

UNIVERSITÉ DE LIÈGE

Faculté des Sciences Appliquées

Ferdinand CAMPUS
Professeur ordinaire à l'Université de Liège

INSTITUT DU GÉO
BIBLIOTHÈQUE F.
6, quai Banning - 4

COURS D'
HYDRAULIQUE APPLIQUÉE
FLUVIALE ET MARITIME

Fascicule II.

2^me Section

Université de Liège
BST - Sciences Appliquées et M
1, Chemin des Chevreuils;
B-4000 LIEGE

Mouvement des eaux dans les cours d'eau découverts

1961

Copyright 1961 by F. Campus.

Tous droits de reproduction et de traduction réservés.

Reproduction et traduction même partielles ne sont permises qu'avec autorisation écrite de l'auteur.

SOCIÉTÉ COOPÉRATIVE DE L'A. E. E. S.

9, rue Sœurs de Hasque, LIÈGE

DEUXIEME SECTION

*MOUVEMENT DES EAUX DANS LES
COURS D'EAU DECOUVERTS*

CHAPITRE IX

MOUVEMENT PERMANENT UNIFORME
DANS LES CANAUX PRISMATIQUES

1.- GENERALITES ET DEFINITIONS

Le mouvement uniforme envisagé correspond à des filets rectilignes parallèles. Il n'est possible que dans un lit prismatique et régulier. Toutes les sections transversales sont identiques aux points de vue géométrique et hydraulique et leurs périmètres constituent les directrices du lit prismatique ou cylindrique, dont les génératrices sont des droites parallèles entre elles et aux filets liquides. Leur pente est uniforme et définit la pente du lit et de la surface libre du courant d'eau, qui est plane et limitée à des horizontales dans les sections transversales.

Les filets liquides peuvent être effectivement rectilignes et parallèles en régime laminaire; on peut le mettre en évidence en les colorant. Mais le régime laminaire ne peut exister que pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds $\mathfrak{R} = \frac{u \cdot h}{\nu}$, inférieures à une valeur critique qui, pour les canaux découverts, ne serait pas supérieure à 360 (selon Hopf et von Mises). D'autres auteurs indiquent 600 à 640 (Straub) pour l'écoulement en lames minces sur une surface.

Pour l'eau à 20° C, on a environ $\nu = 0,01 \text{ cm}^2/\text{sec}$ (voir chapitre VI, paragraphe 6). On voit donc que le mouvement laminaire ne peut exister dans un canal découvert que si $u \cdot h < 3,6 \text{ à } 6,4 \text{ cm}^2/\text{sec}$, ce qui ne peut correspondre qu'à des courants de très faible épaisseur et à de très faibles vitesses (voir chapitre II, paragraphe 1).

En régime laminaire, la force de frottement interne entre deux filets liquides, rapportée à l'unité de surface, que l'on appelle tension tangentielle, est donnée par la loi de Newton

$$\tau_{xy} = \mu \frac{dv_x}{dy} = \rho_e \cdot \nu \cdot \frac{dv_x}{dy}$$

On peut établir par les équations de l'hydrodynamique des fluides parfaits (équation d'Euler) ou visqueux (équation de Navier) la possibilité de mouvements uniformes à filets non rectilignes, mais ondulés (cfr Het verhang van eenparige permanente stroomen, par J. ten Brink, De Ingenieur, La Haye, 20 mars 1931). Le mouvement est alors périodiquement uniforme. Un autre exemple est donné au chapitre XVI, d'un mouvement plan périodique trochoïdal uniforme en profondeur indéfinie et sans pente de fond, dont la composante de vitesse horizontale est constante et égale à $\sqrt{\frac{\pi \cdot l}{g}}$, l étant la longueur d'onde des trochoïdes.

Ainsi qu'il est indiqué plus haut, dans les canaux découverts, le nombre de Reynolds dépasse pratiquement toujours la valeur critique et le mouvement est toujours turbulent. Cela signifie qu'il n'y a pas de filets liquides au sens le plus simple du mot, comme dans le mouvement laminaire, mais qu'il y a agitation et mélange des molécules. Une particule colorante plongée dans le courant ne trace plus un filet coloré, mais une traînée colorée qui progresse dans la direction générale du courant en se diffusant transversalement. En un point de l'espace occupé par le courant, fixe par rapport au lit, non une particule mobile du courant (c'est-à-dire en coordonnées d'Euler, non de Lagrange), il existe un vecteur de vitesse moyenne statistique, qui constitue la vitesse du mouvement moyen (Boussinesq). En mouvement permanent uniforme, cette vitesse est un vecteur invariable en chaque point de toutes les sections planes transversales (sections normales ou droites du lit prismatique ou cylindrique). Toutes ces vitesses sont en tous points parallèles aux génératrices du lit, qui déterminent donc la direction générale du courant. Les trajectoires ou enveloppes de ces vecteurs, que l'on appelle par extension, des filets liquides ou lignes de courant, sont des droites parallèles.

En mouvement permanent uniforme, on admet non seulement que ces vitesses sont parallèles en tous points d'une section transversale mais en outre équipollentes aux points correspondants des diverses sections. Mais en réalité, en chaque point et à tout instant, la vitesse réelle instantanée est la résultante du vecteur de la vitesse du mouvement moyen (ou primaire) invariable et d'une vitesse d'agitation ou de turbulence ou de pulsation variable en direction, grandeur et sens qui correspond au mouvement secondaire, et dont la moyenne statistique est nulle. C'est elle qui provoque le mélange des particules.

Certaines théories de la turbulence envisagent d'ailleurs une longueur de mélange (Prandtl) analogue au libre parcours moyen des molécules dans la théorie cinétique des gaz.

On conçoit que ce mélange doit tendre d'une manière générale à uniformiser les conditions du mouvement. On observe en effet que les vitesses du mouvement moyen en régime turbulent sont moins variées que celles du mouvement laminaire.

Selon Boussinesq, on écrit pour la tension tangentielle

$$\tau_{xy} = (\mu + \mu') \frac{dv_x}{dy},$$

μ' étant un coefficient de viscosité de turbulence variable d'un point à l'autre et variant en un même point selon le degré de turbulence, c'est-à-dire croissant avec la vitesse ou, ce qui revient au même, avec le nombre de Reynolds.

En dessous de la valeur critique du nombre de Reynolds $\mu' = 0$ (mouvement laminaire). Pour les très grandes valeurs du nombre de Reynolds, μ est négligeable vis-à-vis de μ' , l'influence de la viscosité est évanouissante; celle des chocs et des tourbillons l'emporte.

La pulsation de la vitesse et le mélange des particules donnent lieu à une dissipation d'énergie cinétique qui s'ajoute à celle de la viscosité

et qui correspond au facteur μ' . Il en résulte que μ' est déterminé par les composantes de pulsation des vitesses.

2.- REPARTITION THEORIQUE DES VITESSES DANS UN COURS D'EAU EN MOUVEMENT UNIFORME EN REGIME LAMINAIRE DANS UN CANAL PRISMATIQUE

Nous avons indiqué que le régime laminaire ne peut pas exister pratiquement dans un canal découvert de dimensions courantes. Cependant, d'un point de vue théorique, il est utile d'étudier la répartition des vitesses dans cette hypothèse.

La vitesse, qui est constante pour chaque filet liquide, varie d'un filet à l'autre, en raison des effets de la viscosité, c'est-à-dire des tensions tangentielles.

Considérons (fig. 1) un courant d'eau satisfaisant aux hypothèses énoncées, c'est-à-dire en mouvement uniforme dans un lit prismatique concave et régulier de pente

$$i = \frac{\Delta z}{\Delta s} = \text{tg } \alpha$$

Dans une section transversale normale, considérons un axe horizontal des y confondu avec le plan d'eau et un axe des z perpendiculaire au précédent. L'axe des z est donc incliné de l'angle α sur la verticale.

Considérons par rapport à ces axes un filet liquide de section $dydz$ et de longueur égale à l'unité. Les pressions s'équilibrent aux deux extrémités du filet. Dès lors, comme le mouvement est permanent et uniforme, la résultante des tensions tangentielles sur les quatre parois latérales du filet doit équilibrer la composante motrice du poids parallèle à la direction du filet et qui est égale à $\rho_e \cdot g \cdot dy \cdot dz \cdot \sin \alpha$, ρ_e désignant la masse spécifique ($\rho_e \cdot g = \gamma_e$ poids spécifique). Sur la face supérieure, la résultante des tensions tangentielles est

$$dy \cdot \tau_{xz} = \mu \cdot dy \cdot \frac{dv}{dz}$$

Sur la face inférieure, elle est

$$dy \cdot \left[\tau_{xz} + \frac{d(\tau_{xz})}{dz} dz \right]$$

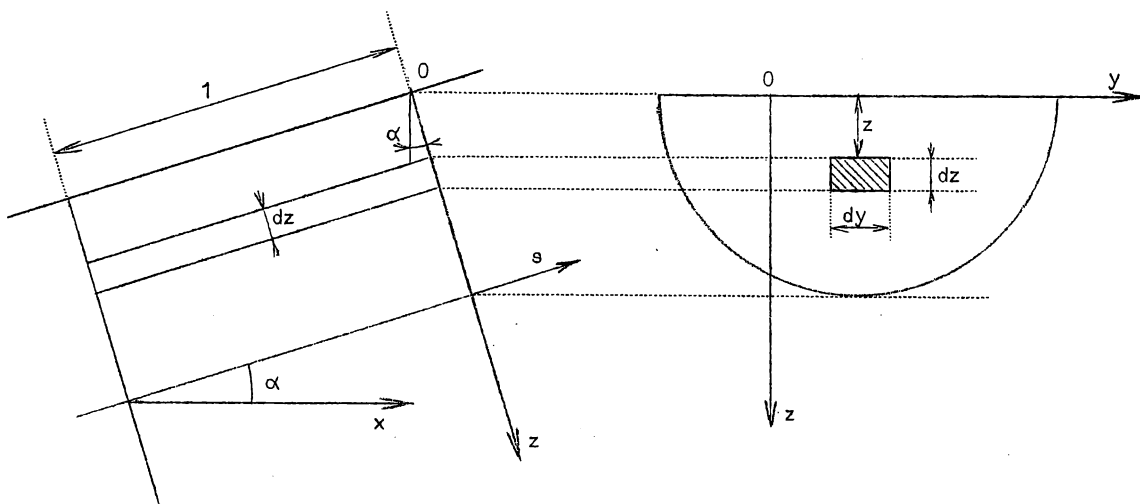


Fig. 1.

La résultante des deux est $\frac{d(\sigma_{xz})}{dz} dy \cdot dz = \mu \cdot dy \cdot dz \frac{d^2v}{dz^2}$
 car y et z sont des variables indépendantes.

On établit de la même manière que la résultante des tensions tangentielles sur les deux faces latérales est $\mu \cdot dy \cdot dz \frac{d^2v}{dy^2}$.

Donc $\rho_e \cdot g \cdot dy \cdot dz \cdot \sin \alpha + \mu \cdot dy \cdot dz \cdot \left(\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} \right) = 0$

Les pentes sont généralement assez faibles pour que l'on puisse admettre que $\sin \alpha = i = \text{tg } \alpha$;

on peut dès lors écrire $\rho_e \cdot g \cdot i = - \mu \left(\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} \right)$ (1)

C'est une forme simplifiée de l'équation de Navier pour le mouvement permanent uniforme. Elle n'est généralement pas intégrable; nous l'étudierons dans trois cas particuliers.

Nous pouvons généralement considérer z comme vertical, vu la faible valeur habituelle de la pente.

A.- Section rectangulaire infiniment large. Variations des vitesses suivant la verticale

(fig. 2)

Les vitesses sont indépendantes des y ; l'équation devient

$$\rho_e \cdot g \cdot i = - \mu \frac{d^2v}{dz^2}$$

d'où

$$v = - \frac{\rho_e \cdot g \cdot i}{2 \mu} z^2 + c' \cdot z + c$$

La loi de variation de la vitesse suivant la verticale est parabolique. En mouvement laminaire, la vitesse est nulle sur le fond (pour $z = h$) et maximum en surface, pour $z = 0$. Donc

$$c = v_s = \frac{g \cdot i}{2 \nu} h^2 \quad \text{et} \quad c' = 0$$

$$v = v_s - \frac{g \cdot i}{2 \nu} z^2 = \frac{g \cdot i}{2 \nu} (h^2 - z^2) \quad (2)$$

La vitesse moyenne sur la profondeur h est

$$v_m = v_s - \frac{g \cdot i}{6 \nu} h^2 = \frac{g \cdot i}{3 \nu} h^2$$

Elle est réalisée à la profondeur

$$\frac{h}{\sqrt{3}} = 0,58 h$$

L'expression de la tension tangentielle est $\mu \frac{dv}{dz} = - \rho_e \cdot g \cdot i \cdot z$;

sur le fond, elle est $- \rho_e \cdot g \cdot i \cdot h = - \gamma_e \cdot i \cdot h$.

B.- Section rectangulaire de très faible largeur par rapport à la profondeur - Variation des vitesses suivant l'horizontale (fig. 3)

Ce cas théorique correspond à $\frac{d^2v}{dz^2} = 0$

et $\rho_e \cdot g \cdot i = - \mu \frac{d^2v}{dy^2}$ d'où $v = c + c' \cdot y - \frac{\rho_e \cdot g \cdot i}{2 \mu} \cdot y^2$.

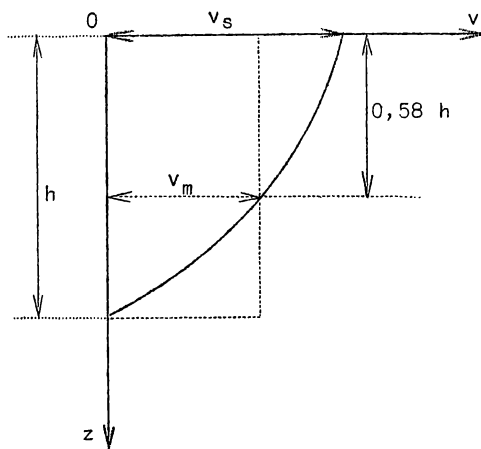


Fig. 2.

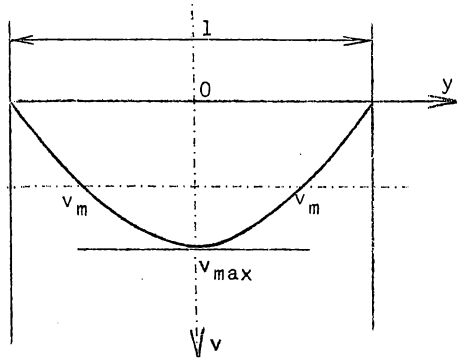


Fig. 3.

La courbe de variation des vitesses est une parabole dont l'axe est équidistant des deux parois, le long desquelles la vitesse est nulle. En adoptant l'axe de la parabole comme axe des v , $c' = 0$ et

$$c = v_{\max} = \frac{\rho_e \cdot g \cdot i \cdot l^2}{8 \mu}$$

$$\text{Donc } v = \frac{g \cdot i}{2 \nu} \left(\frac{l^2}{4} - y^2 \right) \quad (3)$$

$$\text{et } v_m = \frac{g \cdot i \cdot l^2}{12 \nu}$$

L'expression de la tension tangentielle est $-\rho_e \cdot g \cdot i \cdot y$; au bord elle vaut

$$-\frac{\rho_e \cdot g \cdot i \cdot l}{2} = -\frac{\gamma_e \cdot i \cdot l}{2}$$

C.- Section semi circulaire - Variation des vitesses suivant le rayon (fig. 4)

La variation est identique suivant tous les rayons et l'équation devient dans ce cas

$$\rho_e \cdot g \cdot i \cdot r \cdot d\theta \cdot dr + \mu \cdot \frac{d(r \frac{dv}{dr})}{dr} \cdot d\theta \cdot dr$$

$$\text{d'où } \rho_e \cdot g \cdot i = -\frac{\mu}{r} \frac{d(r \frac{dv}{dr})}{dr^2}$$

$$v = \frac{\rho_e \cdot g \cdot i}{4 \mu} \cdot (h^2 - r^2) = \frac{g \cdot i}{4 \nu} \cdot (h^2 - r^2) \quad (4)$$

car v est nul à la paroi ($r = R$) et maximum en 0 ($r = 0$)

$$v_0 = \frac{\rho_e \cdot g \cdot i}{4 \mu} \cdot h^2 = \frac{g \cdot i}{4 \nu} \cdot h^2$$

La vitesse moyenne est

$$v_m = \frac{g \cdot i \cdot h^2}{8 \nu} \quad \left(= \frac{g \cdot i}{4 \nu} \cdot \frac{\int_0^R (h^2 - r^2) \cdot r \cdot dr}{\int_0^R r \cdot dr} \right)$$

L'expression de la tension tangentielle est $-\frac{\rho_e \cdot g \cdot i \cdot r}{2}$; à la paroi elle est $-\frac{\rho_e \cdot g \cdot i \cdot h}{2}$.

Ce mouvement n'est en fait possible que dans les tubes capillaires cylindriques, pour lesquels on a la même loi des vitesses que ci-dessus, dont on déduit la formule de Poiseuille (voir paragraphe 6, chapitre VI).

Si on appelle z la profondeur variable du canal et si on rapporte la tension tangentielle sur le fond à l'unité de surface du plan d'eau horizontale, on obtient l'expression

$$\tau_{0h} = -\rho_e \cdot g \cdot i \cdot h \cdot \left(\frac{h^2}{2 z^2} \right) = -\gamma_e \cdot i \cdot h \cdot \left(\frac{h^2}{2 z^2} \right)$$

Pour l'unité de longueur du lit, la résultante des tensions tangentielles sur le fond est

$$T = \pi \cdot h \cdot \left(\frac{-\rho_e \cdot g \cdot i \cdot h}{2} \right) = -\gamma_e \cdot i \cdot \left(\frac{\pi \cdot h^2}{2} \right) = -\gamma_e \cdot i \cdot \omega$$

3.- REPARTITION THEORIQUE DES VITESSES EN MOUVEMENT TURBULENT

Nous avons vu plus haut que, selon Boussinesq, il faut en mouvement turbulent ajouter au coefficient de viscosité dynamique μ (ou moléculaire), un coefficient de viscosité de turbulence μ' (ou molaire). On définit de là les coefficients de viscosité cinématique $\nu = \frac{\mu}{\rho_e}$ et le coefficient cinématique de turbulence $\varepsilon = \frac{\mu'}{\rho_e}$. Th. von Karman a établi pour le mouvement turbulent, à partir d'hypothèses de similitude

$$\sqrt{\frac{\mathcal{C}_{xz}}{\rho_e}} = - \kappa \frac{\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2}{\frac{\partial^2 v_x}{\partial^2 z}}$$

La tension tangentielle à la paroi est désignée par \mathcal{C}_0 . Désignons par $v^* = \sqrt{\frac{\mathcal{C}_0}{\rho_e}}$ ce que l'on appelle la "vitesse de cisaillement".

A.- Cas de parois lisses ou peu rugueuses

von Karman a établi la loi générale théorique de vitesse du mouvement permanent uniforme turbulent

$$\frac{v}{v^*} = C_1 + \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{v^* \cdot z}{\nu} \right)$$

pour les parois peu rugueuses, pour lesquelles la répartition des vitesses dépend de la viscosité.

L'argument du logarithme est un nombre sans dimensions, analogue au nombre de Reynolds. v est la vitesse du mouvement moyen à la distance normale z comptée à partir de la paroi. Le coefficient κ a pour valeur 0,40.

Si on appelle z_0 la distance normale à la paroi où la vitesse s'anule, on a

$$v = 2,50 v^* \cdot \log \frac{z}{z_0} \quad (5)$$

Prandtl a établi au début du siècle la notion de couche limite. Si le liquide mouille la paroi, sa vitesse au contact de la paroi doit être la même que celle de la paroi, c'est-à-dire nulle si la paroi est immobile. Dans un écoulement turbulent, la majeure partie de la masse en mouvement, à une certaine distance de la paroi, s'écoule suivant des lois qui sont surtout dépendantes des formes géométriques des parois et relativement peu variables, c'est-à-dire relativement peu sous la dépendance de la viscosité. Il en résulte que les effets de celle-ci et les fortes tensions tangentielles sont limitées à une région assez étroite, au voisinage de la paroi et appelée couche limite. La couche limite peut être en régime laminaire si son épaisseur δ est faible (parois à faible frottement), mais si elle s'étend elle peut être caractéristiquement en mouvement turbulent. Toutefois, dans ce cas on a établi et l'on doit admettre l'exis-

tence au contact de la paroi d'une "couche sub-limite" laminaire très mince, où la vitesse varie très rapidement, suivie d'une couche de transition, enfin une région où le régime turbulent est bien établi (fig. 5).

Dans les conditions du mouvement turbulent, l'épaisseur de la couche limite est si faible par rapport aux dimensions du courant que l'on peut admettre que le gradient de vitesse y est constant, soit

$$v = z \frac{\tau_0}{\mu}$$

d'où

$$\frac{v}{\sqrt{\tau_0/\rho_e}} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_e}} \cdot \frac{z}{\nu}$$

$$\text{ou } \frac{v}{v^*} = v^* \frac{z}{\nu} .$$

D'après l'expérience, on trouve que pour $z = \delta$

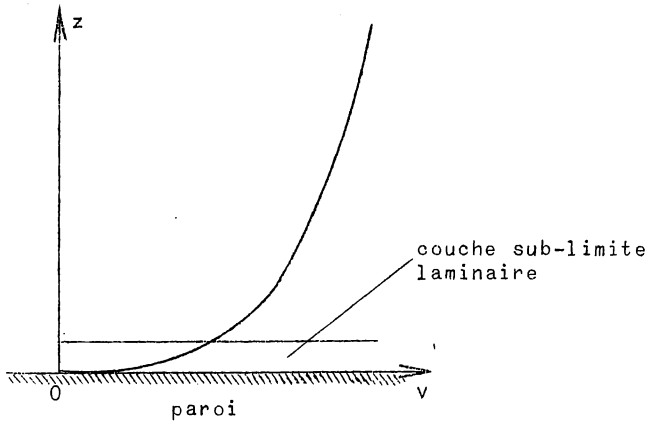


Fig. 5.

$$\frac{v}{v^*} = v^* \frac{\delta}{\nu} = 11,6 \quad \text{d'où} \quad \delta = 11,6 \frac{\nu}{v^*} .$$

De mesures précises faites par M. Burgers, M. Thysse a déduit que pour les parois peu rugueuses ou lisses,

$$z_0 = \frac{\delta}{117}$$

$$\text{d'où} \quad v = 2,5 v^* \cdot \log \frac{117 z}{\delta} \quad (6)$$

B.- Cas des parois très rugueuses

Dans le cas des parois très rugueuses, la turbulence résultant des chocs et des tourbillons à la paroi est tellement grande que l'influence de la viscosité en est atténuée. La répartition des vitesses dépendra alors d'une caractéristique linéaire de rugosité k .

La loi de répartition des vitesses devient alors, d'après von Karman

$$\frac{v}{v^*} = C_2 + 2,50 \log \left(\frac{z}{k} \right)$$

ce que l'on peut écrire aussi :

$$\frac{v}{v^*} = 2,50 \log \left(\frac{z}{z_0} \right)$$

Mais pour les parois rugueuses,

$$z_0 = \frac{k}{33}$$

d'où $v = 2,5 v^* \cdot \log \frac{33 z}{k}$ (7)

C.- Généralisation

Selon l'exemple de White pour les conduites, M. Thysse propose de prendre en général

$$z_0 = \frac{\delta}{117} + \frac{k}{33},$$

d'où la loi universelle :

$$v = 2,5 v^* \cdot \log \frac{z}{\frac{\delta}{117} + \frac{k}{33}}$$
 (8)

qui, selon l'importance relative de δ et de k , se rapproche de l'un ou l'autre des cas extrêmes.

M. Thysse propose aussi pour v^* la valeur (moyenne)

$$v_m^* = \sqrt{g \cdot R \cdot i}$$

soit $\mathcal{C}_{om} = \gamma_e \cdot R \cdot i$, R étant le rayon moyen de la section mouillée :

$$R = \frac{\omega}{\chi}$$

Localement on écrit : $\mathcal{C}_0 = f \cdot \varphi_e \frac{v_f^2}{2}$ d'où $v^* = v_f \sqrt{\frac{f}{2}}$

où f est ce que l'on appelle le coefficient de frottement à la paroi et v_f la vitesse au contact de la couche limite (ou vitesse à la paroi ou vitesse de fond).

Nous verrons plus loin les rapports entre ces valeurs.

4.- REPARTITION REELLE DES VITESSES DANS UN COURS D'EAU A LIT PRISMATIQUE EN MOUVEMENT PERMANENT UNIFORME

Au moyen de divers appareils (voir chapitre XVII), on peut mesurer les vitesses en divers points d'une section transversale d'un cours d'eau.

Si le nombre de mesures est assez élevé, on peut tracer des courbes d'égales vitesses ou isodromes (voir pl. 9, fig. 1, 2 et 3). Elles ont, dans les cas les plus réguliers, l'allure de la figure 6. Les vitesses maxima ne se produisent pas toujours ni partout à la surface, mais souvent en-dessous, l'air étant calme au-dessus de la surface de l'eau. Cela est dû notamment aux pertes de force vive provenant de l'agitation assez considérable près de la surface libre et de la résistance de l'air.

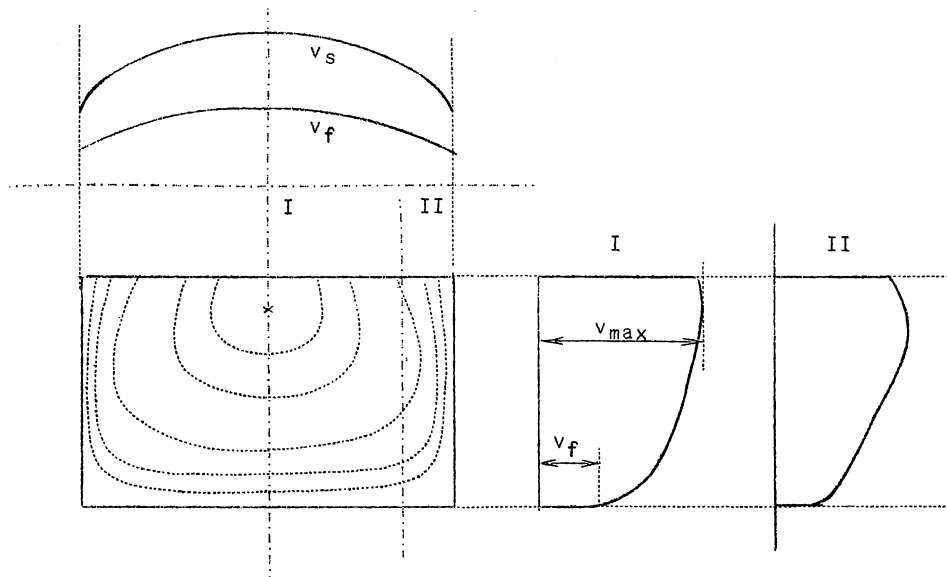


Fig. 6.

Ces courbes permettent de tracer les diagrammes de variation des vitesses suivant les horizontales (par exemple, de surface) et les verticales. Les variations de la vitesse avec la profondeur sont les plus intéressantes. On ne peut pas mesurer les vitesses sur le fond même. Les vitesses mesurées le plus près du fond ne sont pas nulles et l'on est ainsi conduit par interpolation à considérer des vitesses de fond non nulles; on peut en relever le diagramme (fig. 6 et pl.9, fig. 1). Ce sont, selon le paragraphe précédent, les vitesses au contact de la couche limite.

