot H_2}{b_1 \cdot H_1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \frac{L_2}{V_2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \frac{L_1}{V_1}} \quad (155)$$

$$h_1' = h_1'' = \frac{h}{2} \cdot \frac{\sqrt{\cot \operatorname{tg} \frac{\pi L_2}{TV_2} + \frac{b_2^2 \cdot H_2^2}{b_1^2 \cdot H_1^2}}}{\left(\cot \operatorname{tg} \frac{\pi L_2}{TV_2} - \frac{b_2 \cdot H_2}{b_1 \cdot H_1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \frac{L_1}{V_1} \right) \cdot \cos \frac{\pi L_1}{TV_1}} \quad (156)$$

$$h_2' = h_2'' = \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\pi}{T} \frac{L_2}{V_2} \cdot \cos \frac{\pi}{T} \frac{L_1}{V_1} - \frac{b_2 \cdot H_2}{b_1 \cdot H_1} \cdot \sin \frac{\pi}{T} \frac{L_2}{V_2} \cdot \sin \frac{\pi}{T} \frac{L_1}{V_1}} \quad (157)$$

Si $L_2 = 0$ ou si $b_2 = b_1$, $H_2 = H_1$, on retrouve les résultats du paragraphe 8.

Si comme c'est généralement le cas par rapport à la marée

$$\frac{\pi}{T} \cdot \frac{L_1}{V_1} = \frac{\pi \cdot L_1}{l_1} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{T} \cdot \frac{L_2}{V_2} = \frac{\pi \cdot L_2}{l_2}$$

sont très petits, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_1 - \frac{L_1}{V_1} \right) &= \frac{b_2 \cdot H_2}{b_1 \cdot H_1} \cdot \frac{\pi \cdot L_2}{L_2} \\
 \operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \varepsilon_1 &= \frac{\pi}{T} \cdot \frac{\frac{b_2 \cdot H_2}{b_1 \cdot H_1} \cdot \frac{L_2}{V_2} - \frac{L_1}{V_1}}{1 - \frac{b_2 \cdot H_2}{b_1 \cdot H_1} \cdot \frac{\pi^2}{T^2} \cdot \frac{L_1 \cdot L_2}{V_1 \cdot V_2}} \\
 h_2' = h_2'' &= \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{b_2 \cdot H_2}{b_1 \cdot H_1} \cdot \frac{\pi^2}{T^2} \cdot \frac{L_1 \cdot L_2}{V_1 \cdot V_2}} \\
 h_1' = h_1'' &= \frac{h}{2} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{b_2^2 \cdot H_2^2}{b_1^2 \cdot H_1^2} \cdot \frac{\pi^2}{T^2} \cdot \frac{L_2^2}{V_2^2}}}{1 - \frac{b_2 \cdot H_2}{b_1 \cdot H_1} \cdot \frac{\pi^2}{T^2} \cdot \frac{L_1 \cdot L_2}{V_1 \cdot V_2}}
 \end{aligned} \tag{158}$$

Si $H_1 = H_2 = H$, $V_1 = V_2 = V = \sqrt{g \cdot H}$, $T \cdot V = 1$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \varepsilon_1 = \frac{\pi}{1} \cdot \frac{\frac{b_2}{b_1} \cdot L_2 - L_1}{1 - \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{\pi^2 \cdot L_1 \cdot L_2}{1^2}} \tag{159}$$

Si $\frac{b_2}{b_1} = \frac{L_1}{L_2}$ (égalité des volumes des deux canaux)

$$\varepsilon_1 = 0 \quad h_2' = h_2'' = \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\pi^2}{T^2} \cdot \frac{L_1^2}{1^2}} \approx \frac{h}{2}$$

$$h_1' = h_1'' = h_2' = h_2'' \approx \frac{h}{2}$$

Si $\frac{L_1}{L_2} < \frac{b_2}{b_1} < \frac{1^2}{\pi \cdot L_1 \cdot L_2}$ $\operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \varepsilon_1$ est > 0 et tend vers $\frac{\pi}{2}$

si $\frac{b_2}{b_1}$ se rapproche de la limite supérieure.

Alors h_1' , h_1'' , h_2' et $h_2'' \equiv \infty$. Il y aurait résonance. En fait, le frottement, qui a été négligé, interviendrait alors pour limiter l'amplitude.

Si $\frac{b_2}{b_1}$ devenant $> \frac{1^2}{\pi \cdot L_1 \cdot L_2}$, ce qui est possible par rapport aux houles, dont les longueurs d'onde sont inférieures à L_1 et L_2 , ε deviendrait négatif et tendrait vers π , h_2' et h_2'' deviendraient négatifs et décroîtraient en valeur absolue, tandis que h_1' et h_1'' seraient sensiblement égaux à $-\frac{h}{2}$.

Si l'avant-port ou la lagune est en communication avec la mer par un goulet très court ($L_1 \equiv 0$), on a :

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \varepsilon_1 = \frac{\pi}{1} \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot L_2, \quad \varepsilon_1 > 0 \quad \text{et} \quad h_1' = h_2' = h_1'' = h_2'' = \sim \frac{h}{2}.$$

Les équations des mouvements verticaux et des courants sont :

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= h \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_1 - \frac{x}{V_1} \right) \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{T} t}{\cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_1} \\ u_1 &= - \frac{g}{V} \cdot \frac{h \cdot \sin \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_1 - \frac{x}{V_1} \right)}{\cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_1} \cdot \sin \frac{\pi t}{T} \end{aligned} \right\} \quad (160)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_2 &= \frac{b_1 \cdot H_1}{b_2 \cdot H_2} \cdot \frac{h \cdot \sin \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_1 - \frac{L_1}{V_1} \right)}{\cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_1 \cdot \sin \frac{\pi}{T} \frac{L_2}{V_2}} \cdot \cos \frac{\pi}{T} \left(\frac{L_2}{V_2} - \frac{x}{V} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{T} t \\ u_2 &= - \frac{g}{V} \cdot \frac{b_1 \cdot H_1}{b_2 \cdot H_2} \cdot h \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_1 - \frac{L_1}{V_1} \right)}{\cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_1 \cdot \sin \frac{\pi}{T} \frac{L_2}{V_2}} \cdot \sin \frac{\pi}{T} \left(\frac{L_2}{V_2} - \frac{x}{V} \right) \cdot \sin \frac{\pi t}{T} \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

On trouve

$$\left. \begin{aligned} (u_1)_{L_1} &= - \frac{g}{V} \cdot h \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_1 - \frac{L_1}{V_1} \right)}{\cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_1} \cdot \sin \frac{\pi t}{T} \\ (u_2)_{L_1} &= - \frac{g}{V} \cdot \frac{b_1 \cdot H_1}{b_2 \cdot H_2} \cdot h \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{T} \left(\varepsilon_1 - \frac{L_1}{V_1} \right)}{\cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_1} = \frac{b_1 \cdot H_1}{b_2 \cdot H_2} \cdot (u_1)_{L_1} \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

A l'embouchure,

$$\left. \begin{aligned} (u_1)_0 &= - \frac{g}{V} \cdot h \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \varepsilon_1 \cdot \sin \frac{\pi t}{T} \\ (u_1)_0 &= - \frac{g}{V} \cdot h \cdot \frac{\frac{b_2 \cdot H_2}{b_1 \cdot H_1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \frac{L_2}{V_2} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \frac{L_1}{V_1}}{1 - \frac{b_2 \cdot H_2}{b_1 \cdot H_1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \frac{L_2}{V_2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \frac{L_1}{V_1}} \cdot \sin \frac{\pi t}{T} \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

Cette vitesse est d'autant plus grande que $\frac{b_2 \cdot H_2}{b_1 \cdot H_1}$ est plus grand.

Si $H = H_1 = H$ et que L_1 et L_2 sont petits par rapport à 1 ,

$$\left. \begin{aligned} (u_1)_0 &= - \frac{g}{V} \cdot \frac{\pi \cdot h}{1} \cdot \frac{\frac{b_2}{b_1} \cdot L_2 + L_1}{1 - \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{\pi^2 \cdot L_1 \cdot L_2}{1^2}} \cdot \sin \frac{\pi t}{T} \\ (u_1)_0 &\approx - \frac{g \cdot \pi \cdot h}{V \cdot 1} \cdot \left(\frac{b_2}{b_1} \cdot L_2 + L_1 \right) \cdot \sin \frac{\pi t}{T} \end{aligned} \right\} \quad (164)$$

A la jonction des deux canaux

$$\left. \begin{aligned} (u_1)_{L_1} &= - \frac{g \cdot h}{V} \cdot \frac{\pi \cdot L_2}{1} \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{b_2}{b_1} \cdot \pi^2 \cdot \frac{L_1 \cdot L_2}{1^2}} \\ &\approx - \frac{g}{V} \cdot \frac{\pi \cdot h}{1} \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot L_2 \cdot \sin \frac{\pi t}{T} \\ (u_2)_{L_1} &= - \frac{g}{V} \cdot \frac{\pi \cdot h}{1} \cdot L_2 \cdot \sin \frac{\pi t}{T} \end{aligned} \right\} \quad (165)$$

On voit donc l'effet d'accroissement considérable de $\frac{b_2}{b_1}$ sur les courants dans le chenal et aussi de L_2 , abstraction faite des frottements. Si $\frac{b_2}{b_1}$ était < 1 , les courants seraient sensiblement réduits.

En se référant aux paragraphes 7, 8 et 9, les vitesses à l'entrée sont :

a) pour un canal de longueur indéfinie

$$(u_\infty)_o = - \frac{g \cdot h}{V} \cdot \cos \frac{\pi t}{T} ;$$

b) pour un canal prismatique de longueur finie L_1 petite par rapport à l

$$(u_b)_o = - \frac{g \cdot h}{V} \cdot \frac{\pi \cdot L}{1} \cdot \sin \frac{\pi t}{T} ;$$

c) pour un canal prismatique de longueur L_1 et largeur b_1 , suivi d'un canal prismatique de longueur L_2 , de largeur b_2 et de même profondeur H ; L_1, L_2 étant petits par rapport à l et grands par rapport à H

$$(u_{bas})_o = - \frac{g \cdot h}{V} \cdot \frac{\pi}{1} \cdot \left(\frac{b_2}{b_1} \cdot L_2 + L_1 \right) \cdot \sin \frac{\pi t}{T}$$

d) pour un canal prismatique de longueur L aboutissant dans un lac indéfini :

$$(u_1)_o = - \frac{g \cdot h}{V} \cdot \cotg \frac{\pi L}{TV} \cdot \sin \frac{\pi t}{T}$$

Les volumes entrant et sortant pendant une demi-période sont respectivement :

$$(V_\infty)_o = \pm \frac{2 \cdot g \cdot h \cdot T}{\pi \cdot V} \cdot b \cdot H, \quad (V_b)_o = \pm \frac{2 \cdot g \cdot h}{V} \cdot \frac{L}{1} \cdot T \cdot b \cdot H,$$

$$(V_{bas})_o = \pm \frac{2 \cdot g \cdot h}{V \cdot 1} \cdot \left[\frac{b_2}{b_1} \cdot L_2 + L_1 \right] \cdot T \cdot b_1 \cdot H,$$

$$(V_1)_o = \pm \frac{2 \cdot g \cdot h}{V} \cdot \left(\cotg \frac{\pi L}{TV} \right) \cdot \frac{T}{\pi} \cdot b \cdot H$$

Quant aux amplitudes, on a :

$$\left. \begin{aligned}
 (\zeta_1)_{o \max} &= h \\
 (\zeta_1)_{L_1 \max} &= \frac{h \cdot \cos \frac{\pi}{T}(\varepsilon_1 - \frac{L_1}{V_1})}{\cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_1} = \frac{h}{1 - \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{\pi^2 \cdot L_1 \cdot L_2}{l^2}} \\
 (\zeta_2)_{L_2 \max} &= \frac{h \cdot \cos \frac{\pi}{T}(\varepsilon_1 - \frac{L_1}{V_1})}{\cos \frac{\pi}{T} \varepsilon_1 \cdot \cos \frac{\pi}{T} \frac{L_2}{V_2}} \approx \frac{h}{1 - \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{\pi^2 \cdot L_1 \cdot L_2}{l^2}}
 \end{aligned} \right\} (166)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{On a } (u_1)_{L_1 \max} &= (u_1)_{o \max} + \frac{g}{V} \cdot \frac{\pi}{L} \cdot L_1 \cdot (\zeta_1)_{o \max} \\
 (u_2)_{L_2 \max} &= (u_2)_{L_1 \max} + \frac{g}{V} \cdot \frac{\pi}{l} \cdot L_2 \cdot (\zeta_2)_{L_1 \max} \cdot \left(1 - \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{\pi^2 \cdot L_1 \cdot L_2}{l^2}\right) \\
 (u_2)_{L_2 \max} &\approx (u_2)_{L_1 \max} + \frac{g}{V} \cdot \frac{\pi}{l} \cdot L_2 \cdot (\zeta_2)_{L_1 \max}
 \end{aligned} \right\} (167)$$

(en considérant les u_{\max} comme négatifs.)

B.- Un bassin de chasse ou un bassin d'accumulation d'usine marémotrice peut communiquer avec une mer à marée par des orifices noyés relativement peu importants. Admettons que les niveaux moyens de la mer et du bassin soient les mêmes. Les fluctuations du niveau de la mer par rapport au niveau moyen sont

$$\zeta = h \cdot \sin \frac{\pi}{T} t$$

Dans le bassin elles sont z .

$$\text{On a } Q = \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2 g (\zeta - z)}$$

(ω = surface des orifices).

$$\text{D'autre part } Q \cdot dt = S \cdot dz \quad (S \text{ surface horizontale du bassin}).$$

On en déduit

$$\left. \begin{aligned}
 S \cdot \frac{dz}{dt} &= \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2 g (\zeta - z)} = \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2 g (h \cdot \sin \frac{\pi t}{T} - z)} \\
 \frac{S}{\mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2 g}} \cdot \frac{dz}{dt} &= (h \cdot \sin \frac{\pi t}{T} - z)^{1/2}
 \end{aligned} \right\} (168)$$

Cette équation n'est pas intégrable en général.

Envisageons un cas théorique d'intégrabilité

$$\mu \cdot \omega = B \cdot (h \cdot \sin \frac{\pi t}{T} - z)^{1/2} \quad (169)$$

Cette loi peut être considérée comme idéale pour un bassin de chasse, par exemple.

$$\frac{S}{B \cdot \sqrt{2g}} \cdot \frac{dz}{dt} = h \cdot \sin \frac{\pi t}{T} - z$$

Posons $\frac{S}{B \cdot \sqrt{2g}} = A$ $A \cdot \frac{dz}{dt} = h \cdot \sin \frac{\pi t}{T} - z$

$$\frac{z}{A} + \frac{dz}{dt} = \frac{h}{A} \cdot \sin \frac{\pi t}{T}$$

La solution est

$$z = \frac{h}{A} \cdot \frac{\frac{1}{A} \cdot \sin \frac{\pi t}{T} - \frac{\pi}{T} \cdot \cos \frac{\pi t}{T}}{\frac{1}{A^2} + \frac{\pi^2}{T^2}} \quad (170)$$

$$z = h \cdot \frac{\frac{1}{A} \cdot \sin \frac{\pi t}{T} - \frac{\pi}{T} \cdot \cos \frac{\pi t}{T}}{\frac{1}{A} + \frac{A \cdot \pi^2}{T^2}} \quad (170 \text{ bis})$$

Lorsque $\zeta =$

$$z = -h \cdot \frac{\frac{A \cdot \pi}{T}}{1 + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{T^2}} \left| \frac{h}{1 + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{T^2}} \right| \frac{0}{1 + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{T^2}} \left| \frac{-h}{1 + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{T^2}} \right|$$

z s'annule pour $\operatorname{tg} \frac{\pi t}{T} = \frac{\pi \cdot A}{T} = \frac{\pi \cdot S}{B \cdot \sqrt{2g} \cdot T} = \operatorname{tg} \frac{\pi \varepsilon}{T}$

Donc
$$z = \frac{h}{\sqrt{1 + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{T^2}}} \cdot \sin \frac{\pi}{T}(t - \varepsilon) \quad (171)$$

L'amplitude de la marée dans le bassin est d'autant plus réduite que A est plus grand, c'est-à-dire S plus grand et B plus petit. De plus, il y a un déphasage; le niveau est maximum dans le bassin un temps ε après la marée haute dans la mer. De même le minimum et les niveaux moyens sont déphasés.

Le déphasage est aussi d'autant plus grand que $\frac{A \cdot \pi}{T}$ est plus grand.

D'autre part, les niveaux maxima et minima dans le bassin se produisent évidemment, d'après (168), lorsque $\zeta - z = 0$, c'est-à-dire lorsque les niveaux sont égaux dans la mer et dans le bassin, ce qui se produit en retard sur la mer haute et la mer basse, d'autant plus que ε est plus grand. On a d'ailleurs

$$h \cdot \sin \frac{\pi t}{T} = \frac{h}{\sqrt{1 + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{T^2}}} \cdot \sin \frac{\pi}{T}(t - \varepsilon)$$

pour $t = \frac{2n + 1}{2} \cdot \pi \cdot T + \varepsilon$ et $z_{\max} = h \cdot \cos \frac{\pi}{T} \varepsilon$.

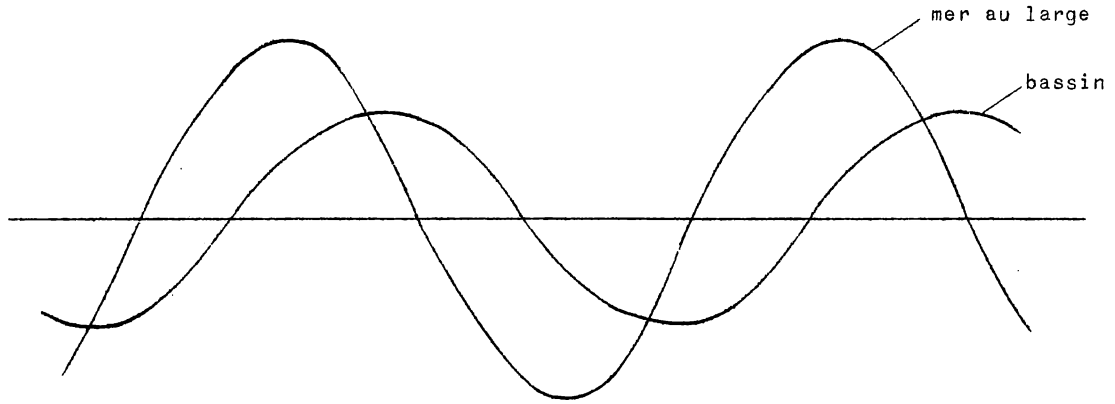


Fig. 23.

La variation relative des deux niveaux est représentée par la figure 23.

Le maximum de $\mu \cdot \omega$ correspond à celui de $(h \cdot \sin \frac{\pi}{T} t - z)^{1/2}$

On trouve
$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{T} t = \frac{A \cdot \pi}{T} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{T} \varepsilon$$

d'où
$$(\mu \cdot \omega)_{\max} = B \cdot (h \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon)^{1/2} \quad (172)$$

et
$$\mu \cdot \omega = (\mu \cdot \omega)_{\max} \cdot \left[\frac{h \cdot \sin \frac{\pi}{T} t - z}{h \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon} \right]^{1/2} \quad (172 \text{ bis})$$

Si ω est constant, l'équation (168) n'est pas intégrable. Si, par approximation, on pose

$$z = h' \cdot \sin \frac{\pi}{T} (t - \varepsilon)$$

comme en (171), on a

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\pi}{T} \cdot h' \cdot \cos \frac{\pi}{T} (t - \varepsilon),$$

ce qui exigerait :

$$S^2 \cdot \frac{\pi^2}{T^2} \cdot h'^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{T} (t - \varepsilon) = \mu^2 \cdot \omega^2 \cdot 2 g \cdot [h \cdot \sin \frac{\pi}{T} t - h' \cdot \sin \frac{\pi}{T} (t - \varepsilon)] \quad (173)$$

pour toute valeur de t .

Pour $t = 0$
$$S^2 \cdot \frac{\pi^2}{T^2} \cdot h'^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{T} \varepsilon = \mu^2 \cdot \omega^2 \cdot 2 g \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon$$

ou
$$S^2 \cdot \frac{\pi^2}{T^2} \cdot h'^2 = \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon \cdot [\mu^2 \cdot \omega^2 \cdot \sqrt{2 g} + \frac{S^2 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot h'^2 \cdot \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon]$$

Pour $t = \varepsilon$
$$\frac{S^2 \cdot \pi^2}{T^2} = \mu^2 \cdot \omega^2 \cdot 2 g \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon$$

Il en résulte que
$$0 < \sin \frac{\pi}{T} \varepsilon < 1 ,$$

donc les maxima et minima de hauteur d'eau dans le bassin sont en retard sur la haute et la basse mer, d'autant plus que $\frac{S \cdot \pi}{T \cdot \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2 g}}$ est plus grand. D'après (168), ces maxima et minima se produisent toujours lorsque

$$\zeta = z \quad \text{et donc} \quad \cos \frac{\pi}{T} \varepsilon = \frac{z_{\max}}{h} = \frac{h'}{h}$$

h' sera aussi d'autant plus petit que le retard sera plus grand, c'est-à-dire que $\frac{S \cdot \pi}{T \cdot \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2 g}}$ est plus grand. Mais la solution approximative envisagée n'est pas valable, car elle implique

$$\cos \frac{\pi}{T} \varepsilon \equiv 1 \quad \text{et} \quad \varphi = 0 ,$$

c'est-à-dire $\frac{S \cdot \pi}{T \cdot \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2 g}}$ très petit. Pour une solution approchée plus exacte dans un cas quelconque, il faudrait résoudre les équations (168) aux différences finies, d'une manière analogue à celle indiquée au chapitre XXI, paragraphe 7.

16.- SEICHE AMORTIE PAR LE FROTTEMENT

On considère un canal fermé de section rectangulaire, de profondeur H , de largeur b et de longueur L , dans lequel se produit une seiche amortie par le frottement. Pour une seiche longitudinale, en prenant l'origine au milieu de l'axe longitudinal du bassin, on doit satisfaire aux conditions suivantes, au temps $t = 0$.

$$\begin{array}{lll} \text{pour} & x = -\frac{L}{2} & \zeta = 2 h \quad u = 0 \\ & x = 0 & \zeta = 0 \quad u = 0 \\ & x = \frac{L}{2} & \zeta = -2 h \quad u = 0 \end{array}$$

De plus
$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{K \cdot \partial \zeta}{\partial t} - g \cdot H \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0 \tag{127}$$

et
$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial \zeta}{H \cdot \partial t} \tag{126 bis}$$

Une fonction de la forme

$$\zeta = f(t) \cdot \cos \frac{\pi}{L} \left(x + \frac{L}{2}\right) \tag{173}$$

satisfait à ces conditions, pourvu que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{f'(t)}{H} \cdot \cos \frac{\pi}{L} \left(x + \frac{L}{2}\right)$$

d'où
$$u = \frac{L}{\pi \cdot H} \cdot f'(t) \cdot \sin \frac{\pi}{L} \left(x + \frac{L}{2}\right) \quad (174)$$

D'autre part
$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{K \cdot df}{dt} + \frac{g \cdot H \cdot \pi^2 \cdot f}{L^2} = 0 \quad (175)$$

Posons $g \cdot H = V^2$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{K \cdot df}{dt} + \frac{\pi^2 \cdot V^2 \cdot f}{L^2} = 0 \quad (175 \text{ bis})$$

La solution est
$$f = C_1 \cdot e^{\varrho_1 t} + C_2 \cdot e^{\varrho_2 t} \quad (176)$$

ϱ_1 et ϱ_2 étant les deux racines de

$$\varrho^2 + K \cdot \varrho + \frac{\pi^2 \cdot V^2}{L^2} = 0, \quad (177)$$

d'où

$$\varrho_1 = - \frac{K}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4 \pi^2 \cdot V^2}{K^2 \cdot L^2}}\right), \quad \varrho_2 = - \frac{K}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4 \pi^2 \cdot V^2}{K^2 \cdot L^2}}\right) \quad (178)$$

Si ϱ_1 et ϱ_2 sont réels, $L > \frac{2 \pi \cdot V}{K}$ ou $\frac{2 \pi \cdot \sqrt{g \cdot H}}{K}$,

alors
$$\zeta = (C_1 \cdot e^{\varrho_1 t} + C_2 \cdot e^{\varrho_2 t}) \cdot \cos \frac{\pi}{L} \left(x + \frac{L}{2}\right) \quad (179)$$

Le mouvement n'est pas oscillatoire mais apériodique. Si la dénivellation initiale s'est produite d'une manière inversée aux deux bords, la surface de l'eau va tendre indéfiniment vers la surface d'équilibre horizontale, car ϱ_1 et ϱ_2 sont tous deux négatifs. Aux extrémités :

$$C_1 + C_2 = 2 h$$

$$u_0 = \frac{L}{\pi \cdot H} \cdot (\varrho_1 \cdot C_1 \cdot e^{\varrho_1 t} + \varrho_2 \cdot C_2 \cdot e^{\varrho_2 t})$$

Pour $t = 0$
$$u_0 = 0 = \varrho_1 \cdot C_1 + \varrho_2 \cdot C_2$$

D'où
$$C_1 = \frac{2 \varrho_2 \cdot h}{\sqrt{1 - \frac{4 \pi^2 \cdot V^2}{K^2 \cdot L^2}}}, \quad C_2 = \frac{- 2 \varrho_1 \cdot h}{\sqrt{1 - \frac{4 \pi^2 \cdot V^2}{K^2 \cdot L^2}}} \quad (180)$$

Si $L < \frac{2 \pi \cdot \sqrt{g \cdot h}}{K}$, les deux racines ϱ_1 et ϱ_2 sont complexes et le mouvement est oscillatoire.