Par suite de la turbulence, les vitesses sont souvent assez uniformes à distance suffisante des parois. Il en est de même dans les conduites cylindriques et l'on sait que, dans ce cas, lorsque la turbulence est bien établie, la loi de variation des vitesses à distance suffisante des parois est unique et indépendante des effets de viscosité. Dans les canaux découverts, il en est de même d'une manière générale, comme il a été indiqué au paragraphe précédent, mais il y a naturellement des variations à cause des formes plus complexes et diverses. Les vitesses restent notables jusqu'au voisinage immédiat des parois, mais doivent s'annuler au contact même de celles-ci. Il doit donc y avoir au voisinage immédiat des parois une couche limite assez mince dans laquelle le gradient de vitesse est très élevé. Dans un mouvement uniforme de grande longueur, pour lequel la notion de couche limite n'a plus guère de signification, tout le courant constituant somme toute la couche limite turbulente, cette couche mince près de la paroi en régime laminaire peut être considérée comme la couche limite laminaire au sens propre du mot, dans laquelle les tensions tangentielles près des parois sont très élevées et le gradient de vitesse est très grand. Entre cette couche mince et la majeure partie du courant, où la turbulence produit des vitesses relativement peu variées, existe une

zone de transition. Le gradient de vitesse $\frac{dv_x}{dz}$ dans la couche mince laminaire peut être très élevé; il est de la forme $\frac{g \cdot i \cdot h}{\nu}$ (sec^{-1}) ou $98100 \text{ h} \cdot i$ (sec^{-1}) pour de l'eau à 20°C (Pour $i = 0,0005$, le gradient serait $49,05 \text{ h}$ (sec^{-1})). Il dépend d'ailleurs des conditions du mouvement et de la forme du lit, c'est-à-dire du nombre de Reynolds. Les vitesses mesurées et considérées comme vitesses de fond, en cas de fond fixe, sont les vitesses au contact de la couche limite laminaire.

On appelle vitesse moyenne du courant

$$u = \frac{\int^{\omega} v \cdot d\omega}{\int^{\omega} d\omega} = \frac{Q}{\omega}$$

la moyenne des vitesses des filets liquides.

Selon les expériences de Darcy et Bazin, la répartition des vitesses suivant la verticale dans des canaux rectangulaires assez larges satisfait à une loi parabolique de la forme $v = v_s - A \cdot z^2$ si la vitesse est maximum en surface, la vitesse de fond non nulle (selon la conception exposée plus haut) étant $v_f = v_s - A \cdot h^2$. Des expérimentateurs anglais et américains ont confirmé ces résultats. Les ordonnées z sont, comme au paragraphe 2, comptées à partir de la surface.

Bazin écrit notamment la formule sous la forme

$$v = u \cdot \left[1 + \sigma \cdot \left(1 - 3 \frac{z^2}{h^2} \right) \right] \quad (9)$$

d'où $v_s = u \cdot (1 + \sigma)$ et $v_f = u \cdot (1 - 2\sigma)$

D'après Bazin $\sigma = \frac{1,81 \sqrt{g'}}{C}$ (10)

C étant le paramètre de la formule du mouvement uniforme $u = C \cdot \sqrt{R \cdot i}$ (voir paragraphes 5 et 6). $\frac{\sqrt{g'}}{C}$ est un facteur sans dimensions

(= $\sqrt{\frac{B}{2}}$, voir paragraphe 5). Selon ces expériences, la vitesse moyenne se produit aux environs de $z = 0,60 \text{ h}$ (théoriquement $z = 0,58 \text{ h}$ si la vitesse est maximum en surface). Cette loi de variation des vitesses selon la verticale pourrait s'établir comme au paragraphe précédent, littéra A, pour une section rectangulaire très large, en admettant selon le paragraphe 1 :

$$\mathcal{C}_{xz} = (\mu + \mu') \cdot \frac{dv_x}{dz}$$

et en admettant que la turbulence soit assez grande pour que μ' soit grand et peu variable, donc sensiblement constant. L'intégration serait analogue et donnerait une loi parabolique; on admettrait une vitesse de fond non nulle.

Si la vitesse n'était pas maximum en surface, on écrirait

$$v = v_{\max} - A.(z - z_1)^2 ,$$

z_1 étant la profondeur à laquelle se produit la vitesse maximum et qui, selon Bazin, est comprise entre 0 et $0,3 h$.

Donc $v_s = v_{\max} - A.z_1^2$ et $v_f = v_{\max} - A.(h - z_1)^2$.

Bazin écrit notamment cette loi sous la forme

$$v = u. \left[1 + \sigma \frac{(h - z_1)^3 + z_1^3 - 3 h.(z - z_1)^2}{h.(h - z_1)^2} \right] \quad (11)$$

d'où $v_{\max} = u. \left[1 + \sigma \frac{(h - z_1)^3 + z_1^3}{h.(h - z_1)^2} \right] ,$

$$v_s = u. \left[1 + \sigma \frac{(h - z_1)^3 + z_1^3 - 3 h.z_1^2}{h.(h - z_1)^2} \right] ,$$

$$v_f = u. \left[1 + \sigma \frac{(h - z_1)^3 + z_1^3 - 3 h.(h - z_1)^2}{h.(h - z_1)^2} \right] ,$$

σ ayant la même valeur que ci-dessus. Dans tous les cas, selon Bazin

$$v_{\max} = v_f + 3 \sigma . u .$$

On a proposé d'autres expressions pour la loi des vitesses suivant la verticale, en vue de répondre aux caractères définis ci-dessus. D'après des observations effectuées sur les cours d'eau allemands, Jasmund (1893) a préconisé une loi logarithmique

$$v = v_s + b. \log \left(1 - \frac{z}{h+c} \right) \quad (12)$$

v_s étant la vitesse de surface, d'ailleurs maximum, c est une longueur très petite, mais non nulle. La vitesse de fond est

$$v_f = v_s + b. \log \frac{c}{h+c}$$

On en déduit :

$$c = h. \frac{e^{-\frac{v_s - v_f}{b}}}{1 - e^{-\frac{v_s - v_f}{b}}} > 0$$

On établit aisément que

$$v_m = v_s - b - \frac{b.c}{h} \log \frac{c}{h+c} = v_s - b - \frac{c}{h} (v_f - v_s)$$

Comme $\frac{c}{h}$ est très faible, on peut admettre approximativement

$$v_m = v_s - b = v_s + b. \log \left(1 - \frac{z_m}{h+c} \right)$$

d'où $z_m = (h + c). \frac{e - 1}{e} \approx \frac{e - 1}{e} . h = 0,632 h.$

Une autre formule logarithmique a été proposée par Krey (1927). Elle s'écrit

$$v = v_s. \frac{\log \left(1 + \frac{h-z}{c} \right)}{\log \left(1 + \frac{h}{c} \right)} , \quad \text{d'où } v_f = 0 .$$

La vitesse moyenne est

$$v_m = v_s \left[1 + \frac{c}{h} - \frac{1}{\log \left(1 + \frac{h}{c} \right)} \right]$$

D'où
$$z_m = h + c - \frac{c}{\theta} \left(1 + \frac{h}{\theta} \right) \left(1 + \frac{c}{h} \right)$$

Comme $\frac{c}{h}$ est très petit,

$$z_m \sim h \cdot \frac{e - 1}{\theta} = 0,632 h$$

comme pour la formule de Jasmund.

Ces formules logarithmiques ont quelque analogie avec les formules modernes de répartition des vitesses indiquées au paragraphe 3 et établies sur la base de considérations de similitude pour l'écoulement turbulent, c'est-à-dire pour les valeurs du nombre de Reynolds supérieures à la valeur critique. En se rapportant à la surface libre, la formule générale s'écrirait

$$v = 2,5 v^* \cdot \log \frac{h - z}{\frac{\delta}{117} + \frac{k}{33}}$$

qui n'est pas applicable jusqu'à $z = h$.

Un autre type de formule simple répondant à l'allure de variation des vitesses suivant une verticale est

$$v = v_s \cdot \sqrt[n]{1 - \frac{z}{h}} \quad (13)$$

qui, pour des valeurs élevées de l'exposant n correspond à des courbes qui varient peu pour les valeurs de z sensiblement inférieures à h , mais ont un gradient de vitesse élevée au voisinage du fond, pour $z = h$ (fig. 7).

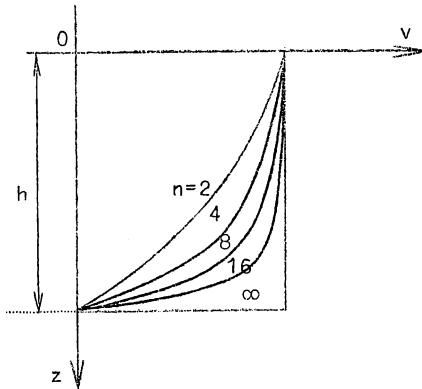


Fig. 7.

On a $v_f = 0$ et $v_m = v_s \cdot \frac{n}{1 + n}$

$$z_m = h \cdot \left[1 - \left(\frac{n}{1 + n} \right)^n \right]$$

$$= h \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{1 + n} \right)^n \right]$$

Cette formule aussi considère que la vitesse maximum se produit à la surface.

Aucune formule ne peut satisfaire aux conditions très complexes de l'écoulement dans les canaux découverts, surtout dans les cours d'eau naturels. Le mieux sera, toutes les fois que l'on pourra, de se référer aux observations. Celles-ci sont souvent en accord convenable avec des formules du type de celles de Bazin jusqu'aux distances les plus rapprochées des parois auxquelles on peut généralement mesurer les vitesses et que l'on considère comme vitesses de fond non nulles. Les variations des vitesses très près du fond ne peuvent être pratiquement mesurées, non plus que les vitesses du fond même, lorsque celui-ci est mobile. La vitesse n'est pas nulle dans ce cas sur le

elles les fois que l'on pourra, de se référer aux observations. Celles-ci sont souvent en accord convenable avec des formules du type de celles de Bazin jusqu'aux distances les plus rapprochées des parois auxquelles on peut généralement mesurer les vitesses et que l'on considère comme vitesses de fond non nulles. Les variations des vitesses très près du fond ne peuvent être pratiquement mesurées, non plus que les vitesses du fond même, lorsque celui-ci est mobile. La vitesse n'est pas nulle dans ce cas sur le

fond, qui est entraîné; elle s'annule à une certaine profondeur sous le fond (voir chapitre XVI). Les vitesses près du fond dépendent de la nature des parois et déterminent en fait la vitesse moyenne et toute la répartition des vitesses (voir paragraphes 5 et 6).

On peut, par observation, relever la courbe des vitesses de surface (pl. 9, fig. 1) et en déduire la vitesse moyenne de surface

$$v_{sm} = \frac{1}{l} \cdot \int_0^l v_s \cdot dl .$$

La vitesse moyenne de courant $u = \frac{Q}{\Omega}$ est la moyenne des vitesses moyennes sur les verticales

$$u = \frac{\iint v \cdot dz \cdot dl}{\int dz \cdot dl} = \frac{1}{l} \cdot \frac{\iint (v \cdot dz) \cdot dl}{\int dz} = \frac{1}{l} \cdot \int \left(\frac{\int v \cdot dz}{h} \right) \cdot dl$$

$$u = \frac{1}{l} \cdot \int_0^l v_m \cdot dl$$

Si on admet $v = v_s \cdot \sqrt[n]{1 - \frac{z}{h}}$

$$u = \frac{1}{l} \cdot \frac{n}{1+n} \cdot \int v_s \cdot dl = \frac{n}{1+n} \cdot v_{sm} = m \cdot v_{sm}$$

d'où $n = \frac{m}{1-m}$. Le rapport $m = \frac{u}{v_{sm}}$ peut être déduit de mesures de vitesses; il varie entre 0,80 et 0,96. Donc n serait compris entre 4 et 24, le plus souvent entre 4 et 8. Si on adopte la valeur moyenne $n = 6$, $v_m = \frac{6}{7} \cdot v_s = 0,86 v_s$, formule approximative assez usitée en pratique.

On peut tracer le lieu des points où se produisent les vitesses moyennes sur les diverses verticales (pl. 9, fig. 2); on peut aussi tracer le diagramme de ces vitesses rapporté au plan d'eau. On trace parfois aussi le diagramme des vitesses de fond v_f rapporté au plan d'eau (pl. 9, fig. 1). Il est généralement moins régulier que celui des v_s et des v_m , ce qui s'explique suffisamment par les considérations précédentes.

5.- FORMULE DU MOUVEMENT UNIFORME DANS UN LIT PRISMATIQUE - ETABLISSEMENT THEORIQUE

A.- SI nous considérons d'abord, d'un point de vue tout théorique, le mouvement laminaire, pour une section rectangulaire infiniment large

$$u = \frac{g \cdot i}{\nu} \cdot \frac{h^2}{3} \qquad q = \frac{g \cdot i}{\nu} \cdot \frac{h^3}{3}$$

débit par unité de largeur.

Pour une section rectangulaire infiniment profonde

$$u = \frac{g \cdot i}{\sqrt{v}} \cdot \frac{1^2}{12} \qquad q = \frac{g \cdot i}{\sqrt{v}} \cdot \frac{1^3}{12},$$

débit par unité de hauteur.

Pour une section semi-circulaire de rayon R :

$$u = \frac{g \cdot i}{\sqrt{v}} \cdot \frac{h^2}{8} \qquad Q = \frac{g \cdot i}{\sqrt{v}} \cdot \frac{\pi \cdot h^4}{16}$$

Ces formules sont directement déduites du paragraphe 2. Elles peuvent encore s'écrire :

a) pour le rectangle infiniment large :

$$i = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{v}}{u \cdot h} \right) \cdot \left(\frac{u^2}{g \cdot h} \right) = 3 \frac{g}{u^3};$$

b) pour le rectangle infiniment profond :

$$i = 12 \left(\frac{\sqrt{v}}{u \cdot i} \right) \cdot \left(\frac{u^2}{g \cdot i} \right) = 12 \frac{g}{u^3};$$

c) pour le demi-cercle :

$$i = 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{v}}{u \cdot h} \right) \cdot \left(\frac{u^2}{g \cdot h} \right) = 8 \frac{g}{u^3}.$$

La pente est donc proportionnelle au quotient du nombre de Froude par le nombre de Reynolds et à un coefficient de forme; elle est indépendante de la rugosité. On notera cependant l'importance de l'effet des parois par le coefficient de forme.

B.- Pour le cas réel du mouvement turbulent, nous chercherons à établir d'une manière rationnelle la formule du mouvement uniforme. Considérons un tronçon du cours d'eau prismatique de longueur Δl , de section mouillée ω et de pente $i = \operatorname{tg} \alpha$ assez faible. Les pressions sont identiques dans les deux sections d'extrémité. Leur répartition y est d'ailleurs hydrostatique. Donc, puisque le mouvement est uniforme, la composante motrice du poids parallèle au fond $\gamma_e \cdot \omega \cdot \Delta l \cdot \sin \alpha$ doit équilibrer la résultante des tensions tangentielles sur le fond. En mouvement turbulent, on admet que la résistance de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse v_f au contact de sa couche limite (cfr paragraphe 3). Donc, pour un élément $d\chi$ du périmètre mouillé

$$\Delta l \cdot dT = \gamma_e \cdot f \cdot \frac{v_f^2}{2 \cdot g} \cdot d\chi \cdot \Delta l = d\chi \cdot \Delta l \cdot \mathcal{C}_0$$

f étant le coefficient de frottement à la paroi, grandeur sans dimensions.

La force de frottement totale est

$$\Delta l \cdot T = \frac{\gamma_e \cdot f \cdot \Delta l}{2 \cdot g} \cdot \int^x v_f^2 \cdot d\chi = \Delta l \cdot \int^x \mathcal{C}_0 \cdot d\chi$$

Posons
$$\int^x v_f^2 \cdot d\chi = \chi \cdot v_{fm2}^2$$

v_{fm2} étant la vitesse moyenne énergétique de fond, c'est-à-dire celle dont le carré est la moyenne des carrés des vitesses de fond. Dès lors

$$\Delta l \cdot T = \frac{\gamma_e \cdot f}{2 \cdot g} \cdot \Delta l \cdot \chi \cdot v_{fm2}^2 = \gamma_e \cdot \omega \cdot \Delta l \cdot \sin \alpha = \chi \cdot \Delta l \cdot \mathcal{C}_{0m}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad \frac{\omega}{\chi} \cdot \sin \alpha &= R \cdot i = \frac{f}{2g} \cdot v_{fm2}^2 \\ v_{fm2} &= \sqrt{\frac{2g}{f}} \cdot \sqrt{R \cdot i} = C_1 \cdot \sqrt{R \cdot i} \end{aligned} \quad (14)$$

en posant $\frac{\omega}{\chi} = R =$ rayon hydraulique moyen et $\sin \alpha = i = \operatorname{tg} \alpha$, vu la faible valeur des pentes. C'est la formule de Chézy (1775); C_1 est une constante dépendant de la nature du fond, mais v_{fm2} est la vitesse moyenne énergétique de fond. Elle diffère généralement peu de la vitesse moyenne de fond

$$v_{fm} = \frac{1}{\chi} \cdot \int^{\chi} v_f \cdot d\chi$$

En effet, posons

$$v_f = v_{fm} + (\delta v_f),$$

donc

$$\int^{\chi} (\delta v_f) \cdot d\chi = 0$$

$$v_{fm2}^2 = \frac{1}{\chi} \cdot \int^{\chi} v_f^2 \cdot d\chi = \frac{1}{\chi} \cdot \int^{\chi} (v_{fm} + \delta v_f)^2 \cdot d\chi = v_{fm}^2 + \frac{1}{\chi} \cdot \int^{\chi} (\delta v_f)^2 \cdot d\chi$$

$$\text{Posons} \quad \varphi = \frac{\int^{\chi} (\delta v_f)^2 \cdot d\chi}{\chi \cdot v_{fm}^2} = \chi \cdot \frac{\int^{\chi} (\delta v_f)^2 \cdot d\chi}{[\int^{\chi} v_f \cdot d\chi]^2}$$

$$\text{d'où} \quad v_{fm2} = v_{fm} \cdot \sqrt{1 + \varphi} \approx v_{fm} \cdot \left(1 + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (15)$$

φ est généralement petit, car les δv_f sont relativement petits, à fortiori leurs carrés.

C_1 a comme dimensions $l^{1/2} \cdot t^{-1}$.

Sous forme de relation sans dimensions, on peut écrire

$$\sin \alpha = i = f \cdot \frac{v_{fm2}^2}{(2R) \cdot g} \quad (\equiv f \cdot \mathfrak{F}_{fm2})$$

On ne connaît généralement ni v_{fm2} ni v_{fm} ; on considère plutôt la vitesse moyenne du courant u .

Désignons par Ψ le rapport $\frac{v_{fm}}{u}$, d'où $v_{fm2} = \Psi \sqrt{1 + \varphi} \cdot u$

$$\text{d'où} \quad u = \frac{v_{fm2}}{\Psi \sqrt{1 + \varphi}} = \frac{1}{\Psi} \cdot \sqrt{\frac{2g}{f \cdot (1 + \varphi)}} \cdot \sqrt{R \cdot i} = C \cdot \sqrt{R \cdot i} \quad (16)$$

$$C = \frac{C_1}{\Psi \sqrt{1 + \varphi}} \approx \frac{C_1}{\Psi \left(1 + \frac{\varphi}{2}\right)} \quad (m^{1/2} \cdot \text{sec}^{-1}) \quad (17)$$

Ψ et φ dépendent de la répartition des vitesses, c'est-à-dire du nombre de Reynolds, de la forme du lit, et aussi de la rugosité des parois, dont dépend aussi C_1 . Sous forme de coefficients sans dimensions, on écrira :

$$\sin \alpha = (\operatorname{tg} \alpha) = i = f \cdot \psi^2 \cdot (1 + \varphi) \cdot \frac{u^2}{(2R) \cdot g} = \left(\frac{2g}{c^2}\right) \cdot \frac{u^2}{(2R) \cdot g} = \beta \cdot \frac{u^2}{(2R) \cdot g} \quad (18)$$

$$i = \beta \cdot \mathfrak{F}_u$$

C a comme dimensions $l^{1/2} \cdot t^{-1}$; β est sans dimensions et a pour expression

$$\beta = f \cdot \psi^2 \cdot (1 + \varphi) \quad (19)$$

$$[\beta = f \cdot \left(\frac{v_{fm}^2 + \int^x (\delta v_f)^2 \cdot d\chi}{u^2} \right)]$$

Il est préférable d'écrire l'équation comme ci-dessus plutôt que sous la forme classique

$$R \cdot i = \varphi(u) = b \cdot u^2 ,$$

où b a comme dimensions $l^{-1} \cdot t^2$ et vaut

$$b = \frac{1}{c^2} = \frac{\psi^2 \cdot (1 + \varphi)}{c^2} = \frac{\psi^2 \cdot (1 + \varphi) \cdot f}{2g} = \frac{\beta}{2g} \quad (20)$$

C.- Nous référant au paragraphe 3, C), en mouvement turbulent

$$v = 2,5 v^* \cdot \log \frac{z}{\frac{\delta}{117} + \frac{k}{23}}$$

M. J.Th. Thysse (Formulae for the friction head loss along conduit walls under turbulent flow - 3^e Réunion de l'A.I.R.T.H., Grenoble, septembre 1949), adopte, comme il a été indiqué au paragraphe 3, C)

$$v_m^* = \sqrt{g \cdot R \cdot i} , \quad \text{à quoi correspond } \mathfrak{C}_{om} = \gamma_e \cdot R \cdot i .$$

Ces valeurs sont en fait des moyennes pour toute la paroi. On a en effet établi ci-dessus :

$$\Delta l \cdot \int^x \mathfrak{C}_o \cdot d\chi = \Delta l \cdot \chi \cdot \mathfrak{C}_{om} = \gamma_e \cdot \omega \cdot \Delta l \cdot \sin \alpha , \quad \text{d'où } \mathfrak{C}_{om} = \gamma_e \cdot R \cdot i$$

et
$$v_m^* = \sqrt{g \cdot R \cdot i} .$$

Par intégration de la formule de v pour toute une section, on trouve

$$u = \int^{\omega} \frac{v \cdot d\omega}{\omega} = B \cdot v_m^* .$$

Comme
$$u = C \cdot \sqrt{R \cdot i} \quad \text{et} \quad v_m^* = \sqrt{g \cdot R \cdot i} ,$$

on a
$$B = \frac{C}{\sqrt{g}} = \sqrt{\frac{2}{\beta}}$$

Pour les sections rectangulaires infiniment larges, on trouve

$$B = 2,5 \left[\log R - \log \frac{\delta}{43,1} - \log \frac{k}{12,2} \right]$$

et pour les sections circulaires

$$B = 2,5 \left[\log R - \log \frac{\delta}{52,3} - \log \frac{k}{14,8} \right]$$

Considérant l'imprécision inévitable de δ et de k , M. Thysse propose d'écrire une formule unique, indépendante de la forme du lit et il propose

$$B = 2,5 \left[\log R - \log \frac{\delta}{48} - \log \frac{k}{12} \right]$$

ou

$$B = 2,5 \left[\log 12 R - \log \frac{\delta}{4} - \log k \right]$$

On en déduit :

$$u = B \cdot v_m^* = B \cdot \sqrt{g} \cdot \sqrt{R \cdot i} = C \cdot \sqrt{R \cdot i}$$

et

$$C = B \cdot \sqrt{g} = 7,82 \left(\log 12 R - \log \frac{\delta}{4} - \log k \right)$$

ou, en logarithmes décimaux

$$C = 18 \left(\log_{10} 12 R - \log_{10} \frac{\delta}{4} - \log_{10} k \right) \quad (21)$$

On remarquera que $v_m^* = \sqrt{g \cdot R \cdot i}$ est de l'ordre de 10^{-2} m/sec.

En prenant pour δ la valeur $\frac{12 \nu}{v_m^*}$ (au lieu de $\frac{11,6 \nu}{v^*}$) et considérant que pour l'eau, à 20°C, $\nu = 10^{-6}$ m²/sec, δ est toujours très faible en hydraulique fluviale, de l'ordre de 10^{-4} m. $\frac{\delta}{4}$ est donc toujours très petit et négligeable pour les canaux découverts rugueux. On a alors

$$C = 18 \log_{10} \frac{12 R}{k} \quad (22)$$

La formule (21) peut aussi s'écrire

$$C = - 18 \log_{10} \left(\frac{k}{12 R} + \frac{C}{3 R} \right)$$

avec

$$R = \frac{4 R \cdot u}{\nu}$$

Powell a toutefois proposé la formule

$$C = - 23 \log_{10} \left(\frac{k}{R} + \frac{C}{3,3 R} \right)$$

6.- FORMULES PRATIQUES DU MOUVEMENT UNIFORME

On les écrit habituellement sous la forme

$$u = \frac{Q}{\omega} = C \cdot \sqrt{R \cdot i} \quad (16)$$

C n'est plus une constante dépendant uniquement de la nature des parois,

mais un coefficient variable dépendant de la répartition des vitesses, c'est-à-dire aussi des dimensions et de la forme du lit.

C ne peut être déterminé que par l'expérience. De nombreuses formules ont été proposées sur la base d'expériences faites sur des canaux découverts et aussi sur des conduites forcées, pour lesquelles les lois de l'écoulement uniforme sont en principe les mêmes. β dépend du nombre de Reynolds, mais il est remarquable, d'après les résultats des expériences, qu'il varie relativement peu en régime turbulent, c'est-à-dire pour des nombres de Reynolds supérieurs à la valeur critique.

Par exemple, pour une section semi-circulaire, de rayon h ,

$$2 R = \frac{2 \omega}{\chi} = \frac{\pi \cdot h^2}{\pi \cdot h} = h$$

et, en mouvement laminaire (voir paragraphe 5) :

$$\beta = 8 \frac{v}{u \cdot h} = 4 \frac{v}{u \cdot R} = \frac{4}{R}$$

Pour un lit rectangulaire infiniment large, $R \approx h$ et, en régime laminaire

$$\beta = \frac{6 v}{u \cdot R} = \frac{6}{R}$$

On a la même valeur pour le lit rectangulaire infiniment profond. Ces valeurs de β sont valables pour des valeurs du nombre de Reynolds $R = \frac{u \cdot R}{v}$ de 0 à la valeur critique inférieure (environ 500 pour la section semi-circulaire, 360 environ pour les sections rectangulaires). Donc, dans le régime laminaire, les valeurs de β peuvent varier de l'infini à 0,0167 ou 0,008. Dans le régime turbulent, l'expérience montre qu'elles ne varient guère qu'entre 0,015 et 0,003.

La plupart des formules pratiques empiriques ne sont pas correctes dimensionnellement; il faut donc prendre bien garde aux unités. Il y aurait intérêt à les exprimer sous la forme sans dimensions

$$u^2 = \frac{2 g}{\beta} \cdot R \cdot i \quad (\text{von Mises})$$

Les formules les plus usitées sont les suivantes :

a.- Formule de Bazin

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} \quad (\text{m, sec.}) \quad (23)$$

γ est un coefficient dépendant de la nature des parois, qui a comme dimension $l^{1/2}$. Il est improprement appelé coefficient de rugosité.

VALEURS DU COEFFICIENT γ DE BAZIN

- | | |
|---|----------------|
| 1) Parois très unies - ciment lisse - bois raboté | 0,06 $m^{1/2}$ |
| 2) Parois unies, planches, briques, pierres de taille. | 0,16 |
| 3) Parois en maçonnerie de moëllons. | 0,46 |
| 4) Parois de nature mixte, sections en terre très régulières,
rigoles revêtues de perrés. | 0,85 |
| 5) Canaux en terre dans des conditions ordinaires. | 1,30 |
| 6) Canaux en terre présentant des résistances exceptionnelles,
fonds de galets, parois herbées | 1,75 |

Sous la forme sans dimensions, la formule de Bazin s'écrit :

$$\beta = 0,00259 \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}\right)^2 ;$$

elle est alors indépendante des unités.

b.- Formule de Ganguillet et Kutter

$$C = \frac{23 + \frac{0,00155}{i} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{i}\right) \cdot \frac{n}{\sqrt{R}}} \quad (\text{m, sec}) \quad (24)$$

Pour que cette formule soit correcte dimensionnellement, n doit avoir comme dimensions t. La valeur de n dépend de la nature des parois.

VALEURS DU COEFFICIENT n DE GANGUILLET ET KUTTER

- 1) Planches bien rabotées. 0,009
- 2) Enduit de ciment. 0,010
- 3) Planches brutes 0,012
- 4) Moëllons et briques, maçonnerie bien dressée. . . . 0,013
- 5) Briques, maçonnerie ordinaire 0,017
- 6) Maçonnerie dégradée 0,020
- 7) Maçonnerie de moëllons grossière. 0,025
- 8) Parois naturelles en bon état 0,030
- 9) Parois naturelles dégradées 0,035
- 10) Torrents encombrés de dépôts 0,050

Sous la forme sans dimensions, le coefficient s'écrit :

$$\beta = \frac{\left[1 + \left(23 + \frac{0,00155}{i}\right) \cdot \frac{n}{\sqrt{R}}\right]^2}{\left(5,19 + \frac{0,00035}{i} + \frac{0,2255}{n}\right)^2}$$

c.- Formule de Koechlin

(analogue à une ancienne formule de Hesse).

$$C = C_1 \cdot (1 + A \cdot \sqrt{R}), \quad A = 0,6 \text{ pour } R < 3 \text{ m. (m, sec)} \quad (25)$$

C₁ est le coefficient de Chézy, dépendant de la nature des parois (dimensions l^{1/2}.t⁻¹).

VALEURS DES COEFFICIENTS C₁ DE LA FORMULE DE KOEHLIN

- 1) Canaux à enduit lisse 51 m^{1/2}sec⁻¹
- 2) Canaux en béton ou maçonnerie à enduit ordinaire. . . . 42
- 3) Canaux en maçonnerie de pierres de taille ou briques. . . 35
- 4) Canaux à profils très réguliers ou entre murs ou perrés . 30
- 5) Rivières ou canaux en gravier 24
- 6) Rivières ou canaux avec galets grossiers. 20
- 7) Rivières ou canaux avec très gros galets ou plantes aquatiques : 18

Sous la forme sans dimensions, la formule s'écrit :

$$\beta = \frac{19,62}{C_1^2 \cdot (1 + 0,6 \sqrt{R})^2}$$

d.- Formule de Manning (1890)

Appelée parfois aussi de Hagen (1868) ou de Gauckler (1868, cependant Gauckler écrivait $u^2 = C.R^{4/3} . i$ avec C constant pour $i < 0,0007$)

$$C = K.R^{1/6} \quad (\text{m, sec}) \quad (26)$$

dans laquelle K est un coefficient dépendant de la nature des parois (dimensions $l^{1/3} . t^{-1}$).

Le coefficient K de la formule de Manning est sensiblement l'inverse de celui de la formule de Ganguillet et Kutter, en fonction du mètre et de la seconde.

VALEURS DU COEFFICIENT K DE MANNING

- 1) Parois très unies 110-100 $m^{1/3} . sec^{-1}$
- 2) Maçonnerie très unie. 90
- 3) Parois unies. 77
- 4) Parois de moëllons. 70
- 5) Parois peu unies. 58
- 6) Parois rugueuses. 50
- 7) Parois en terre 40
- 8) Parois en gravier 33,33
- 9) Parois irrégulières 29
- 10) Parois très irrégulières 25

Sous la forme sans dimensions, on aurait :

$$\beta = \frac{19,62}{K^2 . R^{1/3}}$$

Il est intéressant de noter que Strickler (1923) a mis cette formule sous la forme

$$C = k' . \xi^{1/6} \quad (27)$$

en posant $\xi = \frac{R}{k}$, k étant la dimension des inégalités moyennes caractéristiques de la rugosité des parois ou le diamètre moyen des matériaux constitutifs du fond et des berges. ξ est donc un coefficient de régularité de la surface, inverse d'un coefficient de rugosité. k' aurait une valeur constante moyenne égale à $20 m^{1/2} \times sec^{-1}$ (21,1 selon Strickler, 19,05 selon Chang).

Par rapport à la formule de Manning, $k' = K.k^{1/6}$ d'où $k = \left(\frac{k'}{K}\right)^6$. D'après cela, le coefficient 100 de Manning pour les parois très unies correspondront à des inégalités de 64μ (microns); celui de 40 pour les parois en terre à des aspérités de $\frac{1}{64}$ de m ou 0,0157 m.

Mis sous la forme sans dimensions, le coefficient de Strickler s'écrirait

$$\beta = \frac{0,04905}{\xi^{1/3}}$$

e) Formule de R. von Mises

$$C = \sqrt{\frac{2g}{\beta}}$$

$$\beta = 0,0024 + 0,707 \sqrt{\frac{k}{R}} + 0,3 \sqrt{\frac{v}{(2R) . u}} \quad (\text{m, sec}) \quad (28)$$

Cette formule est dimensionnellement correcte $\frac{k}{R} = \frac{1}{\xi}$ est le "coefficient de rugosité relative". Pour des parois parfaitement lisses et des nombres de Reynolds très élevés, $\beta = 0,0024$, valeur limite inférieure. Le second terme correspond à l'influence de la rugosité; le troisième correspond à l'influence de la viscosité, c'est-à-dire à la forme et aux dimensions de la section.

Pour les valeurs du nombre de Reynolds voisines de la valeur critique, dans la région de transition, il faudrait une formule plus compliquée; son emploi est peu probable dans les canaux découverts, où le nombre de Reynolds est généralement élevé.

VALEURS DU COEFFICIENT k DE LA FORMULE DE von MISES

1) Bronze poli	0,09 - 0,49	10^{-4} m.
2) Bois raboté	1,22 - 2,45	
3) Bois brut	2,45 - 4,90	
4) Béton lissé	0,365 - 0,73	
5) Béton brut	1 - 2	
6) Maçonnerie de briques . . .	10 - 27,5	
7) Maçonnerie de moëllons . .	45 - 180	
8) Terres	490 - 1000	

M. von Mises ne recommande pas cette formule pour les cours d'eau naturels, pour lesquels il préfère la formule de Bazin. Sa formule est plutôt établie pour les conduites de section circulaire.

f.- Formule logarithmique simplifiée de M. Thysse (Delft) (1)

$$C = 18 \log_{10} \frac{12 R}{k} \quad (\text{m, sec}) \quad (29)$$

k a la même signification que ci-dessus et est exprimé en m.

Donc $C = 18 \log_{10} 12 \xi \quad (\text{m, sec}) \quad (29 \text{ bis})$

pour des sections assez larges,

Pour des sections circulaires, il faudrait substituer 15 à 12.

Sous la forme sans dimensions $\beta = \frac{0,0606}{(\log 12 \xi)^2}$

(1) La formule de M. Thysse est dérivée de la formule récente de Colebrook-White pour l'écoulement de l'eau dans les conduites circulaires.

$$\frac{1}{2\sqrt{\beta}} = -2 \log_{10} \left[\frac{k}{3,71 D} + \frac{2,51}{\left(\frac{8 u_* R}{\nu}\right) \sqrt{\beta}} \right]$$

(Voir le Génie Civil, 15 décembre 1947).

Le deuxième terme de l'argument du logarithme est négligeable pour les grandes valeurs du nombre de Reynolds. R est le rayon hydraulique moyen $\frac{D}{4}$.

VALEURS DES COEFFICIENTS k SELON M. THYSSE (en m) :

- 1) Béton lisse 2×10^{-4}
- 2) Bois raboté 3×10^{-4}
- 3) Béton enduit
Bois brut
Maçonnerie de briques soignée 10^{-3}
- 4) Bois usé
Maçonnerie de moëllons 3×10^{-3}
- 5) Béton brut
Maçonnerie de briques ordinaire 5×10^{-3}
- 6) Canaux en terre réguliers
Perrés de pierres sèches 10^{-2}
- 7) Béton usé, gravier fin 2×10^{-2}
- 8) Fond de sable mobile 3×10^{-2}
- 9) Gros gravier 5×10^{-2}
- 10) Canal en terre ordinaire avec végéta-
tions, galets 2×10^{-1}
- 11) Lit majeur avec obstacles
Blocs rocheux 5×10^{-1}

7.- FORMULE MONÔME ET ABAQUES

Pour la facilité des calculs et de l'établissement de tables numériques ou d'abaques, il est commode de mettre les formules sous la forme

$$u = C_R \sqrt{R} \cdot \sqrt{i} = C_R \sqrt{i} \quad \text{avec} \quad C_R = C \cdot \sqrt{R}$$

Les valeurs de C_R sont (en $m \times sec^{-1}$)

- 1°) d'après Bazin $C_R = \frac{87 R}{\sqrt{R} + \gamma}$
- 2°) d'après Koechlin $C_R = C_1 \cdot (\sqrt{R} + 0,6 R)$ pour $R < 3 m$
- 3°) d'après Manning $C_R = K \cdot R^{2/3}$
- 4°) d'après Strickler $C_R = \frac{20 \cdot R^3}{k}$
- 5°) d'après Thysse $C_R = 18 \sqrt{R} \log 12 \tau$

L'abaque 1 permet la résolution de la formule de Bazin mise sous la forme "monôme" ci-dessus. Une courbe cotée $\gamma = 2,25$ a été ajoutée, pour les Interpolations éventuelles, aux courbes cotées de $\gamma = 0,06$ à $1,75$. Ces courbes sont celles de C_R en fonction de R (en abscisses) et de γ (cotes des courbes). 3 échelles parallèles cotées logarithmiquement en valeur de C_R , i et u permettent le calcul des vitesses par la méthode des points alignés.

L'abaque 2 permet la résolution de la formule de Manning mise sous la forme "monôme" ci-dessus.

8.- REMARQUES SUR LES FORMULES DU MOUVEMENT UNIFORME

D'après une table graphique de M. M.KOECHLIN, il y a une relative concordance de résultats entre les trois premières formules, surtout pour les

cas correspondant aux n° 3 à 7 de la formule de M. M. Koechlin. Chacune de ces formules montre comment la valeur de C est variable avec la nature des parois et, par conséquent, il est certain qu'un petit nombre de valeurs des coefficients, correspondant à des circonstances définies d'une manière très générale, ne répond pas à la réalité des faits, mais que dans l'application on peut rencontrer toutes les valeurs des coefficients comprises entre des limites voisines des valeurs extrêmes données par les auteurs. D'autre part, C₁ et C sont certes influencés par la mobilité du lit, qui tend à en diminuer les valeurs numériques, ce dont les valeurs expérimentales tiennent compte. Il est donc recommandable, pour un cours d'eau quelconque, de déterminer expérimentalement la valeur de C en fonction de R ou le coefficient de rugosité. La formule de Koechlin a l'avantage d'être assez suggestive et de rattacher la vitesse moyenne du courant $u = \frac{Q}{\omega}$ à la vitesse moyenne énergétique de fond et au coefficient de rugosité C₁ ou f.

On a notamment $u = (1 + A \cdot \sqrt{R}) \cdot v_{fm2}$, A = 0,6 (R < 3 m) ;

$$\psi \sqrt{1 + \varphi} = \frac{1}{1 + A \cdot \sqrt{R}}$$

formule utile pour les calculs et mesures.

Si on adopte une certaine loi de variation des vitesses suivant la profondeur, on peut en déduire la vitesse moyenne de surface.

M. Koechlin recommande la formule :

$$\frac{u}{v_{sm}} = 0,82 \cdot \frac{1 + A \cdot \sqrt{R}}{1 + \frac{3}{2} A \cdot \sqrt{R}}, \quad A = 0,6 \quad (R < 3 \text{ m})$$

v_{sm} étant la vitesse moyenne de surface. Les écarts de cette formule avec les observations seraient inférieures à 10 %.

Les formules de Strickler, de von Mises et de Thysse ont aussi l'avantage de se rapporter explicitement à un coefficient de rugosité $\frac{k}{R}$ mesurable ou définissable, ou à son inverse $\zeta = \frac{R}{k}$. La formule de Bazin peut être mise sous une forme analogue en écrivant :

$$C = \frac{87}{1 + \sqrt{\frac{\gamma^2}{R}}}$$

Par comparaison avec les autres formules $\gamma^2 = \sim 15 k$

d'où
$$C = \frac{87}{1 + \frac{3,87}{\sqrt{\zeta}}} \quad (30)$$

et
$$\beta = 0,00259 \cdot \left(1 + \frac{3,87}{\sqrt{\zeta}}\right)^2$$

Si l'on compare les formules de Bazin et de Manning en ordonnées logarithmiques, on constate qu'il y a moyen de les accorder pour des valeurs de R assez grandes, par exemple supérieures à 1 mètre, mais la formule s'écrirait

$$C_R = K.R^m$$

et l'exposant m n'aurait pas la valeur constante $\frac{2}{3}$ de la formule de Manning. Il varierait ainsi que K avec γ . Pour $\gamma = 0,06$, m vaudrait $1/2$; il serait égal à $2/3$ pour $\gamma = 1,30$ et pour les valeurs de γ supérieures à 1,30, notamment 1,75, $m = 3/4$. En d'autres termes toutes ces formules assez différentes à première vue, mais qui sont d'ailleurs toutes destinées à interpréter les mêmes résultats expérimentaux, présentent après plus ample analyse des points communs et peuvent donner des résultats comparables moyennant ajustement exact de leurs paramètres expérimentaux.

Pour l'usage, des tables systématiques peuvent les rendre également pratiques.

La formule de Strickler a aussi l'avantage de permettre une relation entre f et k, coefficient de frottement et dimension des rugosités.

En effet
$$C = 20 \left(\frac{R}{k}\right)^{1/6} = \frac{C_1}{\Psi \sqrt{1 + \varphi}} = \frac{\sqrt{2g}}{\Psi \sqrt{f \cdot (1 + \varphi)}}$$

d'où
$$\frac{f}{2g} = \left(\frac{k}{R}\right)^{1/3} \cdot \frac{1}{400 \Psi^2 \cdot (1 + \varphi)}$$

$$f = \frac{g}{200 \Psi^2 \cdot (1 + \varphi)} \cdot \left(\frac{k}{R}\right)^{1/3}$$

Si on se réfère à la formule de Koechlin, on a

$$\frac{C}{C_1} = \frac{1}{\Psi \sqrt{1 + \varphi}} = (1 + 0,6 R^{1/2}) \quad \text{pour } R < 3 \text{ m}$$

d'où l'on déduit

$$f = 0,04905 [R^{-1/6} + 0,6 R^{1/3}] \cdot k^{1/3} . \quad (31)$$

Il faut naturellement faire des réserves sur la validité d'une telle relation déduite de formules empiriques, qui sont entachées d'imprécision. Sa validité doit être non seulement limitée à la valeur supérieure de R de 3 m, mais certes aussi vers le bas à une valeur supérieure à 0. La relation donne cependant les résultats que voici

R =	0,5	1	2	3 m
$R^{-1/6} + 0,6 R^{1/3} =$	1,609	1,60	1,65	1,70

Ils constituent une justification meilleure qu'on pouvait l'espérer de l'hypothèse implicite du paragraphe 5, B), que le coefficient de frottement f dépend uniquement de la rugosité des parois, c'est-à-dire de k. On peut admettre par approximation $f = 0,08 k^{1/3}$.

Il est à remarquer que l'on calcule C et les coefficients des formules à partir de mesures de vitesses et de pentes, mesures qui comportent quelque imprécision. L'expérience montre que l'on peut commettre des erreurs considérables sur les pentes, qui sont très faibles et très difficiles à mesurer avec exactitude. Une grande circonspection s'impose donc pour ces déterminations.

D'après la formule de von Mises
$$\Psi \cdot \sqrt{1 + \varphi} = \frac{v f m^2}{u} = \sqrt{\frac{\rho}{f}}$$

Répetons que le principal critère d'appréciation des formules est leur adaptation correcte aux résultats expérimentaux, dont l'exploitation exacte est d'ailleurs difficile, surtout à cause de la difficulté de détermination correcte des pentes.

Ceci montre d'une manière certaine la faiblesse des formules de l'hydraulique. Au point de vue théorique, leur base est souvent approximative. Leur application dépend le plus souvent de coefficients mal déterminés, variant dans des limites étendues et dans l'appréciation desquelles on peut commettre de grandes erreurs. Citons dans cet ordre d'idée, à côté des coefficients de rugosité et de pertes de charge en général, les coefficients de contraction. Il n'est pas possible ou pratique en hydraulique de recourir, comme en résistance des matériaux, à la notion commode d'un facteur de sécurité. Il est en général nécessaire de serrer de près la réalité des phénomènes. Il en résulte à l'évidence que dans les cas complexes et importants, il faut avoir recours à l'expérience, éventuellement sur modèles réduits.

Dans le cas de très fortes pentes, donnant lieu à un écoulement très rapide, la surface libre est très turbulente et il en résulte un entraînement d'air qui modifie les conditions de l'écoulement. Il paraît recommandable dans les cas semblables de se référer à l'observation et à l'expérience, le cas échéant, sur modèle à échelle réduite. La question ne sera donc pas développée davantage. On se bornera à mentionner les formules simples de C.G.J. Vreedenburgh (Opmerkingen over het ontwerpen van een groot waterkrachtwerk, in het bijzonder in Nederlandsch Indië.- De Ingenieur, 14-11-30). D'après lui, en cas d'absorption d'air par l'eau turbulente, on écrira la formule de Manning comme suit :

$$Q = K.(1 - \sin \alpha).\omega.R^{2/3} . (\sin \alpha)^{1/2}$$

pour une section rectangulaire. La vitesse moyenne de l'émulsion d'air et d'eau serait

$$\mu_e = (1 + 2,5 \sin \alpha) . \frac{Q}{\omega}.$$

9.- FORMULES SIMPLIFIEES DU MOUVEMENT UNIFORME

Elles sont de la forme $u = C.\sqrt{R.i}$

Se fondant sur la remarque du paragraphe 6 que β varie peu en régime turbulent, on adopte une valeur constante de C. Ces formules sont particulièrement pratiques si l'on peut déterminer les valeurs particulières de C applicables à divers cours d'eau :

D'après M. Mouret, on a :

Affluents en pays accidenté, affluents de la Loire supérieure	C = 36
Rivière à gros galets : Rhin à Bâle	C = 38
Danube à Vienne	C = 45
Rivière de moyenne importance à vitesse modérée et à cours tranquille, dont le rayon moyen est supérieure à 2,00 (Seine, Saône)	C = 50
Canal du Gange à Rorkee suivant que les parois sont en maçonnerie ou en terre	C = 55 à 45
Irrawadi	C < 50
Mississippi	C = 60
Cours d'eau torrentiels de la Suisse, charriant des galets, d'après Kutter .	

(formule simplifiée). C = $\frac{1}{0,2 \sqrt{1 + \frac{1,75}{R}}}$

Ces valeurs de C sont relativement voisines de la valeur C = 50, qui semble être une valeur moyenne pour les cours d'eau à régime tranquille. Pour le régime mixte, C semble

voisin de 40, pour le régime torrentiel de 35 environ. Le facteur $C = 50$ correspond à la formule sommaire de Tadinl

$$R.i = 0,0004 u^2,$$

parfois utilisée pour des calculs rapides. Elle correspond à la valeur $\beta = 0,00786$, très voisine de celle de Eytelwein (1822), qui proposait $\beta = 0,0076$

10.- REPARTITION DE L'ENERGIE ENTRE LE FROTTEMENT SUR LES PAROIS ET LA TURBULENCE

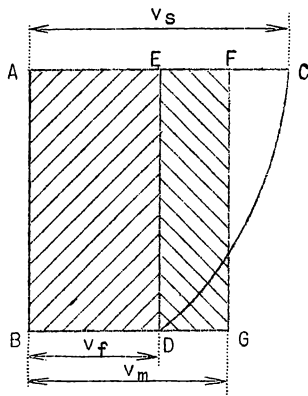


Fig. 7 bis.

Si nous considérons le diagramme de variation des vitesses suivant la verticale d'une section de très grande largeur et que nous y représentions la vitesse moyenne, il est évident que, à pente constante, l'aire du diagramme est proportionnelle au travail du courant par unité de temps. En effet :

$$d\mathcal{C} = \gamma_e \cdot i \cdot \int_0^h v \cdot dz \cdot dl$$

$$\mathcal{C} = \gamma_e \cdot i \cdot l \cdot \int_0^h v \cdot dz = \gamma_e \cdot i \cdot h \cdot l \cdot v_{\text{moy}}$$

Le travail \mathcal{C}_f de frottement sur le fond par unité de temps est tel que

$$d\mathcal{C}_f = \gamma_e \cdot i \cdot h \cdot dl \cdot v_f, \quad \mathcal{C}_f = \gamma_e \cdot i \cdot h \cdot l \cdot v_f$$

La partie ABDE de l'aire du diagramme correspond au travail de frottement sur le fond, tandis que ACDB = AFGB représente le travail total. Donc l'aire ECD = aire DEFG représente le travail interne de turbulence (fig. 7 bis).

Le travail de frottement est proportionnel à la vitesse au fond, le travail total proportionnel à la vitesse moyenne, le travail interne proportionnel à leur différence en mouvement uniforme.

Ces constatations peuvent être généralisées pour une section quelconque. En conséquence

$$\theta = \frac{\text{Travail de frottement sur le fond par unité de temps}}{\text{Travail total du courant par unité de temps}}$$

La force totale de frottement par unité de longueur du lit est

$$T = \gamma_e \cdot i \cdot \omega \quad (32) \text{ (voir par. 2 et 5).}$$

La force moyenne de frottement par unité de surface du fond est

$$\mathcal{C}_{0m} = \gamma_e \cdot i \cdot \frac{\omega}{X} = \gamma_e \cdot i \cdot R \quad \text{d'où} \quad R.i = \frac{\mathcal{C}_{0m}}{\gamma_e} = \frac{u^2}{C^2}$$

$$\text{donc} \quad u = C \cdot \sqrt{R.i} = C \cdot \sqrt{\frac{\mathcal{C}_{0m}}{\gamma_e}} = \sqrt{\frac{2g}{\beta}} \cdot \sqrt{\frac{\mathcal{C}_{0m}}{\gamma_e}} = \sqrt{\frac{2}{\beta}} \cdot v_m^*$$

Le rapport θ des puissances développées par la force T sur le fond et pour l'ensemble du courant peut, dans tous les cas, être pris égal au rapport

$$\frac{\int^{\chi} v_f^3 \cdot d\chi}{u \cdot \int^{\chi} v_f^2 \cdot d\chi} = \frac{(1 + 3\varphi + \varphi') \cdot \varphi}{1 + \varphi}, \quad \varphi' = \frac{\int^{\chi} \delta_{vf}^3 \cdot d\chi}{\chi \cdot v_{fm}^3} ;$$

il est toujours < 1 ,
on a donc,

$$\theta = \frac{C_1}{C} \cdot \frac{1 + 3\varphi + \varphi'}{(1 + \varphi)^{3/2}}$$

Pour une section rectangulaire très large, $\theta = \frac{C_1}{C}$.

11.- EFFETS DE LA VARIATION DES VITESSES SUR LES CARACTERISTIQUES DU COURANT

La vitesse moyenne u est $u = \int^{\omega} \frac{v \cdot d\omega}{\omega}$

Soit $v = u \pm v'$. Il en résulte que $\int^{\omega} \pm v' \cdot d\omega = 0$.

$$\text{On a } \int^{\omega} v^2 \cdot d\omega = \int^{\omega} (u^2 \pm 2u \cdot v' + v'^2) \cdot d\omega = u^2 \omega + \int^{\omega} v'^2 \cdot d\omega$$

$$\text{d'où } \frac{\int^{\omega} v^2 \cdot d\omega}{u^2 \cdot \omega} = 1 + \frac{\int^{\omega} v'^2 \cdot d\omega}{u^2 \cdot \omega} = 1 + \eta \quad (33)$$

$$\text{en posant } \eta = \frac{\int^{\omega} v'^2 \cdot d\omega}{u^2 \cdot \omega} > 0 \quad (33 \text{ bis})$$

$$\begin{aligned} \int^{\omega} v^3 \cdot d\omega &= \int^{\omega} (u^3 \pm 3u^2 \cdot v' + 3u \cdot v'^2 \pm v'^3) \cdot d\omega = \\ &= u^3 \omega + 3u \cdot \int^{\omega} v'^2 \cdot d\omega \pm \int^{\omega} v'^3 \cdot d\omega \end{aligned}$$

$$\frac{\int^{\omega} v^3 \cdot d\omega}{u^3 \cdot \omega} = 1 + 3 \frac{\int^{\omega} v'^2 \cdot d\omega}{u^2 \cdot \omega} \pm \frac{\int^{\omega} v'^3 \cdot d\omega}{u^3 \cdot \omega} = \sim 1 + 3\eta + \eta'$$

$$\text{On écrit } \alpha = \frac{\int^{\omega} v^3 \cdot d\omega}{u^3 \cdot \omega} \quad \text{et} \quad \alpha = 1 + 3\eta + \eta' \approx 1 + 3\eta \quad (34)$$

$$\text{car } \frac{\int^{\omega} \pm v'^3 \cdot d\omega}{u^3 \cdot \omega} = \sim 0$$

A) Loi de vitesse $v = A (h^\beta - z^\beta)$ $u = A \cdot h^\beta \frac{\beta}{\beta + 1}$ $z_u = \frac{h}{\sqrt{\beta + 1}}$
 $v' = A \cdot \left(\frac{h^\beta}{\beta + 1} - z^\beta \right)$
 $\eta = \frac{1}{\beta^2} \cdot \left[\frac{(\beta + 1)^2}{2\beta + 1} - 1 \right]$

si $\beta = 2$ $\eta = 0,20$ $z_u = 0,58 h$

$$\alpha = 1 + 3\eta - \frac{1}{\beta^3} \left[\frac{(\beta + 1)^2}{3(\beta + 1)} - \frac{3(\beta + 1)^2}{2(\beta + 1)} + 2 \right]$$

Pour $\beta = 2$ $\alpha = 1,542 < 1 + 3\eta = 1,60$.

B) Loi de vitesse $v = v_s \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{1/n}$ $n > 1$

$$u = \frac{n}{n+1} \cdot v_s \quad v = u \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$v' = u \cdot \left[\frac{n+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right]$$

$$\eta = \frac{1}{n \cdot (2+n)} \quad \alpha = \frac{3n+1}{n^2 \cdot (3+n)}$$

$n =$	2	3	4	6
$\eta =$	1/8	1/15	1/24	1/48
$\alpha =$	27/20	32/27	125/112	343/324
$1 + 3\eta$	11/8	6/5	9/8	17/16

On a $z_u = h \frac{(n+1)^n - n^n}{(n+1)^n}$.

Pour $n = 4$, $z_u = 0,5904 h$; pour $n = 6$, $z_u = 0,604 h$.

C) Loi $v = v_m - A \cdot z^2$, $v_f = v_m - A \cdot h^2 > 0$. $v = v_m - (v_m - v_f) \cdot \frac{z^2}{h^2}$

$$u = v_m - \frac{A \cdot h^2}{3} \quad z_u = 0,58 h \quad u = v_m = \frac{(v_m - v_f)}{3}$$

$$v' = A \cdot \left(\frac{h^2}{3} - z^2 \right) \quad \eta = \frac{4 A^2 \cdot h^4}{45 u^2}$$

$$\alpha = 1 + \frac{4}{15} \cdot \frac{A^2 \cdot h^4}{u^2} \cdot \left(1 - \frac{4}{63} \cdot \frac{A \cdot h^2}{u}\right)$$

Posons $v_f = \frac{v_m}{m}$ $A = \frac{v_m}{h^2} \cdot \frac{m-1}{m}$ $u = v_m \cdot \frac{2m+1}{3m}$

Pour $m = \infty$ $v_f = 0$, on retrouve les valeurs trouvées ci-dessus en A).