Posons
$$\sqrt{1 - \frac{4 \pi^2 \cdot V^2}{K^2 \cdot L^2}} = i \cdot \sqrt{\frac{4 \pi^2 \cdot V^2}{K^2 \cdot L^2} - 1} = \varphi \cdot i \quad (181)$$

$$\varrho_1 = - \frac{K}{2} \cdot (1 + \varphi \cdot i), \quad \varrho_2 = - \frac{K}{2} \cdot (1 - \varphi \cdot i) \quad (181 \text{ bis})$$

La solution est :

$$\zeta = e^{-\frac{Kt}{2}} \left(C_1 \cdot \sin \frac{K}{2} \varrho t + C_2 \cdot \cos \frac{K}{2} \varrho t \right) \cdot \cos \frac{\pi}{L} \left(x - \frac{L}{2} \right) \quad (182)$$

Pour $x = \pm \frac{L}{2}$, $t = 0$, $2h = C_2$

$$u = \frac{-L \cdot K}{2 \pi \cdot H} \cdot e^{-\frac{Kt}{2}} \cdot \left[(C_1 + C_2 \cdot \varrho) \cdot \sin \frac{K \varrho t}{2} + (C_2 - C_1 \cdot \varrho) \cdot \cos \frac{K \varrho t}{2} \right] \cdot \sin \frac{\pi}{L} \left(x + \frac{L}{2} \right) \quad (183)$$

Pour $x = 0$, $t = 0$,

$$u_0 = \frac{-L \cdot K}{2 \pi \cdot H} \cdot (C_2 - C_1 \cdot \varrho) = 0$$

d'où $C_1 = \frac{2h}{\varrho}$

$$\text{Donc } \zeta = 2h \cdot e^{-\frac{Kt}{2}} \cdot \left[\cos \frac{K \varrho t}{2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \sin \frac{K \varrho t}{2} \right] \cdot \cos \frac{\pi}{L} \left(x - \frac{L}{2} \right) \quad (184)$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{-L \cdot K \cdot h}{\pi \cdot H} \left(e^{-\frac{Kt}{2}} \right) \left(\varrho + \frac{1}{\varrho} \right) \cdot \sin \frac{K \varrho t}{2} \\ &= \frac{-L \cdot K \cdot h}{\pi \cdot H} \left(e^{-\frac{Kt}{2}} \right) \frac{\left(\frac{4 \pi^2 \cdot V^2}{K^2 \cdot L^2} \right)}{\sqrt{\frac{4 \pi^2 \cdot V^2}{K^2 \cdot L^2} - 1}} \cdot \sin \frac{K \varrho t}{2} \\ u &= \frac{-4 \pi \cdot V^2 \cdot h}{K \cdot L \cdot H} \cdot \frac{e^{-\frac{Kt}{2}}}{\sqrt{\frac{4 \pi^2 \cdot V^2}{K^2 \cdot L^2} - 1}} \cdot \sin \frac{K \varrho t}{2} \end{aligned} \quad (185)$$

Si $\frac{4 \pi^2 \cdot V^2}{K^2 \cdot L^2}$ est très grand par rapport à 1

$$u = -\frac{2 V \cdot h}{H} \cdot \left(1 - \frac{K \cdot t}{2} \right) \cdot \sin \frac{K \varrho t}{2} \quad (186)$$

La période du mouvement oscillatoire stationnaire est

$$2 T = \frac{4 \pi}{K \sqrt{\frac{4 \pi^2 \cdot V^2}{K^2 \cdot L^2} - 1}} \quad (187)$$

Elle devient infinie, c'est-à-dire que le mouvement devient apériodique, si $L^2 \geq \frac{4 \pi^2 \cdot V^2}{K^2}$. Si au contraire L est assez petit pour que l'unité soit négligeable devant $\frac{4 \pi^2 \cdot V^2}{K^2 \cdot L^2}$, alors

$$2 T = \frac{2 L}{V} = \frac{2 L}{\sqrt{g \cdot H}}$$

Enfin, l'équation des déplacements verticaux est

$$\zeta = \frac{4 \pi \cdot V \cdot h}{K \cdot L} \frac{e^{-\frac{Kt}{2}}}{\sqrt{\frac{4 \pi^2 \cdot V^2}{K^2 \cdot L^2} - 1}} \cdot \cos \left(\frac{K \varrho t}{2} - \varepsilon \right) \quad (188)$$

avec
$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4 \pi^2 \cdot V^2}{K^2 \cdot L^2} - 1}} \quad (188 \text{ bis})$$

Le 1 est négligeable devant $\frac{4 \pi^2 \cdot V^2}{K^2 \cdot L^2}$,

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= 2 h \cdot e^{-\frac{Kt}{2}} \cdot \cos \left(\frac{K \varrho t}{2} - \varepsilon \right) \\ \text{et} \quad \operatorname{tg} \varepsilon &= \frac{K \cdot L}{2 \pi \cdot V} \end{aligned} \right\} \quad (189)$$

SEPTIEME SECTION

*NOTIONS SUR LES COURS D'EAU A
MAREE ET LES ESTUAIRES*

CHAPITRE XXV

REGIME DES COURS D'EAU A MAREE ET DES ESTUAIRES

1.- PHENOMENE DE LA MAREE FLUVIALE

Les cours d'eau qui se jettent dans une mer à marée présentent, dans la partie inférieure de leur cours, appelée domaine fluvio-maritime, le phénomène de la marée fluviale. Son caractère le plus apparent est la variation périodique du niveau de l'eau entre des maxima et des minima successifs. La périodicité des fluctuations de niveau est égale à celle de la marée de la mer à l'embouchure.

L'enregistrement de ces fluctuations de niveau en un point par un marégraphe inscripteur montre la périodicité du phénomène par des courbes d'allure sinusoïdale en fonction du temps, appelées courbes locales. (Voir planche 20, fig. 1 et 2).

Chaque minimum correspond à la marée basse; chaque maximum à la marée haute. Leur différence est l'amplitude de la marée considérée au point considéré. Les caractéristiques de ces courbes locales sont influencées par celles des marées dans la mer à l'embouchure, qui ont été définies au chapitre XXIV, paragraphes 1 et 2. On distingue donc aussi des marées de vive eau (syzygies) et celles de morte eau (quadratures), des maxima et des minima d'importance des marées se produisant aux équinoxes. Les marées de vive eau d'équinoxe sont les plus fortes; celles de morte eau d'équinoxe les plus faibles. Pour l'étude du régime d'un fleuve à marée, on se réfère aux courbes locales moyennes et extrêmes des marées de vive eau et de morte eau déduites des courbes relevées au cours de nombreuses années d'observations.

A l'embouchure de l'Escaut, l'amplitude moyenne annuelle de la marée est de 3,76, celles des syzygies et des quadratures respectivement de 4,37 m et de 2,98 m.

Mais les courbes locales de marée fluviale ne sont pas seulement influencées par l'importance relative de la marée marine à l'embouchure, mais aussi par l'importance relative du débit d'amont. La marée fluviale constitue donc un phénomène complexe, où se manifestent d'une manière variable les influences d'aval ou marine et d'amont ou fluviale.

Il en résulte en premier lieu que les deux branches d'une courbe locale ne sont pas symétriques. Dans une rivière en pente et écoulant un débit d'amont, la durée du jusant est nécessairement plus grande que celle du flot; la montée est plus rapide que la descente, (fig. 24). Cette dissymétrie est variable en chaque point selon l'importance relative de la marée et du débit d'amont. Elle est atténuée lorsqu'une très forte marée se produit en étiage; elle est accentuée lorsqu'une très faible marée est conjuguée avec une crue.

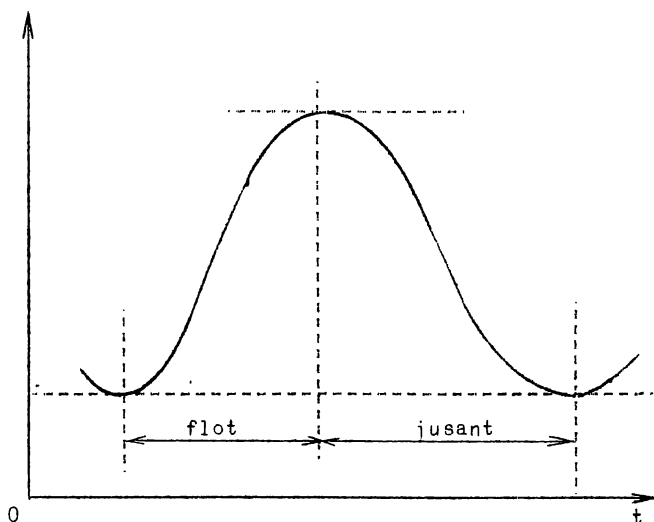


Fig. 24.

D'autre part, cette dissymétrie s'accuse et l'allure moyenne des courbes locales varie depuis l'embouchure vers la limite amont du domaine fluvio-maritime, par une décroissance continue de l'influence maritime et une croissance continue de l'influence fluviale. (Voir planche 20, fig. 1 et 2).

En général, de l'aval vers l'amont, les amplitudes diminuent; en même temps l'excès de la durée du jusant sur le flot augmente. Cependant il arrive souvent que l'amplitude augmente de

l'embouchure vers l'amont sur une certaine distance (planche 20, fig. 1) ou varie peu. Dans l'Escaut occidental, (fig. 25), l'amplitude est maximum à Bath et est encore plus grande à Anvers qu'à l'embouchure (fig. 26). (Voir aussi planche 21, fig. 1).

Vers l'extrémité amont du domaine fluvio-maritime, l'influence maritime est à ce point réduite par rapport à l'influence fluviale que la durée du flot devient très réduite et que l'amplitude de la marée devient très faible. La figure 27 reproduit une courbe de marée à Kessel sur la Grande-Nèthe, au voisinage de la limite du domaine fluvio-maritime de ce sous-affluent de l'Escaut maritime, comparée aux courbes correspondantes en divers points de la Nèthe, de la Petite-Nèthe et de la Grande-Nèthe.

La limite (amont) du domaine fluvio-maritime est définie par le fait que les dénivellations de marée y deviennent insensibles, en raison de l'influence fluviale et aussi de la pente cumulée jusqu'à l'embouchure. Si elle est libre, cette limite n'est pas fixe. Elle varie avec l'amplitude de la marée et l'importance du débit d'amont. Elle est d'autant plus vers l'amont que la marée est plus forte et le débit d'amont plus faible, et vice-versa. Comme ces deux éléments sont très variables, la limite du domaine fluvio-maritime peut subir des déplacements considérables. Lorsque ces déplacements peuvent présenter des inconvénients, par exemple pour la navigation ou pour la sécurité des terrains riverains (par exemple d'une agglomération), on limite artificiellement le domaine fluvio-maritime par un barrage assez élevé pour empêcher la propagation de la marée vers l'amont. Tel est l'office du barrage de Gentbrugge sur l'Escaut maritime à l'aval de Gand, de celui de Martot sur la Seine à l'amont de Rouen (voir planche 20, fig. 2). Le cas échéant, un seuil naturel ou un rapide pourrait réaliser le même effet.

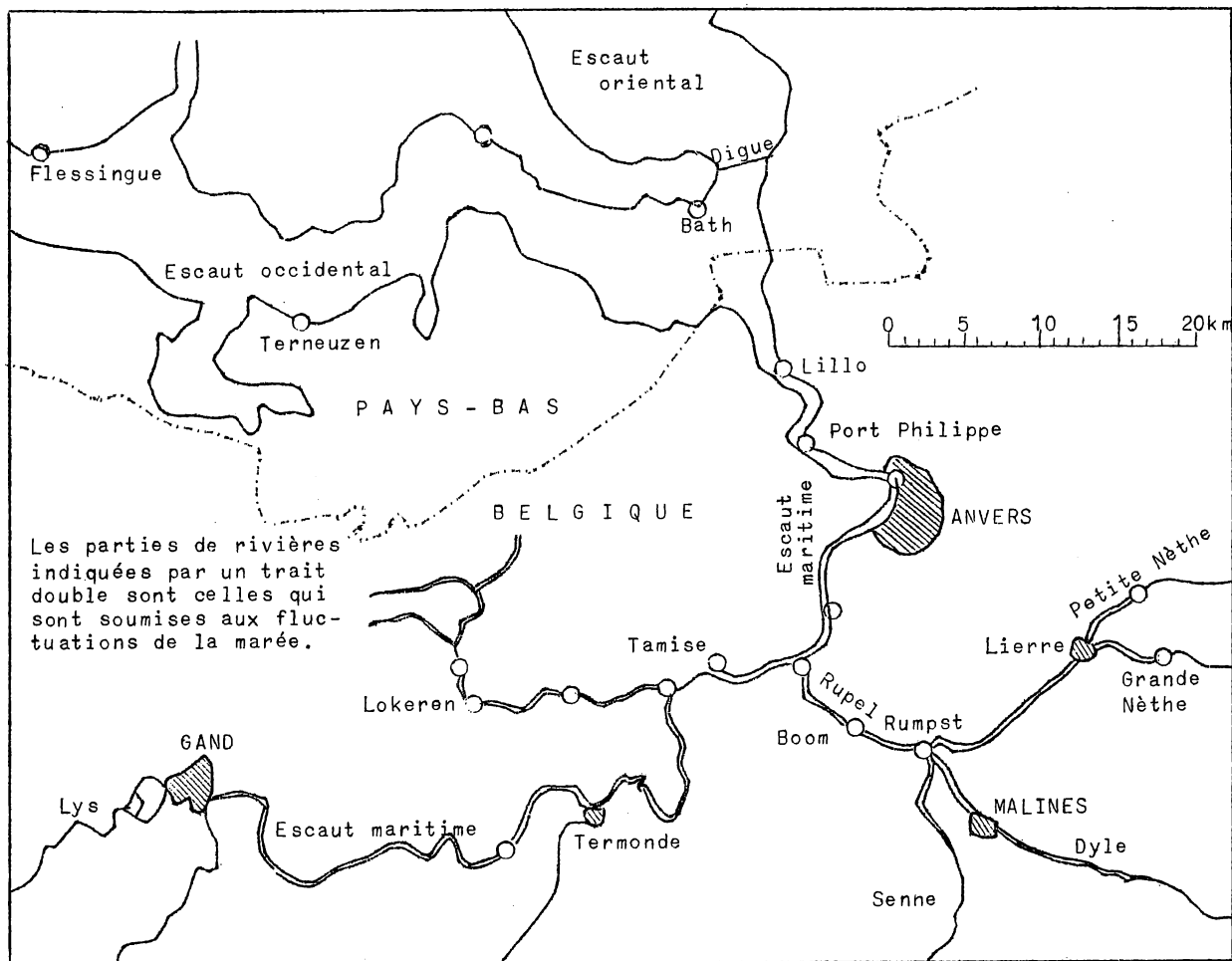
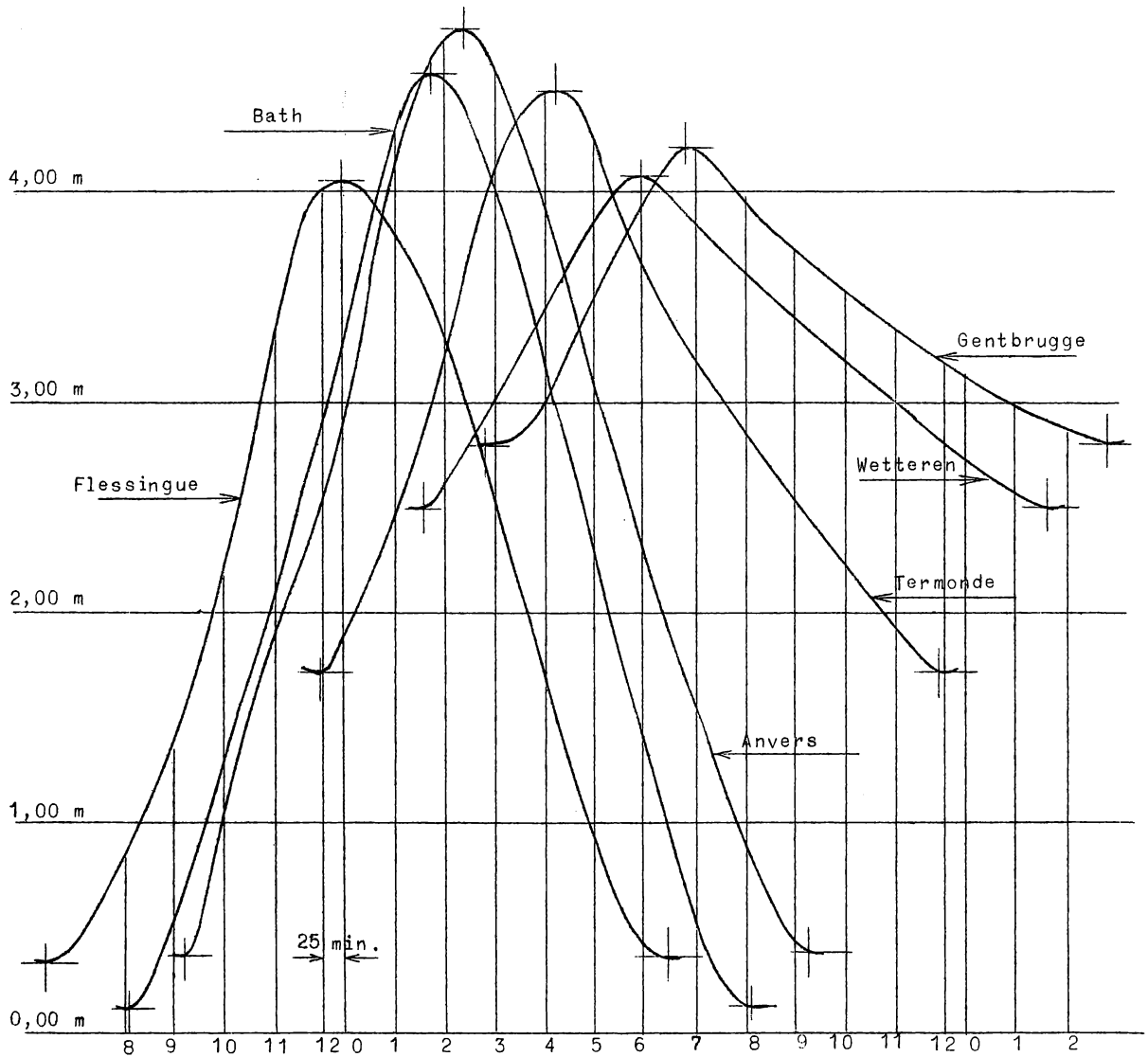


Fig. 25.

Les courbes locales de marée observées ou moyennes, relevées en un nombre assez élevé et suffisant de points dans l'étendue du domaine fluvio-maritime, permettent l'étude complète du régime variable des marées fluviales, par un processus identique à celui exposé au chapitre XIV, par. 5 pour l'étude des ondes de crue dans les cours moyen et supérieur.

Si sur un profil en long du fleuve, dans toute l'étendue du domaine fluvio-maritime, on reporte les profondeurs d'eau contemporaines relevées sur les courbes locales, on peut tracer les lignes d'eau instantanées, dont l'ensemble constitue une représentation très suggestive de la propagation de la marée fluviale. Elle affecte la forme d'une ondulation se déplaçant d'aval en amont (voir planche 21, fig. 1). De l'embouchure de l'Escaut à la limite artificielle du domaine fluvio-maritime par le barrage de Gentbrugge, sur une distance de 160 km, il ne se développe pas une onde complète. Une onde de marée a toujours terminé complètement sa propagation avant que l'onde suivante commence à pénétrer dans le fleuve. Si le domaine fluvio-maritime est très étendu, comme celui de l'Amazone (± 1000 km),



L'origine des temps est l'instant de la marée haute à Flessingue.
Le plan de comparaison des hauteurs passe par le zéro du dépôt de la guerre.

Fig. 26.

on observe des lignes d'eau comportant plusieurs ondes successives ayant la périodicité des ondes de marée de la mer, mais dont les longueurs d'onde se réduisent de l'aval vers l'amont. La célérité est donc décroissante.

Les courbes locales (et les lignes d'eau instantanées qui en sont déduites) permettent de déterminer les célérités, notamment du sommet et du

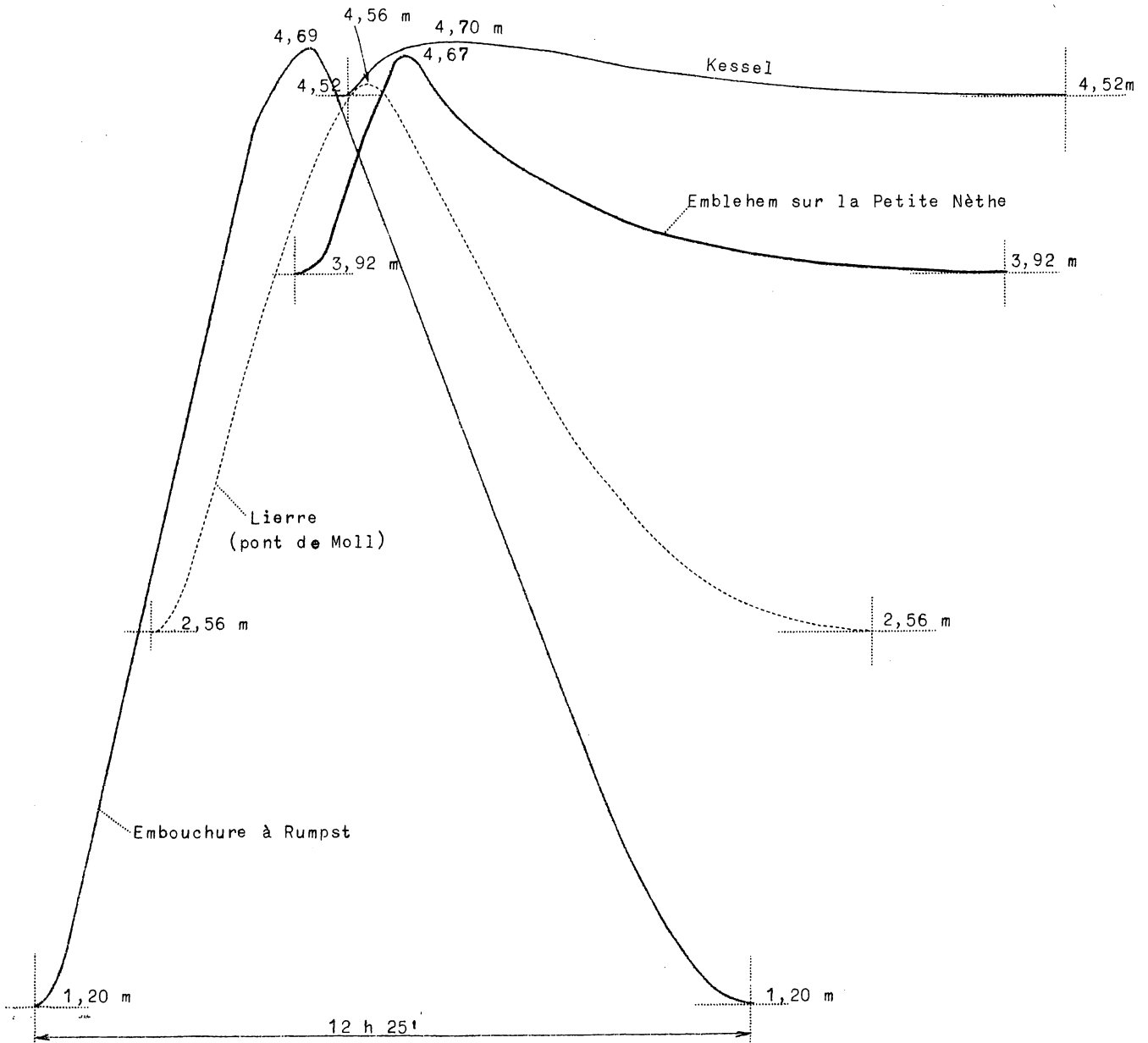


Fig. 27.

creux de l'onde. Le tracé des lignes d'eau instantanées dans toute l'étendue du domaine fluvio-maritime et à des intervalles de temps réguliers pour toute la durée d'une marée (réelle ou moyen) permet le tracé de leurs enveloppes inférieure et supérieure, appelées lieux géométriques des marées basses et des marées hautes. Ces courbes sont des caractéristiques très importantes du régime des rivières à marée. On en considère des moyennes diverses, le plus souvent les moyennes de vive eau.

Leur allure dépend de la forme du cours d'eau. Elle est très régulière si le cours d'eau est lui-même régulier, mais elle peut être fortement affectée par les circonstances locales.