Pour $m = 2$, $v_f = \frac{v_m}{2}$, $\eta = 0,032$, $\alpha = 1,0923$, $1 + 3\eta = 1,096$.

D) Écoulement laminaire en section circulaire (Loi de Poiseuille).

On a $v = v_m - A \cdot r^2 = A \cdot (R^2 - r^2)$, $v_m = A \cdot R^2$, $v_R = 0$

$$u = \frac{A \cdot R^2}{2} = \frac{v_m}{2} \quad v' = A \cdot \left(\frac{R^2}{2} - r^2 \right)$$

$$\eta = \frac{1}{3} \quad \alpha = 2 = 1 + 3 \eta$$

Donc, c'est dans le cas des écoulements laminaires que η et α sont les plus grands.

cas A) $\eta = 0,20 \quad \alpha = 1,542$

cas D) $\eta = \frac{1}{3} \quad \alpha = 2$

Dans les cas d'écoulements turbulents, plus la turbulence est grande, plus η et α sont petits. A la limite, $\eta \approx 0$ et $\alpha \approx 1$

Dans le cas B), plus n est grand, plus η et α sont petits.
(Par exemple, pour $n = 6$, $\eta = 0,0208$ et $\alpha = 1,0586 < 1 + 3 \eta = 1,0624$).

Dans le cas C), le mouvement est d'autant plus turbulent que $\frac{v_m}{v_f}$ est plus petit.

Pour $\frac{v_m}{v_f} = 2$, $\eta = 0,032$ et $\alpha = 1,0923$.

Les formules logarithmiques, pour l'intégration desquelles il faut considérer des cas concrets, conduisent aussi à des valeurs faibles de η et de α .

12.- RELATIONS ENTRE C OU β , η , α et θ .

Si l'on se réfère à la loi de variation des vitesses selon la verticale de Bazin (paragraphe 4)

$$v = u \cdot \left[1 + \sigma \cdot \left(1 - \frac{3 z^2}{h^2} \right) \right]$$

pour les sections rectangulaires très larges. Cette loi est conforme à celle du paragraphe 11, C),

$$v = v_m - A \cdot z^2$$

avec $v_m = u \cdot (1 + \sigma)$ et $A = \frac{3 \sigma \cdot u}{h^2}$.

On a donc $\eta = \frac{4 A^2 \cdot h^4}{45 u^2} = \frac{4}{5} \cdot \sigma^2$

et $\alpha = 1 + \frac{12}{5} \sigma^2 \cdot \left[1 - \frac{4}{21} \cdot \sigma \right] = 1 + \frac{12}{5} \sigma^2 - \frac{48}{105} \sigma^3$

On néglige généralement le dernier terme et on écrit

$$\alpha = 1 + \frac{12}{5} \sigma^2$$

Or, d'après Bazin, $\sigma = \frac{1,81 \sqrt{g}}{C} = 1,28 \beta^{1/2}$

d'où $\eta = \frac{4}{5} (1,28)^2 \cdot \beta = \frac{4 g}{5} \cdot \frac{1,81^2}{C^2}$

$$\alpha = 1 + \frac{12}{5} (1,28)^2 \cdot \beta = 1 + \frac{12 g}{5} \cdot \frac{(1,81)^2}{C^2} \quad (35)$$

Bazin propose en effet,

a) pour les sections rectangulaires de largeur indéfinie

$$\alpha = 1 + \frac{150}{C^2} \quad (\eta = \frac{50}{C^2})$$

b) pour les sections rectangulaires larges

$$\alpha = 1 + \frac{210}{C^2} \quad (\eta = \frac{70}{C^2})$$

c) pour les sections demi-circulaires

$$\alpha = 1 + \frac{235}{C^2}$$

(35 bis)

Pour les sections rectangulaires, on peut adopter comme valeurs moyennes de $\frac{\alpha}{2g}$:

a) pour les parois très unies $\frac{340}{C^2}$

b) pour les parois unies $\frac{270}{C^2}$

c) pour les parois peu unies $\frac{210}{C^2}$

d) pour les parois en terre $\frac{180}{C^2}$

On voit donc encore que η et α diminuent lorsque la rugosité, donc la turbulence, augmente. D'une manière plus générale, η et α diminuent lorsque l'effet des parois augmente, ce qui tient compte aussi de la forme.

D'autre part, dans une section rectangulaire très large :

$$\theta = \frac{v_f}{u} = 1 - 2\sigma$$

d'après la formule des vitesses de Bazin.

Nous venons de voir que $\alpha = \sim 1 + \frac{12}{5} \sigma^2$

Or $\sigma = \frac{1-\theta}{2}$, d'où $\alpha = \sim 1 + \frac{12}{20} \cdot (1-\theta)^2 = \sim 1 + 0,60 (1-\theta)^2$.

Pour $\theta = 0$, c'est-à-dire $v_f = 0$, ce qui correspond au mouvement laminaire, on retrouve la valeur $\alpha = 1,60$.

Lorsque le mouvement est turbulent, θ augmente avec la turbulence et α diminue.

On déduit aussi de ces formules

$$\theta = 1 - 2\sigma = 1 - \frac{3,62 \sqrt{g}}{C} = 1 - 2,56 \beta^{\frac{1}{2}}$$

Plus généralement,

$$\theta = \frac{C_1}{C} \cdot \frac{1 + 3\psi + \psi^2}{(1 + \psi)^{3/2}} = \frac{\sqrt{\frac{2g}{f}}}{C} \cdot \frac{1 + 3\psi + \psi^2}{(1 + \psi)^{3/2}}$$

D'autre part $\alpha = 1 + \frac{N}{C^2}$, d'où $C = N^{\frac{1}{2}} \cdot (\alpha - 1)^{-\frac{1}{2}}$

Donc $\theta = \sqrt{\frac{2g}{f}} (\alpha - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot N^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1 + 3\varphi + \varphi^2}{(1 + \varphi)^{3/2}}$

et $\alpha = 1 + \frac{N \cdot \theta^2 \cdot f}{2g} \cdot \frac{(1 + \varphi)^3}{(1 + 3\varphi + \varphi^2)^2}$

D'après cela $\theta^2 \cdot f = \frac{2g \cdot (\alpha - 1) \cdot (1 + 3\varphi + \varphi^2)^2}{N \cdot (1 + \varphi)^3}$

ou $\theta^2 \cdot k^{1/3} = \frac{2g \cdot (\alpha - 1) \cdot (1 + 3\varphi + \varphi^2)^2}{0,08 N \cdot (1 + \varphi)^3}$

D'après cela, θ serait d'autant plus petit que la turbulence est plus grande, que la section transversale est plus concentrée et que la rugosité des parois est plus grande.

CHAPITRE X

MOUVEMENT PERMANENT GRADUELLEMENT VARIE

1.- GENERALITES - RAPPEL DES EQUATIONS D'EULER

Dans le mouvement permanent varié, en tout point du courant à surface libre, les circonstances ne changent pas dans le temps, mais elles changent d'un point à l'autre tout le long d'un filet liquide, d'une section à l'autre tout le long du courant.

Le mouvement peut être varié, même dans un lit prismatique ou cylindrique. Dans un lit irrégulier ou varié, le mouvement ne peut pas être uniforme.

Les filets liquides ou lignes de courant peuvent être courbes et irréguliers; des discontinuités peuvent se produire dans le courant. Les filets liquides peuvent présenter de fortes courbures non régulières. Le traitement mathématique est alors rendu peu efficace. Les régions des écoulements à forte courbure et à discontinuités seront de préférence étudiées expérimentalement, éventuellement sur modèles réduits, en vertu des règles de la similitude.

Très fréquemment, dans la majeure partie du courant, la courbure des filets est assez faible pour qu'elle puisse être négligée. Les lignes de courant sont alors considérées comme rectilignes et même généralement comme parallèles. On peut cependant, dans certains cas, par approximation, en négligeant la viscosité et les frottements, tenir compte de la courbure des filets liquides, par exemple pour les nappes d'écoulement sur les déversoirs.

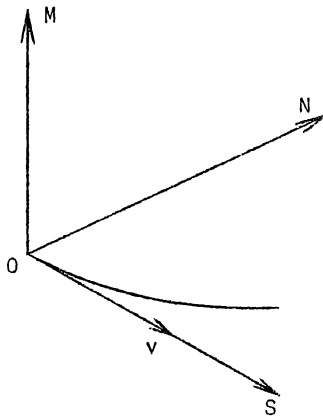


Fig. 8.

Comme point de départ, on peut se référer aux équations d'Euler, dans la forme que leur donne Hunter Rouse, qui est très suggestive. L'origine étant un point 0 sur une ligne de courant, on prend comme axes de référence le trièdre trirectangle formé par la tangente OS au filet liquide, la normale principale ON et l'axe OM perpendiculaire aux deux précédents. La valeur du rayon de courbure en 0 étant r, en mouvement permanent, on a (fig. 8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_s}{\partial t} &= - \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial s} - \frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial (p + \gamma_e Z)}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial v_n}{\partial t} &= - \frac{v^2}{r} - \frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial (p + \gamma_e Z)}{\partial n} = 0 \\ \frac{\partial v_m}{\partial t} &= - \frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial (p + \gamma_e Z)}{\partial m} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Si la ligne de courant est rectiligne, il reste

$$\rho_e \cdot \frac{\partial v^2}{2 \partial s} + \frac{\partial (p + \gamma_e Z)}{\partial s} = 0$$

Normalement aux lignes de courant rectilignes, la loi des pressions est linéaire (loi hydrostatique). La relation précédente peut s'écrire :

$$\frac{dE}{ds} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma_0} + Z \right) = 0 \quad (37)$$

d'où
$$E = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma_0} + Z = \text{constante} \quad (37 \text{ bis})$$

le long d'une ligne de courant quelconque, courbe ou rectiligne. Z est la hauteur du point 0 considéré au-dessus d'un plan horizontal de référence. E est la hauteur de charge au point 0 , dont la constance établit le théorème de Bernoulli des liquides parfaits.

Une autre constante est le débit du filet liquide

$$dQ = v \cdot d\omega = \text{constante}$$

d'où
$$Q = \int^{\omega} dQ = \int^{\omega} v \cdot d\omega = \text{constante}$$

Ces relations peuvent être appliquées aux liquides réels en y introduisant les forces dues aux résistances (viscosité et frottement, en régime laminaire ou turbulent) et le travail qu'elles effectuent (pertes de charge).

2.- EQUATIONS DU COURANT PERMANENT

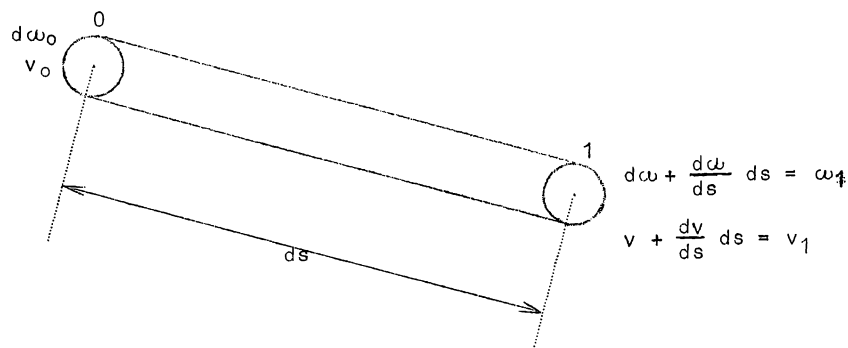


Fig. 9.

A) Considérons un filet sensiblement rectiligne θ_1 (fig. 9) de longueur ds . La loi des pressions est hydrostatique. L'action globale de la pression atmosphérique est nulle. L'équation des quantités de mouvement le long de ds s'écrit :

$$[(p_0 \cdot d\omega_0 - p_1 \cdot d\omega_1) + \gamma_e \cdot d\omega \cdot ds \cdot i - f \cdot d\omega \cdot ds] \cdot dt = \rho_e \cdot d\omega \cdot ds \cdot dv$$

La profondeur sous la surface libre étant z , on a

$$p = p_a + \gamma_e \cdot z \quad (\text{fig. 10})$$

D'autre part

$$- i = \frac{dz}{ds}$$

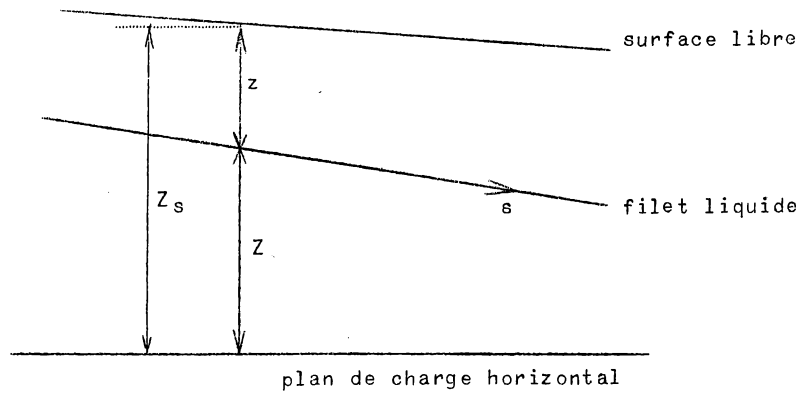


Fig. 10.

Donc $[-\gamma_e \cdot (\frac{dz}{ds} + \frac{dZ}{ds}) \cdot ds \cdot d\omega - f \cdot ds \cdot d\omega] \cdot dt = \rho_e \cdot d\omega \cdot ds \cdot dv$

Posons $z + Z = Z_s$

$$[-\gamma_e \cdot \frac{dZ_s}{ds} - f] \cdot dt = \rho_e \cdot dv$$

$$\frac{dZ_s}{ds} - \frac{f}{\gamma_e} = \frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v}{g} \cdot \frac{dv}{ds}$$

$$-\frac{dZ_s}{ds} - \frac{f}{\gamma_e} = \frac{1}{2g} \frac{d(v^2)}{ds} \tag{38}$$

C'est encore le théorème de Bernoulli dans le cas de liquides réels avec pertes de charge.

Dans l'hypothèse des filets sensiblement parallèles, on a $-\frac{dZ_s}{ds} = i_s$, pente de la surface libre

$$i_s - \frac{f}{\gamma_e} = \frac{1}{2g} \cdot \frac{d(v^2)}{ds}$$

$$i_s - \frac{1}{2g} \cdot \frac{d(v^2)}{ds} = \frac{f}{\gamma_e} = \frac{-dE}{ds}$$

avec $E = Z_s + \frac{v^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma_e}$ (38 bis)

f est la résultante de l'ensemble des résistances au point considéré rapportée à l'unité de volume

Les résultats obtenus ci-dessus sont les mêmes que ceux que l'on obtient par une autre voie, suivie par plusieurs auteurs et qui paraît moins rigoureuse au point de vue du raisonnement (fig. 11). On considère le mouvement du filet liquide de longueur ds pendant le temps dt. La section 0 s'est déplacée de 0 en 0' sur la longueur

$$00' = v_0 \cdot dt$$

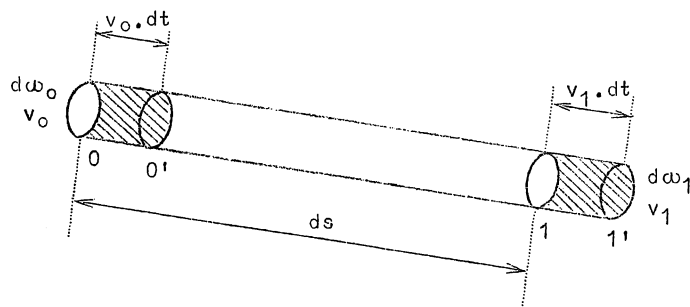


Fig. 11.

De même, 1 est venu en 1' et

$$11' = v_1 \cdot dt .$$

L'impulsion élémentaire des forces est la même que ci-dessus et peut donc s'écrire :

$$\left(- \gamma_e \cdot \frac{dZ_s}{ds} - f \right) \cdot d\omega \cdot ds \cdot dt$$

L'accroissement élémentaire de quantité de mouvement est la différence des quantités de mouvement de 11' et de 00', la partie 0'1 étant commune. Elle est donc

$$\rho_e \cdot (d\omega_1 \cdot v_1^2 - d\omega_0 \cdot v_0^2) \cdot dt$$

Or $v_1 \cdot d\omega_1 = v_0 \cdot d\omega_0$. Donc l'accroissement élémentaire de quantité de mouvement s'écrit

$$\rho_e \cdot d\omega \cdot v \cdot (v_1 - v_0) \cdot dt = \rho_e \cdot d\omega \cdot v \cdot \frac{dv}{ds} \cdot ds \cdot dt$$

$$\text{d'où} \quad - \gamma_e \cdot \frac{dZ_s}{ds} - f = \rho_e \cdot v \cdot \frac{dv}{ds} ,$$

ce qui est l'équation trouvée précédemment.

$$\frac{dZ_s}{ds} - \frac{f}{\gamma_e} = \frac{1}{2g} \cdot \frac{d(v^2)}{ds}$$

On obtient aussi le même résultat par le principe des forces vives. En effet, si l'on suit la première voie (fig. 9 et 10), il suffit de reprendre l'équation

$$F \cdot dt = m \cdot dv$$

et de la multiplier aux deux membres par v ,

$$\text{d'où} \quad F \cdot ds = m \cdot \frac{dv^2}{2}$$

$$\text{Donc} \quad \left[- \gamma_e \cdot \frac{dZ_s}{ds} - f \right] \cdot v \cdot dt = \rho_e \cdot v \cdot dv$$

$$\text{d'où} \quad - \gamma_e \cdot \frac{dZ_s}{ds} - f = \rho_e \cdot v \cdot \frac{dv}{ds} \quad \text{et} \quad - \frac{dZ_s}{ds} - \frac{f}{\gamma_e} = \frac{1}{2g} \cdot \frac{d(v^2)}{ds}$$

Par la voie de la figure 11 on obtient aussi le même résultat. On a alors en effet

$$\left[- \gamma_e \cdot \frac{dZ_s}{ds} - f \right] \cdot d\omega \cdot ds \cdot v \cdot dt = \rho_e \cdot \left[\frac{d\omega_1 \cdot v_1^3}{2} - \frac{d\omega_0 \cdot v_0^3}{2} \right] \cdot dt$$

$$\text{mais} \quad d\omega \cdot v = d\omega_1 \cdot v_1 = d\omega_0 \cdot v_0 ,$$

$$\text{d'où} \quad \left(- \gamma_e \cdot \frac{dZ_s}{ds} - f \right) \cdot ds \cdot dt = \frac{\rho_e}{2} \cdot (v_1^2 - v_0^2) \cdot dt = \frac{\rho_e}{2} \cdot \frac{d(v^2)}{ds} \cdot ds \cdot dt$$

$$\text{d'où} \quad - \frac{dZ}{ds} - \frac{f}{\gamma_e} = \frac{1}{2g} \cdot \frac{d(v^2)}{ds}$$

B) Quand on passe d'un filet liquide à l'ensemble du courant de débit

$$Q = \omega \cdot u = \int^{\omega} v \cdot d\omega = \text{constante},$$

on doit intégrer l'équation précédente par rapport à $v.d\omega$, à cause de la variation des vitesses et parce que les forces sont rapportées à l'unité de poids

$$\text{Donc} \quad - \left(\frac{dZ_s}{ds}\right) \cdot \int^{\omega} v.d\omega = - \frac{1}{\gamma_e} \int^{\omega} f.v.d\omega = \frac{1}{2g} \int^{\omega} v \cdot \frac{dv^2}{ds} .d\omega$$

$$\text{On a} \quad v = u + \delta v \quad \text{et} \quad \int^{\omega} v.d\omega = \omega.u, \quad \text{car} \quad \int^{\omega} \delta v.d\omega = 0$$

Le premier terme de l'équation ci-dessus vaut donc $-\left(\frac{dZ_s}{ds}\right).u.\omega$.

$$\text{Le deuxième s'écrit} \quad \frac{1}{\gamma_e} \int^{\omega} f.v.d\omega = \frac{f'.u.\omega}{\gamma_e}, \quad f' = \frac{\int^{\omega} f.v.d\omega}{Q}$$

Le troisième terme $\int^{\omega} v \cdot \frac{dv^2}{ds} .d\omega$ se développe comme suit :

$$v^2 = (u + \delta v)^2 = u^2 + 2 u.\delta v + \delta v^2$$

$$\frac{dv^2}{ds} = \frac{du^2}{ds} + 2 \frac{du}{ds} . v + 2 u \cdot \frac{d(\delta v)}{ds} + \frac{d(\delta v^2)}{ds}$$

$$v \cdot \frac{dv^2}{ds} = (u + \delta v) \cdot \left[\frac{du^2}{ds} + 2 \frac{du}{ds} . \delta v + 2 u \cdot \frac{d(\delta v)}{ds} + \frac{d(\delta v^2)}{ds} \right]$$

$$= u \cdot \frac{du^2}{ds} + 2 u \cdot \frac{du}{ds} . \delta v + 2 u^2 \cdot \frac{d(\delta v)}{ds} + u \cdot \frac{d(\delta v^2)}{ds}$$

$$+ \frac{du^2}{ds} . \delta v + 2 \frac{du}{ds} . \delta v^2 + 2 u.\delta v \cdot \frac{d(\delta v)}{ds} + \delta v \cdot \frac{d(\delta v^2)}{ds}$$

$$v \cdot \frac{dv^2}{ds} = u \cdot \frac{du^2}{ds} + \frac{du^2}{ds} . \delta v + 2 u^2 \cdot \frac{d(\delta v)}{ds} + 2 u \cdot \frac{d(\delta v^2)}{ds} + \frac{du^2}{ds} . \delta v$$

$$+ 2 \frac{du}{ds} . \delta v^2 + \delta v \cdot \frac{d(\delta v^2)}{ds}$$

$$\int^{\omega} v \cdot \frac{dv^2}{ds} .d\omega = \int^{\omega} u \cdot \frac{du^2}{ds} .d\omega + \int^{\omega} \frac{du^2}{ds} . \delta v .d\omega + 2 \int^{\omega} u^2 \cdot \frac{d(\delta v)}{ds} .d\omega$$

$$+ 2 \int^{\omega} u \cdot \frac{d(\delta v^2)}{ds} .d\omega + \int^{\omega} \frac{du^2}{ds} . \delta v .d\omega + 2 \int^{\omega} \frac{du}{ds} . \delta v^2 .d\omega + \int^{\omega} \delta v \cdot \frac{d(\delta v^2)}{ds} .d\omega$$

$$= u \cdot \frac{du^2}{ds} .\omega + 2 u^2 \cdot \int^{\omega} \frac{d(\delta v)}{ds} .d\omega + 2 u \cdot \int^{\omega} \frac{d(\delta v^2)}{ds} .d\omega$$

$$+ 2 \frac{du}{ds} \cdot \int^{\omega} \delta v^2 .d\omega + \int^{\omega} \delta v \cdot \frac{d(\delta v^2)}{ds} .d\omega \quad \text{car} \quad \int^{\omega} \delta v .d\omega = 0 .$$

Comme $Q = \omega \cdot u = \text{constante}$ $d(\omega u) = \omega \cdot du + u \cdot d\omega = 0$

Mais $u = v - \delta v$ $du = dv - d(\delta v)$

$$\omega \cdot [dv - d(\delta v)] + (v - \delta v) \cdot d\omega = 0$$

$$\frac{\frac{dv}{ds} - \frac{d(\delta v)}{ds}}{v - \delta v} = \frac{\frac{du}{ds}}{u} = - \frac{\frac{d\omega}{ds}}{\omega}$$

Admettons $\frac{\frac{d(\delta v)}{ds}}{\delta v} = \frac{\frac{du}{ds}}{u} = \frac{\frac{dv}{ds}}{v}$

d'où $\frac{d(\delta v)}{ds} = \frac{\delta v}{u} \cdot \frac{du}{ds}$

Dans ces conditions

$$2 u^2 \int^{\omega} \frac{d(\delta v)}{ds} \cdot d\omega = 2 u \frac{du}{ds} \int^{\omega} \delta v \cdot d\omega = 0.$$

$$2 u \int^{\omega} \frac{d(\delta v^2)}{ds} \cdot d\omega = 4 u \int^{\omega} \delta v \frac{d(\delta v)}{ds} \cdot d\omega = 4 \frac{du}{ds} \int^{\omega} \delta v^2 \cdot d\omega = 4 \eta \frac{du}{ds} \cdot u^2 \cdot \omega$$

$$2 \frac{du}{ds} \int^{\omega} \delta v^2 \cdot d\omega = 2 \eta \cdot \frac{du}{ds} \cdot u^2 \cdot \omega$$

$$\int^{\omega} \delta v \cdot \frac{d(\delta v)^2}{ds} \cdot d\omega = 2 \int^{\omega} \delta v^3 \cdot \frac{du}{ds} \cdot d\omega = 2 \frac{du}{ds} \cdot \int^{\omega} \delta v^3 \cdot d\omega = 2 \frac{du}{ds} \cdot \eta' \cdot u^3 \cdot \omega$$

Donc

$$\int^{\omega} v \cdot \frac{dv^2}{ds} \cdot d\omega = 2 u^2 \cdot \frac{du}{ds} \cdot \omega + 4 \eta \cdot u^2 \cdot \frac{du}{ds} \cdot \omega + 2 \eta \cdot u^2 \cdot \frac{du}{ds} \cdot \omega + 2 \eta' \cdot u^2 \cdot \frac{du}{ds} \cdot \omega$$

$$\int^{\omega} v \cdot \frac{dv^2}{ds} = 2 Q \cdot (u \frac{du}{ds}) \cdot (1 + 3 \eta + \eta') = 2 Q \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{d(u^2)}{ds}$$

Donc $Q \cdot (i_s - \frac{f'}{\gamma_e}) = \frac{Q \cdot \alpha}{2 g} \cdot \frac{d(u^2)}{ds}$

$$i_s - \frac{f'}{\gamma_e} + \frac{\alpha}{2 g} \cdot \frac{d(u^2)}{ds} \tag{39}$$

C'est l'équation de Bernoulli appliquée à l'ensemble du courant,

$$i_s = - \frac{dZ_s}{ds}$$

Cette démonstration correspond à la constance de η et de α par rapport à s .

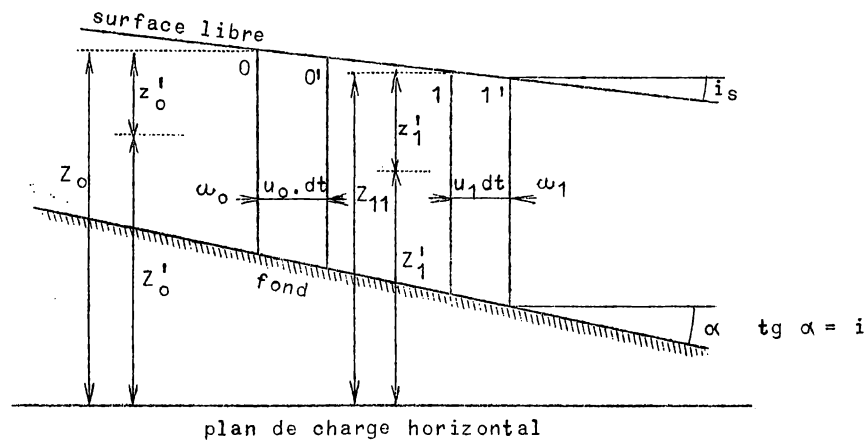


Fig. 12.