Le lieu géométrique des marées hautes est peu influencé par l'allure du fond dans la majeure partie du domaine fluvio-maritime, sauf au voisinage de la limite, où il se relève relativement vite, mais moins cependant que le fond. Dans un grand fleuve maritime à lit régulier, le lieu géométrique des marées hautes est d'abord en légère rampe vers l'amont à partir de l'embouchure (planche 21, fig. 1), culmine à une certaine distance en amont de l'embouchure, puis continue vers l'amont en pente.

Ensuite, il se relève relativement vite près de la limite du domaine fluvio-maritime. Si l'estuaire est très large, la partie convexe vers le haut du lieu géométrique des marées hautes peut être atténuée et sensiblement horizontale dans sa partie initiale (Seine et Loire maritimes, cfr Partiot, Recherches sur les rivières à marée). Les irrégularités du lit influent sur l'allure du lieu géométrique des marées hautes, par une rampe vers l'amont s'il y a un resserrement, par une réduction de cette rampe ou même une pente vers l'amont s'il y a un épanouissement du cours d'eau, par exemple par des affluents importants.

Les figures 25 et 26 et la figure 1 de la planche 21 caractérisent l'allure du lieu géométrique des marées hautes de l'Escaut maritime.

Le lieu géométrique des marées basses est principalement influencé par l'allure du fond. Celui-ci a généralement une pente quasi nulle dans l'estuaire et dans la majeure partie du domaine fluvio-maritime. Il se relève relativement vite aux environs de la limite du domaine fluvio-maritime, pour tendre vers la pente du cours moyen. La pente moyenne de l'Escaut dans son cours moyen (de la frontière française à Gand, qui se situe à peu près à la limite du domaine fluvio-maritime) est 0,00014. S'il y a une barre à l'embouchure, le fond peut y être en contrepente vers l'aval.

Le lieu géométrique des basses mers est en général sensiblement horizontal dans sa majeure partie, pour se relever parallèlement au fond vers la limite du domaine fluvio-maritime. Dans l'Escaut maritime, le lieu géométrique des marées basses semble présenter dans sa partie initiale une courbure inverse de celle du lieu géométrique des marées hautes, concave vers le haut. (planche 21, fig. 1).

Ceci est conforme à la règle souvent admise que le niveau moyen est quasi constant dans les estuaires. Il est défini par les points situés à égale distance des lieux géométriques de haute et de basse mer dans les sections verticales. Il se relève rapidement vers la limite du domaine fluvio-maritime, pour s'y raccorder à la ligne d'eau permanente du cours moyen.

Les segments d'ordonnée compris entre les deux lieux géométriques représentent l'amplitude de la marée fluviale aux diverses stations marégraphiques.

Lorsque l'estuaire se rétrécit d'une manière continue à partir de l'embouchure sans présenter d'obstacles entraînant une dissipation rapide de l'énergie, cette amplitude peut croître légèrement de l'embouchure jusqu'à un certain point en amont (fig. 1, planche 21, et figure 26 pour l'Escaut maritime, planche 20, fig. 1 pour la Gironde). Mais elle diminue toujours rapidement vers la limite du domaine fluvio-maritime pour y devenir inap-

préciable. Sur l'Escaut maritime, l'amplitude croît d'environ 25 % de l'embouchure jusqu'aux environs d'Anvers, elle reste ensuite pratiquement constante sur 25 à 30 km en amont. A Gentbrugge, au pied du barrage, l'amplitude est encore 48 % (1951) de l'amplitude à l'embouchure. L'amortissement est donc faible.

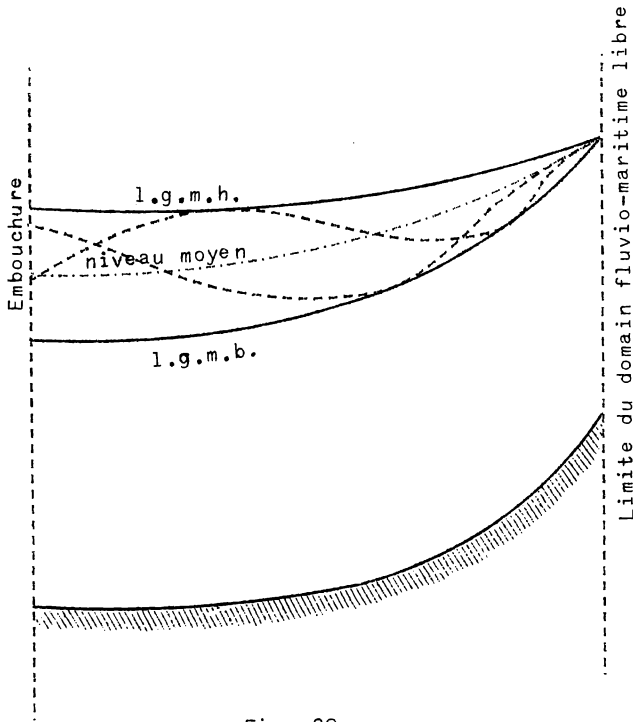


Fig. 28.

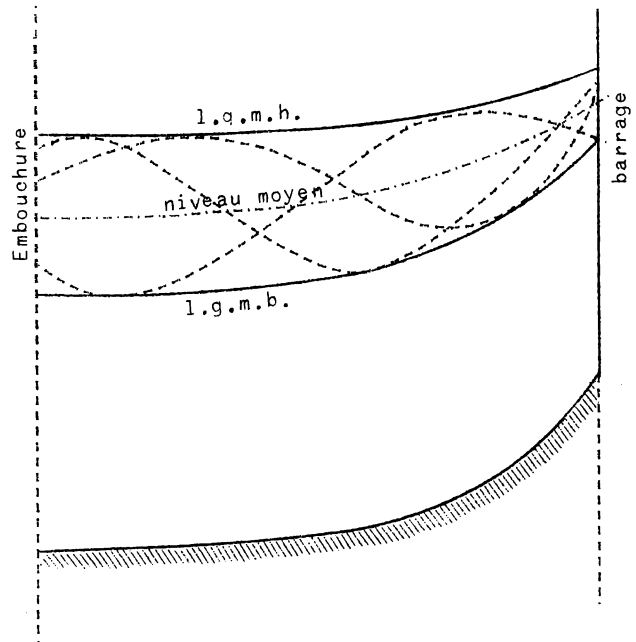


Fig. 29.

Les figures 28 et 29 représentent schématiquement l'allure des lieux géométriques des hautes et des basses mers ainsi que des lignes d'eau instantanées, selon que la limite du domaine fluvio-maritime est libre ou fixée par un barrage.

2.- PROPAGATION DES ONDES DE MAREE FLUVIALES, MASCARET

Pour se représenter le caractère de l'onde de marée fluviale, on peut procéder à partir de la marée basse à l'embouchure. Lorsque la mer commence à monter, une certaine quantité d'eau de la mer pénètre dans le fleuve par l'embouchure, sous forme d'une onde de translation élémentaire en saillie, se propageant vers l'amont, en sens inverse du courant normal. Le niveau continuant à monter à l'embouchure, des ondes de translation élémentaires positives s'ajoutent d'une manière continue et forment l'onde de flot, qui remonte le cours d'eau en présentant un front en pente vers l'amont. Ce processus se poursuit jusqu'à la marée haute à l'embouchure.

A partir de cette époque, le niveau de la mer commence à baisser, ce qui donne lieu à la formation d'une succession d'ondes de translation élémentaires de vidange, c'est-à-dire négatives, qui conditionnent la forme

de l'arrière de l'onde de marée, en pente vers l'aval, mais qui continue à se propager vers l'amont. Sur ce point, la conception esquissée du caractère de l'onde de marée fluviale, due à Bazin, est moins satisfaisante.

En ce qui concerne la célérité, on peut utiliser la formule

$$V = \sqrt{g \cdot (H + \zeta)} \mp u ,$$

H étant la profondeur sous marée basse, ζ l'élévation de l'eau au-dessus de marée basse et u la vitesse du courant sur laquelle l'onde se propage. Cette formule paraît correspondre assez bien aux observations pour la célérité de l'étale de jusant (voir paragraphe 3), qui se produit au voisinage de marée basse, u étant la vitesse primitive du jusant, c'est-à-dire correspondant à l'écoulement normal du débit d'amont. Pour l'onde de flot, qui modifie complètement le cours normal de l'eau, on peut négliger u d'après M. Partiot (op. cit.). Ses observations sur la Gironde lui font préférer la formule plus complète de Boussinesq :

$$V = \sqrt{g \cdot H} \left(1 + \frac{3\zeta}{4H} \right) ,$$

[Cf. chap. XIII, par. 2, formule (156 bis)], en y négligeant toutefois le terme provenant de la courbure.

Des observations faites sur certains cours d'eau, tels que l'estuaire du Saint-Laurent, ont mis en évidence des anomalies considérables et singulières par rapport à ces formules, comme il se produit aussi pour les marées dans la mer (cf. chap. XXIV, par. 5).

Cela résulte de l'influence souvent prépondérante de circonstances locales sur les phénomènes de la marée. Il est nécessaire de se reporter toujours et d'abord aux résultats des observations et de ne recourir aux formules que dans la mesure où ils sont en accord avec elles. Ce ne sera guère le cas que lorsque le lit inférieur du cours d'eau est très régulier et dépourvu d'obstacles réduisant l'énergie de l'onde.

La conception de Bazin des marées fluviales est surtout appropriée par l'explication qu'elle permet du phénomène du mascaret, qui se produit caractéristiquement dans certains cours d'eau et dans certaines conditions (Seine, Gange, Amazone). On a indiqué (chap. XIII, par. 5) que les ondes de translation se déforment au cours de leur progression, les parties supérieures avançant plus rapidement. Selon la conception de la marée montante constituée d'une succession d'ondes de translation élémentaires, ces ondes successives avancent d'autant plus vite qu'elles sont plus élevées. Si le domaine fluvio-maritime est assez étendu, les ondes les plus élevées finissent par rattraper les premières et le flot s'avance alors sous la forme d'une onde à front très raide, appelée mascaret.

Il a généralement une forme concave-convexe vers l'amont du fleuve (planche 20, fig. 3) et il est lisse si la profondeur est assez grande. Si la profondeur diminue, le mascaret déferle, tandis qu'il s'atténue au contraire si la profondeur augmente. Sa hauteur peut atteindre 3 m sur les fleuves français, 5 à 6 m sur les plus grands fleuves (Gange).

Le mascaret ne se produit d'une manière accusée qu'à partir d'un cer-

tain point en amont de l'embouchure, atteint plus loin en amont un maximum, puis s'éteint progressivement vers la limite du domaine fluvio-maritime, mais bien en aval. Il est favorisé par une combinaison de circonstances bien déterminées : marée de base à montée rapide, embouchure, forme et profondeur favorables du lit, notamment des profondeurs assez faibles ou une pente de fond relativement prononcée. Il est influencé aussi par les circonstances locales. Enfin, son importance dépend aussi de l'amplitude de la marée et est beaucoup moindre en morte eau qu'en vive eau. (Planche 21, fig. 4).

La tête du mascaret a une hauteur supérieure d'environ moitié à l'intumescence allongée qui la suit, conformément à la disposition générale des ondes de translation allongées. Elle est suivie d'ondes secondaires, appelées éteules, variables selon les circonstances. (Cf chap. XIII, par. 5). Si H est la profondeur avant le mascaret, h la surélévation en arrière de la tête de flot, V la célérité et u la vitesse du courant de flot (voir par. 3), on a :

$$\frac{u}{V} = \frac{h}{H + h} ,$$

formule que l'observation confirme et qui est conforme à celle des ondes de translation allongées. [Chap. XIII, par. 3, formule (155)].

L'existence du mascaret se marque sur les courbes locales de marée par une montée très brusque (planche 20, fig. 2). Sa formation continue donne lieu à un abaissement du lieu géométrique de marée haute, correspondant à une dissipation d'énergie à la tête de flot.

3.- COURANTS DE MAREE FLUVIAUX - ETALES

Les fluctuations des niveaux et de la pente superficielle d'un cours d'eau à marée sont accompagnées de variations importantes du mouvement des eaux, les courants variant d'une manière périodique alternative.

Pendant la marée montante, le courant est dirigé de l'aval vers l'amont, suivant la pente de la ligne d'eau. C'est le courant de flot. Pendant la marée descendante, le courant reprend le sens normal de l'amont vers l'aval, aussi suivant la pente de la ligne d'eau. C'est le courant de jusant. Lors du renversement de courant, celui-ci s'annule, lors de ce que l'on appelle les étales. L'étales de flot marque la fin du courant de flot, l'étales de jusant la fin du courant de jusant.

Le phénomène de renversement du courant n'est évidemment pas instantané dans le vaste lit d'un fleuve à marée et ne constitue donc pas un moment nettement défini. Physiquement, les étales correspondent à des périodes de transition d'une certaine durée, voisine des hautes et basses marées.

L'interprétation de la formation des ondes et des courants de marée par des successions d'ondes de translation élémentaires, d'après Bazin, doit être complétée selon Partiot, par la notion de la pénétration télescopique de la marée.

Pendant le courant de flot comme pendant le courant de jusant, par suite des conditions très perturbées du mouvement variable, la vitesse n'est

évidemment pas uniforme à un instant donné dans une section quelconque. Les variations des vitesses dans une section transversale doivent être, dans une rivière à marée, aussi caractérisées que dans une rivière à écoulement permanent et sensiblement uniforme. Pendant les périodes de transition des étales, les vitesses diffèrent même de sens dans une même section. Vers la mi-marée, lorsque les courants de flot et de jusant sont bien établis et voisins de leurs maximas, donc relativement peu variables, on peut admettre avec une relative approximation l'application des équations du mouvement uniforme (comme dans le mouvement quasi permanent des étales de crue, cf. chap. XIV, par. 3 et 7).

M. Partiot envisage l'emploi des formules de Bazin et écrit :

$$u = \frac{87 \sqrt{H.i}}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{H}}}, \quad v_s = u + 14 \sqrt{H.i}, \quad v_f = u - 10 \sqrt{H.i}.$$

u étant la vitesse moyenne, v_s la vitesse de surface et v_f la vitesse de fond. Ou encore :

$$\begin{aligned} v_s &= u \cdot \left[1 + \frac{1,4}{8,7} \cdot \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{H}} \right) \right] \\ v_f &= u \cdot \left[1 - \frac{1}{8,7} \cdot \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{H}} \right) \right] \end{aligned} \quad (190)$$

Ces formules ne concordent pas avec celles de Bazin figurant au chapitre IX, paragraphe 4, formules (9) et (10).

Les vitesses sont donc les plus faibles près du fond et des rives. C'est donc en ces endroits que se produiront d'abord les renversements de vitesse. Ils ne peuvent débiter en général qu'après la marée haute ou la marée basse. Les premières ondes de translation élémentaires de flot vont donc produire le renversement du sens normal du courant de jusant des filets liquides les plus voisins du fond et des rives. Les ondes élémentaires suivantes vont provoquer le renversement de la vitesse des filets plus éloignés du fond et des rives. Ce processus se poursuit avec l'élévation de la mer après la marée basse. Donc, les filets liquides les plus voisins du fond et des rives couleront déjà de l'aval vers l'amont, alors que ceux plus voisins de la surface couleront encore dans le sens normal de l'amont vers l'aval. Il y a donc deux débits simultanés de sens inverse. Le débit de flot naissant va en croissant avec le temps après la marée basse; le débit de jusant finissant va en diminuant. A un instant défini, ces deux débits sont égaux (et de sens contraire). Le débit résultant dans la section est nul. C'est l'instant de l'étale mathématique de jusant. Un processus identique mais de sens inverse se produit pendant la transition du flot au jusant et définit l'instant de l'étale mathématique de flot.

Normalement cet instant doit être en retard sur la marée basse au jusant, d'autant moins cependant que la marée est plus forte et que le débit d'amont est plus faible, et vice-versa. De même, l'instant de l'étale de flot doit être en retard sur la marée haute, d'autant plus que la marée est plus forte et le débit d'amont plus faible et vice-versa. L'étale de flot peut même être en avance sur la marée haute, ainsi qu'il est indiqué plus loin.

La durée du courant de flot augmente donc avec l'importance de la marée et diminue avec l'importance du débit d'amont. C'est l'inverse pour le courant de jusant.

La conception de la pénétration télescopique de la marée s'accorde bien avec les observations. C'est ainsi qu'à Saint-Nazaire, lors des très fortes crues de la Loire, le courant de jusant persiste en surface pendant la marée montante, tandis que l'eau de mer pénètre dans le fleuve vers l'amont sur le fond. Dans l'estuaire du fleuve Congo, dont le débit est très régulier et le minimum supérieur à 20 000 m³/sec, la marée de l'Atlantique à l'embouchure étant toujours faible, le courant ne se renverse jamais en surface, tandis qu'un renversement de courant de durée variable selon l'importance de la marée et du débit d'amont, se constate sur le fond.

Donc, selon cette interprétation par la conception de la pénétration télescopique de la marée, on définit mathématiquement les temps des étales comme étant ceux auxquels le débit et la vitesse moyenne sont nuls dans la section considérée. Leur détermination résulte de l'étude mathématique des débits et des vitesses moyennes, exposée ci-après.

4.- DEBITS ET VITESSES DES COURANTS DE MAREE FLUVIAUX

Il n'est pas possible, dans un cours d'eau à marée de mesurer des vitesses autres que instantanées et isolées. Il n'est pratiquement pas possible de mesurer l'ensemble des vitesses instantanées en un grand nombre de points d'une section transversale et par là le débit instantané à travers cette section. Car toutes les vitesses et la vitesse moyenne varient à chaque instant. D'autre part, l'étude du mouvement des eaux dans une rivière à marée exige de connaître les débits variables pendant toute la durée de la marée dans un grand nombre de sections.

Les méthodes exposées au chapitre XVIII pour les cours moyens et supérieurs des fleuves et des rivières, où le courant est permanent, ne conviennent donc pas pour les rivières à marée.

On peut déterminer des débits moyens par périodes dans un grand nombre de sections en aval de la limite naturelle ou artificielle du domaine fluvio-maritime de la manière indirecte suivante.

Ainsi qu'il a été indiqué au paragraphe 1, on relève, par le moyen d'observations marégraphiques, les lignes d'eau instantanées d'une marée à des intervalles de temps réguliers, de 15, 30 ou 60 minutes, dans tout ou partie de l'étendue du domaine fluvio-maritime en aval de sa limite amont.

Ayant aussi relevé hydrographiquement les profils en travers du lit aux stations marégraphiques pour tous les niveaux de la marée, on peut déterminer les volumes d'eau compris entre deux lignes d'eau consécutives, depuis la limite du domaine fluvio-maritime jusqu'à toutes les stations d'aval envisagées. On les désigne par ΔV .

On convient, par exemple, de considérer comme positifs les débits de flot et les volumes de remplissage, comme négatifs les débits de jusant et les volumes de vidange. Le débit d'amont, pénétrant par la limite du

domaine fluvio-maritime, est déterminé par les méthodes du chapitre XVIII et désigné par $- Q_{am}$.

S'il y a des affluents entre la limite du domaine fluvio-maritime et la section d'aval considérée, on détermine les débits moyens pour les intervalles de temps correspondants de la même manière que pour le cours d'eau principal ou les volumes ΔV_a introduits dans les affluents par le cours d'eau principal pendant les intervalles de temps correspondants.

Pour chaque intervalle de temps Δt , le débit moyen pendant cet intervalle à travers une section est

$$Q_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} + \frac{\Delta V_a}{\Delta t} - Q_{am} = \frac{\Delta V}{\Delta t} + Q_a - Q_{am} \quad (191)$$

Les volumes par la méthode de la moyenne des aires, c'est-à-dire

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\Delta \omega_{i-1} + \Delta \omega_i}{2} \cdot \Delta L_{i-1,i} \quad (192)$$

On peut aussi déterminer des valeurs instantanées par

$$Q = \sum_{i=1}^{i=m} b_{i,t} \cdot \Delta L_{i-1,i} \left(\frac{dh}{dt} \right)_{i,t} + Q_a - Q_{am} \quad (191 \text{ bis})$$

$\left(\frac{dh}{dt} \right)_{i,t}$ étant la dérivée (ou l'inclinaison) de la courbe locale de marée dans la section i au temps t , comptée positivement dans le sens de la montée, négativement dans le sens de la descente.

On effectue ces opérations pour tous les intervalles de temps successifs Δt de la marée. On obtient ainsi pour chaque section en fonction du temps :

- la variation du débit Q ;
- la variation de l'aire de la section ω ;
- la variation de la vitesse moyenne $u = \frac{Q}{\omega}$.

La figure 30 reproduit un tel diagramme pour une station de l'Escaut maritime sur la base d'opérations marégraphiques faites pendant la période 1888-1895.

Les courbes de Q et de u coupent l'axe des temps à deux reprises pendant la durée d'une marée, ce qui détermine les temps des étales de flot et de jusant et leurs retards sur les marées haute et basse. Entre ces étales, Q et u passent par des maxima et des minima. La figure 30 montre que la durée du jusant est nettement supérieure à celle du flot, malgré l'insignifiance relative du débit supérieur (d'amont) mais que les débit et vitesse moyenne maxima de flot sont supérieurs aux maxima correspondants de jusant. On remarquera aussi l'insignifiance du débit supérieur (d'amont) par rapport aux débits maxima de flot et de jusant, bien que ce débit supérieur soit déjà pour l'Escaut de l'ordre du débit moyen.

La marée est aussi d'importance moyenne. Sur la figure 30, le retard de l'étales de flot est de 18 minutes, celui de l'étales de jusant de 47 minutes. On remarquera aussi que la variation relative des sections entre

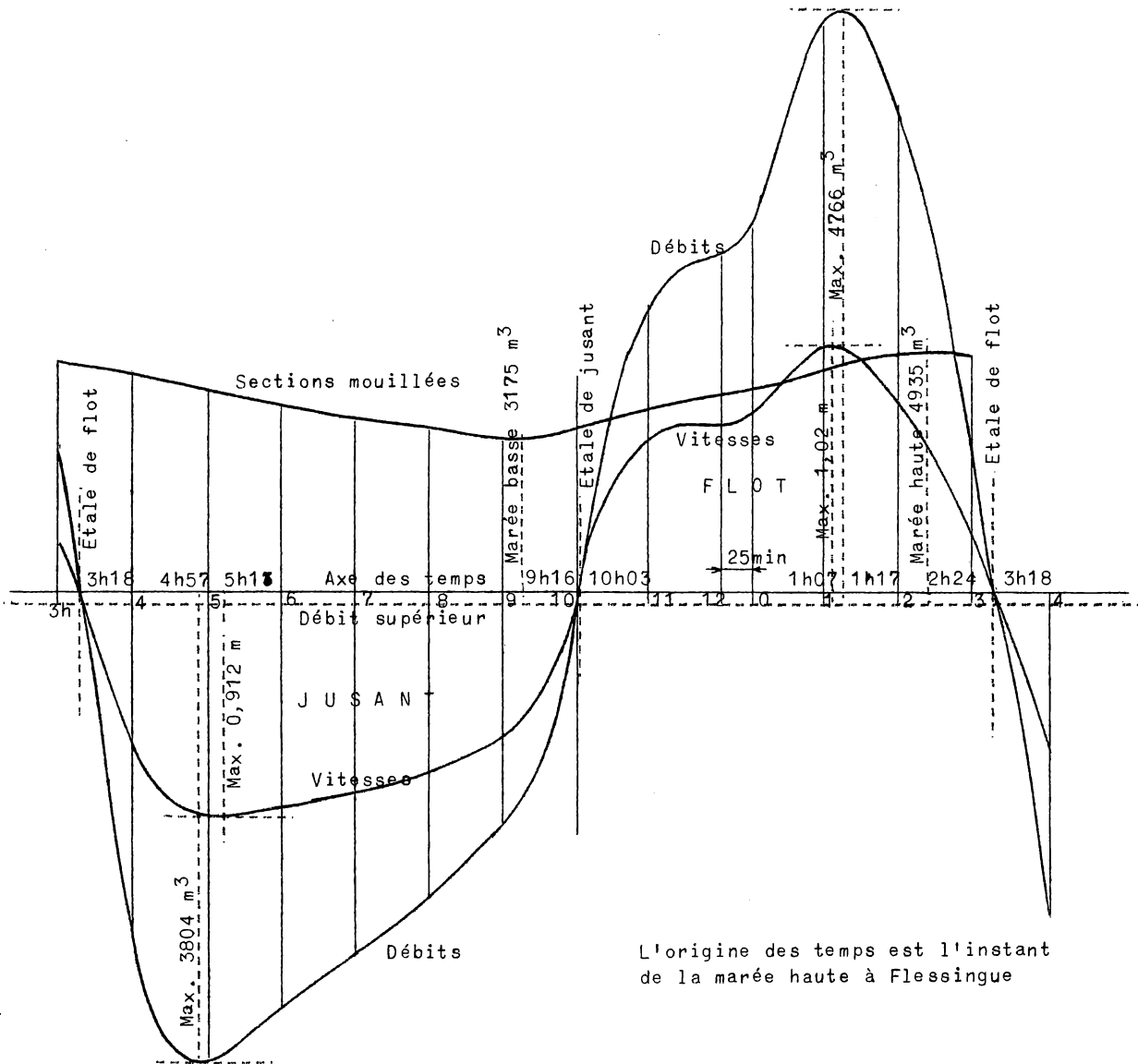


Fig. 30.

la marée basse et la marée haute n'est pas très considérable.