On peut aussi appliquer le théorème des forces vives comme suit. (fig. 12).

Le volume 01 se déplace en 0'1' en un temps dt

$$\begin{aligned} 00' &= u_0 \cdot dt \\ 11' &= u_1 \cdot dt \\ \omega_0 \cdot u_0 \cdot dt &= \omega_1 \cdot u_1 \cdot dt = Q \cdot dt \end{aligned}$$

La partie commune 0'1' aux deux volumes est restée identique à elle-même. Les forces qui interviennent sont :

1) les pressions hydrostatiques sur les sections perpendiculaires au fond du lit 0 et 1 ,

$$\omega_1 \cdot (p_a + \gamma_e \cdot z_1) - \omega_0 \cdot (p_a + \gamma_e \cdot z_0)$$

(On a $z_1 = \int^{\alpha} \frac{z \cdot d\omega}{\omega}$ et $z_1 = z_s - z'_1$),..

2) la composante motrice du poids parallèle au fond du lit $\gamma_e \cdot \omega_m \cdot \Delta s \cdot i$

3) le frottement $f' \cdot \omega_m \cdot \Delta s$

L'équation des forces vives s'écrit, puisque $\omega_0 \cdot u_0 = \omega_1 \cdot u_1 = \omega_m \cdot u_m$

$$[\gamma_e \cdot (\omega_1 \cdot z_1 \cdot u_1 - \omega_0 \cdot z_0 \cdot u_0) - (\gamma_e \cdot \omega_m \cdot \Delta s \cdot i - f' \cdot \omega_m \cdot \Delta s) \cdot u_m] \cdot dt = \rho_e \cdot \left(\frac{\alpha \cdot \omega_0 \cdot u_0^3 - \gamma \cdot \omega_1 \cdot u_1^3}{2} \right) \cdot dt$$

$$z_1 - z_0 - \Delta s \cdot i_{moy} + \frac{f' \cdot \Delta s}{\gamma_e} = \frac{\alpha}{2g} \cdot (u_0^2 - u_1^2)$$

Vu la faible valeur des pentes, on peut admettre que

$$z_1 - z_0 - \Delta s \cdot i = z_{s1} - z_{s0}$$

d'où

$$i_s - \frac{f'}{\gamma_e} = \frac{\alpha}{2g} \cdot \frac{d(u^2)}{ds} \quad (39)$$

Si on applique au cas de la figure 12 l'équation des quantités de mouvement projetées sur le fond du lit, on a :

$$[\gamma_e \cdot (\omega_1 \cdot z_1' - \omega_0 \cdot z_0') - \gamma_e \cdot \omega_m \cdot \Delta s \cdot i + f' \cdot \omega_m \cdot \Delta s] \cdot dt = \rho_e \cdot (1 + n) \cdot (\omega_0 \cdot u_0^2 - \omega_1 \cdot u_1^2)$$

Cette équation est différente de celle déduite des forces vives. En passant à la limite, elle devient :

$$\gamma_e \cdot \frac{d(\omega z')}{ds} - \gamma_e \cdot \omega \cdot i + f' \cdot \omega = - \rho_e \cdot (1 + n) \cdot \frac{d(\omega u^2)}{ds}$$

$$\frac{d(\omega z')}{ds} = \frac{d(\omega z')}{dz'} \cdot \frac{dz'}{ds} = \omega \cdot \frac{dz'}{ds}$$

$$\frac{d(\omega u^2)}{ds} = \frac{d(Qu)}{ds} = Q \cdot \frac{du}{ds} = \omega \cdot u \cdot \frac{du}{ds} = \omega \cdot \frac{du^2}{2 ds}$$

$$\text{Donc } \gamma_e \cdot \frac{dz'}{ds} \cdot \omega - \gamma_e \cdot \omega \cdot i + f' \cdot \omega = \rho_e \cdot \frac{(1 + \eta) \cdot \omega \cdot d(u^2)}{2} ; \quad - i_s - \frac{f'}{\gamma_e} = \frac{1 + \eta}{2g} \cdot \frac{du^2}{ds}$$

Cette équation est en outre incorrecte, comme on s'en rend compte en partant de l'équation des quantités de mouvement appliquée au filet liquide et en l'intégrant par rapport à $d\omega$

$$(- \gamma_e \cdot \frac{dz}{ds} \cdot ds \cdot d\omega + \gamma_e \cdot i \cdot d\omega \cdot ds - f \cdot ds \cdot d\omega) \cdot dt = \rho_e \cdot d\omega \cdot ds \cdot dv$$

$$- \int^\omega \frac{dz}{ds} \cdot d\omega + \int^\omega i \cdot d\omega - \int^\omega \frac{f \cdot d\omega}{\gamma_e} = \frac{1}{2g} \cdot \int^\omega \frac{dv^2}{ds} \cdot d\omega$$

$$\text{Or } \omega \cdot z' = \int^\omega z \cdot d\omega, \quad \text{donc } \frac{d(\omega z')}{ds} = \int^\omega \frac{dz}{ds} \cdot d\omega$$

$$\int^\omega i \cdot d\omega = i \cdot \omega$$

$$\int^\omega \frac{f \cdot d\omega}{\gamma_e} = \frac{1}{\gamma_e} \cdot \left[\frac{1}{u} \cdot \int^\omega f \cdot u \cdot d\omega \right] = \frac{1}{\gamma_e \cdot u} \cdot \left[\int^\omega f \cdot v \cdot dv - \int^\omega f \cdot \delta v \cdot d\omega \right]$$

$$\int^\omega \frac{f \cdot d\omega}{\gamma_e} = \frac{1}{\gamma_e} \cdot f' \cdot \omega - \frac{1}{\gamma_e \cdot u} \cdot \int^\omega f \cdot \delta v \cdot d\omega$$

$$\int^\omega \frac{dv^2}{ds} \cdot d\omega = 2 \int^\omega v \cdot \frac{dv}{ds} \cdot d\omega = 2 \left[\int^\omega (u + \epsilon v) \right] \frac{du}{ds} + \frac{d(\delta v)}{ds} \cdot d\omega$$

$$= \frac{du^2}{ds} \cdot \omega + 2 \frac{du}{ds} \cdot \int^\omega \delta v \cdot d\omega + 2 u \cdot \int^\omega \frac{d(\delta v)}{ds} \cdot d\omega + 2 \int^\omega \delta v \cdot \frac{d(\delta v)}{ds} \cdot d\omega$$

$$= \frac{du^2}{ds} \cdot \omega + 2 n \cdot u \cdot \frac{du}{ds} \cdot \omega = (1 + \eta) \cdot \frac{du^2}{ds} \cdot \omega$$

$$\text{d'où } - \frac{d(\omega z')}{ds} + i \cdot \omega - \frac{f' \cdot \omega}{\gamma_e} + \frac{1}{\gamma_e \cdot u} \cdot \int^\omega f \cdot \delta v \cdot d\omega = \frac{1 + \eta}{2g} \cdot \omega \cdot \frac{du^2}{ds}$$

$$\text{ou } - \frac{dz'}{ds} + i - \frac{f'}{\gamma_e} + \frac{1}{\gamma_e \cdot Q} \int^\omega f \cdot \delta v \cdot d\omega = \frac{1 + \eta}{2g} \cdot \frac{du^2}{ds}$$

Cette équation diffère de la forme précédente par le dernier terme du premier membre.

Comme le courant ne peut physiquement obéir qu'à une loi unique, et en admettant comme précédemment, vu les faibles pentes, que

$$-\frac{dz'}{ds} + i = i_s$$

Il faut que

$$-\frac{1}{\gamma_e \cdot Q} \int^{\omega} f \cdot \delta v \cdot d\omega = \frac{2\eta + \eta'}{2g} \cdot \frac{du^2}{ds}$$

d'où
$$\int^{\omega} f \cdot \delta v \cdot d\omega = -\gamma_e \cdot \omega \cdot u^2 \cdot \frac{du}{ds} \cdot (2\eta + \eta') = -\gamma_e \cdot \frac{du}{ds} \cdot [2 \int^{\omega} \delta v^2 \cdot d\omega + \int^{\omega} \frac{\delta v^3 \cdot d\omega}{u}]$$

On admettra donc l'équation sous la forme

$$i_s - \frac{f'}{\gamma_e} = \frac{\alpha}{2g} \cdot \frac{d(u^2)}{ds}$$

ou

$$-\frac{dZ_s}{ds} - \frac{f'}{\gamma_e} = \frac{\alpha}{2g} \cdot \frac{du^2}{ds}$$

Le plus souvent, le terme $\frac{\alpha}{2g} \cdot \frac{du^2}{ds}$ de cette équation est peu important. On ne commet donc pas une grande erreur en admettant $\alpha = 1$, d'où η et $\eta' = 0$. C'est comme si tous les filets avaient la même vitesse. La plupart des auteurs admettent ces valeurs, d'autant plus que le mouvement est plus turbulent. Certains le justifient en considérant qu'il se produit dans un cours d'eau réel certaines pertes de charge dont l'équation ne tient pas compte.

Dans ces conditions, l'équation du courant peut s'établir directement comme suit. L'équation des quantités de mouvement s'écrit :

$$(p_0 \cdot \omega_0 - p_1 \cdot \omega_1 + \gamma_e \cdot \omega_0 \cdot ds \cdot i - f' \cdot \omega_0 \cdot ds) \cdot dt = \rho_e \cdot \omega_0 \cdot ds \cdot du$$

$$\gamma_e \cdot \omega_0 \cdot z'_0 - \gamma_e \cdot \omega_1 \cdot z'_1 + \gamma_e \cdot \omega_0 \cdot (z'_0 - z'_1) - f' \cdot \omega_0 \cdot ds = \rho_e \cdot \omega_0 \cdot \frac{ds}{dt} \cdot du$$

$$(Z_{s0} - Z_{s1}) - \frac{f' \cdot ds}{\gamma_e} = \frac{1}{g} \cdot u \cdot du ; \quad -\frac{dZ_s}{ds} - \frac{f'}{\gamma_e} = \frac{1}{2g} \cdot \frac{d(u^2)}{ds} \quad (39 \text{ bis})$$

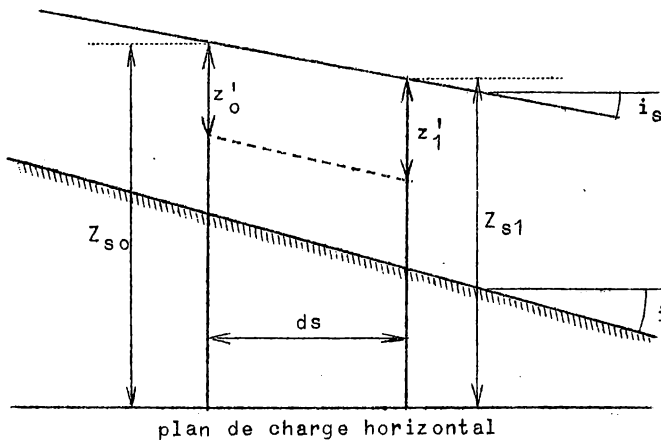


Fig. 13.

Nous nous servons de cette équation, qui correspond à

$$\alpha = 1 \text{ et } \eta = \eta' = 0$$

et dont l'établissement direct est aisé. On admettra aussi de la sorte que la répartition des vitesses ne varie pas d'une section à l'autre, α , η et η' étant constants.

En combinant les formules de Bazin (chapitre IX, paragraphe 12) et de Strickler (chapitre IX, paragraphe 6), on peut écrire

$$\alpha = 1 + \frac{N}{C^2} = 1 + \frac{N \cdot k^{1/3}}{400 R^{1/3}} = 1 + \frac{N^2}{\zeta^{1/3}} \quad (40)$$

et

$$\eta = \frac{N}{3 C^2} = \frac{N \cdot k^{1/3}}{1200 R^{1/3}} = \frac{N^2}{3 \zeta^{1/3}} \quad (40 \text{ bis})$$

Pour une section rectangulaire infiniment large $N = 150$, on aurait

$$\alpha = 1 + \frac{0,375 k^{1/3}}{h^{1/3}} \quad (R = h)$$

$$\eta = \frac{0,125 \cdot k^{1/3}}{h^{1/3}}$$

Pour une section rectangulaire assez large, on aurait $N^2 = 0,525$

et pour une section semi-circulaire $N^2 = 0,5875$.

On a

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dh} \cdot \frac{dh}{ds} = \frac{-N^2 \cdot k^{1/3}}{3 h^{4/3}} \cdot \frac{dh}{ds}$$

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{1}{3} \cdot \frac{d\alpha}{ds}$$

D'après cela, il est justifié de prendre $\alpha = 1$ et $\eta = 1$ pour les sections assez grandes et de rugosité modérée ($\zeta = \frac{R}{k}$ grand) et de considérer ces paramètres comme constants si $\frac{dh}{ds}$ est faible, c'est-à-dire si h ne varie pas brusquement.

3.- LES FONCTIONS DE COURANT; HAUTEUR CRITIQUE

A) Nous avons défini précédemment la hauteur de charge E rapportée à un plan horizontal

$$E = \frac{p_a}{\gamma_e} + Z + \alpha \cdot \frac{n^2}{2g} = \sim \frac{p_a}{\gamma_e} + Z_s + \frac{u^2}{2g} \quad (41)$$

La hauteur

$$\zeta = h \cdot \sqrt{1 - i^2} + \frac{\alpha \cdot u^2}{2g} = \sim h \cdot \sqrt{1 - i^2} + \frac{u^2}{2g} \quad (42)$$

est égale à

$$\zeta = E - \frac{p_a}{\gamma_e} - Z_f \quad (42 \text{ bis})$$

car

$$Z = Z_s - Z_f = h \cdot \sqrt{1 - i^2} \quad (\text{fig. 14})$$

Comme i est toujours pratiquement inférieur à quelques centièmes, en général

$$\sqrt{1 - i^2} = 1 - \frac{i}{2}$$

peut être pris égal à l'unité.

On écrit alors

$$\zeta = h + \frac{u^2}{2g} \quad (42 \text{ ter})$$

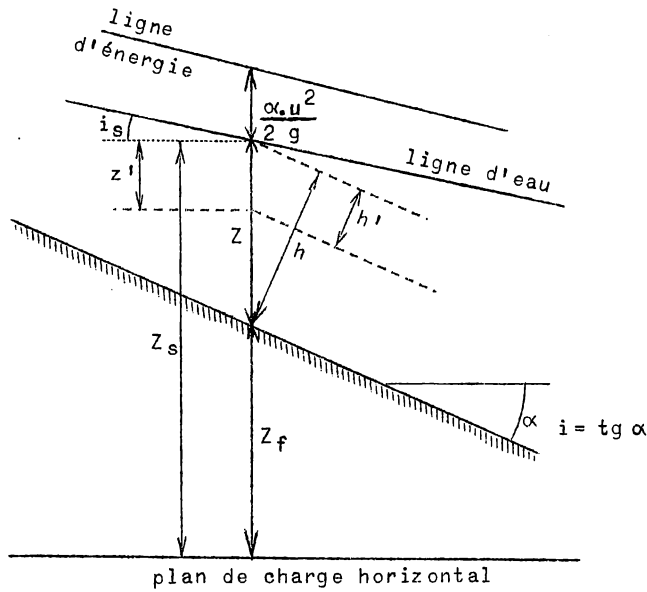


Fig. 14.

Cette fonction définit la ligne d'énergie rapportée au fond du lit.

L'équation de Bernoulli

$$i_s - \frac{f'}{\gamma_e} = \frac{\alpha}{2g} \cdot \frac{du^2}{ds}$$

peut s'écrire

$$- \frac{dE}{ds} = i - \frac{d\mathcal{E}}{ds} = \frac{f'}{\gamma_e}$$

Donc

$$\frac{d\mathcal{E}}{ds} = i - \frac{f'}{\gamma_e} \quad (43)$$

En mouvement uniforme permanent, h , ω et

$u = \frac{Q}{\omega}$ sont constants,

donc $\frac{d\mathcal{E}}{ds} = 0$, et

$$i = \frac{f'}{\gamma_e} = \frac{u^2}{C^2 \cdot R} = \frac{u^2 \cdot \chi}{C^2 \cdot \omega} \quad (18 \text{ bis})$$

Nous admettons la même valeur de $\frac{f'}{\gamma_e}$ pour le mouvement permanent non uniforme, donc

$$\frac{d\mathcal{E}}{ds} = i - \frac{u^2}{C^2 \cdot R} = i - \frac{u^2 \cdot \chi}{C^2 \cdot R} \quad (43 \text{ bis})$$

La fonction \mathcal{E} peut s'écrire

$$\mathcal{E} = h + \frac{Q^2}{2g \cdot \omega^2} \quad (44)$$

Q étant constant, \mathcal{E} présente un minimum pour $\frac{d\mathcal{E}}{dh} = 0$

ou
$$1 - \frac{Q^2}{g \cdot \omega^3} \cdot \frac{d\omega}{dh} = 1 - \frac{Q^2 \cdot 1}{g \cdot \omega^3} = 0$$

d'où
$$\omega = \sqrt[3]{\frac{Q^2 \cdot 1_c}{g}} = \omega_c \quad Q = \omega_c \cdot \sqrt{\frac{g \cdot \omega_c}{1_c}} \quad (45)$$

et
$$u_c = \frac{Q}{\omega_c} = \sqrt[3]{\frac{Q \cdot g}{1_c}} = \sqrt{\frac{g \cdot \omega_c}{1_c}} \quad \omega_c = \frac{u_c^2 \cdot 1_c}{g}$$

Ces relations définissent la profondeur critique H_c (correspondant à la section ω_c) et la vitesse critique u_c pour lesquelles la charge est minimum, c'est-à-dire l'énergie par unité de poids.

La valeur minimum de l'énergie est

$$\xi_c = H_c + \frac{Q^2}{2 g \cdot \omega_c^2} = H_c + \frac{\omega_c}{2 l_c} \quad (46)$$

si la section est rectangulaire $\omega_c = H_c \cdot l_c$

$$\text{et } \left. \begin{aligned} \xi_c &= \frac{3}{2} H_c, & H_c &= \sqrt[3]{\frac{Q^2}{l_c^2 \cdot g}}, & \omega_c &= \sqrt[3]{\frac{Q \cdot g}{l_c}} \\ H_c &= \frac{\omega_c^2}{g}, & \omega_c &= \sqrt{g \cdot H_c} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Pour une section rectangulaire infiniment large

$$\left. \begin{aligned} H_c &= \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g}}, & \omega_c &= \sqrt[3]{Q \cdot g}, & \xi_c &= \frac{3}{2} H_c \\ H_c &= \frac{\omega_c^2}{g}, & \omega_c &= \sqrt{g \cdot H_c} \end{aligned} \right\} \quad (47 \text{ bis})$$

Considérons que dans une section ξ ait une valeur donnée constante.

Alors
$$Q^2 = 2 g \cdot \omega^2 \cdot (\xi - h)$$

possède un maximum défini par

$$2 Q \cdot \frac{dQ}{dh} = 2 (\xi - h) \cdot l - \omega = 0$$

d'où
$$\omega = 2 (\xi - h) \cdot l = \frac{Q^2}{g \cdot \omega^2} \cdot l \quad \text{et} \quad \omega = \sqrt[3]{\frac{Q^2 \cdot l}{g}} = \omega_c$$

Si la section rectangulaire $h \cdot l = 2 (\xi - h) \cdot l$

d'où
$$h = \frac{2}{3} \cdot \xi = H_c \quad Q_c = H_c \cdot l \cdot \sqrt{g \cdot H_c} \quad (48)$$

Donc la hauteur critique H_c correspond :

- 1) au minimum de l'énergie si le débit est constant;
- 2) au maximum du débit si l'énergie est constante.

Pour un débit donné, à toute valeur de ξ supérieure à ξ_c correspondent deux valeurs de h conjuguées h_{e1} et h_{e2} (fig. 15).

Le diagramme de la figure 15 peut être rendu universel en prenant comme coordonnées $\frac{\xi}{H_c}$ et $\frac{h}{H_c}$. La figure 16 représente $\frac{\xi}{H_c}$ en fonction de $\frac{h}{H_c}$ pour une section rectangulaire.

Si ξ est constant, comme

$$\xi = \frac{3}{2} \cdot H_c$$

on a
$$\frac{Q^2}{2 g \cdot h^2 \cdot l^2} = \frac{3}{2} \cdot H_c - h, \quad \frac{Q_c^2}{2 g \cdot H_c^2 \cdot l^2} = \frac{H_c}{2},$$

pour une section rectangulaire.

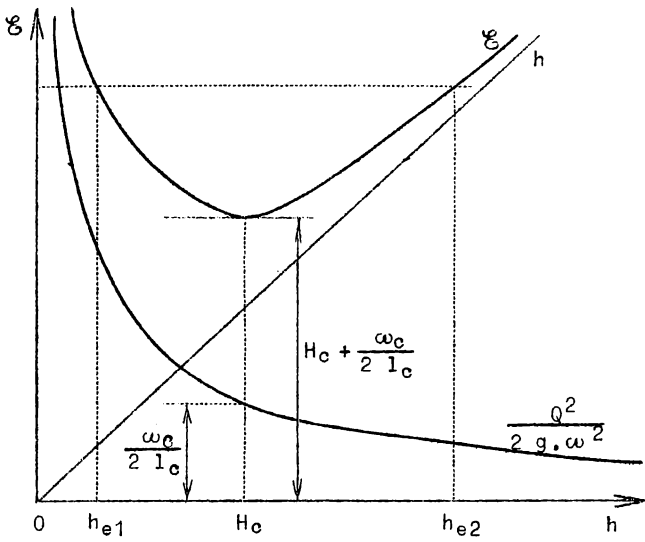


Fig. 15.

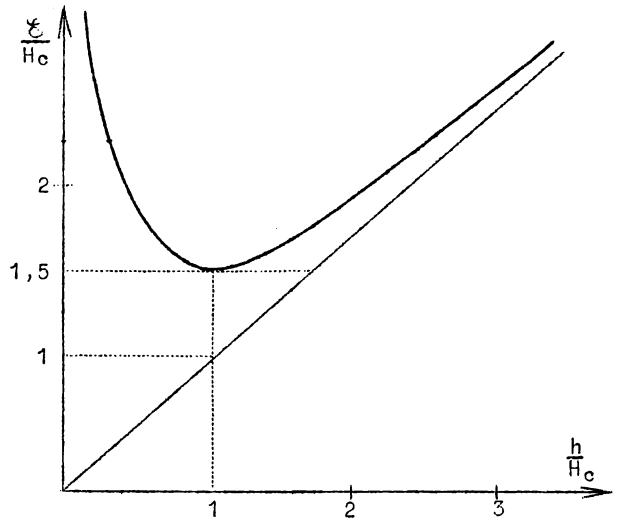


Fig. 16.

D'où
$$\left(\frac{Q}{Q_c}\right)^2 = 3 \cdot \left(\frac{h}{H_c}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{h}{H_c}\right)^3 \quad (49)$$

La figure 17 représente cette relation.

Si l'on considère h constant, on a pour une section rectangulaire

$$\frac{\xi}{h} = 1 + \frac{Q^2}{2 g \cdot l^2 \cdot h^3}, \quad (50)$$

relation représentée par la figure 18.

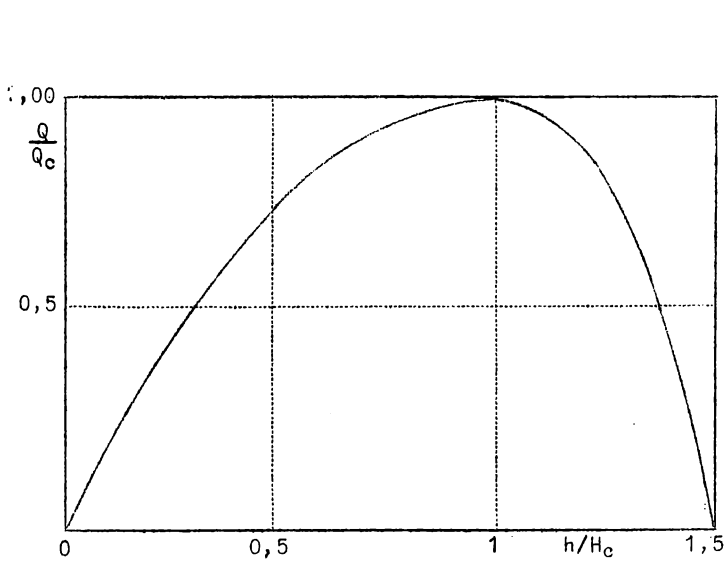


Fig. 17.

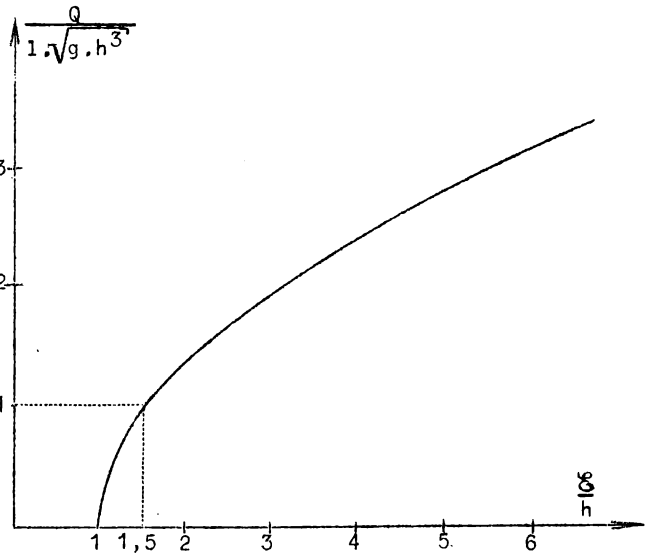


Fig. 18.

REMARQUE.

Le rapport
$$\frac{u^2}{2 g \cdot h} = \frac{\mathfrak{E}_{cin}}{\mathfrak{E}_{pot}} = \frac{\mathfrak{F}^2}{2}$$

pour une section quelconque.

On appelle \mathfrak{F}^2 , carré du nombre de Froude, le facteur cinétique de courant. C'est le double du rapport de l'énergie cinétique à l'énergie potentielle. Dans une section rectangulaire :

pour $h < H_c$ (écoulement rapide), $u > u_c$, $u > \sqrt{g \cdot h}$, donc $\mathfrak{F}^2 > 1$;
 pour $h = H_c$, $u = u_c = \sqrt{g \cdot H_c}$, $\mathfrak{F} = 1$ et $\mathfrak{F}^2 = 1$;
 pour $h > H_c$, $u < u_c$, $u < \sqrt{g \cdot h}$, $\mathfrak{F}^2 < 1$,
 (écoulement lent).

B) Nous avons établi au paragraphe 2, B), la formule

$$-\frac{d(\omega z')}{ds} + i_{moy} \omega - \frac{f' \cdot \omega}{\gamma_e} + \frac{1}{\gamma_e \cdot u} \int_0^\omega f \cdot \partial v \cdot d\omega = \frac{1 + \eta}{2 g} \cdot \omega \cdot \frac{du^2}{ds}$$

d'où

$$\frac{d(\omega z')}{ds} + \frac{1 + \eta}{2 g} \cdot \omega \cdot \frac{du^2}{ds} = i_{moy} \cdot \omega - \frac{f' \cdot \omega}{\gamma_e} + \frac{1}{\gamma_e \cdot u} \int_0^\omega f \cdot \partial v \cdot d\omega$$

On considère généralement le premier membre comme la dérivée d'une fonction du courant

$$\omega \cdot z' + \frac{1 + \eta}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega}$$

et l'on égale cette dernière à $\omega \cdot (i - \frac{f'}{\gamma_e})$, c'est-à-dire à $\omega \cdot \frac{d\mathcal{M}}{ds}$.