Aussi y a-t-il peu d'écart entre les époques des maxima de débit et de vitesse moyenne, respectivement de flot et de jusant. Ces maxima se produisent au voisinage du niveau moyen, c'est-à-dire de la ligne médiane entre les lieux géométriques de marée haute et de marée basse (fig. 28 et 29). Cette ligne du niveau moyen, qui résulte du mouvement de l'onde de marée, n'a aucun rapport avec une ligne d'eau, notamment sous l'effet du débit supérieur seul en absence de marée. Le lit du fleuve à marée est

trop vaste à cet effet. S'il n'y avait pas de marée, la ligne du niveau moyen pourrait être la ligne d'eau du débit supérieur moyen si le lit avait la profondeur correspondant à ce débit, très inférieure à celle du lit créé par le phénomène de la marée. (Cf chapitre XVI).

En général, les vitesses moyennes maxima de flot varient peu dans la partie du domaine fluvio-maritime où le flot est bien établi. Les vitesses moyennes maxima de jusant croissent dans l'ensemble de l'amont vers l'aval. On remarque aussi que les vitesses moyennes de jusant sont moins variable dans le cours d'une marée que les vitesses moyennes de flot.

Si l'étalement de flot est généralement en retard sur la marée haute, l'inverse peut se produire, d'autant plus facilement que la marée est plus faible et le débit supérieur plus grand. Il y a d'ailleurs nécessairement une section située en aval de la limite du domaine fluvio-maritime pour lequel ce retard est nul. Ce point est tel que, à marée haute;

$$Q = \sum_{i=1}^{i=m} b_{i,t} \cdot \Delta L_{i-1,i} \left(\frac{dh}{dt} \right)_{i,t} + Q_a - Q_{am} = 0$$

En aval de ce point, à marée haute, nécessairement $Q > 0$ tandis que, en amont, nécessairement, à marée haute, $Q < 0$.

Donc, en amont de ce point, le retard de l'étalement de flot sur la marée haute se transforme en avance croissante et finalement, plus en amont encore, $Q_{max} \leq 0$, c'est-à-dire qu'il n'y a plus de renversement de courant : le courant est toujours de jusant. La section en amont de laquelle le courant ne se renverse plus est la limite de flot. Cette limite de flot est située en aval de la limite du domaine fluvio-maritime d'une distance variable, d'autant plus grande que la marée est plus faible et le débit supérieur plus grand. Pour fixer les idées, pour une marée d'importance moyenne, la limite de flot de l'Escaut maritime serait à 4, 7,5 ou 25 km en aval du barrage de Gentbrugge selon que le débit à Gand atteint 25 m³/sec, 50 m³/sec ou le débit de crue exceptionnel.

Les résultats de l'étude des débits et des vitesses moyennes dans diverses sections du domaine fluvio-maritime permettent de tracer les lieux géométriques des étales de flot et de jusant pour une marée déterminée. Il suffit de prendre sur les diverses lignes d'eau instantanées les points correspondant aux retards sur les marées basses (pour l'étalement de jusant) et hautes (pour l'étalement de flot). Ces lieux géométriques des étales sont donc situés à l'intérieur des lieux géométriques des marées basses et hautes (fig. 31). Le retard de l'étalement de flot sur la marée haute, dans la partie aval du domaine fluvio-maritime, se transforme en avance en amont du point K, où le lieu géométrique des étales de flot est tangent au lieu géométrique des marées hautes. Ensuite, dans la section verticale correspondant à la limite de flot L, les lieux géométriques des deux étales se rejoignent suivant une tangente verticale commune. En amont, il y a encore des fluctuations de niveau, de débit instantané et de vitesses moyennes, mais plus de renversement de débit.

Les lieux géométriques des étales n'ont pas une signification aussi physique que les lieux géométriques de marées hautes et des marées basses, étant donné qu'ils ne résultent pas directement d'observations, mais bien

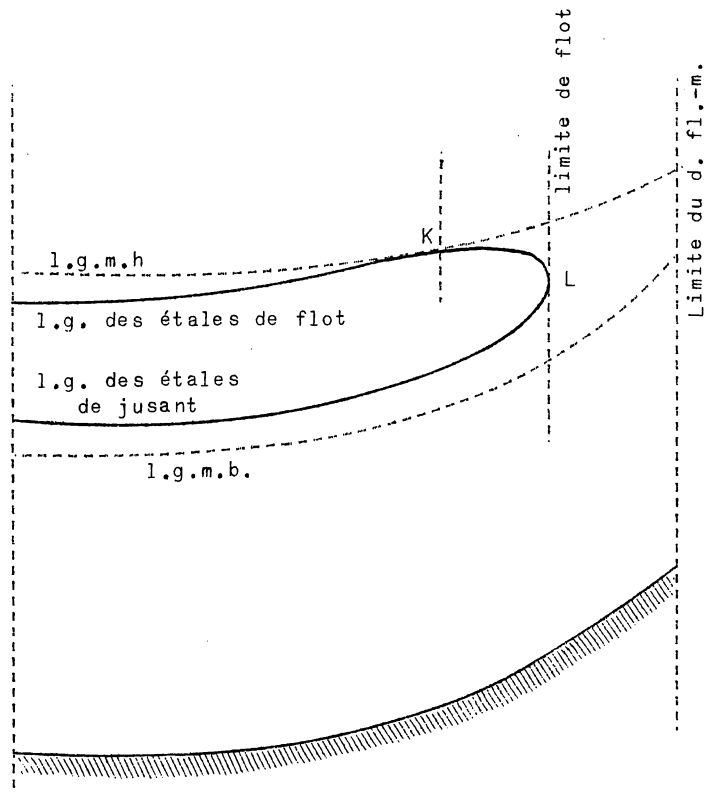


Fig. 31.

de calculs approximatifs. Ils présentent de ce fait des tracés moins réguliers, dus aux irrégularités du fleuve. On remarque de telles anomalies sur la figure 1 de la planche 21, relative à l'Escaut maritime. A remarquer la relative insignifiance du débit d'amont par rapport aux débits maxima et même aux débits moyens de flot et de jusant. Sur l'Escaut maritime, lorsque le débit supérieur est faible, comme on y fait des prélèvements pour l'alimentation de

canaux divers, il advient qu'aucun débit ne soit déversé dans l'Escaut maritime. Les courants sont alors produits par la marée seule, sous réserve des débits propres des affluents à marée, qui sont assez faibles et souvent aussi détournés à d'autres fins.

De même, en vue d'éviter des inondations de la ville de Gand, une partie des eaux de crue de l'Escaut supérieur est détournée par le canal de Gand à Terneuzen et soustraite à l'Escaut maritime (jusque 85 m³/sec). A cet effet, l'Escaut supérieur est mis en relation avec le canal maritime de Gand à Terneuzen par un canal contournant la ville de Gand.

5.- CUBATURES DES VOLUMES DE MAREES FLUVIALES

Le calcul des volumes partiels des ondes de marée pour l'étude des débits et des vitesses selon le paragraphe précédent ne comporte pas de difficultés de principe, mais entraîne un travail matériel considérable et exige une organisation systématique impeccable. Il faut disposer dans l'étendue du domaine fluvio-maritime d'un nombre suffisant de stations d'observations marégraphiques pour connaître assez exactement les lignes d'eau instantanées. Pour l'Escaut maritime, ces opérations ont été faites pour les périodes 1888 - 1895 et 1921 - 1930. Il y a environ 900 profils en travers, dont les entredistances vont en croissant de 250 m à 2000 m

depuis la limite du domaine fluvio-maritime jusqu'à l'embouchure. Les mesures ont été faites pour des intervalles d'une heure, plus un intervalle de 25 minutes, pour une marée moyenne et un débit supérieur moyen.

Il y a donc un très grand nombre de volumes partiels à calculer pour l'ensemble de la marée et du domaine fluvio-maritime. Ces calculs sont consignés dans des tableaux de cubage systématiques. L'emploi de calculatrices électroniques peut actuellement abrégé beaucoup la durée de ces opérations tout en assurant une coordination parfaite.

Ainsi qu'il a été indiqué au paragraphe précédent, la méthode la plus commode et, somme toute, la plus précise, est celle connue en cubature des terrassements sous le nom de méthode de la moyenne des aires. Pour le calcul des aires partielles, on reporte sur tous les profils en travers les traces horizontales des plans d'eau correspondant aux divers temps considérés. On en relève les largeurs à l'échelle et l'on assimile les aires partielles à des trapèzes, pour l'emploi des formules (192) et (191). L'emploi de la formule (191 bis) implique que l'on connaisse les largeurs b et les valeurs de $\frac{dh}{dt}$ correspondantes.

Ces opérations peuvent être faites pour des marées d'amplitudes diverses et des débits d'amont divers. L'emploi de calculatrices électroniques facilite certes actuellement de telles opérations, qui n'en requièrent pas moins de très nombreuses déterminations et restent de ce fait coûteuses et longues. On limitera raisonnablement ces études à un nombre restreint de cas caractéristiques et on pourra compléter la connaissance du régime des cours d'eau à marée par des déterminations plus globales et plus simples des volumes totaux de marée. Cette opération consiste à calculer pour l'un ou l'autre profil en travers, par exemple à l'embouchure, le volume total de l'onde de flot ou de l'onde de jusant, c'est-à-dire le volume cumulé total passé à travers la section entre l'étales de jusant et l'étales de flot ou inversement.

On considère (fig. 32), entre une certaine section d'aval, qui peut être l'embouchure, et la limite du domaine fluvio-maritime, les lieux géométriques des marées hautes et basses et des étales de flot et de jusant.

Après le temps 1 de l'étales de jusant dans la section d'origine, le courant de flot pénètre à travers cette section, jusqu'au temps 3, qui est celui de l'étales de flot, en passant par le temps 2 de la marée haute. La ligne d'eau instantanée lors de l'étales de flot est ζ_{siE} .

Aux temps t et $t + dt$, compris entre les temps 1 et 3, pendant l'intervalle dt , le volume d'eau de flot passé à travers la section d'origine est celui qui, dans les limites du lit, correspond à la surface élémentaire hachurée comprise entre la section 0 et le lieu géométrique des étales de jusant.

Le volume total de flot qui traverse la section 0 entre les temps 1 et 3 est l'intégrale de ce volume élémentaire entre les limites 1 et 3. C'est le volume qui, dans les limites du lit, correspond à la surface ζ_{siE1} . Car, dans cette intégration, le débit est toujours nul le long du segment 1E du lieu géométrique des étales de jusant et le volume

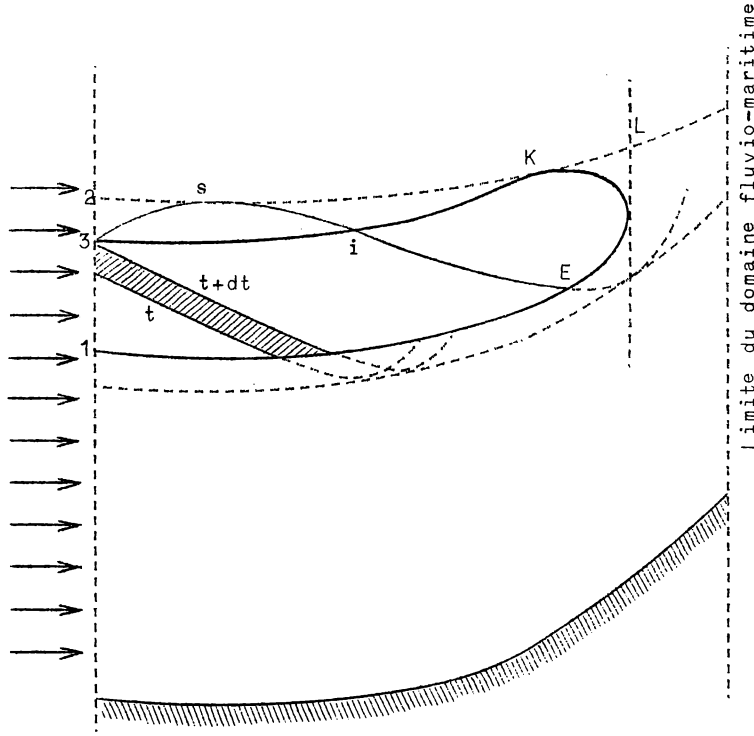


Fig. 32.

total des débits cumulés de flot représente bien le volume de l'onde de flot en amont de la section d'origine. Si celle-ci est à l'embouchure, ce volume est celui de l'eau marine qui a pénétré dans le fleuve pendant la marée considérée.

M. Van Brabandt a démontré (A.T.P.B. 1908) que ce volume est le même que celui qui, dans les limites du lit, correspond à l'aire comprise entre les deux lieux géométriques des étales.

Soient deux lignes d'eau instantanées (fig. 33), aux temps t et $t + dt$ après le temps 3 de l'étales de flot dans la section d'origine. On en considère les segments compris entre les deux lieux géométriques des étales. Les débits aux deux extrémités sont nuls par définition. Donc le volume élémentaire correspondant à l'intervalle de temps dt ,

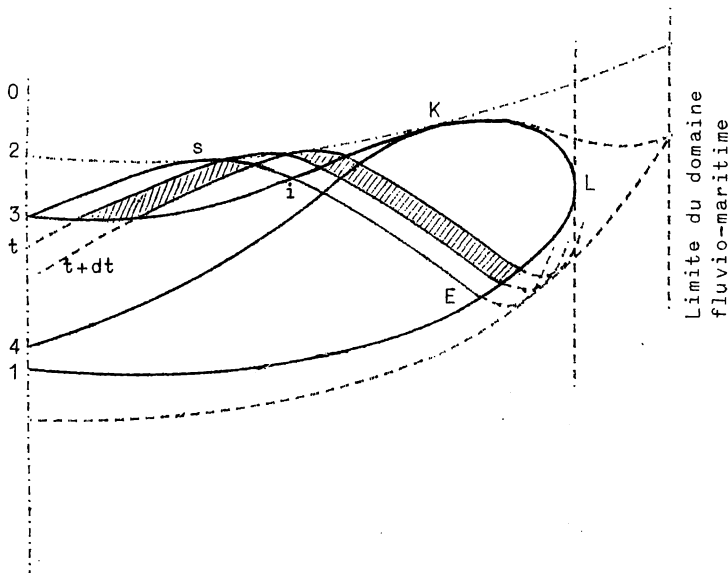


Fig. 33.

compris dans les limites du lit et correspondant à l'aire élémentaire hachurée, est nul. Si l'on intègre ce volume élémentaire nul entre le temps 3 de l'étales de flot en 0 et le temps 4 de l'étales de flot en K (ligne d'eau instantanée 4 K), on trouve l'égalité des volumes qui, dans les limites du lit, correspondent aux surfaces $3sKi$ et $siELK$. En retranchant

le volume commun s_{Ki} , on trouve :

$$\text{vol. } \mathfrak{Z}_{si} = \text{vol. } i_{eLK}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \text{vol. } \mathfrak{Z}_{siE1} &= \text{vol. } \mathfrak{Z}_{iE1} + \text{vol. } \mathfrak{Z}_{si}. \\ \text{vol. } \mathfrak{Z}_{siE1} &= \text{vol. } \mathfrak{Z}_{iE1} + \text{vol. } i_{eLK}. \\ \text{vol. } \mathfrak{Z}_{siE1} &= \text{vol. } \mathfrak{Z}_{iKLE1}. \end{aligned}$$

Ce qui démontre la proposition de M. Van Brabandt, abstraction faite du débit supérieur et des débits latéraux dans l'étendue du cours d'eau à marée comprise entre la section d'origine et la limite de flot. Si un tel débit existe, il faut en déduire la valeur cumulée pendant la durée 1-3 du flot du volume défini par les lieux géométriques des étales. Quant à ce dernier volume, il correspond non seulement aux limites du lit du cours d'eau à marée principal, mais aussi à celles des affluents à marée.

Le volume global du jusant est égal au volume global du flot augmenté des débits cumulés d'amont et des affluents pendant la durée totale de la marée.

Pour une marée déterminée, on ne peut établir par observation que les lieux géométriques de marée basse et de marée haute. Pour connaître les lieux géométriques des étales, il faut procéder au calcul détaillé du paragraphe 4, ce que l'on veut précisément éviter. On surmonte la difficulté en déduisant les lieux géométriques des étales de ceux de la marée basse et de la marée haute par la considération des retards, plus ou moins exactement supputés en rapport avec les circonstances de la marée considérée. Pour l'Escaut maritime, on admet que les retards sont les mêmes que ceux trouvés par l'étude complète de la marée moyenne. Des vérifications faites par la méthode détaillée ont montré une concordance satisfaisante.

En tout état de cause, il est plus exact d'opérer ainsi que d'admettre le volume compris dans l'étendue du lit et correspondant à la surface comprise entre les lieux géométriques des marées hautes et basses.

Les erreurs sur les retards des étales ne peuvent pas être considérables. Ces retards sont peu variables dans la partie aval du domaine fluvio-maritime, où le débit supérieur exerce toujours une influence relativement faible et où les volumes sont les plus grands. Les erreurs peuvent être beaucoup plus grandes dans la région KL voisine de la limite de flot. On y fera preuve de perspicacité; les effets des erreurs y sont d'ailleurs atténués parce que les volumes y sont généralement de faible valeur relative.

Pour fixer les ordres de grandeur des volumes de marée, pour une marée d'amplitude moyenne de 4,60 m à Anvers, il entre à chaque marée dans l'Escaut maritime à Flessingue 1.076.000.000 m³ et il en sort 1.086.000.000 m³. La différence de 10.000.000 m³ représente le débit moyen propre cumulé pendant toute la durée d'une marée. Le débit propre moyen est donc à Flessingue de 222 m³/sec. Il correspond à moins de 1 % du volume total de flot. A Anvers, le volume de flot est réduit à environ 62.000.000 m³ (soit environ 6 % du volume maximum à l'embouchure), dont le débit cumulé supérieur ne représente qu'environ 10 %.

6.- DEPLACEMENTS DES EAUX DOUCES ET SALEES - SALINITE.

La figure 32, qui schématise comment on détermine le volume de marée pénétrant à travers une section, ne donne aucune indication sur l'importance des déplacements réels des masses d'eau. Car la pénétration n'est pas limitée à la partie de la section comprise entre les niveaux de marée basse et de marée haute, mais se fait à chaque instant à travers toute la section, entre le fond du lit et la surface libre instantanée de l'eau. Les déplacements de l'aval vers l'amont sont donc bien inférieurs à OE .

On peut schématiser les déplacements réels des eaux de la manière suivante. On porte sur un axe horizontal des distances (fig. 34) la longueur comprise entre l'embouchure E et la limite de flot L . Au point représentatif de chaque section transversale, on porte en ordonnée les volumes totaux d'eau compris dans toute l'étendue du lit entre la section considérée et la limite de flot, lors de l'étale de jusant dans chaque section (courbe V') et lors de l'étale de flot (courbe V''). Les ordonnées V'' sont évidemment plus grandes que V' . Lors de la marée montante à l'embouchure,

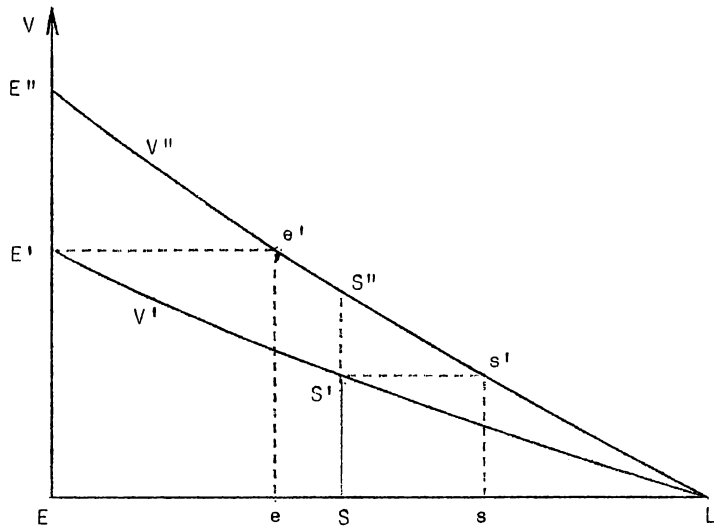


Fig. 34.

le volume de jusant EE' est refoulé jusqu'en e' , en faisant abstraction de tout débit d'amont. Le déplacement vers l'amont est donc Ee . Lors de la marée descendante consécutive, le même déplacement est effectué en sens inverse, toujours en faisant abstraction du débit d'amont et des affluents. Le déplacement alternatif vers l'amont et vers l'aval de l'eau qui est à marée basse dans la section S s'obtient de la même manière et est égal à Ss . Ce déplacement diminue régulièrement depuis l'embouchure E jusqu'à la limite de flot L , où il est nul.

La considération des débits supérieurs modifie sensiblement ce schéma de déplacements (fig. 35). Considérons une section S à partir de la marée basse. Le volume de jusant SS' augmente pendant le flot du volume des débits supérieurs cumulés S'S₁' . Ce volume est refoulé pendant le flot jusqu'en ss' ; le déplacement vers l'amont est Ss . Puis, pendant la marée descendante, le volume est encore augmenté de s's₁' par les débits supérieurs cumulés. Ce volume redescend jusqu'en s₂S₂' . Le déplacement

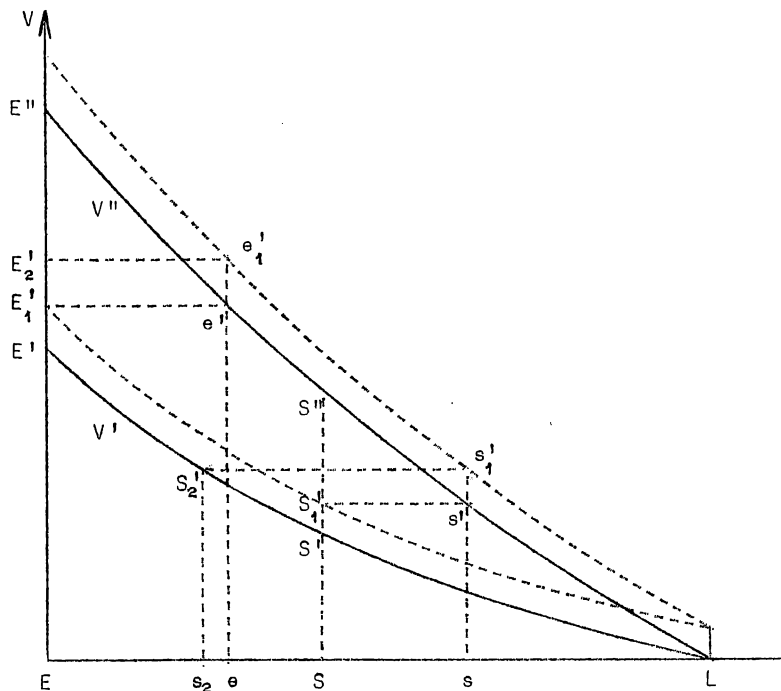


Fig. 35.

vers l'amont pendant la marée descendante est ss_2 et pendant la durée complète d'une marée, l'eau qui était en S a été finalement déplacée vers l'aval de Ss_2 sous l'effet du débit supérieur. Le même phénomène se produit à l'embouchure où, à la fin de la marée descendante, le volume EE_2' est supérieur au volume du commencement de la marée montante EE' des débits supérieurs cumulés pendant toute la marée, soit le volume $E'E_2'$. Ainsi, le volume passant par l'embouchure pendant le flot, se déplace moins pendant le flot que pen-

dant le jusant, ce qui permet l'évacuation du débit supérieur.

Sur l'Escaut maritime, les déplacements moyens seraient les suivants :

	Embouchure (0)	Lillo (km 63)	Anvers	Wetteren
Flot	14,4 km	13,9 km	16 km	2 km
Jusant	14,5 km	14,6 km	17 km	8,4 km

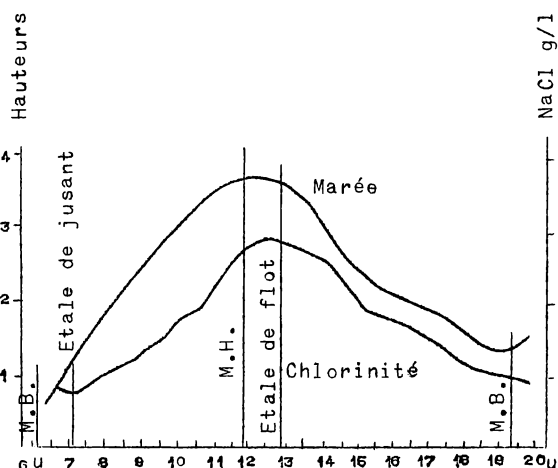
Comme pour d'autres caractères de l'Escaut maritime, on relève une anomalie à Anvers, due aux circonstances locales (courbe très vive, rétrécissement).

Si le phénomène se produisait de la manière simple indiquée sur le schéma de la figure 35, comme il sort plus d'eau du fleuve par l'embouchure pendant le jusant qu'il n'entre d'eau de la mer dans le fleuve par l'embouchure pendant le flot, lors de l'étale de jusant toute l'eau du fleuve devrait être douce. Or, il n'en est pas ainsi. On constate que la salure décroît de l'embouchure jusqu'à la limite du domaine fluvio-maritime et qu'elle varie en chaque point suivant l'état de la marée et suivant l'importance du débit d'amont. Il se produit donc des mélanges et une diffusion de l'eau salée dans l'eau douce jusqu'à la limite du domaine fluvio-maritime, donc plus loin que l'étendue OE de la figure 32.

Ainsi qu'il a été indiqué au paragraphe 3, dans certains estuaires il se produit une différenciation des courants d'eau douce et d'eau salée, celle-ci étant à la partie inférieure. Il s'agit là de véritables stratifications donnant lieu à des courants de densité. Dans ces cas, il est impossible de déterminer une salinité moyenne et de calculer les proportions d'eau douce et salée.

Lorsqu'il n'y a pas de stratification et lorsqu'il n'existe pas en amont du point d'observation de vastes réservoirs d'emmagasinement, de telle sorte que l'emmagasinement décroisse vers l'amont par rapport à l'aval, si enfin la turbulence est suffisante dans l'estuaire et le domaine fluvio-maritime, la salinité peut être uniforme à chaque instant dans toute section transversale. C'est ce qui a été vérifié sur l'Escaut maritime (cf R. Codde, Bulletin du C.E.R.E.S, tome V, 1951, pp. 333-342). On observe que :

1) Dans une section déterminée (à Anvers, à 83 km en amont de l'embouchure, la chlorinité (ou teneur en NaCl) varie dans le courant d'une marée suivant l'allure de celle-ci, avec un maximum à l'étale de flot, un minimum à l'étale de jusant (fig. 36).



Variation de la chlorinité des eaux de l'Escaut à Anvers en fonction de la période diurne de la marée de quadrature du 9 février 1949.

Etat des eaux : très agité.

Vent fort du S.S.W avec rafales de plus de 20 m/sec.

Fig. 36.

2°) Que le maximum et le minimum de la chlorinité dans une section varient dans le cours de l'année, d'une manière qui est sous l'influence du débit d'amont (fig. 37).

3°) Que pour une même marée, la chlorinité décroît de l'embouchure jusqu'à la limite du domaine fluvio-maritime suivant une loi assez caractéristique en forme de deux quarts d'ondes opposés avec point d'inflexion (fig. 38). La variation est la plus forte dans la partie moyenne du domaine fluvio-maritime. C'est aussi là que l'écart entre le maximum et le minimum dans le cours d'une même marée est le plus grand.

Dans la partie inférieure de l'estuaire, l'eau est presque marine. Dans la partie supérieure du domaine fluvio-maritime, l'eau est presque douce.

Ces constatations physico-chimiques mettent donc davantage en évidence les effets du débit d'eau douce supérieur que le donnent à penser les calculs purement hydrauliques des débits et des volumes selon les paragraphes 4 et 5.

L'eau de la Mer du Nord à l'embouchure a une salinité quasi constante de 35,5 gr par litre, dont 19,5 gr de NaCl.

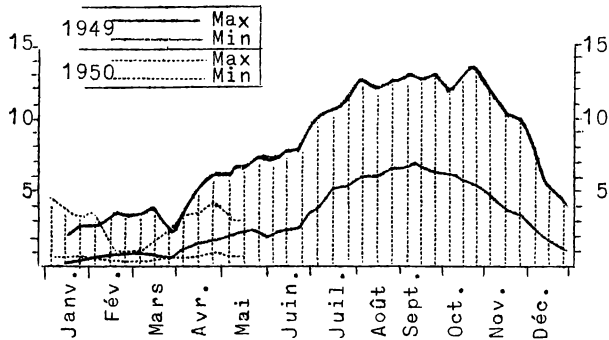


Fig. 37.- Chlorinité des eaux de l'Escaut à Anvers exprimée en NaCl gr/l. Moyennes décadales des max et min.

Selon la figure 38, il y avait à Anvers, lors de la marée du 4 août 1949, de 11,7 à 6,5 gr de NaCl par litre, soit 39 % d'eau de mer à l'étale de flot et 22 % à l'étale de jusant.

Lors de la marée du 10 janvier 1950, les tenneurs extrêmes étaient seulement de 4,58 et 0,78 gr par litre, soit 16 % et 2,6 % d'eau de mer.

Dans les rivières à marée où un mélange aussi parfait des eaux douces et salées existe et où les conditions définies ci-dessus sont réalisées, l'enregistrement continu de la salinité, par enregistrement des variations de la conductibilité électrique au moyen d'appareils tarés, permet des déterminations approximatives des débits totaux, connaissant le débit d'eau douce supérieur. Connaissant la salinité s_m de l'eau de mer et celle s_d de l'eau douce d'amont, on a dans une section :

$$Q = Q_m + Q_d = (\omega_m + \omega_d) \cdot u$$

Si s est la salinité instantanée

$$s \cdot (\omega_m + \omega_d) = s_m \cdot \omega_m + s_d \cdot \omega_d$$

d'où
$$\frac{\omega_d}{\omega_m + \omega_d} = \frac{s_m - s}{s_m - s_d} = \frac{Q_d}{Q}$$

d'où
$$Q = \frac{Q_d \cdot (s_m - s_d)}{s_m - s}$$

Si $s = s_m$, $Q_d \equiv 0$ ou plutôt $\frac{Q_d}{Q} \equiv 0$. Si $s = s_d$, $Q = Q_d$.

C'est la variation de l'embouchure vers la limite du domaine fluvio-maritime. Dans des conditions de bonne préparation et de bonne organisation, cette méthode permet d'assez bonnes mesures des débits de marée. (Cf D.K. Todd et L.K. Lau. Transactions American Geophysical Union, Vol. 37, n° 4, août 1956).

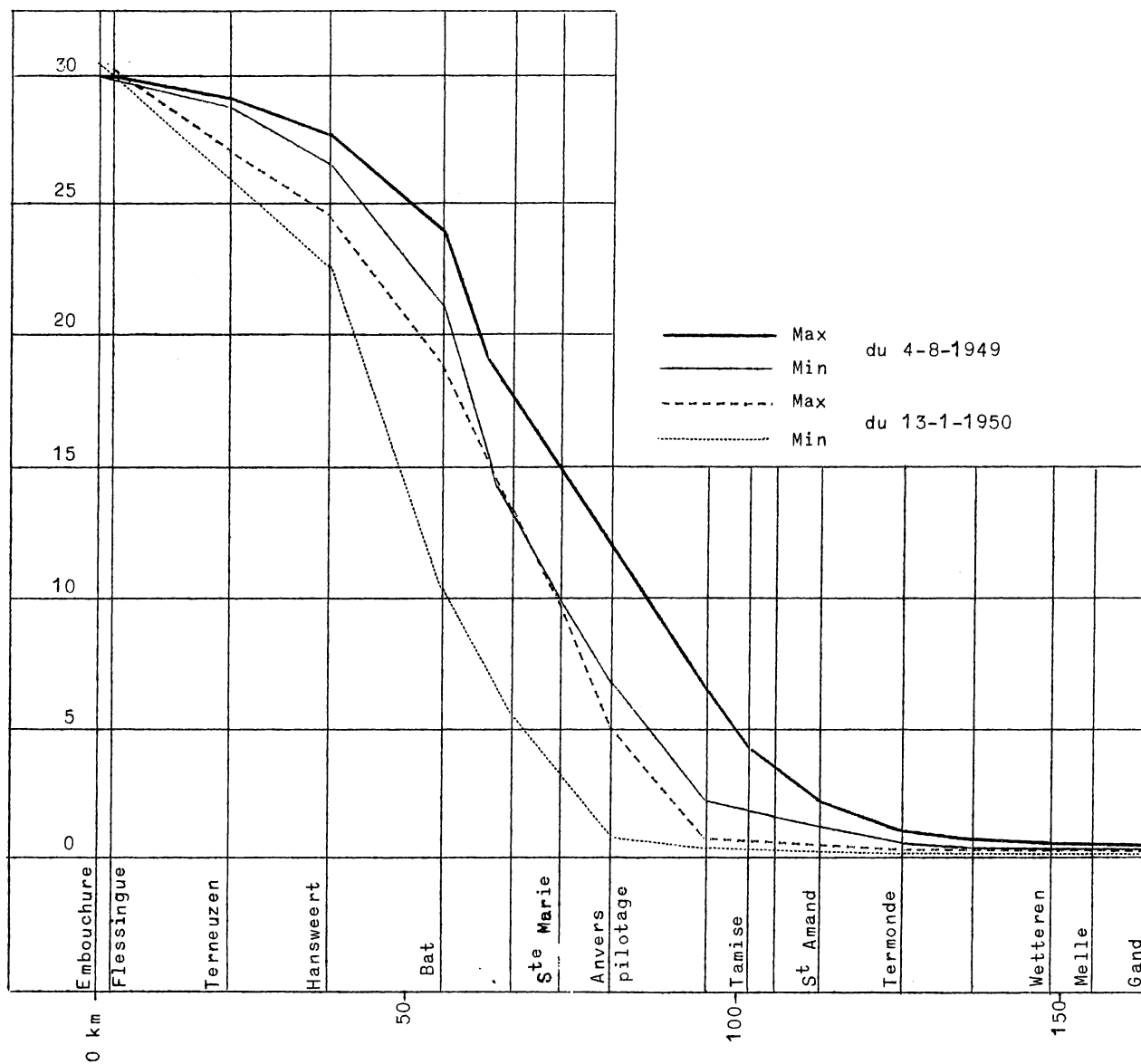


Fig. 38.- Variation des max et min de la chlorinité des eaux de l'Escaut en fonction de la propagation de l'onde de la marée, depuis l'embouchure jusqu'au barrage de Gand. La chlorinité est exprimée en NaCl g/litre.

7.- CONSIDERATIONS THEORIQUES SUR LE MOUVEMENT DES EAUX DANS LES COURS

D'EAU A MAREE

Si on le compare aux cas théoriques de canaux à marée étudiés dans le chapitre XXIV, l'étude mathématique des cours d'eau à marée est beaucoup plus complexe. En plus des résistances de frottement, il faut faire entrer en ligne de compte la pente et le débit d'amont. Mais surtout, la forme des rivières à marée n'est pas prismatique. Les largeurs diminuent généralement de l'aval vers l'amont. En outre des irrégularités de sections transversales (lagunes ou détroits), du fond (seuils ou fosses) et du plan (courbes prononcées) influencent considérablement les effets de la marée.

Cependant, la pente est généralement très faible et négligeable dans la partie aval des cours d'eau à marée. Elle s'accuse davantage dans la partie amont. Elle ajoute une action résistante à celle du frottement pendant le flot. Par contre, elle vient en déduction pendant le jusant.

Le rétrécissement régulier de l'estuaire et du lit des cours d'eau à marée doit évidemment réduire le volume de l'onde de flot.

Si on se réfère aux résultats des paragraphes 12 et 15 du chapitre XXIV, on remarque que les volumes de l'onde de marée de flot dans un canal horizontal prismatique sans débit d'amont et de longueur limitée, sont tous proportionnels à $b.H.L$, volume d'eau du canal au niveau moyen. S'il y a un élargissement ou un rétrécissement, il devient proportionnel à

$$b_1.H.[L_1 + \frac{b_2.L_2}{b_1}] = H.[b_1.L_1 + b_2.L_2]$$

donc encore proportionnel au volume d'eau contenu dans le canal au niveau moyen.

On peut en conclure généralement que le rétrécissement du lit de l'aval vers l'amont réduit le volume de l'onde de flot, d'autant plus qu'il est plus rapide.

Au point de vue des irrégularités, un rétrécissement local ou un seuil réduisent aussi le volume de marée à l'embouchure et réduisent l'étendue de sa propagation.

Au contraire, un élargissement (lagune ou lac) et une fosse augmentent le volume de marée à l'embouchure, mais le réduisent en amont et peuvent réduire l'étendue de sa propagation en amont.

M. Partiot cite l'exemple d'une petite rivière à marée française, l'Odet (cf planche 21, fig. 2), sur laquelle se trouve Quimper, à 17 km en amont de l'embouchure. A 3 km en aval de Quimper, un vaste épanouissement reçoit, avec quelques autres anses situées plus en aval, plus de 14 millions de m^3 à chaque marée. Il en résulte à l'aval des profondeurs à marée basse variant de 5 à 15 m près de l'embouchure. Mais le port de Quimper est à sec à marée basse.

Des affluents à marée assez importants produisent les mêmes effets en amont du confluent.

Des courbes prononcées doivent évidemment produire des résistances locales analogues à un rétrécissement de section et exercer des effets défavorables sur le volume de marée. Cependant, si ces courbes sont, comme celles d'Anvers sur l'Escaut maritime, situées déjà assez loin de l'embouchure, l'effet réducteur du volume de marée à l'embouchure ne doit pas être très grand. L'effet défavorable s'exercera plutôt vers l'amont et aussi par des perturbations locales de la marée.

L'effet du débit d'amont a été déjà caractérisé dans les paragraphes précédents. Il ajoute son effet à celui de la pente et du frottement, d'une manière antagoniste pendant le flot, l'inverse pendant le jusant.

Pratiquement, on devra toujours procéder aux différences finies, d'une manière analogue à ce qui est indiqué aux paragraphes 13 et 14 du chapitre XXIV. On divisera le lit du cours d'eau à marée en un certain nombre de tronçons approximativement prismatiques.

En partant d'une section initiale, où les conditions sont connues en fonction du temps, par exemple l'embouchure, on déterminera à partir de là les conditions à l'extrémité amont du premier tronçon, puis du 2^e tronçon, etc... jusqu'à la limite du domaine fluvio-maritime. Si elle est fixe (barrage), on y connaît le débit égal au débit supérieur. Sinon, on doit considérer un dernier tronçon amont indéfini.

Il est certain que de tels calculs ne peuvent être entrepris qu'après une étude hydraulique complète du cours d'eau à marée, conformément aux paragraphes 4 et 5. Tout d'abord, il faudra vérifier si les calculs sont concordants avec les observations. Plus exactement, cela reviendra à contrôler la valeur des paramètres introduits dans les calculs, notamment C (ou K).

Selon la paragraphe 15 du chapitre XXIV, les équations du mouvement varié dans un canal prismatique de pente j sont

$$j + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2g} \cdot \frac{\partial(u^2)}{\partial x} \pm \frac{u^2}{C^2 \cdot R} = 0 \quad (124)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (126)$$

Si la section peut être assimilée à un rectangle infiniment large $R = H$ dans (124). Si cela n'est pas le cas, $H = \frac{\omega}{1}$ dans (126) et $R = \frac{\omega}{\chi}$ dans (124). Ainsi qu'il a été indiqué déjà, dans la majeure partie du domaine fluvio-maritime, j est négligeable. Très souvent le terme $\frac{\partial(u^2)}{\partial x}$ est négligeable, sauf si les tronçons divers ont des sections assez diverses. Le terme du frottement est positif pour le courant de flot, négatif pour le courant de jusant.

Les calculs effectués pour une marée réelle suivant les paragraphes 4 et 5 permettent de connaître ζ et u aux extrémités des tronçons et les vitesses moyennes dans les tronçons. L'équation (126) doit être vérifiée par les opérations mêmes des paragraphes 4 et 5, qui expriment l'équation de continuité aux différences finies, compte tenu des débits la-

raux et supérieur. Par l'équation (124), on peut contrôler ou déterminer les valeurs de C . Ainsi qu'il a été indiqué au chapitre IX, le contrôle des valeurs de C est très difficile même en mouvement permanent. A fortiori en est-il ainsi en mouvement variable dans un cours d'eau à marée. Cependant, des contrôles effectués sur un tronçon de 17,5 km du Weser maritime, près de l'extrémité artificielle (barrage) du domaine fluvio-maritime, ont donné des résultats globalement satisfaisants (cf J. Lamoën, Revue générale de l'hydraulique, 1936).

Ces calculs ne seront pas faits seulement pour contrôler l'applicabilité de l'équation (124). Lorsque ce résultat sera obtenu, on peut tenter de s'en servir, en rapport avec (126), pour prévoir les effets de modifications au lit du cours d'eau à marée. On admettra par exemple que le débit supérieur et les débits latéraux ne seront pas influencés et on présupera certains effets de la correction, sur la base desquels, par approximations successives, on cherchera à satisfaire aux équations (124) et (126).

Le recours aux calculatrices électroniques permet actuellement d'accélérer ces calculs sinon fastidieux.

Il n'est pas nécessaire de les appliquer depuis l'embouchure jusqu'à la limite du domaine fluvio-maritime. On peut procéder sur un tronçon isolé, pourvu que l'on ait établi par les observations marégraphiques, les conditions aux limites du tronçon.

On peut reprocher aux équations précédentes de ne pas tenir compte de la variation de profondeur avec la marée, qui est assez notable.

En négligeant $\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(u^2)}{\partial x}$ et en admettant $R = \zeta$ (lit très large), on a

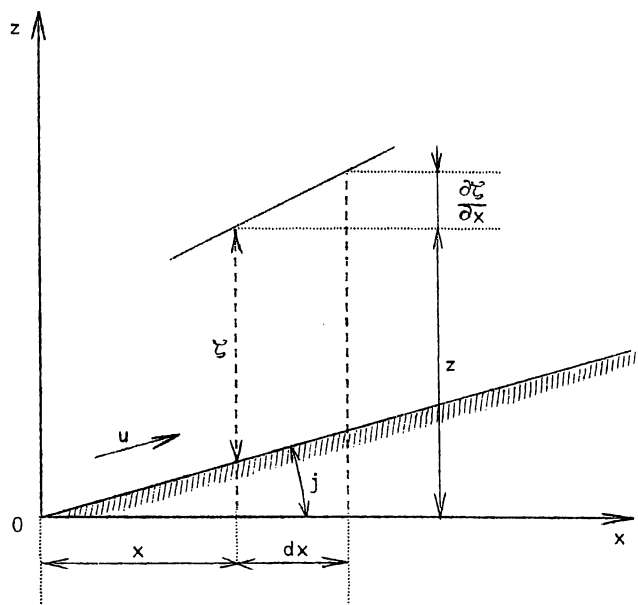


Fig. 39.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + j \quad (\text{fig. 39})$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \pm \frac{g \cdot u^2}{C^2 \cdot \zeta} + g \cdot j = 0$$

$$Q = b \cdot \zeta \cdot u$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q}{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + b \cdot g \cdot \zeta \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \pm \frac{g \cdot Q^2}{C^2 \cdot \zeta^2 \cdot b} + b \cdot g \cdot j \cdot \zeta = 0 \quad (193) \end{aligned}$$

L'équation de continuité est

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (194)$$

D'où :

$$\frac{Q}{\zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{Q}{b \cdot \zeta} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = - b \cdot u \cdot \left(\zeta \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)$$

$$\frac{Q}{\zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{1}{2} \cdot b \cdot \zeta \cdot \frac{\partial u^2}{\partial x} - b \cdot u^2 \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

Le premier terme est négligeable et $b \cdot u^2 \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ est négligeable vis-à-vis de

$$b \cdot g \cdot \zeta \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} = b \cdot V^2 \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \text{car } V = \sqrt{g \cdot \zeta}$$

Finalement, (193) devient :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + b \cdot g \cdot \zeta \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \pm \frac{g \cdot Q^2}{c^2 \cdot \zeta^2 \cdot b} + j \cdot b \cdot g \cdot \zeta = 0 \quad (195)$$

Le signe + du 3^e terme correspond au flot, le signe - au jusant.

Pour appliquer ces équations, on part de l'embouchure, où l'on connaît

$$\zeta_0 = f(t)$$

A la limite du domaine fluvio-maritime, $Q = Q_{am}$, si elle est constituée par un barrage. Si elle est libre, on a $Q = Q_{am}$ et $\zeta = 0$ pour $x \equiv \infty$. Ceci doit permettre de déterminer

$$\zeta = f_1(x, t) \quad \text{et} \quad Q = f_2(x, t)$$

satisfaisant à (194), (195) et aux conditions aux limites.

On a recours à des séries

$$\zeta = \zeta_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\tau_n \cdot x^n}{n!}$$

$$Q = Q_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\beta_n \cdot x^n}{n!}$$

Les coefficients τ_n et β_n sont des fonctions du temps seul. On limite les séries à deux termes ($n = 1$ et 2) pour que les calculs soient praticables. Encore sont-ils très compliqués lorsqu'on les applique à des corrections, car alors Q_0 n'est pas connu, mais dépend des corrections. On ne peut pas aboutir facilement par les équations précédentes. On fait alors un premier calcul en négligeant l'effet de la variation de profondeur. Dans ces conditions (195) devient, en admettant le frottement proportionnel à la vitesse :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + b \cdot g \cdot H \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + K \cdot Q + j \cdot b \cdot g \cdot H = 0 \quad (196)$$

ou
$$\frac{\partial Q}{\partial t} + b \cdot g \cdot H \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + K \cdot Q = 0 \quad (197)$$

et
$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad (198)$$

Ceci donne des équations identiques à celles du paragraphe 11 du chapitre

XXIV, c'est-à-dire l'équation des télégraphistes, dont on applique la solution connue. En appliquant cette solution inexacte à la marée réelle, on détermine un débit Q'_{or} correspondant.

En refaisant les calculs pour la marée après correction, on trouve Q'_{oc} correspondant.

On admet que

$$\frac{Q_{or}}{Q_{or} - Q_{oc}} = \frac{Q'_{or}}{Q'_{or} - Q'_{oc}}$$

Connaissant Q_{or} , on en déduit Q_{oc} .

On fait alors les calculs pour la marée après correction par les formules plus exactes (194) et (195) en admettant à l'embouchure le débit Q_{oo} . La solution est admissible si l'on retrouve à l'amont Q_{am} . Eventuellement on apporte des corrections. (Cf J.J. Dronkers, De Ingenieur, 1935).

Il est opportun de ne pas se fier uniquement à de tels calculs. Concurrément, on procèdera à des essais sur modèles. On commence par régler le modèle pour qu'il reproduise les marées réelles observées. On étudie ensuite sur le modèle les effets des corrections projetées. On procède en même temps à la confrontation des calculs et des résultats des essais sur le modèle.

CHAPITRE XXVI

FORMES DES COURS D'EAU A MAREE ET DES ESTUAIRES

1.- FORMES DU LIT DES RIVIERES A MAREE

De même que pour le cours moyen et supérieur des rivières, à courant permanent, les formes du lit des rivières à marée sont déterminées par les phénomènes hydrauliques qui s'y produisent. Comme il a été établi au chapitre XXV, ils sont caractérisés par l'entrée dans le fleuve, deux fois par jour, d'un volume important d'eau marine, retenant les eaux fluviales vers l'amont. En deux pulsations journalières également et pendant une durée totale peu supérieure à la moitié d'un jour, tout ce volume d'eau marine retourne à la mer, en même temps que s'y écoule le débit journalier total d'eau venue du cours supérieur.

Il y a donc alternativement et périodiquement deux courants de sens opposé, vers l'amont pendant le flot, vers l'aval pendant le jusant. Le jusant a une durée et un parcours plus longs que le flot, mais les vitesses de jusant sont moindres que celles du flot.

Les débits maxima et moyens sont des multiples importants du débit supérieur, qui existerait seul si le cours d'eau n'était pas soumis à la marée. Ces débits sont d'autant plus grands que le volume d'eau marine pénétrant dans le fleuve est plus grand, c'est-à-dire que la capacité d'emmagasinement du cours fluvio-maritime est plus grande et sa forme plus favorable à la pénétration de la marée sans dissipation importante d'énergie.

Il résulte en premier lieu de ces circonstances que la pente moyenne du fond des rivières à marée, constitué généralement d'alluvions très meubles, est très faible dans la majeure partie du domaine fluvio-maritime (0,00004 dans le Hollandsch Diep, cf. J. van Veen, De Ingenieur, 7 juillet 1933). Le fond se relève en général rapidement vers la limite du domaine fluvio-maritime, la valeur de la pente y restant cependant toujours très faible. Ces faibles pentes sont évidemment favorables. Elles favorisent la pénétration de la marée, par conséquent la production de grands débits. A débit égal, les faibles pentes entraînent une plus grande hauteur d'écoulement. Le fond présente naturellement des accidents locaux, fosses et seuils, bancs, ce d'autant plus que les caractères de l'écoulement des eaux et du déplacement des alluvions sont plus complexes.

Les profils en travers sont de grande largeur, à cause des grands débits. Souvent, par suite d'une largeur excessive, ils manquent de profondeur. Les lits lagunaires ou pools présentent à marée basse des bras multiples, séparés par des îles qui sont plus ou moins submergées à marée haute. Des courants de flot et de jusant peuvent se diversifier dans ces bras aux étales. Les profondeurs sont partout faibles. L'onde de marée dissipe son énergie dans ces lagunes et arrête sa propagation vers l'amont.

Le réservoir d'emménagement constitué par la lagune peut être favorable au chenal du cours situé en aval.