D'après ce qui a été exposé au paragraphe 2, B), pour pouvoir écrire cela correctement, il faut considérer la fonction de courant

$$\mathcal{M} = \omega \cdot z' + \frac{\alpha \cdot Q^2}{g \cdot \omega} = \omega \cdot h' \cdot \sqrt{1 - i^2} + \frac{\alpha \cdot Q^2}{g \cdot \omega} \quad (51)$$

$$\mathcal{M} = \sim \omega \cdot h' + \frac{Q^2}{g \cdot \omega} \quad (51 \text{ bis})$$

Cette fonction, qui a comme dimension un moment statique de surface (soit l^3) est appelée "momentum" par les Anglo-Saxons. Nous l'appellerons par analogie "moment" plutôt que "quantité de mouvement"; elle représente cependant une quantité de mouvement par unité de poids. Rappelons que

$$z' = Z_s - \int_0^\omega \frac{Z \cdot d\omega}{\omega}$$

se compte à partir de la surface libre, de même que h' .

On peut alors écrire

$$\frac{d\mathcal{M}}{ds} = \omega \cdot (i - \frac{f'}{\gamma_e}) .$$

La fonction \mathcal{M} possède un minimum pour Q constant

$$\frac{d\mathcal{M}}{dh} = \omega - \frac{Q^2 \cdot 1}{g \cdot \omega^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad \omega = \sqrt[3]{\frac{Q^2 \cdot 1}{g}} = \omega_c$$

Le minimum de \mathcal{M} correspond à la profondeur critique H_c et au minimum de \mathcal{E} .

Pour une section rectangulaire

$$\mathcal{M} = \sim \frac{1 \cdot h^2}{2} + \frac{Q^2}{g \cdot 1 \cdot h}, \quad H_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot 1^2}}$$

Pour une section rectangulaire infiniment large

$$\mathcal{M} = \sim \frac{h^2}{2} + \frac{q^2}{g \cdot h}, \quad H_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

(52)

Pour $h = H_c$, on a $\mathcal{M}_c = \sim \omega_c \cdot (h'_c + \frac{\omega_c}{l_c})$

Pour une section rectangulaire $\mathcal{M}_c = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot H_c^2$;

Pour un rectangle infiniment large $\mathcal{M}_c = \frac{3}{2} \cdot H_c^2$

Si \mathcal{M} est constant, on constate que Q est maximum pour $h = H_c$.

En effet, $Q^2 = (\mathcal{M} - \omega \cdot h') \cdot g \cdot \omega$

$$2 Q \cdot \frac{dQ}{dh} = \mathcal{M} \cdot g \cdot 1 - g \cdot \omega^2 - g \cdot \omega \cdot h' \cdot 1 = 0$$

d'où $\mathcal{M} = (\frac{\omega}{1} + h') \cdot \omega = \mathcal{M}_c$ et $\omega = \omega_c$, $h = H_c$ et $l = l_c$.

Posons

$$\left. \begin{aligned} \varphi(h) &= \frac{1}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega} \\ \Psi(h) &= \omega \cdot h' \\ \mathcal{M} &= \varphi(h) + \Psi(h) \end{aligned} \right\} (53)$$

Les courbes $\varphi(h)$ et $\Psi(h)$ ont les formes indiquées à la figure 19. La courbe de \mathcal{M} est asymptotique à celles de $\varphi(h)$ et de $\Psi(h)$.

A toute valeur de \mathcal{M} (supérieure à \mathcal{M}_c) correspondent deux valeurs de h , h_{m1} et h_{m2} .

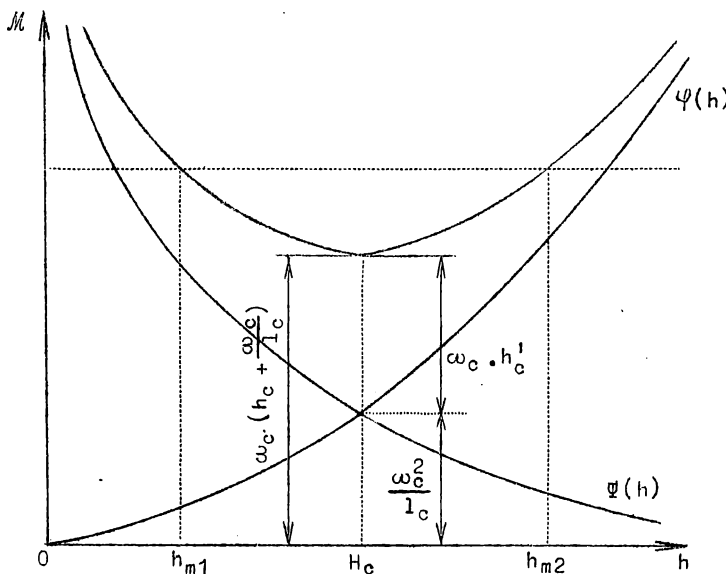


Fig. 19.

Pour une section rectangulaire

$$M = \frac{l \cdot h^2}{2} + \frac{l \cdot H_c^3}{h} \quad \text{d'où} \quad \frac{M}{l \cdot H_c^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{H_c}\right)^2 + \frac{H_c}{h} \quad (53 \text{ bis})$$

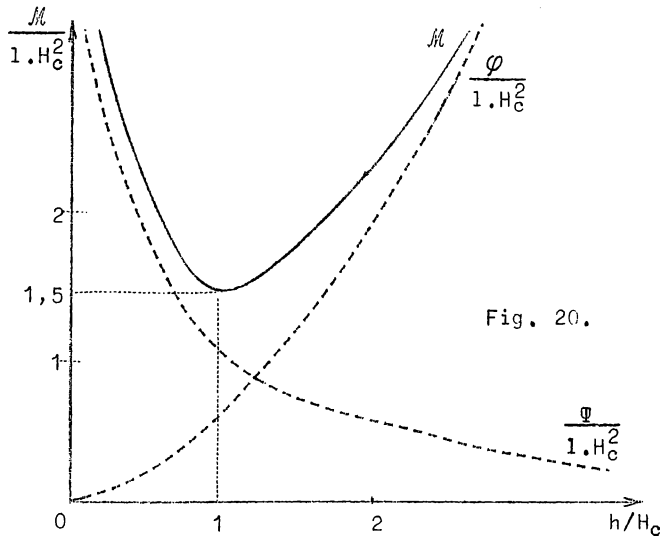


Fig. 20.

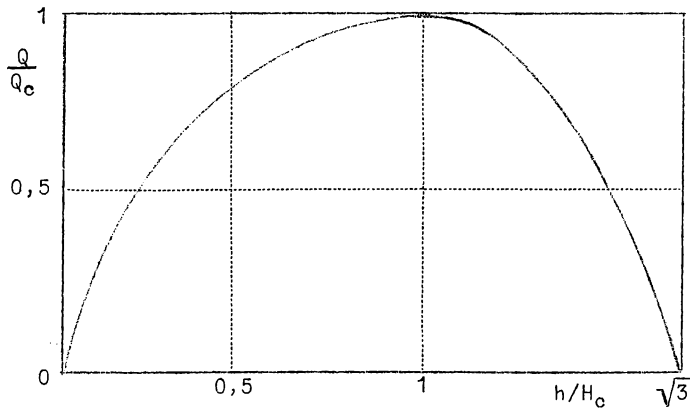


Fig. 21.

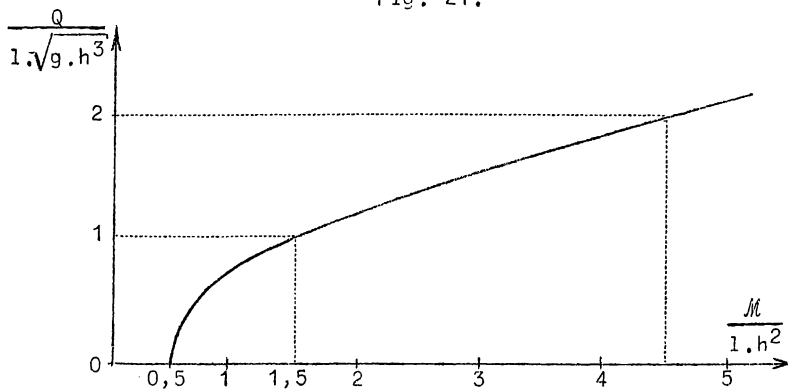


Fig. 22.

La figure 20 reproduit la fonction sans dimension $\frac{M}{l \cdot H_c^2}$ en fonction de $\frac{h}{H_c}$ pour une section rectangulaire.

Si M est invariable,

$$M = \frac{3}{2} \cdot l \cdot H_c^2$$

$$Q_c^2 = g \cdot l^2 \cdot H_c^3$$

$$\frac{Q_c^2}{Q_c^2} = \frac{(M - \frac{l \cdot h}{2}) \cdot g \cdot l \cdot h}{g \cdot l^2 \cdot H_c^3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{H_c} - \frac{h^3}{2 H_c^3} \quad (54)$$

La figure 21 représente cette relation pour une section rectangulaire.

Enfin,

$$\frac{M}{l \cdot h^2} = \frac{1}{2} + \left(\frac{Q}{l \cdot \sqrt{g \cdot h^3}}\right)^2$$

La figure 22 représente cette fonction.

On a

$$\frac{u^2}{g \cdot h'} = \frac{M_{cin}}{M_{press}} = \mathfrak{g}^2 \cdot \frac{h}{h'}$$

Pour une section rectangulaire

$$\frac{u^2}{g \cdot h'} = \frac{M_{cin}}{M_{press}} = 2 \mathfrak{g}^2$$

La hauteur critique établit la limite entre deux modes d'écoulement pour un même débit. Lorsque

$h < H_c$, $u > u_c$,

on a l'écoulement

rapide. Lorsque $h > H_c$, $u < u_c$, on a l'écoulement lent. Ces deux écoulements peuvent correspondre, sous des hauteurs différentes, à un même débit, à une même énergie ou un même moment. Mais, si $h_{1c} = h_{1m}$, $h_{2c} > h_{2m}$, les couples de profondeurs conjuguées d'égale énergie et d'égale moment ne se correspondent pas.

4.- EQUATION DU MOUVEMENT PERMANENT GRADUELLEMENT VARIE

On admet que les sections varient très graduellement, de telle sorte que les filets ont une courbure négligeable et sont sensiblement parallèles. Les lits ne sont pas nécessairement prismatiques, mais n'en diffèrent pas beaucoup. Les sections transversales sont régulières et ouvertes, c'est-à-dire partout concaves vers le haut. En général, elles n'offrent pas de discontinuités. On se réfère à la profondeur maximum h dans le talweg.

Une propriété générale est $\frac{d\omega}{dh} = 1$. Elle subsiste même en cas de discontinuité de h , $\frac{d\omega}{dh}$ ayant alors deux valeurs différentes l_1 et l_2

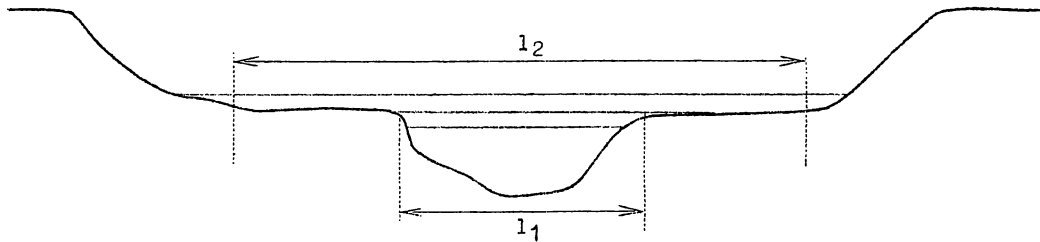


Fig. 23.

pour une même valeur de h , mais suivant le sens de dh (fig. 23). Ceci suppose toutefois que la ligne d'eau transversale soit horizontale (voir paragraphe 13).

L'équation du mouvement permanent graduellement varié a été établie au paragraphe 2, B); c'est l'équation de Bernoulli appliquée au courant

$$i_s - \frac{f'}{\gamma_e} = \frac{\alpha}{2g} \cdot \frac{d(u^2)}{ds} \quad (39)$$

avec
$$\frac{f'}{\gamma_e} = \frac{u^2}{C^2 \cdot R} = \frac{u^2 \cdot \chi}{C^2 \cdot \omega} \quad (18 \text{ bis})$$

ou
$$i_s - \frac{\alpha}{2g} \cdot \frac{d(u^2)}{ds} = - \frac{dE}{ds} = \frac{u^2}{C^2 \cdot R} = \frac{u^2 \cdot \chi}{C^2 \cdot \omega} \quad (56)$$

$$- \frac{dZ_s}{ds} - \frac{\alpha}{2g} \cdot \frac{d(u^2)}{ds} = \frac{u^2 \cdot \chi}{C^2 \cdot \omega} \quad (57)$$

Aux différences finies, on écrira :

$$- \Delta Z_s - \frac{\alpha}{2g} \Delta(u^2) = \frac{u^2 \cdot \chi}{C^2 \cdot \omega} \cdot \Delta s \quad (58)$$

ou

$$Z_{s_0} - Z_{s_1} = \frac{\alpha_{\text{moy}}}{2g} \cdot (u_1^2 - u_0^2) + \frac{u_{\text{moy}}^2 \cdot \chi_{\text{moy}}}{C_{\text{moy}}^2 \cdot \omega_{\text{moy}}} \cdot \Delta s, \quad \Delta s = s_1 - s_0 \quad (59)$$

Cette forme de l'équation appliquée à des tronçons assez courts et réguliers permet d'établir par voie de mesures hydrographiques et hydrométriques, les altitudes Z_{s_0} et Z_{s_1} , la distance $\Delta s = s_1 - s_0$, les sections terminales (ω_1 et ω_0) et moyenne (ω_m , χ_m), les vitesses

$$u_0 = \frac{Q}{\omega_0}, \quad u_1 = \frac{Q}{\omega_1}, \quad u_m = \frac{Q}{\omega_m},$$

le débit étant supposé connu.

On admettra généralement $\alpha = 1$.

On a vu au paragraphe 3, A) que

$$- \frac{dE}{ds} = i - \frac{d\mathcal{E}}{ds}$$

$$\text{d'où} \quad i - \frac{dh}{ds} \sqrt{1 - i^2} - \frac{\alpha}{2g} \cdot \frac{du^2}{ds} = \frac{u^2}{C^2 \cdot R} = \frac{u^2 \cdot \chi}{C^2 \cdot \omega}$$

$$\text{On écrira} \quad i - \frac{dh}{ds} - \frac{1}{2g} \cdot \frac{du^2}{ds} = \frac{u^2 \cdot \chi}{C^2 \cdot \omega}$$

d'où, aux différences finies

$$i \cdot \Delta s - \Delta h = \frac{1}{2g} \cdot \Delta u^2 + \frac{u^2 \cdot \chi}{C^2 \cdot \omega} \cdot \Delta s \quad (59 \text{ bis})$$

$$i \cdot (s_1 - s_0) + (h_0 - h_1) = \frac{1}{2g} \cdot (u_1^2 - u_0^2) + \frac{u_m^2 \cdot \chi_m}{C_m^2 \cdot \omega_m} \cdot \Delta s \quad (59 \text{ ter})$$

Il faut connaître la pente moyenne i du fond (talweg) et les profondeurs maxima aux deux sections extrêmes. Pour les mesures, l'équation en ΔZ_s est plus adéquate.

Les calculs aux différences finies se font le plus simplement en se donnant les ΔZ_s ou les Δh ; on connaît alors tous les éléments sauf Δs , que l'on déduit de l'équation, Q et i étant connus.

Si on part de la section 0 et que l'on se donne $\Delta s = s_1 - s_0$, on connaît Z_{s_0} ou h_0 , ω_0 , χ_0 , u_0 , mais pas Z_{s_1} ou h_1 , ω_1 , χ_1 , ω_m , χ_m , C_m , u_1 et u_m . On calcule par approximations successives, en admettant d'abord

$$\omega_1 = \omega_m = \omega_0, \quad u_1 = u_m = u_0, \quad \chi_m = \chi_0, \quad C_m = C_0.$$

L'équation donne une valeur de première approximation de Z_{s_1} ou h_1 , d'où u_1 , ω_1 , ω_m , χ_m , C_m , etc... On procède ensuite à des calculs d'approximations successives, dont la convergence est assez rapide, parce que le terme $\frac{1}{2g} \cdot (u_1^2 - u_0^2)$ est généralement faible et même parfois négligé.

Par ces méthodes, on pourra déterminer les modifications des lignes d'eau (ou axes hydrauliques) résultant par exemple de modifications apportées au lit d'un cours d'eau. Dans le cas où les éléments intervenant dans l'équation font l'objet de mesures, on peut en déduire les valeurs de C_{moy} et les comparer aux résultats des formules du chapitre IX, paragraphe 6. Pour contrôler les valeurs de α , il faudrait des mesures multiples et la précision sera faible, à cause de l'insignifiance habituelle du terme $\frac{\alpha}{2g} \cdot (u_1^2 - u_0^2)$.

On obtient les mêmes équations à partir de

$$\frac{dM}{ds} = \omega \cdot \left(1 - \frac{f'}{\gamma_e}\right)$$

Comme $M = \omega \cdot z' + \frac{\alpha}{g} \cdot Q \cdot u$, $\frac{dM}{ds} = \omega \frac{dz'}{ds} + \frac{Q \cdot \alpha}{g} \cdot \frac{du}{ds}$

$$\frac{dM}{ds} = \omega \cdot \left[\frac{dz'}{ds} + \frac{\alpha}{2g} \cdot \frac{d(u^2)}{ds} \right] = \omega \cdot \left(1 - \frac{f'}{\gamma_e}\right)$$

d'où $i_s - \frac{f'}{\gamma_e} = \frac{\alpha}{2g} \cdot \frac{d(u^2)}{ds}$, $\frac{f'}{\gamma_e} = \frac{u^2 \cdot \lambda}{c^2 \cdot \omega}$

d'où $-\frac{dz_s}{ds} - \frac{\alpha}{2g} \cdot \frac{d(u^2)}{ds} = \frac{u^2 \cdot \lambda}{c^2 \cdot \omega}$

5.- EQUATION DU MOUVEMENT PERMANENT GRADUELLEMENT VARIE DANS UN LIT PRISMATIQUE

A) On envisage une section transversale régulière et partout concave vers le haut, c'est-à-dire ne coupant pas deux fois une même verticale.

Une telle section présente les caractères suivants. Traçons les tangentes à la courbe aux limites A et B du plan d'eau; elles se coupent en T à une distance $h_T > h$ sous le plan d'eau. Elles font respectivement des angles θ et θ' avec la verticale. Toutes les caractéristiques de la section ne sont fonction que h .

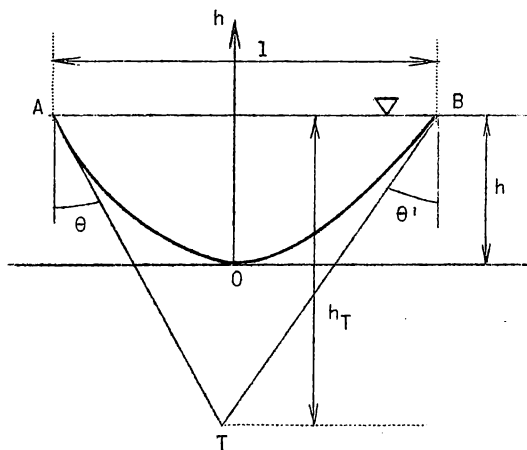


Fig. 24.

1) $l = f(h)$ est une fonction régulièrement croissante de h variant de 0 en 0 vers une limite supérieure (ou sans limite théoriquement).

2) $\frac{dl}{dh} = \text{tg } \theta + \text{tg } \theta' > 0$; cette dérivée est continue et finie.

3) $\frac{d\chi}{dh} = \sec \theta + \sec \theta' = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta'}$; cette dérivée est continue et finie; elle est > 2 .

4) $R = \frac{\omega}{\chi}$ est une fonction toujours croissante de h . En effet $\chi > (\sec \theta + \sec \theta').h$, d'où $\chi.l > h.l$ ($\sec \theta + \sec \theta'$)

A fortiori $\chi.l > \omega.(\sec \theta + \sec \theta')$

ou $\chi. \frac{d\omega}{dh} > \omega. \frac{d\chi}{dh}$ et $\chi. \frac{d\omega}{dh} - \omega. \frac{d\chi}{dh} > 0$,

donc $\frac{dR}{dh} > 0$.

5) La fonction $\frac{\omega}{l}$ est toujours croissante. En effet $l.h > \omega$, d'où $l.h.(\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \theta') > \omega. \frac{dl}{dh}$

Or $l > h.(\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \theta')$, d'où $l^2 = l. \frac{d\omega}{dh} > \omega. \frac{dl}{dh}$

et $l. \frac{d\omega}{dh} - \omega. \frac{dl}{dh} > 0$, donc $\frac{d(\frac{\omega}{l})}{dh} > 0$.

6) $\frac{\chi}{l}$ est une fonction toujours croissante.

En effet $l = h_T.(\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \theta')$

$h_T.(\sec \theta + \sec \theta') > \chi$,

d'où $l.(\sec \theta + \sec \theta') > \chi.(\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \theta')$

ou $l. \frac{d\chi}{dh} - \chi. \frac{dl}{dh} > 0$ et $\frac{d(\frac{\chi}{l})}{dh} > 0$

Comme $\chi < l + 2h$, $\frac{\chi}{l} < 1 + \frac{2h}{l}$ et la limite inférieure de $\frac{\chi}{l}$ est 1.

B) Même dans un canal prismatique ou cylindrique, le mouvement permanent n'est généralement pas uniforme. Les conditions initiales ou terminales, les changements de pente et de section, les discontinuités où les obstacles créent des zones troublées de mouvement varié, qui peuvent créer des discontinuités du courant et des courbures importantes des filets liquides. A distance suffisante de ces perturbations, les caractères du mouvement se rapprochent en apparence beaucoup de ceux du mouvement uniforme, mais en différent par la variation graduelle des sections et des vitesses et, par conséquent, de la pente de la surface du courant i_s , représentée par la ligne d'eau ou axe hydraulique. Ce mouvement s'appelle le mouvement permanent graduellement varié. Dans les canaux non prismatiques, le mouvement permanent uniforme est impossible. Il est toujours graduellement varié si les variations du lit sont aussi graduelles.

Dans l'hypothèse de la forme rectiligne des filets liquides supposés parallèles, qui est suffisamment exacte pour les parties pratiquement déterminables des axes, les pressions varient suivant la loi hydrostatique et l'équation générale du mouvement permanent est

$$\sin \alpha_s = \frac{1}{2g} \cdot \frac{\alpha \cdot d(u^2)}{ds} + \frac{1}{R} \cdot \frac{u^2}{C^2} \quad (\text{par. 2 et par. 4})$$

$\sin \alpha_s$ est la pente piézométrique qui dans le cas d'un courant libre correspond à la pente de surface $-\frac{dZ_s}{ds}$. Elle est liée à la pente de fond par la relation

$$\sin \alpha_s = -\frac{dZ_s}{ds} = -\frac{dZ_f}{ds} - \frac{dZ}{ds}$$

puisque $Z_s = Z_f + Z$ (fig. 14).

On peut encore s'en rendre compte par la figure 25.

On a
$$\sin \alpha_s = -\frac{dZ_s}{ds} = -\frac{dZ_f}{ds} - \frac{dZ}{ds}$$

$$\sin \alpha_s = \sin \alpha - \frac{dZ}{ds}$$

Mais

$$dZ = dh \cdot \sqrt{1 - i^2}$$

$$\sin \alpha_s = \sin \alpha - \frac{dh}{ds} \sqrt{1 - i^2}$$

$$\sin \alpha_s \approx \sin \alpha - \frac{dh}{ds}$$

En général, les inclinaisons sont assez faibles pour que l'on puisse écrire

$$\sin \alpha = \text{tg } \alpha = i \quad \text{et} \quad i_s = i - \frac{dh}{ds}$$

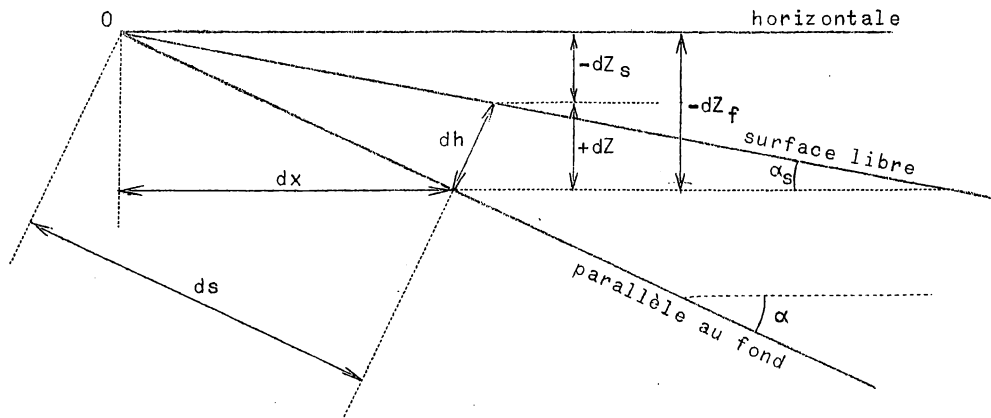


Fig. 25.

Nous admettrons la même loi de pertes de charge qu'en mouvement uniforme $\frac{u^2}{R \cdot C^2}$, d'où l'équation générale :

$$i - \frac{dh}{ds} = \frac{1}{2g} \cdot \frac{\alpha \cdot d(u^2)}{ds} + \frac{\chi}{\omega} \cdot \frac{u^2}{C^2} = \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega^3} \cdot \frac{d\omega}{ds} + \frac{\chi}{\omega} \cdot \frac{Q^2}{\omega^2 \cdot C^2}$$

$$i - \frac{\chi}{\omega} \cdot \frac{Q^2}{\omega^2 \cdot C^2} = \frac{dh}{ds} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega^3} \cdot \frac{d\omega}{dh}\right). \quad \text{Or} \quad \frac{d\omega}{dh} = 1$$

Enfin
$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{\omega^2 \cdot C^2} \cdot \frac{\chi}{\omega}}{1 - \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\omega}} \quad (60)$$

En général, on admet $\alpha = 1$.

C'est l'équation différentielle des axes hydrauliques pour les lits prismatiques, c'est-à-dire dont les paramètres ω , χ et l ne sont fonctions que de h .

Posons
$$i' = \frac{\chi}{\omega} \cdot \frac{Q^2}{\omega^2 \cdot C^2}$$

C'est la pente sous laquelle s'écoulerait en mouvement uniforme le débit Q par la section ω .

Donc
$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - i'}{1 - \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\omega}}$$

6.- ANALYSE DE L'EQUATION DU MOUVEMENT PERMANENT GRADUELLEMENT VARIE DANS LES CANAUX PRISMATIQUES

Pour que l'axe soit en pente, il faut que

$$\frac{dZ_s}{ds} < 0. \quad \text{Or} \quad - \frac{dZ_s}{ds} = i - \frac{dh}{ds} \cdot \sqrt{1 - i^2},$$

donc
$$- \frac{dz}{ds} = i - \frac{dh}{ds} \cdot \sqrt{1 - i^2} > 0$$

$$\frac{dh}{ds} < \frac{i}{\sqrt{1 - i^2}} \quad \text{ou encore} \quad < 0.$$

Pour qu'il y ait contre pente, il faut $\frac{dh}{ds} > \frac{i}{\sqrt{1 - i^2}}$.

La condition d'horizontalité est $i_s = 0$ ou $\frac{dh}{ds} = \frac{i}{\sqrt{1 - i^2}}$

En la développant, on obtient :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i}{\sqrt{1 - i^2}} = \frac{i - i'}{\sqrt{1 - i^2} - \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\omega}} = \frac{\frac{\chi}{\omega} \cdot \frac{Q^2}{\omega^2 \cdot C^2}}{\frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\omega}} = \frac{g \cdot \chi}{\alpha \cdot l \cdot C^2}$$

χ , l et C^2 sont fonctions de h ; la relation précédente définit les valeurs H_h de h pour lesquelles l'axe a une tangente horizontale.

Lorsque $\frac{dh}{ds} < \frac{i}{\sqrt{1-i^2}}$ ou $< \frac{g \cdot \chi}{\alpha \cdot l \cdot C^2}$ ou < 0 ,

l'axe est en pente;

lorsque $\frac{dh}{ds} > \frac{i}{\sqrt{1-i^2}}$ ou $> \frac{g \cdot \chi}{\alpha \cdot l \cdot C^2}$

l'axe est en contrepente.

Pour $h \equiv 0$, $\omega \equiv 0$ et $\frac{dh}{ds} \equiv \frac{i \cdot \frac{\omega^3}{Q^2} - \frac{\chi}{C^2}}{\sqrt{1-i^2} \cdot \frac{\omega^3}{Q^2} - \frac{\alpha}{g} \cdot l} = \frac{g \cdot \chi_0}{\alpha \cdot l_0 \cdot C_0^2} = \frac{g}{\alpha \cdot C_0^2}$

puisque la limite inférieure de $\frac{\chi}{l} = 1$ lorsque $h \equiv 0$.

Or $\alpha \cdot C^2 = C^2 + N$

N étant une constante dépendant de la forme du lit d'après Bazin (chapitre IX, paragraphe 12). Pour $h \equiv 0$, $C \equiv 0$, donc

$$\left(\frac{dh}{ds}\right)_0 \equiv \frac{g}{N} = \text{constante},$$

si l'on peut admettre la validité de la relation de Bazin jusqu'à la limite $h \equiv 0$.

Si l'on admet $\alpha = \text{constante}$, $\left(\frac{dh}{ds}\right)_0 = \infty$

Donc, l'axe hydraulique coupe un lit donné sous un angle constant, voisin de $\frac{\pi}{2}$. Cette propriété n'a d'ailleurs rien de pratique, mais est envisagée simplement en vue de fixer l'allure théorique de la courbe.

Pour $h \equiv \infty$, $\frac{dh}{ds} \equiv \frac{i}{\sqrt{1-i^2}}$ (condition d'horizontalité)

et l'axe tend vers une asymptote horizontale. Ceci est évident, puisque $\omega \equiv \infty$. Or Q est constant, donc $u \equiv 0$ et le plan d'eau doit être horizontal.

Pour que $\frac{dh}{ds} = 0$, il faut que $i = i' = \frac{\chi_u \cdot Q^2}{C_u^2 \cdot \omega_u^3}$

ce qui définit une certaine profondeur H_u qui n'est autre que celle sous laquelle le débit Q s'écoule en mouvement uniforme.

L'axe est asymptotique à l'axe rectiligne du mouvement uniforme parallèle au fond du lit ou confondu avec lui.

Pour que $\frac{dh}{ds} = \infty$, il faut que $\frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega_c^3} \cdot l_c = \sqrt{1-i^2} \approx 1$

ce qui définit la profondeur H_c critique, pour laquelle la tangente tend

à devenir perpendiculaire au fond du lit.

Par convention, nous considérons la ligne d'eau dans le plan vertical du thalweg. Pour un débit donné, les hauteurs H_u et H_c constituent deux éléments caractéristiques de l'écoulement. Leurs grandeurs relatives déterminent 2 cas, $H_c < H_u$, $H_c > H_u$ et le cas de passage $H_c = H_u$.

Ecrivons $\frac{dh}{ds} = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{D}}$, avec $\mathcal{R} = i - \frac{Q^2 \cdot \chi}{\omega^3 \cdot C^2}$ et $\mathcal{D} = \sqrt{1 - i^2} - \frac{\alpha \cdot Q^2 \cdot l}{\omega^3 \cdot g}$.

Les figures 26 et 27 représentent les variations de \mathcal{R} et de \mathcal{D} en fonction de h pour un lit donné, de pente donnée i et un débit Q donné.

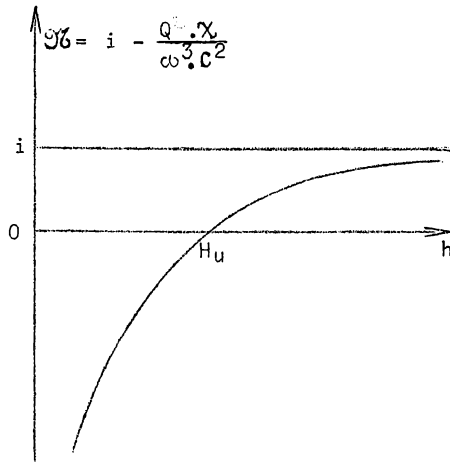


Fig. 26.

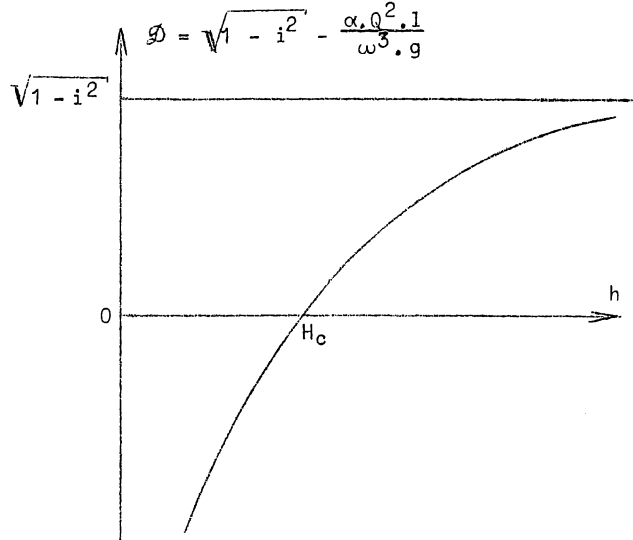


Fig. 27.

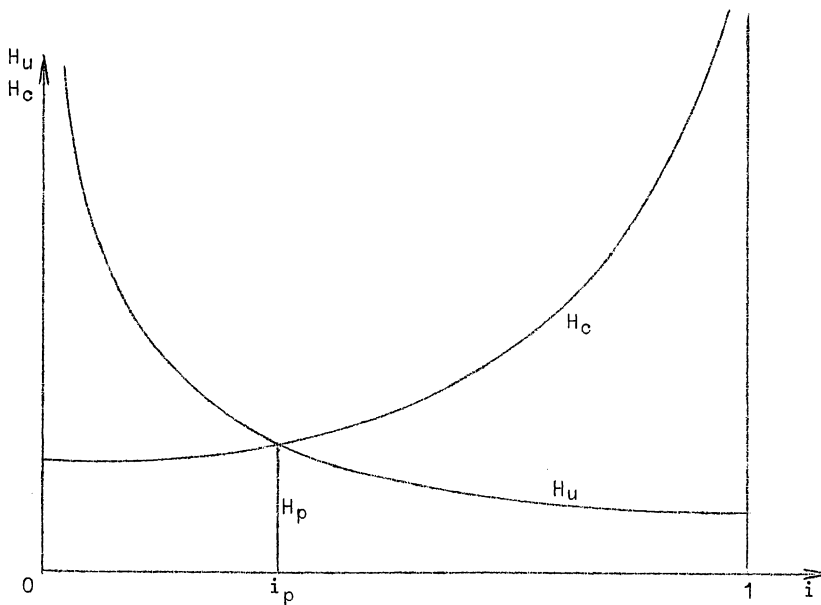


Fig. 28.

Pour un lit donné et un débit donné Q , H_u et H_c varient avec i comme l'indique schématiquement la figure 28. Pour une certaine pente i_p , appelée pente de passage,

$$H_u = H_c = H_p .$$

On a alors

$$\frac{i_p}{\sqrt{1 - i_p^2}} = \frac{g \cdot \chi_u}{\alpha \cdot l_u \cdot C_u^2}$$

Si $i < i_p$, $H_u > H_c$

Si $i > i_p$, $H_u < H_c$

7.- FORMES D'AXES HYDRAULIQUES DANS LES CANAUX PRISMATIQUES

A) Premier cas. $H_{cu} > H_c$, régime fluvial tranquille ou cours d'eau à faible pente.

On a dans ce cas, d'après la figure 28,

$$\frac{i}{\sqrt{1-i^2}} < \frac{\chi_u \cdot g}{C_u^2 \cdot \alpha \cdot l_u} \quad (61)$$

la pente est inférieure à la pente de passage i_p .

Nous représenterons les variations de $\frac{dh}{ds}$ en fonction de h , à partir de la relation $\frac{dh}{ds} = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{D}}$ et en nous référant aux figures 26 et 27.

Lorsque $h < H_c < H_u$, \mathcal{R} et \mathcal{D} sont < 0 et $\frac{dh}{ds} > 0$.

Lorsque $h = H_c$, $\mathcal{D} = 0$ et $\frac{dh}{ds} = \infty$, la courbe a une asymptote verticale.

Pour $H_c < h < H_u$, $\mathcal{D} > 0$ et $\mathcal{R} < 0$, $\frac{dh}{ds} < 0$; la courbe a une asymptote verticale.

Pour $h = H_u$, $\mathcal{R} = 0$, $\frac{dh}{ds} = 0$, la coupe coupe l'axe des h .

Pour $H_c < H_u < h$, \mathcal{R} et \mathcal{D} sont > 0 et $\frac{dh}{ds} > 0$.

La courbe a deux branches et une asymptote horizontale

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i}{\sqrt{1-i^2}} \quad (\text{fig. 29})$$

Peut-il y avoir des points à tangente horizontale? Il faut pour cela que

$$\frac{dh}{ds} = i,$$

c'est-à-dire que la courbe de $\frac{dh}{ds}$ coupe l'asymptote horizontale.

Pour $h = 0$, $\frac{dh}{ds} = \frac{g}{N}$,

qui est généralement $>$ que

$$\frac{\chi_u}{l_u} \cdot \frac{g}{N + C_u^2}$$

donc a fortiori $>$ que i , donc il ne peut y avoir de tangente horizontale lorsque $h < H_c$. D'ailleurs, si $\alpha = \text{constante}$ (1 par exemple),

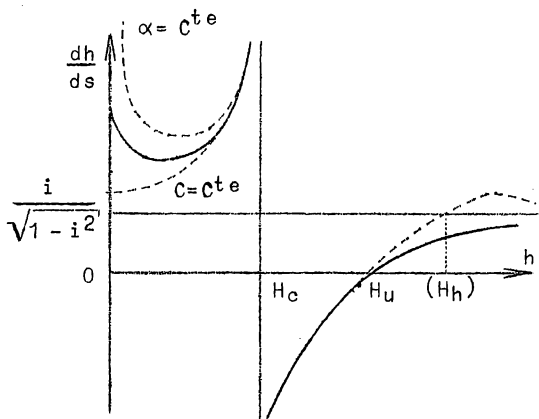


Fig. 29.

$(\frac{dh}{ds})_0 \equiv \infty$ et la courbe a l'allure représentée en pointillé à la figure 29, asymptotique à l'axe de $\frac{dh}{ds}$. Il en est de même lorsque $H_c < h < H_u$, puisque $\frac{dh}{ds} < 0$. Lorsque $h > H_u$, il faudrait que

$$\frac{\chi_h}{l_h} \cdot \frac{g}{N + C_h^2} < \frac{\chi_u}{l_u} \cdot \frac{g}{N + C_u^2}$$

condition qu'il n'est pas impossible de réaliser, car $\frac{\chi_h}{l_h}$ est $> \frac{\chi_u}{l_u}$,

mais croît relativement peu, et C_h est aussi $> C_u$ et peut croître beaucoup plus vite dans les lits très rugueux et aux profondeurs moyennes. Finalement l'existence d'un point H_h dépend du débit, de la pente, de la forme et de la nature du lit, sans constituer un point véritablement caractéristique, car il est plutôt exceptionnel.

Observons que si l'on suppose C constant, il n'est pas possible d'avoir un point H_h . Une valeur constante de α ne l'empêche pas. La figure 29 représente la variation de $\frac{dh}{ds}$, le tracé en pointillé de droite correspondant au cas où il y aurait un point H_h . Les formes d'axes correspondantes sont représentées sur la figure 30 par rapport au fond rectiligne du lit, divisé en trois zones par les droites $h = H_c$ et $h = H_u$.

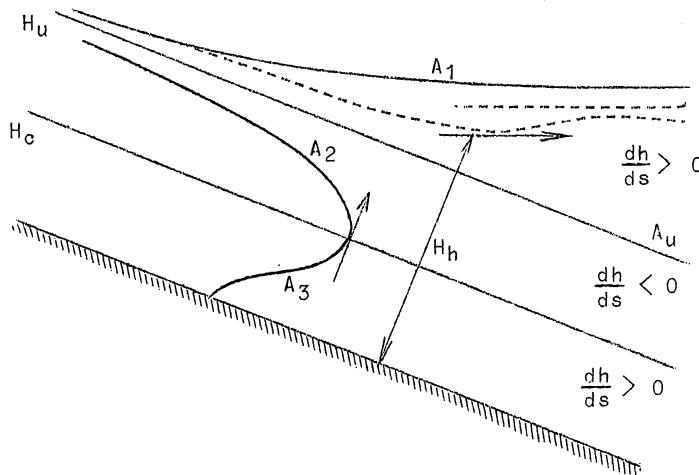


Fig. 30.

Lorsque $h = H_u$, l'axe devient la droite A_u du mouvement uniforme. Le tracé pointillé de l'axe A_1 correspond au cas où il y aurait un point H_h . Donc les droites H_u et H_c divisent le lit en trois zones; dans les 2 extrêmes $\frac{dh}{ds}$ est toujours > 0 , dans la moyenne toujours < 0 .

B) Deuxième cas. $H_c > H_u$, régime torrentiel ou cours d'eau à forte pente.

On voit immédiatement, d'après ce qui précède, que ce cas est caractérisé par

$$\frac{i}{\sqrt{1 - i^2}} > \frac{\chi_u \cdot g}{C_u^2 \cdot \alpha \cdot l_u} \quad (62)$$

la pente est supérieure à la pente de passage i_p . La variation de $\frac{dh}{ds}$ s'étudie comme précédemment et est représentée à la figure 31.

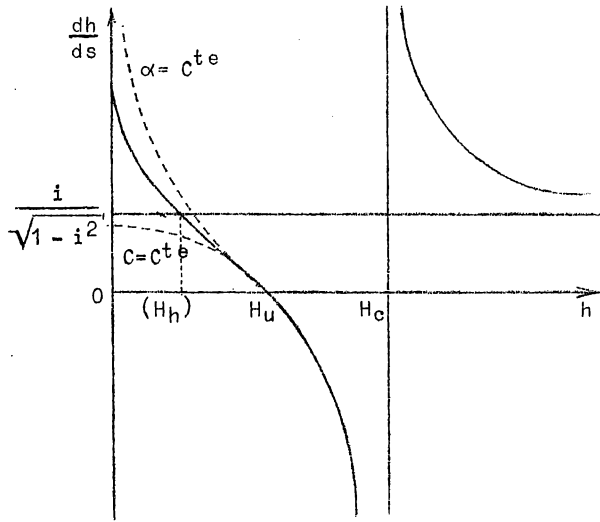


Fig. 31.

tillé et coupe nécessairement l'horizontale

Lorsque $h > H_c$, il faut

$$\frac{\chi_h}{l_h} \cdot \frac{g}{N + C_h^2} > \frac{\chi_u}{l_u} \cdot \frac{g}{N + C_u^2}$$

Il faut que la croissance de $\frac{\chi}{l}$ l'emporte sur celle de $N + C^2$, ce qui est improbable. Un point H_h éventuel serait donc dans la zone inférieure. Les formes d'axes sont représentées à la figure 32, qui montre encore que les droites H_c et H_u divisent le lit en trois zones, dans l'étendue desquelles existent les mêmes relations que précédemment en ce qui concerne les signes de $\frac{dh}{ds}$.

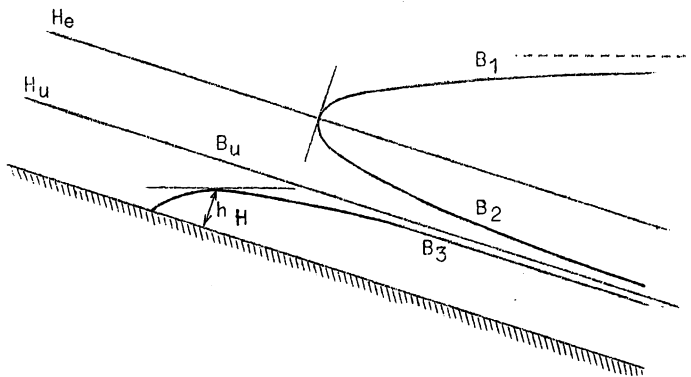


Fig. 32.

La question de savoir s'il peut y avoir un point H_h se résout comme suit.

Pour $h = 0$,

$$\frac{dh}{ds} = \frac{g}{N},$$

qui est $> \frac{\chi_u}{l_u} \cdot \frac{g}{N + C_u^2}$,

mais n'est pas nécessairement de ce fait $> i$.

Il l'est néanmoins en général et la courbe de $\frac{dh}{ds}$ (pointillée) coupe l'asymptote i pour $h < H_u$.

Si $\alpha = \text{constante}$,

la courbe est d'ailleurs asymptotique à l'axe de

$\frac{dh}{ds}$ suivant le tracé poin-

tillé et coupe nécessairement l'horizontale $\frac{dh}{ds} = i$.

ne les signes de $\frac{dh}{ds}$.

Lorsque $h = H_u$, l'axe B_u se confond avec la droite $h = H_u$.

C) CAS DE LA PENTE DE PASSAGE, $i = i_p$, $H_u = H_c$.

Ce cas est purement théorique, fortuit et fugace. On a

$$i = \frac{\omega_u \cdot g}{C_u^2 \cdot \alpha \cdot l_u} \quad (63)$$

On transforme l'équation des axes hydrauliques sous la forme suivante. Pour $h = H_u$, on a

$$\mathcal{D} = 0, \text{ d'où } Q^2 = \frac{i \cdot \omega_u^3 \cdot C_u^2}{\omega_u}.$$

Pour $h = H_c$, on a

$$\mathcal{D} = 0, \text{ d'où } \frac{\alpha \cdot Q^2}{g} = \frac{\omega_c^3}{i_c}.$$

On peut donc écrire

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2 \cdot X}{\omega^3 \cdot C^2}}{1 - \frac{\alpha \cdot Q^2 \cdot l}{\omega^3 \cdot g}} = i \cdot \frac{1 - \frac{\omega_u^3 \cdot C_u \cdot X}{\omega^3 \cdot C^2 \cdot X_u}}{1 - \frac{\omega_c^3 \cdot l}{\omega^3 \cdot l_c}}$$

Cette forme est tout-à-fait générale.

La condition d'horizontalité devient :

$$\frac{dh}{ds} = i = i \cdot \frac{1 - \frac{\omega_u^3 \cdot C_u \cdot X}{\omega^3 \cdot C^2 \cdot X_u}}{1 - \frac{\omega_c^3 \cdot l}{\omega^3 \cdot l_c}} = i \cdot \frac{\omega_u^3 \cdot C_u \cdot X \cdot l_c}{\omega_c^3 \cdot C^2 \cdot X_u \cdot l}$$

Dans le cas de la pente de passage, pour $h = H_u = H_c$ on a donc $\left(\frac{dh}{ds}\right)_{H_u, H_c} = i$,

c'est-à-dire que les axes hydrauliques coupent la droite $H_u = H_c$ en un point où leur tangente est horizontale. Les figures 33 et 34 représentent la variation de $\frac{dh}{ds}$ et les formes des axes C_1 et C_2 . Lorsque $h = H_u$ on peut avoir comme axe la droite C_u . La classification des axes dépend d'une pente de passage

$$i_p = \frac{g \cdot \omega_u}{\alpha \cdot l_u \cdot C_u^2}$$

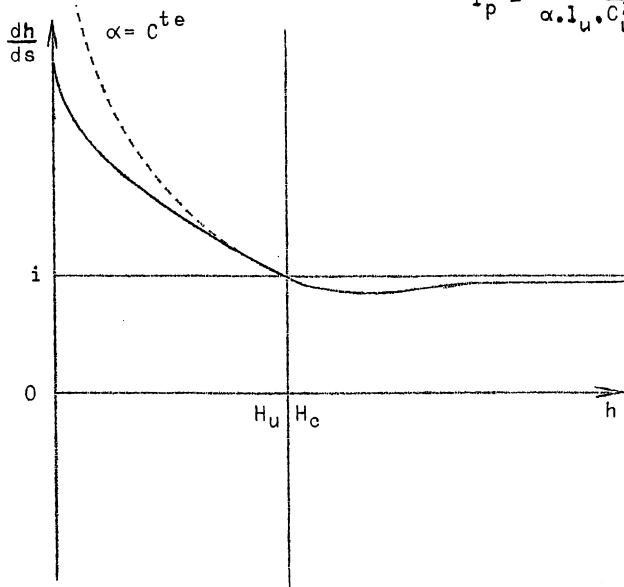


Fig. 33.

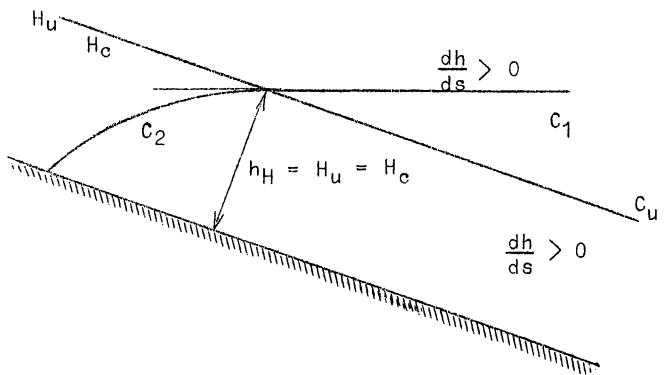


Fig. 34.

qui sépare deux modes d'écoulement différents, lent et rapide. Pour un lit donné, cette pente limite varie d'après H_u , c'est-à-dire avec le débit. Par conséquent, si i est au voisinage de la pente de passage i_p pour le débit moyen, le mode d'écoulement peut changer et, dans ce cas, il sera rapide lorsque le débit dépassera le débit moyen, l'influence relative des résistances diminuant. Il sera lent pour les faibles débits. Ces caractères sont en relation avec les distinctions entre régime tranquille, régime torrentiel et régime mixte qui seront définies dans la 3^o section.

D) CAS DU CANAL EN CONTREPENTE $i < 0$, $i = - |i|$

L'équation des axes hydrauliques devient

$$\frac{dh}{ds} = \frac{- |i| - \frac{Q^2}{\omega^2 \cdot C^2} \cdot \frac{\chi}{\omega}}{1 - \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\omega}} \quad (64)$$

La notion du mouvement uniforme n'a plus de signification et \mathcal{D} est toujours négatif. Il n'y a pas de droite H_u . La hauteur critique par contre est la même que celle qui correspond au canal en pente et correspond à $\mathcal{D} = 0$.

Si $h < H_c$, $\mathcal{D} < 0$ et $\frac{dh}{ds} > 0$

Si $h > H_c$, $\mathcal{D} > 0$ et $\frac{dh}{ds} < 0$.

La courbe de variation de $\frac{dh}{ds}$ est représentée à la figure 35. Les formes des axes correspondants D_1 et D_2 sont indiquées à la figure 36. L'axe D_1 tend assez rapidement vers l'horizontale lorsque h augmente. L'axe D_2 est nécessairement de longueur très limitée.

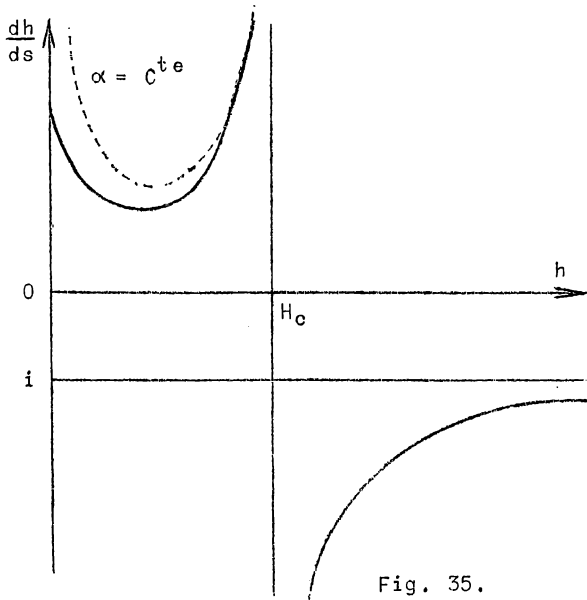


Fig. 35.

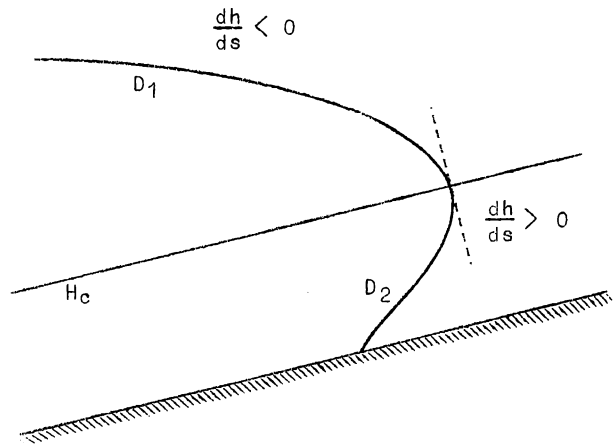


Fig. 36.

E) CAS PARTICULIER. LE LIT EST HORIZONTAL $i = 0$ (canaux artificiels)

L'équation devient :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{- \frac{\chi \cdot Q^2}{\omega^3 \cdot C^2}}{1 - \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega^3} \cdot 1} \quad (65)$$

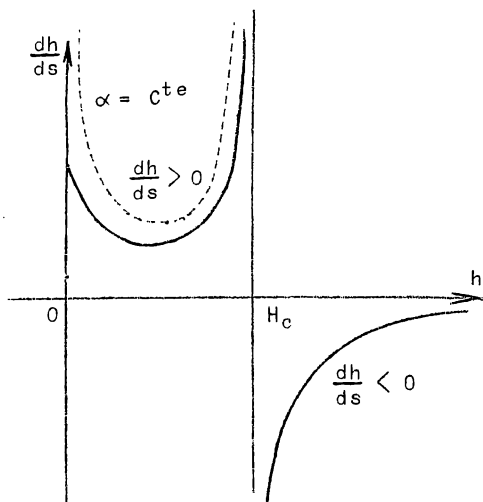


Fig. 37.

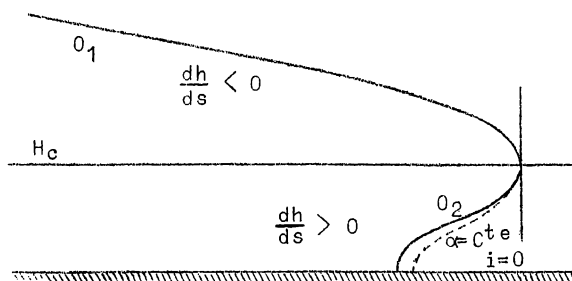


Fig. 38.