Dans les parties du lit de largeur normale ou resserrée, ainsi que dans les courbes, les profils transversaux ont des formes analogues à celle du cours moyen à débit permanent. Cependant, il faut distinguer le lit majeur, occupé par la marée haute, et le lit mineur, qui contient la marée basse. La situation relative de ces deux lits est analogue à celle des rivières à courant permanent (chapitre XVI, par. 12). Le lit mineur est relativement étroit et profond, le lit majeur relativement large et peu profond (fig. 40). Si cette forme n'est pas réalisée naturellement,

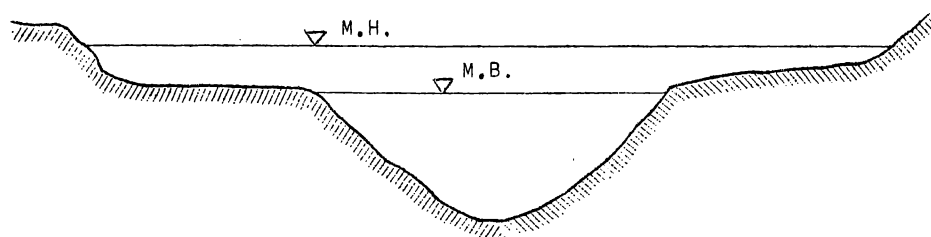


Fig. 40.

on la crée souvent artificiellement, pour les raisons suivantes. Pour une section d'écoulement ω déterminée, la profondeur maximum est plus grande, surtout à marée basse, et le volume d'emménagement est plus grand pour une même amplitude de marée. Dans un tel lit, le courant de jusant se concentre dans le lit mineur avant l'étale, en exerçant encore une action de curage sensible. Tandis que la pénétration du flot se fait par les confins du lit mineur et du lit majeur. Dans une rivière à marée sans lit mineur délimité, l'étale de jusant peut donner lieu à des courants divagants de faible profondeur, donnant naissance à des atterrissements et à des faux bras.

Ce risque de divagation accompagné de remous, de ravinelements, de troubles et de colmatage subsiste dans le lit majeur peu profond; il n'y présente pas d'inconvénients graves.

Dans les courbes, le lit mineur se trouve à la rive concave, dûment consolidée par des revêtements, des perrés ou des murs. Le lit majeur est reporté vers la grève convexe (fig. 41).

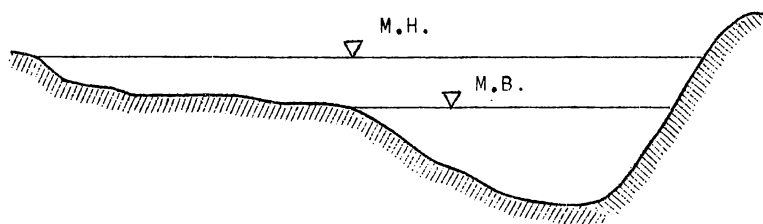


Fig. 41.

Comme en alignement droit, c'est la section la plus favorable pour les grandes profondeurs. C'est dans une courbe concave de l'Escaut que sont établis les murs de quai profonds en rivière.

En plan, les cours d'eau à marée conservent généralement la forme sinueuse, le plus souvent à grandes courbes, d'ouverture fortement croissante vers l'aval, surtout dans l'estuaire proprement dit, qui est souvent quasi rectiligne. Certaines courbes très prononcées, telles qu'en présentent la Seine maritime (planche 22, fig. 1) et l'Escaut (fig. 25) constituent de mauvais tracés. Le tracé sinusoidal est certes favorable aux rivières qui le présentent naturellement, à cause de l'action directrice de ce tracé sur les courants et les alluvions. Les principes de continuité de la variation de la courbure, de la profondeur et de la largeur restent aussi appropriés aux rivières à marée, mais une transposition pure et simple des règles de Fargue (chapitre XVI, par. 17) aux rivières à marée n'est pas permise, à cause de la variation de sens des courants.

Dans les courbes concaves, le courant de jusant creuse une mouille écartée vers l'aval par rapport au sommet de la courbe. Le courant de flot creuse une autre mouille écartée vers l'amont. Entre les deux et dans la région du sommet de la courbe il peut exister une sorte de seuil. Les profondeurs maxima sont réalisées par les vitesses maxima de flot et de jusant, non par les vitesses moyennes. Lorsque les courants sont établis au maximum, vers la mi-marée, il arrive que les filets liquides et les alluvions se déplacent en ligne droite dans les courbes et que sur les grèves convexes, en des endroits de relativement faible profondeur, il se produit des vitesses qui ne sont guère inférieures à celles qui se produisent dans les fosses des rives concaves.

Les alluvions se déplacent assez facilement sur ces grèves en pente douce, même si cette pente est opposée au sens du mouvement. Elles s'arrêtent principalement lorsqu'elles tombent dans une fosse à talus assez abrupts, qui les protège contre le courant et dans lesquelles elles peuvent stationner. C'est une marche quelque peu analogue à celle des dépôts éoliens.

Si l'on considère deux courbes successives, lors du courant de flot, les alluvions venant de la grève concave d'aval vont s'arrêter à l'extrémité aval de la fosse de la courbe d'amont et y former une antenne de dépôt. Le courant de jusant va former de même, une antenne à l'extrémité amont de la fosse de la courbe d'aval. Ces deux antennes forment des épaulements du seuil du point d'inflexion (fig. 42).

Les alluvions de flot venant de la mouille d'aval, qui passent sur la grève convexe de la courbe d'amont, lorsqu'ils atteignent le bord convexe de la mouille de cette courbe sont repris par le courant dévié dans cette courbe et dirigés vers la fosse de la courbe suivante (fig. 43).

Une partie cependant est déplacée transversalement et se dépose sur la grève convexe. Celle-ci tend à prendre une forme d'équilibre assez stable.

Le même processus se produit pour les alluvions de jusant venant de la mouille d'amont et qui, passant sur la grève convexe d'aval, atteindraient le bord convexe de la mouille d'aval. L'action de la courbure des rives est donc beaucoup plus complexe dans les rivières à marée que dans celles à courant permanent.

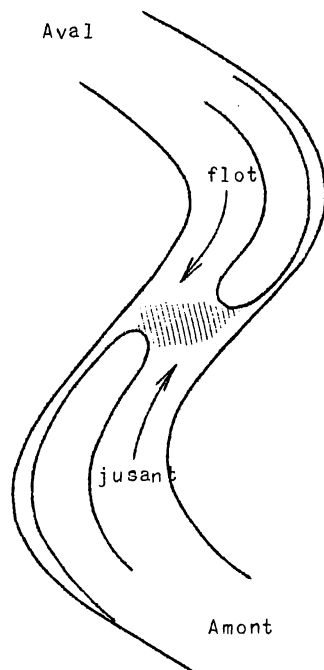


Fig. 42.

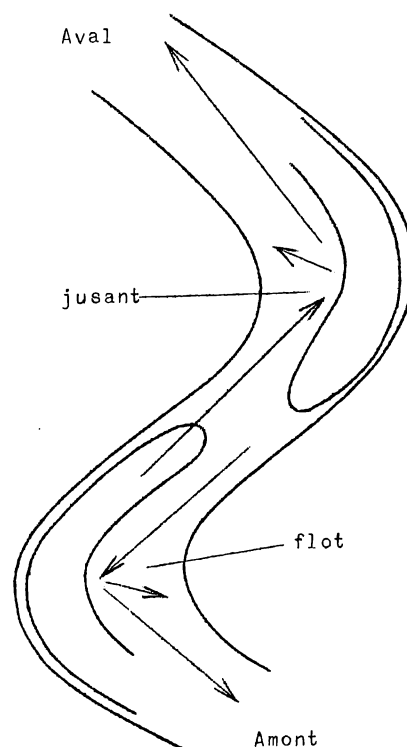


Fig. 43.

2.- DEBIT SOLIDE, MARCHE DES ALLUVIONS

Ces questions sont considérablement compliquées dans les cours d'eau à marée, non seulement en raison du renversement périodique des courants, mais encore parce que aux alluvions fluviales venant de l'amont s'ajoutent des alluvions marines pénétrant par l'estuaire.

Par la limite du domaine fluvio-maritime, à l'amont, les alluvions du cours moyen de la rivière pénètrent dans le fleuve à marée. Ce sont généralement des sables plus ou moins fins. Ils peuvent être très abondants dans certains cours d'eau, comme la Loire et la Gironde. Lorsque ces sables sont entrés dans la rivière à marée, principalement lors des crues, le processus de leur déplacement subit des modifications importantes et croissantes. Ces alluvions peuvent être mises en mouvement à chaque marée, lors des maxima des vitesses de flot et de jusant, alternativement vers l'amont et vers l'aval. Si la durée du jusant est plus longue, ce sont les vitesses maxima de flot qui sont les plus élevées, ce qui est un facteur prédominant.

Les vitesses caractéristiques sont les vitesses de fond v_f définies au chapitre XXV, par. 3, dont dépend l'équilibre du fond et le mouvement des alluvions. D'après les observations de M. Sainjon sur la Loire, les

vitesse critiques d'entraînement des gros sables et des graviers et galets seraient :

Grosseurs	0,0025	0,01	0,04	0,10	0,17	0,38	0,67 m
Vitesse v_f	0,25	0,50	1,00	1,50	2,00	3,00	4,00 m/sec.

La vitesse de fond minimum pour la mise en suspension et l'entraînement des sables de la Loire semble être de 0,55 m/sec. On procèdera par observation directe pour chaque cours d'eau, afin de déterminer la vitesse critique correspondant aux alluvions. Elle est d'au moins 0,50 à 0,70 m/sec. Un léger excès de vitesse a pour résultat une tendance au creusement, qui est favorable au maintien des profondeurs.

Cependant, selon des observations sur les rivières à marée hollandaises (J. van Veen, Onderzoek naar het zandtransport van rivieren, De Ingenieur, 7 juillet 1933), dans la plupart des rivières à marée, les vitesses critiques ne sont pas atteintes. Les pentes sont trop faibles (cf par. 1). Les grandes profondeurs permettent de grandes célérités des ondes et des courants de surface très vifs, mais les vitesses de fond sont très faibles et sans action sur le fond.

Selon M. van Veen, dans les rivières à marée, le sable se met en mouvement lorsque la vitesse dépasse une certaine vitesse critique a et s'arrête lorsque la vitesse devient inférieure à une vitesse critique $b < a$. On aurait

$$a = b + 0,10 \text{ à } 0,20 \text{ m/sec (fig. 44)}$$

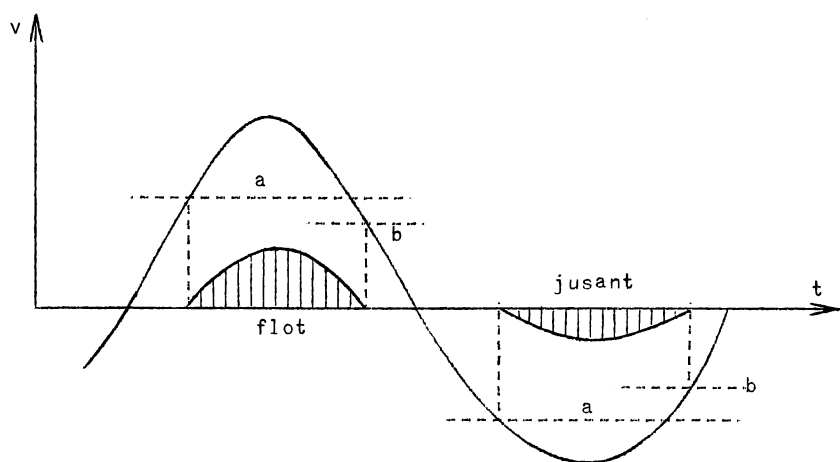


Fig. 44.

Dans le Hellegat (partie aval), pour du sable de 150 à 200 μ ,
 $a = 0,80$ m/sec à 1 m au-dessus du fond.
 Plus en amont, pour du sable de $\pm 400 \mu$,
 $a = 1,50$ m/sec à 1 m au-dessus du fond.

Ces vitesses sont influencées par la turbulence. La turbulence est généralement la plus grande vers l'amont, dans la région des sables fluviaux, ce qui donne

lieu aux bancs mobiles. La turbulence donne lieu à des courants secondaires, qui produisent surtout la mise en suspension des sables, mais ces effets sont locaux. La turbulence produit le trouble des eaux, mais seul le courant primaire produit le transport.

Principale cause de la suspension des sables, la turbulence provient surtout de la rugosité et des inégalités du fond. La navigation dans les chenaux étroits et peu profonds peut contribuer à la mise en suspension des sables. Il en est de même des ondes secondaires de marée, dues aux vents et aux tempêtes, enfin la turbulence due aux courbes, aux seuils et aux fosses, et à tous les autres obstacles. La notion de vitesse critique est donc très complexe.

En outre, la vitesse critique d'érosion du fond dépend beaucoup de l'enchevêtrement et du cimentage des grains. Une certaine quantité de vase cimentant le sable peut augmenter la vitesse critique. La différence entre les notions de sable et de vase ne réside pas tant, selon M. van Veen, dans les grosseurs des grains, variables selon les auteurs (< 100 , 76 ou 20μ), ni dans la vitesse de sédimentation, mais plutôt dans la capacité d'agglomération et de prise en masse de grains fins, que possède la vase, mais non le sable de rivière. Le sable fin marin plus ou moins cimenté peut avoir une vitesse critique supérieure à celle d'un sable rude plus gros, mais être beaucoup plus affouillable aux grandes vitesses. La turbulence peut intervenir aussi. Il en résulte que la détermination de la vitesse critique d'affouillement est particulière pour chaque rivière.

Comme le gain du jusant sur le flot en distance parcourue n'est important que dans la partie amont du domaine fluvio-maritime et diminue rapidement vers l'aval, (cf chapitre XXV, par. 6), les sables fluviaux venant du cours moyen, dès qu'ils ont pénétré nettement dans la zone de flot, sont soumis à un charriage alternatif produisant plus d'usure que de déplacement utile. Ceci peut entraîner la formation de vases; les activités organiques y contribuent aussi. Une partie de ces vases est constamment en suspension. Leur mouvement est nécessairement complexe et conditionné surtout par des circonstances locales ou accidentelles. Sauf circonstances très spéciales, notamment lors des crues de certains cours d'eau, l'évacuation des alluvions doit être assez faible dans les parties moyennes des rivières à marée. Les rivières qui ne s'envasent pas ou peu doivent donc recevoir peu de matières solides de l'amont. C'est le cas de l'Escaut maritime (cf chapitre XVI, par. 7). Un état idéal serait réalisé si, par suite de la conformation favorable du lit, le jeu des courants de flot et de jusant et de leur renversement tendait à conserver, même à accroître les profondeurs du lit mineur, cependant que des dépôts limités s'effectueraient éventuellement dans le lit majeur, où s'effectueraient la majeure partie des dragages d'entretien.

Les meilleures rivières à marée sont donc celles dans lesquelles il se déplace peu de sable. Il y a peu de chances que le sable de rivière atteigne la mer. Selon des observations faites sur le complexe fluvio-maritime Meuse-Rhin, on trouve deux limites. A l'amont de celle d'amont, il n'y a que du sable fluvial, de 200 à 500μ . En aval de celle d'aval, il n'y a que du sable marin, de moins de 150μ . Entre les deux limites, il n'y a presque pas de sable. Les grains ont moins de 80μ . Les limites ne sont naturellement pas précises et fixes, surtout dans le thalweg (ou lit mineur), où il y a quelque déplacement de sable. Ceci montre que dans les estuaires et aux embouchures, un autre phénomène se manifeste : la pénétration des alluvions marines à la faveur du flot. Dans certaines rivières à marée, cette pénétration de sable de la mer est très profonde, pro-

voque des dépôts qui encombrant le lit et réduisent ainsi la puissance de la marée. C'est le cas de la Seine maritime.

Selon la verticale, on trouve des grains très fins jusque près de la surface, produisant le trouble. Le sable fin marin se trouve en moyenne jusqu'à 1 m au-dessus du fond, parfois plus. Le gros sable fluvial ne se trouve guère que jusqu'à 0,25 m au-dessus du fond.

Dans les profils en travers, on trouve peu de sable aux rives concaves. Le sable se déplace obliquement sur le fond vers les rives convexes; le sable fin se dépose en aval de la rive convexe (cf par. 1).

La nature des fonds récents indique donc la vitesse des courants de fond. Dans les parties particulièrement turbulentes, il y a moins d'ordre dans les dépôts récents.

Il a été indiqué au chapitre XXV, par. 6, que lorsque la turbulence est assez grande (comme dans l'Escaut maritime, par suite des courbes), les eaux douces et salées se mélangent parfaitement. Dans certains estuaires et embouchures peu turbulents, cela n'est pas le cas. Les eaux douces et salées se différencient par des surfaces de discontinuité souvent obliques (fig. 45). Ceci correspond à des remarques formulées dans divers

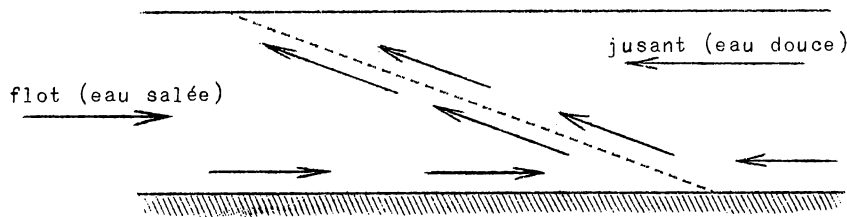


Fig. 45.

paragraphes du chapitre XXV. On constate des écarts de 10 à 12 % de salinité de part et d'autre des limites, souvent marquées en surface par des barres d'écume. L'eau salée pénètre dans l'embouchure par le fond, en forme de coin (fig. 45), ce qui corrobore le schéma de la pénétration télescopique de la marée selon Partiot.

Cette eau salée introduit du sable marin dans l'estuaire et empêche son affouillement par l'eau douce, dont les courants sont puissants en surface. Les sables fluviaux venant de l'amont sont obligés de se déposer, l'eau salée opposant une véritable barrière à leur transport vers l'aval.

La pénétration des sables marins dans l'estuaire est facilitée par la grande turbulence marine, qui met ces sables en suspension. Ils peuvent ainsi pénétrer dans les rivières près du fond, où la moindre turbulence leur permet de se déposer et empêche leur évacuation. La turbulence est d'ailleurs plus grande lors du flot que lors du jusant.

C'est donc le courant de fond d'eau salée qui est le plus néfaste. Il est d'autant plus prononcé que l'influence d'amont est plus grande, c'est-à-dire que le débit d'eau douce est plus élevé. Si le débit d'eau douce est faible (comme dans l'Escaut), l'eau salée remonte plus haut vers l'amont, mais son courant se concentre moins sur le fond et transporte moins de sable.

Les principes énoncés ci-dessus sont naturellement très généraux, mais les faits observés sont surtout dépendant des circonstances très nombreuses qui déterminent les interactions réciproques du fleuve et de la mer. La connaissance ne peut donc provenir que d'une observation approfondie, longue et patiente, aussi scientifique, c'est-à-dire étendue, exacte et précise que possible, et d'une documentation très complète. En toute hypothèse, l'introduction des sables marins dans les estuaires est établie.

Si, ainsi qu'il est indiqué ci-dessus, un faible débit d'amont peut n'être pas défavorable pour l'estuaire et la partie moyenne d'un fleuve à marée, il n'en est pas de même pour la partie amont du domaine fluvio-maritime.

Par exemple, l'Escaut maritime a non seulement un faible débit supérieur, mais en outre une partie appréciable de ce débit est soustraite au domaine fluvio-maritime, tant en étiage qu'en crue, par des dérivations et des canaux en amont de Gentbrugge. Cependant, l'Escaut maritime s'est approfondi.

Mais un petit affluent à marée, situé assez en amont, la Durme, s'est complètement envasée, par des dépôts qui ne peuvent être que de nature fluviatile et amenés par le flot. Le débit d'amont de cette rivière étant totalement détourné, le jusant ne peut plus évacuer ces dépôts.

3.- FORMES DES ESTUAIRES - EMBOUCHURES

L'estuaire est constitué par le lit généralement large et évasé immédiatement en amont de l'embouchure. L'aspect des eaux correspond à celui d'un bras de mer et leur régime est presque tout-à-fait maritime dans les mers à marée.

Le caractère fluvial subsiste par les débits liquide et solide supérieurs. Il résulte du paragraphe précédent que, lorsque la marée de la mer est appréciable, les alluvions d'amont ne parviennent guère à la mer.

Lorsque la marée est très faible et le débit d'amont très élevé et régulier, les alluvions d'amont se déposent dans l'estuaire même, dont ils encombrant plus ou moins l'entrée par des bancs mobiles. C'est le cas de l'estuaire du fleuve Congo, dont le débit d'amont est très régulier et très élevé (cf chapitre XV, par. 1, 23.000 à 75.000 m³/sec).

La marée de l'Atlantique Sud est faible à l'embouchure. L'amplitude varie comme suit :

Moyenne de vive-eau.	1,40 m
Moyenne de morte eau	0,70 m
+ H.M.V.E.E	1,90 m
+ B.M.M.E.E.	0,32 m

La durée du flot est supérieure à celle du jusant; l'influence diurne est perceptible.

Il en résulte que le courant est toujours de jusant en surface. A marée montante, l'eau salée entre par le fond. La variation des niveaux du fleuve par l'effet de la marée se fait sentir jusqu'à quelques kilomètres en amont de Boma (qui est à 90 km de l'embouchure. A Banana, à l'embouchure, on constate une variation du niveau moyen, qui s'élève lorsque le débit d'amont augmente. Le niveau moyen est donc plus élevé que celui de l'Océan Atlantique. On attribue cela à la moindre densité de la couche supérieure d'eau douce, qui a une épaisseur variant de 3 à 6 m, et qui peut entraîner une surélévation d'équilibre avec l'eau salée de 0,09 à 0,18 m. En amont de l'embouchure, le niveau moyen s'élève considérablement lorsque le débit supérieur augmente, par suite de l'influence du débit supérieur, qui l'emporte sur l'influence maritime.

Le débit spécifique solide supérieur est faible. Il a néanmoins donné lieu à la formation de bancs mobiles, dans la partie moyenne de l'estuaire en aval de Boma.

Dans sa partie aval, sur 32 km jusqu'à l'embouchure, l'estuaire s'élargit et s'approfondit. Le chenal fluvial est prolongé en mer par une fosse profonde, qui doit provenir de l'effondrement d'une ancienne vallée continentale.

Il n'y a donc pas de barre à l'embouchure du Congo. Cela provient à la fois du faible débit solide d'amont, de la médiocrité de la marée, de la faible turbulence de la mer et du débit solide marin insignifiant. La pénétration d'eau salée sur le fond par l'embouchure suffit cependant, par le processus indiqué au paragraphe précédent, à arrêter les sables fluviatiles dans la partie moyenne du domaine fluvio-maritime.

Comme le débit solide supérieur est faible, des dragages peu importants relativement, mais assez continus, parviennent à maintenir la profondeur et la stabilité des passes de navigation.

La conformation des estuaires dépend donc des débits liquide et solide supérieurs, de l'existence et de l'importance éventuelle de la marée, des profondeurs et des courants de la mer à l'embouchure, du charriage littoral, de l'orientation de l'embouchure par rapport aux courants marins, enfin de la nature géologique des fonds fluviaux et marins.

S'il n'y a pas ou presque pas de marée (cas des cours d'eau débouchant dans des mers intérieures ou fermées ou des lacs), les alluvions fluviatiles se déposent à l'embouchure et devant, pour former un delta. D'autant plus que les débits liquide et solide supérieurs sont plus grands (Rhône, Nil), qu'il n'y a pas (Méditerranée, lacs américains) ou peu (Baltique) de marée, que la mer est moins profonde et qu'elle est moins turbulente.

Si le débit solide supérieur est faible, la mer assez profonde à l'embouchure et qu'un courant littoral parallèle au rivage existe et est assez vif, tout en charriant guère de matériaux solides, enfin que l'orientation de l'estuaire est telle que le courant littoral ne puisse pas y pénétrer ou y faire pénétrer du sable, le courant littoral peut emporter les alluvions fluviales, qui se perdent au large ou dans les profondeurs.

Si un delta s'est formé, le fleuve s'y écoule généralement par plusieurs bras assez peu profonds et mobiles à l'état naturel. En outre, ces bras sont le plus souvent terminés à l'aval par un seuil appelé barre. Cette barre peut être déplacée vers l'aval par des crues successives du fleuve, en même temps que le delta s'engraisse vers l'aval par les alluvions fluviales qui se déposent. Le promontoire qu'elles peuvent ainsi former peut aussi arrêter éventuellement des alluvions marines.

Un cas différent et particulier, fréquent dans la Baltique, est celui des fleuves qui débouchent dans une lagune ou étang salé de grande étendue, espèce de mer intérieure séparée de la mer proprement dite par des langues de terre assez étroites, formées par des dépôts marins (cordons littoraux), mais réunie avec la mer par un goulet, qui constitue la véritable embouchure. Dans la mer Baltique, ces lagunes s'appellent des "Haff". Ces embouchures doubles ou lagunaires n'existent que dans les mers sans marée ou à très faible marée. Néanmoins, des variations périodiques du régime des vents produisent des variations périodiques de quelques décimètres du niveau moyen de la lagune. Le débit solide supérieur produit la formation d'un delta à l'embouchure du fleuve dans la lagune; les eaux qui sortent de celle-ci sont décantées. Lorsque l'action des courants marins et des vents est favorable, les profondeurs du goulet d'embouchure peuvent être stables et suffisantes, entretenues par les courants périodiques qui entrent dans la lagune et en sortent.

En l'absence de delta et de lagune, dans les mers à marée, les estuaires ont généralement une forme de large trompe évasée, qui favorise l'entrée du flot mais aussi de ses alluvions. Celles-ci ne sont cependant pas toujours la principale cause d'obstruction.

La Loire est un cours d'eau à grand débit solide d'amont. La marée est assez forte à l'embouchure. Elle est de 4,92 m en vive eau et de 1,70 m en morte eau à l'embouchure à Saint-Nazaire, respectivement de 2,01 et de 1,27 m à Nantes. La Loire est un fleuve beaucoup plus puissant que l'Escaut; son débit moyen est de l'ordre de 810 m³/sec. Mais la Loire maritime est médiocre par rapport à l'Escaut maritime, principalement à cause du fort débit solide d'amont et d'une pente relativement forte (environ 0,00025 entre Amboise et Mauves, limite naturelle du domaine fluvio-maritime). La Loire maritime n'a guère que 68 km de longueur. Les alluvions fluviales ne parviennent donc pas à être évacuées dans la mer et obstruent l'estuaire.

La Seine maritime présente un cas tout différent et particulièrement défavorable. La pente moyenne entre Paris et la limite du domaine fluvio-maritime est d'environ 0,0001, analogue à celle de l'Escaut moyen. Son débit liquide est plus faible que celui de la Loire, son débit solide est très faible. Cependant, son embouchure est obstruée par le "Banc de Seine", formé par les alluvions marines.

L'estuaire de la Seine (planche 23, fig. 1) débouche en direction Est-Ouest dans le fond de la Baie de la Seine, formée dans la Manche par les côtes Nord-Sud du Pays de Caux au Nord et par les côtes Est-Ouest du Calvados au Sud. La direction des vents régnants et des courants est N.O.-S.E. Ces courants entraînent avec eux un considérable charriage d'alluvions littorales provenant de l'érosion très forte des côtes du Calvados. L'onde de marée de l'Atlantique et les vents dominants dirigent ces alluvions vers l'embouchure de la Seine. Un autre courant, dit d'Antifer, vient du Nord en direction du Sud. Il est dépourvu d'alluvions, mais sa célérité est plus grande, à cause des plus grandes profondeurs et de l'action des vents. La rencontre des deux courants devant l'estuaire donne lieu à des remous et des pertes de vitesse et provoque le dépôt des alluvions du courant du Calvados. Par le jeu des courants de flot exposé au paragraphe précédent, favorisés par les vents dominants, ces sables pénètrent profondément dans l'estuaire. Cependant, sous l'action prépondérante du courant d'Antifer, ils ont une tendance à s'accumuler surtout vers le Sud-Ouest de l'embouchure.

L'action des courants littoraux est caractéristique sur toutes les côtes frappées obliquement par les vents dominants. Les sables se déplacent le long de la côte dans le sens de la composante tangentielle des vents et forment par dépôt, dans les endroits calmes, les cordons littoraux, qui peuvent transformer des baies en lagunes tout-à-fait isolées de la mer s'il ne s'y jette aucun cours d'eau, ou restant en communication avec la mer par un goulet dans le cas contraire. (Haffs de la Baltique, bassin d'Arcahon).

M. Partiot représente comme suit le régime d'une embouchure en plage de sable. Le chenal du cours d'eau se prolonge au-delà de son embouchure, mais en s'étalant et en perdant sa profondeur. Il est bordé de deux rives sous-marines qui se rejoignent en avant de l'embouchure pour former la barre (fig. 46). Si cette cuvette devient trop resserrée, le fleuve s'y fraye un chenal, suivant une ligne de moindre résistance, généralement dirigée suivant la direction générale du courant. Mais une barre se reforme en avant suivant le même processus que la précédente. S'il y a un courant littoral chargé d'alluvions, il vient d'abord consolider le talus extérieur de la rive sous-marine exposée au courant, sous forme d'un banc triangulaire. Lorsque ce banc est formé, le courant littoral est dévié devant la barre. Si la puissance du fleuve est faible, le courant passe devant la barre, colmate l'angle mort de la rive sous-marine opposée et continue suivant la côte. Si les alluvions du courant littoral ne sont pas très abondantes et si le fleuve est assez puissant pour les reporter vers la haute mer, le premier banc triangulaire se forme seul et reste très caractéristique.

Le schéma de la figure 46 suppose le courant littoral sensiblement perpendiculaire à l'embouchure et ne considère pas les apports marins qui peuvent pénétrer dans un estuaire largement évasé comme celui de la Seine, lorsque les courants littoraux peuvent y pénétrer directement.

Sous ce rapport, les estuaires à goulets, que les Anglo-Saxons appellent souvent estuaires préservés, sont supérieurs. M. Partiot expose comme suit le régime de ces embouchures (fig. 47). Il est modifié par rapport

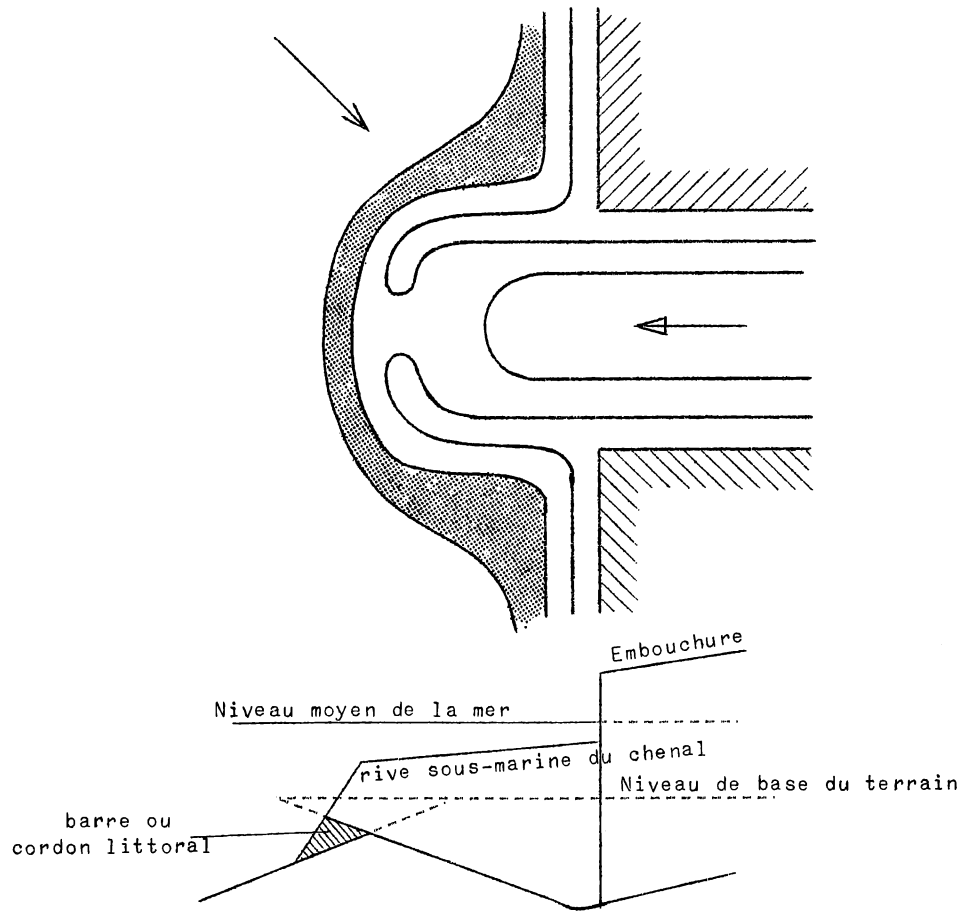


Fig. 46.

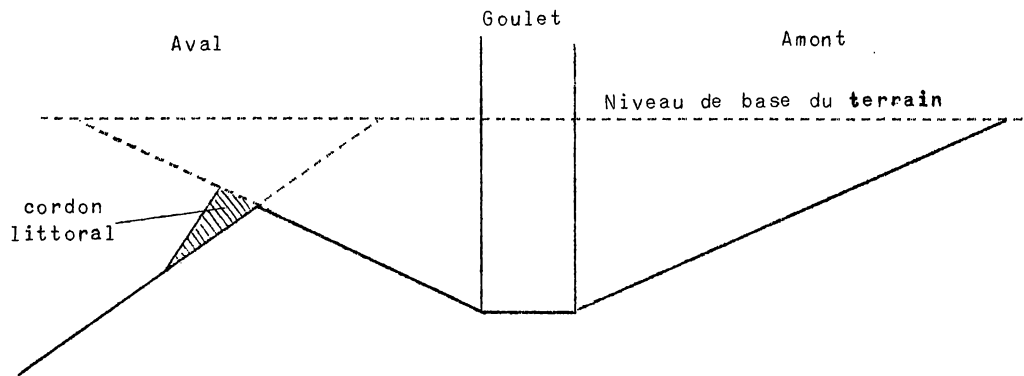


Fig. 47.

au schéma précédent en ce sens qu'un chenal de grande profondeur se crée dans le goulet et se prolonge en amont et en aval dans une mesure proportionnelle aux puissances correspondantes. C'est-à-dire que ce chenal profond est d'autant plus long vers la mer que la marée est plus forte et l'est également d'autant plus vers l'amont que le débit supérieur du fleuve est plus important. La puissance hydraulique de la marée, concentrée par le goulet, est capable de creuser un long chenal en avant. Le chenal d'amont serait dû à la puissance hydraulique du fleuve. D'après ce qui a été indiqué plus haut, les apports littoraux constitueront un banc triangulaire bordant le chenal sous-marin et le protégeant. Comme l'extrémité du chenal peut être assez loin en mer, la barre peut se perdre dans les grandes profondeurs ou être enlevée par les courants; l'influence du cordon littoral peut s'y évanouir. La possibilité d'introduction de dépôts par la mer à travers le goulet est réduite. Ces dépôts se produiraient alors en dehors du chenal. Selon les observations de M. Bourdelles dans la baie de Lorient, rapportées par M. Partiot, des dépôts marins peuvent se produire si la lagune en amont du goulet est trop vaste par rapport au débit d'amont. Ils tendent vers un état d'équilibre résultant de l'interaction des courants de flot et de jusant, qui constitue généralement la disposition la plus favorable possible et qui tend à se reformer si on la modifie artificiellement.

La Gironde constitue un estuaire à goulet (planche 21, fig. 3 et planche 22, fig. 2). La marée a comme amplitude à la pointe de Grave 1,35 m à 4,70 m. Elle remonte la Garonne sur une distance de 157 km de la pointe de Grave, la Dordogne jusqu'à 151 km de la pointe de Grave. La Dordogne se jette dans la Garonne à Bec d'Ambès, à 74 km de la pointe de Grave. Les deux cours d'eau réunis forment la Gironde en aval. La largeur de la Gironde est de 3 km à Blaye, (planche 22, fig. 2), 5 à Pauillac, 10 à Talmont et se réduit à 5 km à son embouchure entre la Pointe de Grave et Royan. Le cours en aval de Pauillac, sur 51 km, est favorable. De Pauillac à Bordeaux, au contraire, des seuils et des hauts fonds mobiles encombrant le lit. Le débit de la Garonne varie de 115 à 10.000 m³/sec, celui de la Dordogne de 6000 à 7200 m³/sec. Le débit solide d'amont est très élevé et donne lieu à une circulation intense de vase dans la Garonne en aval de Bordeaux et dans la Gironde.

L'estuaire du Rio Grande do Sul est non seulement à goulet mais aussi lagunaire. Le goulet est en réalité un chenal de 16 km de longueur (planche 23, fig. 3), communiquant avec des lagunes d'eau douce d'une superficie de plus de 12.000 km². L'amplitude de la marée à l'embouchure est de 0,45 à 0,60 m, mais le vent du S.-O. agit plus sur le niveau des lagunes que la marée astronomique.

Les estuaires sont souvent rectilignes en plan dans leur partie inférieure ou à très faible courbure. Les pentes y étant très faibles, les courbures doivent l'être aussi d'après les règles de Fargue. Les sinuosités de l'estuaire seront donc très larges. En ce sens, le plan rectiligne de l'estuaire est compatible avec les règles de Fargue.

Une controverse a cependant existé au début du siècle entre les tenants

de Fargue pour les lits sinueux et ceux de Franzius, pour les lits rectilignes. Franzius, auteur de la correction de l'estuaire du Weser, considérait que les lits rectilignes opposent moins de résistance à l'introduction de la marée que les lits courbes. Mais il est à remarquer qu'il s'agissait d'un estuaire. Mais, plus en amont, les tracés à grandes boucles ne sont pas défavorables, en raison de leur action directrice sur les alluvions et les courants.

Les grandes boucles naturelles peuvent donc être conservées, même dans les estuaires. Seules les courbes très prononcées, comme celles de la Seine, sont défavorables. La controverse évoquée ci-dessus n'a plus d'actualité, étant donné qu'il est pratiquement impossible de modifier entièrement le tracé d'un estuaire.

CHAPITRE XXVII

AMENAGEMENT DES COURS D'EAU A MAREE,
DES ESTUAIRES ET DES EMBOUCHURES

1.- PRINCIPES GENERAUX D'AMENAGEMENT ET D'AMELIORATION DES COURS D'EAU
A MAREE

Les parties inférieures et moyennes de certaines rivières à marée sont très importantes pour la navigation maritime et le commerce international; on y trouve les plus grands ports maritimes. Même des cours d'eau médiocres, comme la Tamise et l'Escaut, peuvent acquérir dans leur cours maritime une importance considérable. Elle provient de ce que le jeu de la marée et les courants qu'il engendre créent et maintiennent de grandes profondeurs et des largeurs considérables, selon ce qui est exposé dans les deux chapitres précédents. Ces dispositions sont très avantageuses pour la constitution de ports importants en eau calme, accessibles aux grands navires et présentant les meilleures commodités pour l'entreposage, le transbordement et la liaison avec les voies de transport intérieures diverses.

Ainsi qu'il résulte des chapitres précédents, ces conditions favorables exigent toutefois des circonstances appropriées, surtout des marées assez fortes et un lit à marée assez vaste pour permettre de forts courants de marée, sans alluvionnement important par la mer ni par le débit supérieur.

L'importance de celui-ci n'est pas primordiale, sauf dans la partie supérieure du domaine fluvio-maritime (cf chapitre XXVI, par. 2). Certains cours d'eau présentent naturellement des conditions très ou assez favorables : Tamise, Meuse, Escaut, Weser, Elbe. D'autres sont dans des conditions moins favorables, tels que la Seine, la Gironde, ou franchement médiocres, comme la Loire.

Les travaux d'aménagement et de correction ont pour objet le perfectionnement, sinon simplement le maintien des situations naturellement favorables. Ils comportent des chances raisonnables de succès. D'autres, beaucoup plus difficiles et aléatoires, poursuivent l'amélioration aussi grande et durable que possible des situations médiocres ou mauvaises. Les cours naturellement bien conformés peuvent servir de guide seulement dans la mesure où les circonstances ne sont pas nettement différentes.

Les travaux de correction et d'amélioration des cours d'eau à marée sont encore plus difficiles, plus vastes, plus coûteux et plus aléatoires que les travaux d'amélioration des cours moyens à débit permanent. (Cf Cinquième Section, chapitres XIX à XXII). Ils sont toujours de très longue haleine, donnent toujours lieu à des dépenses considérables et le

résultat peut en être problématique. Il en résulte que les observations générales faites au sujet des corrections des cours supérieurs et moyens des cours d'eau naturels (cf chapitre XIX) sont à fortiori de rigueur pour les rivières à marée. Documentation, observation et étude préalables approfondies, progressivité. Des résultats favorables ne sont en général obtenus qu'après des tentatives longues et répétées. Les travaux d'aménagement et d'amélioration des cours d'eau à marée doivent être conduits d'après l'expérience acquise sur cette rivière et consignée dans les archives de son service. L'importance des travaux et des dépenses impose d'ailleurs la progressivité.

Il est compréhensible que l'on ait eu recours assez tôt aux expériences sur modèles à échelle réduite. Les premières ont fait époque : Osborne Reynolds et Vernon-Harcourt pour la Mersey, Vernon-Harcourt et Mengin-Lecreulx pour la Seine, etc... Depuis, la multiplication des laboratoires d'hydraulique dans les divers pays a rendu très fréquentes ces études expérimentales sur modèles. Ces expériences sont assez compliquées et relativement coûteuses. On ne peut affirmer qu'elles donnent toujours des résultats concluants quand il s'agit d'un problème aussi vaste et complexe qu'une correction d'ensemble. Dans des questions de cette nature, c'est peut-être trop demander d'un moyen d'investigation qui peut être plus adéquat pour l'étude de corrections locales ou partielles. La partie la plus aléatoire est certes la reproduction du mouvement des alluvions. Elle est à la fois mal connue, parce que difficile à observer et, par conséquent, difficile à reproduire.

Les essais sur modèles doivent donc être absolument subordonnés aux observations préalables et doivent dans la suite être confrontés avec les observations sur les résultats des travaux progressifs.

Les observations comportent des sondages systématiques et répétés, par écho-sondeurs, des prélèvements de matériaux du fond et en suspension, enfin des mesures de vitesses de courant au moyen de moulinets qui indiquent non seulement la grandeur, mais aussi le sens de la vitesse, éventuellement enregistreurs (moulinet Idrac).

On ne peut donc énoncer en général que des principes, non des règles rigides. Puisque les dispositions favorables des fleuves à marée proviennent de l'action de la marée, c'est celle-ci qu'il faut amplifier et diriger. Le principe essentiel de tous les travaux aux cours d'eau à marée est l'accroissement de la puissance hydraulique, c'est-à-dire du volume et des courants de marée. Encore faut-il que les effets de cette puissance s'exercent favorablement, c'est-à-dire qu'ils maintiennent ou accroissent le lit mineur par un curage constant. Les meilleures conditions sont réalisées par un lit à faible pente, à tracé très régulier, sans courbes trop prononcées, à lit mineur et lit majeur bien calibrés, permettant un grand emmagasinement de marée, mais assurant en même temps des conditions favorables de vitesses pour les courants de flot et de jusant et pour leur renversement.

Toutes les irrégularités accusées du lit constituent des résistances à l'introduction de la marée et diminuent la puissance hydraulique. Ce sont les courbes très aiguës, les seuils, les retrécissements, etc...

Les îles et les faux bras peuvent produire des différenciations de courants en vitesse et en direction, donnant naissance à des remous, à des tourbillons, à des contre-courants éventuels et à des atterrissements. Les courants de flot et de jusant peuvent se différencier aux périodes d'étale et produire, par exemple à marée montante, des courants transversaux turbulents. Des phénomènes analogues peuvent se produire dans des parties du lit très larges et peu profondes, appelées lagunes ou pools. Elles peuvent être encombrées de bancs émergeant à marée basse et d'îles marécageuses. Elles ont cependant généralement une grande capacité et réduisent fortement la puissance hydraulique en amont. Elles peuvent être favorables pour l'aval (cf chapitre XXV, par. 7).

Les affluents à marée peuvent produire des perturbations analogues et peuvent avoir des conséquences défavorables pour le régime de la rivière principale en amont (Garonne en amont du confluent de la Dordogne et sur laquelle se trouve le port de Bordeaux).

Mais il a été indiqué au chapitre précédent que la pénétration de la marée dans le domaine fluvio-maritime peut entraîner deux conséquences défavorables : l'arrêt dans la partie moyenne de ce domaine des alluvions fluviatiles et la pénétration dans l'estuaire de dépôts de sables marins. Ceci dépend des charriages fluviaux et marins et peut mettre en échec le principe de l'accroissement de la puissance hydraulique ou rendre son application délicate et difficile. Les principales conditions de succès sont un faible débit solide supérieur et une faible pénétration de sables marins dans l'estuaire. Néanmoins, ces apports ne sont jamais nuls et il y a lieu de croire que l'augmentation de la puissance hydraulique ne mettra pas fin à l'envasement de la rivière à marée et peut même augmenter celle de l'estuaire. Des dragages d'entretien sont donc toujours nécessaires, après comme avant les travaux. La manière de les effectuer n'est pas indifférente; elle doit être convenablement déterminée par les observations et l'expérience, surtout si les déblais sont déversés dans le cours d'eau ou en mer.

On cherchera à se rendre compte des effets des travaux par le calcul et par des expériences sur modèle à échelle réduite se contrôlant réciproquement. Les lieux géométriques des marées hautes et basses ne seront pas appréciablement modifiés par les travaux. On considèrera une marée déterminée à l'embouchure, définie par sa courbe locale. Le premier problème consiste à en déduire les courbes locales dans toute l'étendue du domaine fluvio-maritime. Ceci peut se faire éventuellement sur le modèle. En première approximation, on peut le faire assez arbitrairement pour le calcul en admettant la notion des trajectoires des ondes élémentaires de marée.

Si l'on considère un point de la courbe locale à l'embouchure, on admet que les points correspondants des courbes locales en amont divisent les amplitudes correspondantes en segments proportionnels à ceux de l'amplitude initiale (fig. 48).

Il est donc facile de tracer les trajectoires dans toute l'étendue du domaine fluvio-maritime. On se sert des formules de célérité pour déterminer les temps par rapport à la marée initiale. Ayant ainsi prédéterminé les courbes locales, on peut tracer les lignes d'eau instantanées et cal-

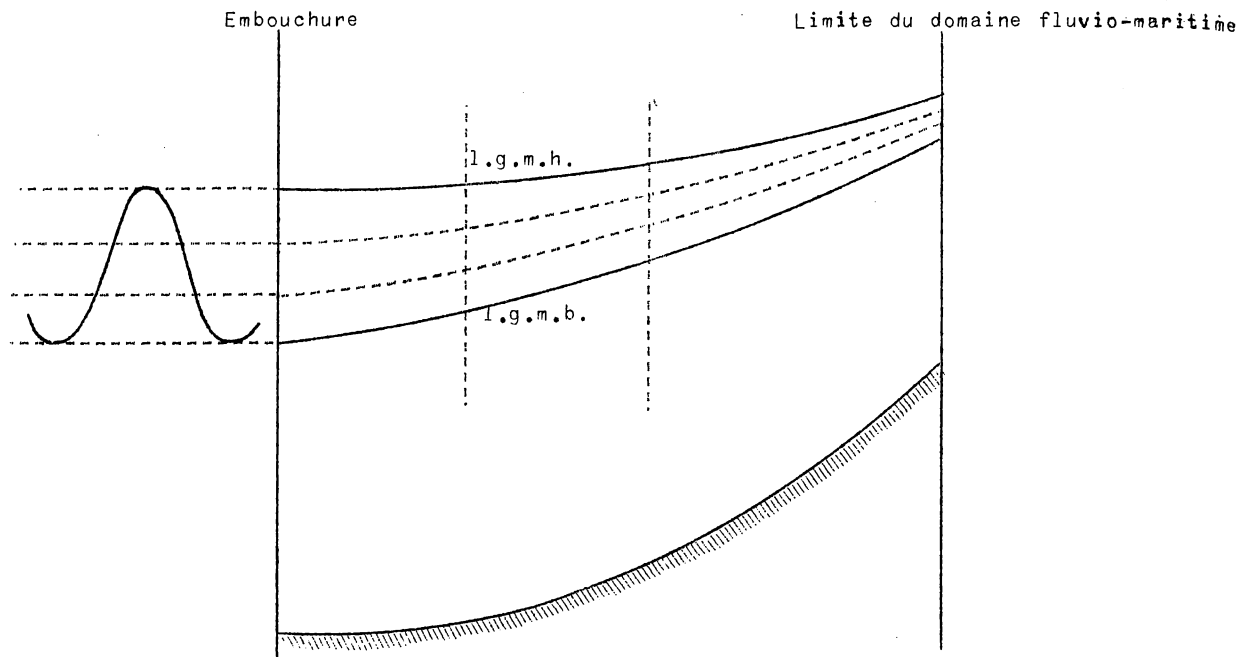


Fig. 48.

culer les volumes, les débits et les vitesses moyennes. On peut se rendre compte, par comparaison avec les calculs avant correction, si les résultats sont susceptibles de réaliser les effets attendus des travaux.

2.- TRAVAUX D'AMENAGEMENT ET D'ENTRETIEN DES RIVIERES A MAREE

Il ressort du paragraphe précédent qu'il y a lieu, comme toujours, de distinguer entre les corrections locales et les corrections étendues. Conformément au principe de progressivité, une correction étendue sera d'ailleurs nécessairement constituée d'une somme de corrections locales, dont les effets se superposent. D'autre part, étant donné l'alternance périodique des courants, il n'est pas nécessaire de procéder aux travaux successifs en remontant de l'aval vers l'amont. Les effets de travaux effectués en un point quelconque du domaine fluvio-maritime s'exercent aussi bien à l'amont qu'à l'aval.

Les deux grandes méthodes de correction consistent en digues longitudinales et en dragages. Les digues transversales ou épis ne conviennent pas ou guère à cause du double courant et ne sont guère employées ou pas seules, mais derrière les digues longitudinales. Celles-ci servent à fixer des rives convenablement tracées et à calibrer le lit, tant mineur que majeur. Les dragages servent à créer systématiquement les profondeurs et les sections suffisantes du lit mineur (dragages de régime) et à les entretenir autant que nécessaire (dragages d'entretien).

Il est à remarquer que les dragages constituent vraiment un moyen

d'amélioration, car en agissant directement sur les profondeurs et les largeurs, c'est-à-dire sur la forme et la section du lit, ils modifient les volumes, donc les débits et les vitesses. Aussi les travaux d'aménagement et d'amélioration aux rivières à marée comportent-ils toujours des dragages de régime, sans compter les dragages d'entretien nécessaires par suite de l'abondance des vases dans les parties inférieures du domaine fluvio-maritime et même parfois dans les parties supérieures. Les dragages de régime comportent parfois des cubes énormes mais donnent toujours des résultats positifs (par exemple dans la Gironde et dans la Garonne, aussi dans le fleuve Congo). Leur effet doit cependant souvent être maintenu par des dragages d'entretien.

Il n'est plus licite de considérer les digues longitudinales et les dragages comme des méthodes essentiellement différentes et séparées, comme on le concevait anciennement. On considérait que les endiguements convenaient aux lits de faible pente mais trop larges, pour calibrer leur section. On en attendait ultérieurement un approfondissement naturel. On considérait par contre les dragages comme appropriés pour augmenter la puissance hydraulique de fleuves à marée à pente relativement forte et à lit resserré.

En réalité, les deux méthodes sont généralement associées dans une mesure variable. Il est notamment certain que l'action d'approfondissement que l'on peut attendre des digues longitudinales sera plus sûrement et plus promptement réalisée si l'on crée en même temps les profondeurs désirées par dragage que si on laisse au fleuve le soin de les creuser lui-même, résultat problématique et probablement long à obtenir. D'autre part, les produits de dragage peuvent utilement intervenir dans la confection des digues. En Hollande, à l'occasion des travaux du Plan Delta, on a construit dans l'embouchure du Haringvliet une fouille de 1400 x 600 m, pour la construction d'un grand déversoir mobile de décharge à 17 pertuis de 56,50 m. Cette fouille est entourée d'un batardeau formé d'une digue contenant 2.660.000 m³ de sable dragué dans la fouille. D'une profondeur variant de 2,50 à 8,00 m sous le niveau normal d'Amsterdam (N.A.P.), son couronnement est à + 8,00 N.A.P. vers le large et + 4,50 N.A.P. vers l'amont. La profondeur de la fouille atteint - 6,40 à - 18,00 N.A.P. Ceci était bien l'utilité des produits de dragage pour constituer les digues.

Dans les parties larges, on aménagera le lit mineur par dragage, on le délimitera éventuellement par des digues basses. Le lit majeur sera aussi calibre par des digues. Les terrains récupérés sur le fleuve peuvent être remblayés par dragage en tout ou partie ou constitués en polders. Des épis derrière les digues, peuvent éventuellement favoriser le colmatage de certaines parties du lit majeur.

Des digues longitudinales peuvent aussi être établies aux extrémités de certaines rives concaves alternées, de part et d'autre du point d'inflexion, pour assurer le passage convenable d'une mouille à l'autre. Ces digues longitudinales sont réunies aux rives par des levées transversales, mais des épis ne conviennent pas seuls (fig. 49).

Les courbes trop prononcées peuvent être corrigées par des courbes atténuées et progressives. Cependant, on ne procède plus à des coupures

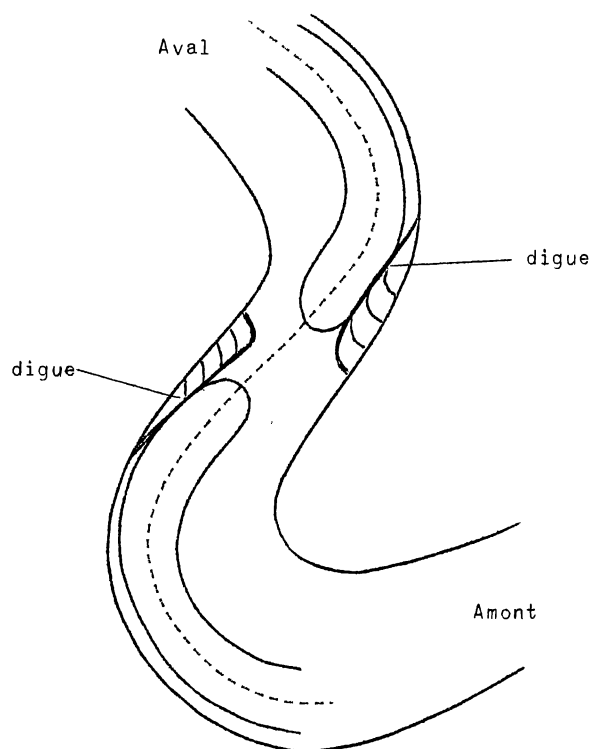


Fig. 49.

rectilignes (comme l'a fait Franzius sur le Weser) ni même courbes, comme la grande coupure projetée à Anvers au début du siècle (fig. 50). On y a objecté une diminution du volume de marée de 3.200.000 m³, les troubles de la coexistence au moins momentanée de l'ancien et du nouveau lit, enfin la crainte de dépôts à l'entrée du chenal de l'écluse du Kruisschans déjà projetée. La coupure n'a pas été exécutée et l'évolution favorable de l'Escaut maritime n'a pas donné lieu à le regretter.

Les seuils seront dragués, les resserréments élargis si possible ou approfondis. Les faux bras seront remblayés par les produits de dragage du bras principal conservé et aménagé ou bien ils seront barrés à l'amont s'il est utile de les conserver comme réservoir d'emmagasinement de marée.

L'ordre des travaux dépendra des circonstances du cours d'eau. On effectuera par exemple d'abord la suppression des faux bras, l'exécution des corrections des courbes trop fortes, l'approfondissement du lit mineur. Ces premiers travaux peuvent entraîner un approfondissement du chenal aménagé et le colmatage de certaines parties abandonnées ou du lit majeur, que l'on aménage ultérieurement, selon les effets des premiers travaux.

3.- AMENAGEMENT DES ESTUAIRES

Les travaux d'aménagement ou d'amélioration des estuaires sont en réalité des travaux maritimes. Ils en présentent tous les caractères, notamment au point de vue des conditions d'exécution. Mais aussi au point de vue du régime qui est essentiellement maritime. L'influence fluviale n'a plus qu'une importance insignifiante pour les petits cours d'eau. Elle reste par contre très appréciable pour les très grands fleuves, tels que le Congo, sans modifier beaucoup pour autant le caractère des travaux.

Pour les raisons indiquées au paragraphe précédent, les dragages constituent le principal moyen d'aménagement des estuaires et de leur prolongement en mer. On drague des passes profondes, bien orientées, à travers la barre. (Mersey, Gironde, Rio Grande do Sul, Rio de la Plata, etc...).

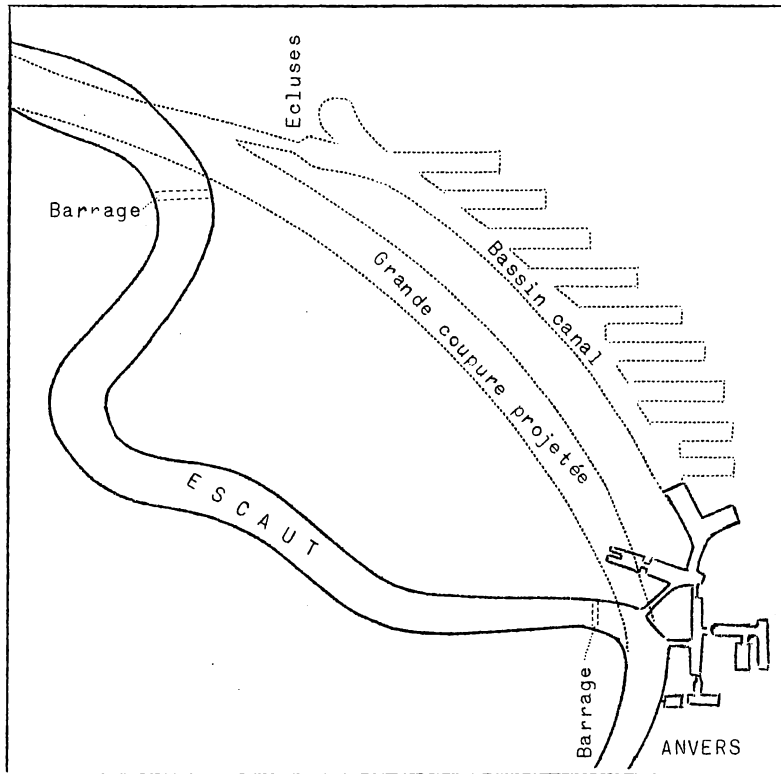


Fig. 50.

Il faut des moyens de dragage très puissants et une action énergique et continue, de longue durée, éventuellement de plusieurs années. Les courants renforcés par les passes peuvent en maintenir les profondeurs si elles sont bien orientées, éventuellement avec l'action conjuguée de jetées ou de digues parallèles. Celles-ci servent à constituer et à fixer les rives sous-marines du chenal et à le pousser assez loin en mer pour y trouver des courants ou des profondeurs qui empêchent la formation d'une barre de

dépôts. Ces résultats ne peuvent généralement être atteints que si les circonstances y sont favorables et encore au prix de travaux parfois énormes. Des dragages d'entretien sont toujours nécessaires.

Les dragages seuls peuvent réaliser le prolongement du chenal naturel amélioré au-delà de la barre, éventuellement à l'abri de bancs latéraux constitués par les alluvions littorales et engraisés par les produits de dragage. Moyennant de la continuité dans l'action des améliorations notables et assez durables peuvent être obtenues.

Il y a lieu de distinguer entre divers types et circonstances d'estuaires.

Dans les mers sans marée, les estuaires forment généralement des deltas d'alluvions fluviales, dans lesquels ils se divisent en plusieurs bras. Des alluvions littorales peuvent d'ailleurs épauler ces deltas s'avancant en promontoire dans la mer, lorsque les courants littoraux locaux produits par les vents produisent leur charriage. On cherche en général à aménager un bras principal reconnu comme le plus favorable. On l'approfondit par dragage et on le prolonge éventuellement en mer par des jetées parallèles. Eventuellement, on cherche par des ouvrages noyés à dévier le débit solide supérieur vers les bras secondaires ou abandonnés, de manière à réduire le débit solide du bras principal et à éviter l'engraissement ou

la reconstitution de la barre. On aménage de préférence le bras se dirigeant vers les plus grandes profondeurs de la mer et débouchant normalement aux courants et aux vents dominants. Les observations hollandaises rapportées par M. J. van Veen (cf chapitre XXVI, paragraphe 2) ne sont probablement pas en situation dans ce cas. D'après elles, si le débit d'eau douce est faible, l'eau salée remonte plus en amont, mais le courant de flot se concentre moins sur le fond et transporte moins de sable (comme dans l'Escaut maritime (cf chapitre XXV, par. 6). Il ne serait donc pas désirable d'évacuer beaucoup d'eau douce par les passes dont on voudrait éviter l'ensablement. Il est donc peut être peu favorable d'établir des ports sur le bras principal d'évacuation d'eau douce dans un delta de rivière, comme de faire aboutir des canaux d'évacuation dans des ports d'eau salée. Mais ces observations et remarques sont relatives à des mers à marée assez turbulentes et ne considèrent que l'action des sables d'aval.

Mais dans les mers sans ou à faible marée, donc à faible turbulence et à faible mouvement des alluvions marines, la situation n'est pas la même pour les estuaires à deltas. C'est l'abondance des alluvions fluviales qui le plus souvent provoque l'échec des tentatives d'amélioration (Rhône, Nil). Le plus souvent, on doit se borner à une navigation à tirant d'eau limité et encore par un canal latéral, comme le Canal Saint-Louis, à l'embouchure du Rhône, de 7,50 m de mouillage, conduisant au port de Saint-Louis du Rhône.

Dans les embouchures doubles, on prolongera le chenal à travers la lagune jusqu'au goulet, en l'entretenant par dragage à travers le delta que le fleuve forme dans la lagune. Le goulet sera approfondi par dragage et éventuellement pourvu de jetées parallèles pour former et maintenir vers la mer un chenal profond sous l'effet des courants entrants et sortants dans la lagune par le jeu de la marée ou des vents périodiques.

Dans les estuaires à goulets ou préservés, les mêmes dispositions seront adoptées pour assurer la profondeur du goulet. Dans le cas d'une rivière à marée comme la Gironde, des dragages importants peuvent être nécessaires pour enlever les dépôts fluviaux dans le cours moyen du domaine fluvio-maritime. Des dragages particulièrement intensifs et prolongés avaient permis de créer de grandes profondeurs dans les passes marines d'accès au goulet, dans l'estuaire et dans le cours maritime moyen jusqu'au port de Bordeaux, avant la dernière guerre mondiale. En 1944, la situation était redevenue très mauvaise, par suite des destructions. L'enfoncement des épaves et des dragages intensifs renouvelés ont rapidement rétabli l'état antérieur.

Enfin, dans les mers à forte marée en plage de sable, les travaux peuvent être particulièrement difficiles, comme ceux de l'estuaire de la Seine, qui durent depuis le début du siècle (et avaient d'ailleurs déjà donné lieu à des travaux il y a un siècle, digue Sud achevée en 1866). M. Partiot propose, lorsque c'est possible de protéger les estuaires des apports marins en s'inspirant des estuaires à goulet. Mais en raison de l'étendue des estuaires, l'amélioration autant que possible par l'organisation des dépôts marins et éoliens, accompagnée de dragages de régime et d'entretien. Si les apports latéraux marins sont très considérables, ils peuvent se déposer

devant la barre, où il faut les draguer. On a parfois proposé de draguer des pièges à sable ou fosses de garde, destinés à retenir les sables avant leur arrivée dans le chenal.

Cette solution est en somme une forme de dragage d'entretien basée sur l'avantage économique des dragages en grande masse, mais son efficacité et partant son économie sont douteuses.

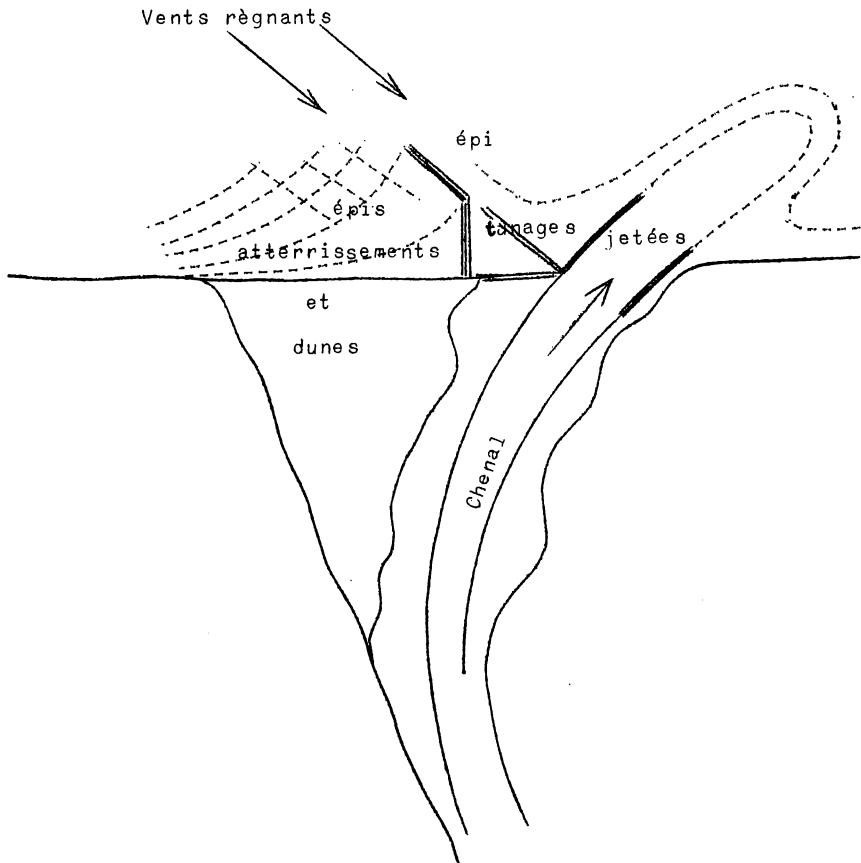


Fig. 51.

M. Partiot envisage de prolonger le chenal entre digues sensiblement parallèles perpendiculaires aux vents dominants (fig.51). Vers l'amont du courant littoral on disposera des digues en épis destinés à favoriser le comblement de l'embouchure et l'engraissement de l'estran du côté du vent. On offre aux courants littoraux des éléments normaux de rivage, limités à des épis successifs, au fur et à mesure de la progression des dépôts. Ils servent à retenir les sables littoraux dont les accumulations peuvent ensuite former des dunes, que l'on fixe par des plantations. Le chenal

dragué jusqu'en mer sera ainsi progressivement protégé contre les apports marins et il pourra en même temps être prolongé vers le large, conditions toutes deux favorables. Cependant, si le charriage littoral est très considérable, des sables peuvent se déposer devant la barre, où il faut les draguer. En tout état de cause, des dragages d'entretien seront nécessaires.

M. Bouquet de la Grye a proposé une disposition particulière de digue, qui tient compte de l'action des courants littoraux et fluviaux, lorsque ces derniers sont assez agissants. La rive du chenal opposée aux vents régnants est terminée par une digue légèrement concave, normale à la côte

et dirigée vers les vents dominants (fig. 52).

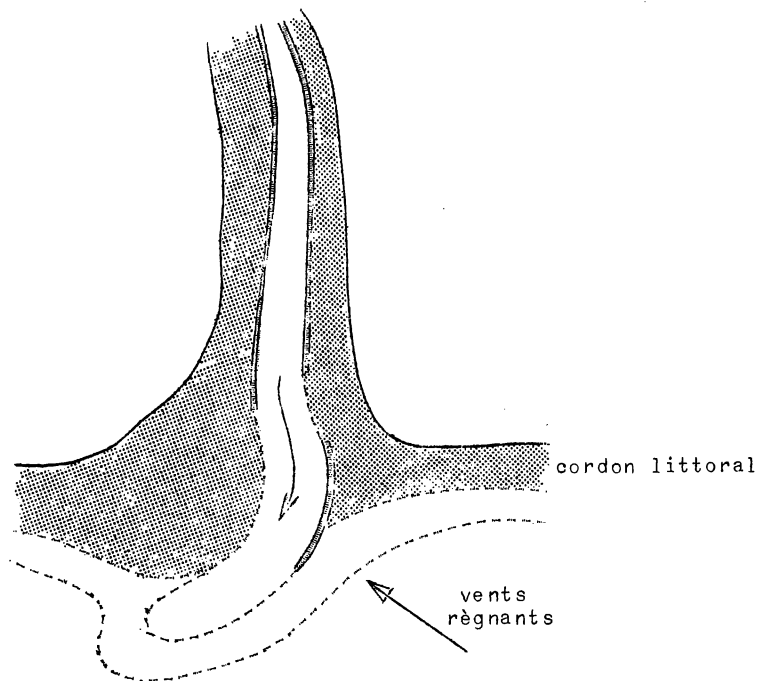


Fig. 52.

Les courants fluviaux fixent le chenal au pied de cette digue. Les apports littoraux limitent le chenal sur la rive opposée et engraisent celle-ci. Plus au large, cette dernière face du chenal est bordée d'une jetée concave vers le chenal, qui reçoit le courant qui lui est renvoyé par la digue précédente et la conduit jusqu'au large à l'abri des apports marins. L'extrémité au large de cette digue est sensiblement normale aux vents dominants et facilite éventuellement le

contournement de l'embouchure par les courants littoraux.

La situation de l'embouchure de la Seine est particulièrement difficile au point de vue de son amélioration, non seulement à cause des circonstances très défavorables exposées au paragraphe 3 du chapitre XXVI, mais aussi à cause de l'existence du petit port de Honfleur sur la rive droite de l'estuaire et du grand port du Havre sur la rive gauche près de l'embouchure. La Seine maritime livre elle-même accès au grand port de Rouen, à 124 km en amont du Havre. Les travaux de l'embouchure intéressent surtout le port de Rouen, mais ne peuvent préjudicier les deux autres. Le problème est rendu ainsi particulièrement difficile et délicat. La solution finalement adoptée et dont on espère le succès, consiste en la création d'un large chenal, dragué au moyen de puissantes dragues à succion et situé vers la rive gauche, suivant une allure concave à grand rayon à cette rive. Il est bordé sur les deux rives de digues réalisées au moyen de produits des dragages et prolongé au large, à l'Ouest de Honfleur, par un prolongement de la digue Sud, s'appuyant sur un banc naturel (Banc du Ratier). Cette digue a pour objet de retenir au Sud-Ouest de l'embouchure les dépôts d'alluvions du courant du Calvados, où ils ont une tendance à se produire plus particulièrement sous l'effet du courant d'Antifer. (Cf chap. XXVI, par. 3 et pl. 22, fig. 1). Enfin, des travaux de protection de la côte du Calvados diminueront son usure et le volume des alluvions qui en proviennent.

TABLE DES MATIERES

SIXIEME SECTION.- NOTIONS D'HYDRAULIQUE MARITIME

<u>Chapitre XXIII.- Mouvements ondulatoires périodiques.</u>	5
1.- Ondes d'oscillations	5
2.- Houle cylindrique régulière en profondeur indéfinie	5
3.- Propriétés de la houle orbitaire trochoïdale de profondeur indéfinie.	14
4.- Vitesses et débits de la houle trochoïdale.	16
5.- Amortissement de la houle	18
6.- Energie de la houle trochoïdale	18
7.- Houle irrotationnelle	20
8.- Composition des houles de faible amplitude relative	23
9.- Clapotis simple en profondeur indéfinie	24
10.- Clapotis complexe en profondeur indéfinie	29
11.- Gaufrage en profondeur indéfinie.	32
12.- Houle cylindrique régulière de faible amplitude en profondeur finie	34
13.- Vitesses et débits de la houle trochoïdale de faible amplitude en profondeur finie	39
14.- Cas où la longueur d'onde $2l$ est très grande par rapport à l'amplitude $2h$	40
15.- Ondes capillaires	45
16.- Clapotis simple en profondeur finie	46
17.- Clapotis simple en profondeur finie, très grande longueur d'onde.	49
18.- Seiches	50
19.- Houle irrotationnelle de Stokes	52
20.- Spectre des mouvements d'oscillation périodique.	55
21.- Escarpement maximum des houles.	56
22.- Instabilité et déferlement des houles en profondeur décroissante.	57
23.- Observations sur la houle et les vagues	59
24.- Appendice	61
<u>Chapitre XXIV.- Notions sur les marées.</u>	65
1.- Phénomène de la marée, observation locale	65
2.- Notions théoriques sur les causes des marées.	67
3.- Propagation et caractères de l'onde de marée.	72
4.- Interférence des ondes de marée	74
5.- Marées complexes réelles.	77
6.- Théorie élémentaire des courants de marée	79
7.- Courants produits par la marée dans un canal horizontal de section rectangulaire et de longueur indéfinie, sans frottement.	81
8.- Courants produits par la marée dans un canal horizontal de section rectangulaire et de longueur finie, sans frottement.	84
9.- Courants produits par la marée dans un canal horizontal de section rectangulaire et de longueur finie présentant un tronçon élargi, sans intervention de frottement.	86
10.- Courants produits par la marée dans un canal horizontal de section rectangulaire et de longueur finie débouchant dans un lac, sans intervention de frottement.	88

11.- Courants produits par la marée dans un canal horizontal de section rectangulaire et de longueur indéfinie, présentant du frottement . . .	90
12.- Courants produits par la marée dans un canal horizontal de section rectangulaire et de longueur finie, présentant du frottement	94
13.- Application de ces méthodes à l'étude des courants de marée dans un réseau de canaux	97
14.- Application à l'étude de la modification des marées par suite de la fermeture du Zuiderzee	100
15.- Courants produits par la marée dans un canal prismatique en pente de section rectangulaire, en tenant compte des frottements.	101
16.- Courants de marée dans un bassin communiquant avec une mer à marée .	102
17.- Seiche amortie par le frottement	110

SEPTIEME SECTION.- NOTIONS SUR LES COURS D'EAU A MAREE ET DES ESTUAIRES

<u>Chapitre XXV.- Régime des cours d'eau à marée et des estuaires</u>	117
1.- Phénomène de la marée fluviale	117
2.- Propagation des ondes de marée fluviales, mascaret	123
3.- Courants de marée fluviaux - Etales.	125
4.- Débits et vitesses des courants de marée fluviaux.	127
5.- Cubatures des volumes de marées fluviales.	131
6.- Déplacements des eaux douces et salées - Salinité.	135
7.- Considérations théoriques sur le mouvement des eaux dans les cours d'eau à marée.	140
<u>Chapitre XXVI.- Formes des cours d'eau à marée et des estuaires.</u>	145
1.- Formes du lit des rivières à marée	145
2.- Débit solide, marche et alluvions.	148
3.- Forme des estuaires - Embouchures.	152
<u>Chapitre XXVII.- Aménagement des cours d'eau à marée, des estuaires et des embouchures</u>	159
1.- Principes généraux d'aménagement et d'amélioration des cours d'eau à marée.	159
2.- Travaux d'aménagement et d'entretien des rivières à marée.	162
3.- Aménagement des estuaires.	164

*