$H_u = \infty$, H_c est fini et est déterminé par

$$\frac{\alpha}{g} \frac{Q_c^2}{\omega_c^2} \frac{1}{\omega_c} = 1$$

La courbe de variation de $\frac{dh}{ds}$ est représentée à la figure 37; la figure 38 représente les allures des axes O_1 et O_2 , correspondant à des axes A_2 et A_3 . Il ne peut y avoir de point H_h , car pour

$$h < H_c, \quad \frac{dh}{ds} > 0 \quad \text{et pour} \quad h > H_c, \quad \frac{dh}{ds} < 0.$$

8.- CAS DU CANAL RECTANGULAIRE INFINIMENT LARGE

Dans ce cas, $\chi = 1 = 1$ et l'équation différentielle des axes hydrauliques devient

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{q^2}{h^3 \cdot c^2}}{1 - \frac{q^2}{h^3 \cdot g}} \quad (66)$$

Comme $H_u^3 = \frac{q^2}{c_u^2 \cdot i}$ et $H_c^3 = \frac{q^2}{g}$,

on a $\left(\frac{H_u}{H_c}\right)^3 = \frac{g}{c_u^2 \cdot i}$ (67)

Donc, lorsque $H_u > H_c$, $i < \frac{g}{c_u^2}$, écoulement lent à faible pente.

Lorsque $H_u < H_c$, $i > \frac{g}{c_u^2}$, écoulement rapide à forte pente. La pente de passage est

$$i_p = \frac{g}{c_u^2}$$

La condition d'horizontalité est

$$\frac{dh}{ds} = i = \frac{i - \frac{q^2}{h^3 \cdot c^2}}{1 - \frac{q^2}{h^3 \cdot g}}$$

ou

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\frac{q^2}{h^3 \cdot c^2}}{\frac{q^2}{h^3 \cdot g}} = \frac{g}{c^2} = i_h$$

Plus exactement, il faudrait écrire

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{q^2}{h^3 \cdot c^2}}{1 - \frac{\alpha \cdot q^2}{h^3 \cdot g}}$$

d'où

$$i_h = \frac{g}{\alpha \cdot c^2} = \frac{g}{150 + c^2} \quad (\text{voir Chapitre IX, paragraphe 12}).$$

La condition d'horizontalité $c^2 = \frac{g}{i} - 150$ ne diffère pas sensiblement de $c^2 = \frac{g}{i}$.

On peut d'ailleurs éliminer α en écrivant l'équation des axes hydrauliques sous la forme

$$\frac{dh}{ds} = i \cdot \frac{1 - \frac{H_u^3 \cdot c^2}{h^3 \cdot c^2}}{1 - \frac{H_u^3}{h^3}} \quad (68)$$

Lorsque $i = i_p$, pente de passage, $H_u = H_c$ et, si l'on admet $C =$ constante, pour toute valeur de h , $\frac{dh}{ds} = i$. Donc, dans un lit rectangulaire infiniment large, les axes O_1 et O_2 deviennent une droite horizontale. Cette propriété est toutefois affectée par la variation de c^2 .

Si on adopte la formule de Manning $C = K \cdot R^{1/6}$, soit dans ce cas $C = K \cdot h^{1/6}$, on a

$$H_u^{10/3} = \frac{q^2}{K \cdot i} \quad H_u = \left(\frac{q^2}{K \cdot i}\right)^{0,3} \quad \text{et} \quad \frac{H_u}{H_c} = \frac{g^{0,33}}{(K \cdot i)^{0,3}} \quad (69)$$

9.- CIRCONSTANCES ENGENDRANT LES AXES SIMPLES DANS UN LIT PRISMATIQUE

On appelle axe simple un axe formé d'un seul tronçon d'une des courbes précédemment définies. Ceci implique que le lit soit assez long et, en principe, indéfini. Dans un tel lit complètement libre et à distance suffisante des extrémités doit exister le mouvement uniforme; l'axe est la droite $h = H_u$.

Des obstacles en aval ou des influences agissant sur l'alimentation en amont peuvent donner naissance au mouvement graduellement varié et à un axe courbe. On dit que c'est un axe de relèvement lorsqu'il se trouve au-dessus de $h = H_u$; dans le cas contraire c'est un axe d'abaissement.

Ces caractères correspondent à un accroissement ou à une diminution des résistances à l'écoulement par rapport au mouvement uniforme.

L'axe est appelé un axe d'aval lorsqu'il est engendré uniquement par des circonstances d'aval. Le lit étant indéfini, cette définition implique

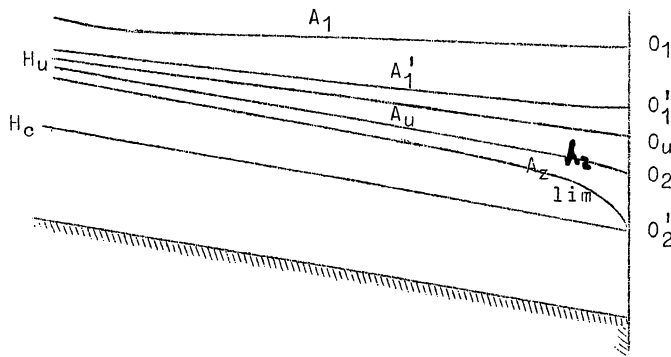


Fig. 39.

que les circonstances d'alimentation ne sont pas influencées par l'axe, le débit est donc indépendant.

Dès lors, la courbe est bien déterminée géométriquement et pour la situer exactement il suffit d'en connaître un point initial, qui est l'origine d'aval.

Si le point initial change, comme le débit est indépendant, la courbe se modifie par une simple translation,

sans changer de forme. En examinant les figures précédentes, on se rend compte que les axes A_1 , A_u et A_2 peuvent seuls être des axes simples d'aval. (fig. 39)

Dans le cas d'un cours d'eau à faible pente, si le niveau initial (aval) est égal à H_c , l'axe est un axe A_z coupant la droite H_c dans la section initiale d'aval. L'énergie correspondante est minimum. Il ne peut donc se produire d'axe situé plus bas que celui-là, qui constitue la limite inférieure des axes d'aval.

Il faut remarquer d'ailleurs qu'au voisinage de la droite H_c , la courbure des filets liquides est telle que la théorie exposée n'est plus correcte. Quoiqu'il en soit, les axes simples d'aval sont situés au dessus de la droite H_c et leur débit est indépendant des circonstances d'aval. Le point origine d'aval peut être fixé par des dispositifs de réglage hydraulique. Si c'est un déversoir fixe ou mobile, le point origine est fixé par l'épaisseur de la lame déversante sur la crête du déversoir nécessaire pour l'écoulement du débit. Si c'est un dispositif d'écoulement en charge : conduite forcée, siphon, orifice de fond noyé à l'amont, le point origine est fixé par la charge motrice nécessaire pour faire passer le débit. Ces hauteurs sont calculées en tenant compte de la vitesse du courant, c'est-à-dire en considérant non seulement l'axe mais aussi la ligne d'énergie.

On considère souvent l'aboutissement du canal à son extrémité aval dans un réservoir indéfini à niveau constant. Ce niveau est différent du point d'origine de l'axe d'aval de la hauteur $\frac{\alpha \cdot u^2}{2g}$, car l'énergie cinétique doit se dissiper dans le réservoir indéfini. Lorsque l'origine est au-dessus de H_u , cette différence est faible, donc pour les axes A_1 et A_u . Elle est plus élevée pour les axes A_2 et devient égale à $1/2 H_c$ pour l'axe A_2 limite. Il doit dans ce cas se produire une assez grande agitation au débouché du canal dans le réservoir indéfini et un relèvement appréciable du niveau.

Dans le cas d'un cours d'eau à forte pente, on voit qu'il n'y a pas d'axes simples d'aval, non plus que dans le cas de la pente de passage. Il n'en existe pas davantage si $i < 0$.

Les axes d'amont sont engendrés par les circonstances d'amont, c'est-à-dire par l'alimentation. Il faut donc que les conditions d'alimentation fixent le débit et un point initial d'amont. Il faut pour cela que le débit soit dépendant, c'est-à-dire que l'alimentation soit faite en charge. En effet, une alimentation par déversement libre et à débit indépendant ne peut fixer le point amont de l'axe, qui ne peut résulter que de circonstances d'aval. Au contraire, un écoulement en charge, pour un débit donné et un plan de charge amont donné, fixe le point initial amont de l'axe, par la considération de la charge motrice nécessaire. Dès lors, l'axe est déterminé en forme et position. Toutefois si le point initial amont varie, l'axe ne subit plus une simple translation, mais sa forme varie puisque Q varie. Les axes d'amont sont donc plus complexes que les axes d'aval, d'autant plus qu'ils exigent encore le calcul du point initial par la formule applicable à l'organe hydraulique d'alimentation. Or, ces formules introduisent déjà en général une erreur initiale. Quoiqu'il en soit, on voit que seuls les axes B_2 et B_3 peuvent constituer des axes simples d'amont. Le niveau initial ne peut être supérieur à H_c dans un lit à forte pente, il correspond au débit maximum et à un axe B_2 qui coupe la droite H_c dans la section terminale d'amont. Il faut faire à ce sujet les mêmes réserves que pour la limite d'aval A_2 .

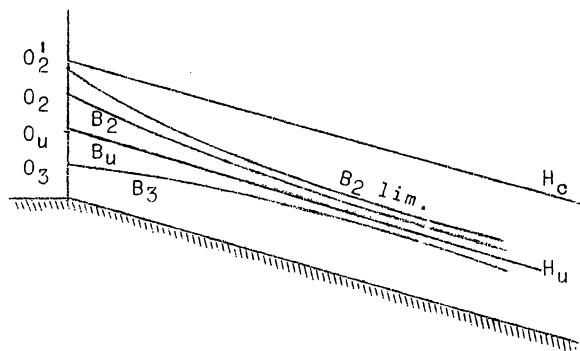


Fig. 40.

La figure 40 montre les formes des axes simples d'amont dans le cas du régime rapide, lorsque l'origine d'amont varie. En réalité, la représentation ne pourrait être aussi simple, car Q varie lorsque O varie et il en résulte que les droites H_u et H_c varient également; aussi la figure ci-contre n'est-elle donnée que pour synthétiser les diverses formes d'axes simples d'amont.

Les cours d'eau à faible pente et à pente de passage n'ont pas d'axes simples d'amont; il en est de même si $i < 0$.

10.- INTEGRATION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE DES AXES HYDRAULIQUES DES CANAUX PRISMATIQUES

Rappelons l'équation générale

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\sin i - \frac{Q^2}{w^2 \cdot C^2} \cdot \frac{\chi}{w}}{\sqrt{1 - i^2 - \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2}{w^2} \cdot \frac{1}{w}}}$$

A) TABLES DE BARRE de SAINT-VENANT et de BOUDIN

Cette équation différentielle a été intégrée dans divers cas particuliers, notamment pour des lits prismatiques de section rectangulaire ou trapèze symétrique, par Barré de St. Venant pour les axes de relèvement et par Boudin pour les axes d'abaissement, toutefois en admettant $C = \text{constante}$ et $\alpha = 1$. On transforme l'équation comme suit :

$$\frac{dh}{ds} = i \cdot \frac{1 - \frac{X}{\omega \cdot i} \cdot \varphi(u)}{\sqrt{1 - i^2 - \frac{1}{g} \left(\frac{Q}{\omega}\right)^2 \cdot \frac{1}{\omega}}}$$

En négligeant i^2 à l'égard de 1 $i \cdot ds = \frac{1 - \frac{1}{g} \left(\frac{Q}{\omega}\right)^2 \cdot \frac{1}{\omega}}{1 - \frac{X}{\omega} \cdot \frac{\varphi(u)}{i}} \cdot dh$

En mouvement uniforme $i = \frac{X_u}{\omega_u} \cdot \varphi(U)$
 en désignant par U la vitesse moyenne en mouvement uniforme $U = \frac{Q}{\omega_u}$

d'où $i \cdot ds = \frac{1 - \frac{U^2}{g} \left(\frac{\omega_u}{\omega}\right)^2 \cdot \frac{1}{\omega}}{1 - \frac{X}{X_u} \frac{\omega_u}{\omega} \cdot \frac{\varphi(u)}{\varphi(U)}} \cdot dh$

Pour une section trapèze $\omega = h \cdot (\lambda + \tau \cdot h)$ (fig. 41)

$$X = \lambda + 2 h \cdot \sqrt{1 + \tau^2} \quad \text{et} \quad l = \lambda + 2 h \cdot \tau$$

Pour les axes de relèvement, Barré de St. Venant pose

$$h = H_u + y \quad \text{et} \quad r = \frac{H_u}{\lambda + H_u \cdot \tau}$$

Il adopte la fonction

$$\varphi(u) = b \cdot u^m = 0,00040102 u^{21/11}$$

Il a intégré l'équation sous la forme,

$$\frac{i \cdot \Delta s}{H_u} = \int_{y_0/H_u}^{y_1/H_u} F(r, \tau, \frac{y}{H_u}) \cdot \frac{dy}{H_u} - \frac{U^2}{g \cdot H_u} \cdot \int_{y_0/H_u}^{y_1/H_u} f(r, \tau, \frac{y}{H_u}) \cdot \frac{dy}{H_u}$$

Il a dressé des tables de $\frac{i \cdot s}{H_u}$ pour quelques couples de valeurs de r et de τ et diverses valeurs de $\frac{y}{H_u}$, de 3,00 à 0,01 (voir tables).

Pour les axes d'abaissement, Boudin a procédé de même, mais en recourant à la formule de Tadini

$$\varphi(u) = b \cdot u^2 = 0,0004 u^2$$

$\frac{y}{H_u}$ varie de 1 à 0,001 et l'on a naturellement $h = H - y$.

Pour des valeurs quelconques de τ et de r , ces tables demandent des interpolations assez fastidieuses.

Elles ne sont applicables, selon les hypothèses fondamentales, qu'aux lits prismatiques à sections géométriques bien définies, c'est-à-dire aux canaux artificiels, non au cours d'eau naturels. Mais même dans ces conditions, l'exactitude des calculs dépend encore du paramètre C , variable avec h , alors que les tables le supposent constant et lui attribuent donc des valeurs

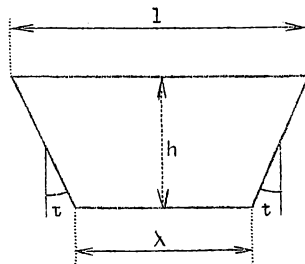


Fig. 41.

TABLES DE BARRE DE SAINT VENANT POUR LE CALCUL DES AXES
DE RELEVEMENT DES CANAUX PRISMATIQUES

1^e table : $r = 0$; τ quelconque

$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$	$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$	$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$
3,00	0,0000 - 0,0000 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,45	2,8147 - 0,2486 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,10	3,5847 - 0,6610 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$
2,90	0,1019 - 0,0017	0,44	2,8299 - 0,2536	0,09	3,6278 - 0,6938
2,80	0,2039 - 0,0034	0,43	2,8453 - 0,2588	0,08	3,6752 - 0,7309
2,70	0,3061 - 0,0054	0,42	2,8609 - 0,2642	0,07	3,7280 - 0,7734
2,60	0,4085 - 0,0075	0,41	2,8767 - 0,2698	0,06	3,7877 - 0,8230
2,50	0,5110 - 0,0098	0,40	2,8926 - 0,2755	0,050	3,8573 - 0,8823
2,40	0,6138 - 0,0123	0,39	2,9087 - 0,2814	0,048	3,8727 - 0,8956
2,30	0,7169 - 0,0150	0,38	2,9250 - 0,2876	0,046	3,8887 - 0,9095
2,20	0,8202 - 0,0180	0,37	2,9415 - 0,2940	0,044	3,9053 - 0,9241
2,10	0,9239 - 0,0214	0,36	2,9583 - 0,3006	0,042	3,9227 - 0,9394
2,00	1,0280 - 0,0250	0,35	2,9754 - 0,3074	0,040	3,9408 - 0,9555
1,90	1,1325 - 0,0291	0,34	2,9927 - 0,3145	0,038	3,9598 - 0,9724
1,80	1,2375 - 0,0336	0,33	3,0103 - 0,3219	0,036	3,9798 - 0,9903
1,70	1,3431 - 0,0387	0,32	3,0282 - 0,3296	0,034	4,0008 - 1,0093
1,60	1,4493 - 0,0444	0,31	3,0464 - 0,3376	0,032	4,0230 - 1,0294
1,50	1,5563 - 0,0509	0,30	3,0649 - 0,3460	0,030	4,0465 - 1,0509
1,40	1,5643 - 0,0582	0,29	3,0839 - 0,3547	0,028	4,0716 - 1,0739
1,30	1,7734 - 0,0667	0,28	3,1032 - 0,3638	0,026	4,0984 - 1,0987
1,20	1,8838 - 0,0764	0,27	3,1229 - 0,3733	0,024	4,1273 - 1,1255
1,10	1,9959 - 0,0877	0,26	3,1431 - 0,3833	0,022	4,1585 - 1,1547
1,00	2,1101 - 0,1009	0,25	3,1638 - 0,3937	0,020	4,1927 - 1,1868
0,95	2,1681 - 0,1085	0,24	3,1850 - 0,4047	0,019	4,2110 - 1,2040
0,90	2,2268 - 0,1167	0,23	3,2068 - 0,4163	0,018	4,2303 - 1,2223
0,85	2,2864 - 0,1257	0,22	3,2292 - 0,4285	0,017	4,2506 - 1,2416
0,80	2,3470 - 0,1357	0,21	3,2524 - 0,4414	0,016	4,2721 - 1,2620
0,75	2,4086 - 0,1467	0,20	3,2763 - 0,4551	0,015	4,2949 - 1,2838
0,70	2,4714 - 0,1590	0,19	3,3010 - 0,4696	0,014	4,3193 - 1,3072
0,65	2,5358 - 0,1727	0,18	3,3266 - 0,4850	0,013	4,3455 - 1,3323
0,60	2,6019 - 0,1881	0,17	3,3533 - 0,5014	0,012	4,3737 - 1,3595
0,55	2,6701 - 0,2056	0,16	3,3812 - 0,5190	0,011	4,4043 - 1,3891
0,50	2,7409 - 0,2255	0,15	3,4104 - 0,5380	0,010	4,4377 - 1,4215 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$
0,49	2,7554 - 0,2299	0,14	3,4411 - 0,5585		
0,48	2,7700 - 0,2344	0,13	3,4736 - 0,5807		
0,47	2,7848 - 0,2390	0,12	3,5081 - 0,6049		
0,46	2,7997 - 0,2437 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,11	3,5450 - 0,6315 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$		

2^e table : $r = \frac{1}{6}$, $\tau = 0$ (lits rectangulaires)

$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$	$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$	$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$
3,00	0,0000 - 0,0000 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,45	2,8998 - 0,2591 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,10	3,7268 - 0,7027 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$
2,90	0,1033 - 0,0017	0,44	2,9160 - 0,2644	0,09	3,7736 - 0,7383
2,80	0,2068 - 0,0035	0,43	2,9323 - 0,2699	0,08	3,8251 - 0,7786
2,70	0,3106 - 0,0055	0,42	2,9489 - 0,2757	0,07	3,8824 - 0,8248
2,60	0,4146 - 0,0076	0,41	2,9656 - 0,2816	0,06	3,9475 - 0,8787
2,50	0,5188 - 0,0099	0,40	2,9825 - 0,2877	0,050	4,0233 - 0,9433
2,40	0,6234 - 0,0125	0,39	2,9997 - 0,2940	0,048	4,0401 - 0,9578
2,30	0,7284 - 0,0153	0,38	3,0171 - 0,3005	0,046	4,0575 - 0,9730
2,20	0,8337 - 0,0183	0,37	3,0347 - 0,3073	0,044	4,0756 - 0,9889
2,10	0,9395 - 0,0217	0,36	3,0526 - 0,3144	0,042	4,0945 - 1,0056
2,00	1,0458 - 0,0255	0,35	3,0708 - 0,3217	0,040	4,1143 - 1,0231
1,90	1,1526 - 0,0296	0,34	3,0893 - 0,3293	0,038	4,1350 - 1,0416
1,80	1,2601 - 0,0343	0,33	3,1080 - 0,3372	0,036	4,1568 - 1,0611
1,70	1,3683 - 0,0395	0,32	3,1271 - 0,3454	0,034	4,1797 - 1,0817
1,60	1,4773 - 0,0454	0,31	3,1466 - 0,3539	0,032	4,2039 - 1,1037
1,50	1,5874 - 0,0520	0,30	3,1665 - 0,3629	0,030	4,2296 - 1,1271
1,40	1,6986 - 0,0596	0,29	3,1867 - 0,3722	0,028	4,2569 - 1,1522
1,30	1,8111 - 0,0682	0,28	3,2074 - 0,3819	0,026	4,2862 - 1,1793
1,20	1,9253 - 0,0783	0,27	3,2286 - 0,3921	0,024	4,3177 - 1,2086
1,10	2,0414 - 0,0900	0,26	3,2502 - 0,4028	0,022	4,3519 - 1,2404
1,00	2,1600 - 0,1038	0,25	3,2724 - 0,4141	0,020	4,3891 - 1,2754
0,95	2,2204 - 0,1116	0,24	3,2952 - 0,4259	0,019	4,4091 - 1,2943
0,90	2,2816 - 0,1202	0,23	3,3186 - 0,4383	0,018	4,4302 - 1,3142
0,85	2,3438 - 0,1296	0,22	3,3427 - 0,4514	0,017	4,4524 - 1,3353
0,80	2,4070 - 0,1400	0,21	3,3676 - 0,4653	0,016	4,4759 - 1,3577
0,75	2,4715 - 0,1516	0,20	3,3933 - 0,4800	0,015	4,5008 - 1,3815
0,70	2,5375 - 0,1644	0,19	3,4200 - 0,4956	0,014	4,5273 - 1,4070
0,65	2,6051 - 0,1788	0,18	3,4476 - 0,5122	0,013	4,5561 - 1,4345
0,60	2,6747 - 0,1951	0,17	3,4764 - 0,5300	0,012	4,5869 - 1,4842
0,55	2,7467 - 0,2135	0,16	3,5065 - 0,5491	0,011	4,6203 - 1,4964
0,50	2,8215 - 0,2346	0,15	3,5381 - 0,5695	0,010	4,6569 - 1,5319 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$
0,49	2,8369 - 0,2392	0,14	3,5713 - 0,5917		
0,48	2,8524 - 0,2440	0,13	3,6064 - 0,6157		
0,47	2,8681 - 0,2488	0,12	3,6438 - 0,6419		
0,46	2,8839 - 0,2539 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,11	3,6837 - 0,6707 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$		

3^e table : $r = \frac{1}{6}$, $\tau = 1$ (lits trapèzes, talus 1/1)

$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$	$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$	$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$
3,00	0,0000 - 0,0000 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,45	2,7733 - 0,2288 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,10	3,5172 - 0,6718 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$
2,90	0,1012 - 0,0011	0,44	2,7880 - 0,2340	0,09	3,5587 - 0,7079
2,80	0,2025 - 0,0022	0,43	2,8030 - 0,2394	0,08	3,6043 - 0,7488
2,70	0,3040 - 0,0035	0,42	2,8181 - 0,2449	0,07	3,6550 - 0,7957
2,60	0,4056 - 0,0050	0,41	2,8333 - 0,2507	0,06	3,7125 - 0,8505
2,50	0,5073 - 0,0066	0,40	2,8488 - 0,2566	0,050	3,7794 - 0,9162
2,40	0,6092 - 0,0083	0,39	2,8644 - 0,2628	0,048	3,7942 - 0,9310
2,30	0,7114 - 0,0103	0,38	2,8803 - 0,2692	0,046	3,8096 - 0,9465
2,20	0,8138 - 0,0125	0,37	2,8963 - 0,2759	0,044	3,8256 - 0,9627
2,10	0,9164 - 0,0149	0,36	2,9126 - 0,2828	0,042	3,8422 - 0,9797
2,00	1,0194 - 0,0177	0,35	2,9291 - 0,2900	0,040	3,8596 - 0,9975
1,90	1,1227 - 0,0209	0,34	2,9459 - 0,2974	0,038	3,8779 - 1,0163
1,80	1,2265 - 0,0245	0,33	2,9629 - 0,3052	0,036	3,8970 - 1,0362
1,70	1,3308 - 0,0285	0,32	2,9802 - 0,3133	0,034	3,9172 - 1,0573
1,60	1,4356 - 0,0332	0,31	2,9978 - 0,3218	0,032	3,9385 - 1,0797
1,50	1,5412 - 0,0386	0,30	3,0158 - 0,3306	0,030	3,9611 - 1,1036
1,40	1,6476 - 0,0448	0,29	3,0341 - 0,3398	0,028	3,9852 - 1,1292
1,30	1,7549 - 0,0521	0,28	3,0528 - 0,3495	0,026	4,0110 - 1,1568
1,20	1,8635 - 0,0607	0,27	3,0719 - 0,3596	0,024	4,0387 - 1,1867
1,10	1,9736 - 0,0708	0,26	3,0914 - 0,3702	0,022	4,0687 - 1,2192
1,00	2,0856 - 0,0830	0,25	3,1114 - 0,3814	0,020	4,1014 - 1,2549
0,95	2,1425 - 0,0900	0,24	3,1319 - 0,3932	0,019	4,1190 - 1,2742
0,90	2,2000 - 0,0978	0,23	3,1529 - 0,4056	0,018	4,1375 - 1,2945
0,85	2,2583 - 0,1064	0,22	3,1746 - 0,4187	0,017	4,1570 - 1,3161
0,80	2,3175 - 0,1159	0,21	3,1969 - 0,4326	0,016	4,1777 - 1,3389
0,75	2,3777 - 0,1265	0,20	3,2200 - 0,4473	0,015	4,1996 - 1,3633
0,70	2,4391 - 0,1385	0,19	3,2438 - 0,4629	0,014	4,2230 - 1,3894
0,65	2,5019 - 0,1520	0,18	3,2686 - 0,4796	0,013	4,2481 - 1,4174
0,60	2,5663 - 0,1674	0,17	3,2944 - 0,4975	0,012	4,2752 - 1,4477
0,55	2,6327 - 0,1849	0,16	3,3212 - 0,5166	0,011	4,3045 - 1,4807
0,50	2,7015 - 0,2052	0,15	3,3494 - 0,5372	0,010	4,3366 - 1,5169 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$
0,49	2,7156 - 0,2096	0,14	3,3790 - 0,5595		
0,48	2,7298 - 0,2142	0,13	3,4103 - 0,5838		
0,47	2,7442 - 0,2189	0,12	3,4435 - 0,6103		
0,46	2,7587 - 0,2238 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,11	3,4790 - 0,6394 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$		

4^e table : $r = \frac{1}{6}$; $\tau = 2$ (lits trapèzes, talus 2 sur 1)

$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$	$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$	$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$
3,00	0,0000 - 0,0000 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,45	2,7155 - 0,1997 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,10	3,4066 - 0,6411 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$
2,90	0,1007 - 0,0007	0,44	2,7295 - 0,2046	0,09	3,4446 - 0,6779
2,80	0,2014 - 0,0015	0,43	2,7436 - 0,2098	0,08	3,4863 - 0,7197
2,70	0,3022 - 0,0023	0,42	2,7578 - 0,2151	0,07	3,5326 - 0,7678
2,60	0,4031 - 0,0033	0,41	2,7722 - 0,2207	0,06	3,5851 - 0,8237
2,50	0,5040 - 0,0044	0,40	2,7867 - 0,2264	0,050	3,6451 - 0,8911
2,40	0,6051 - 0,0056	0,39	2,8014 - 0,2324	0,048	3,6595 - 0,9063
2,30	0,7064 - 0,0070	0,38	2,8163 - 0,2386	0,046	3,6735 - 0,9222
2,20	0,8078 - 0,0085	0,37	2,8314 - 0,2451	0,044	3,6881 - 0,9388
2,10	0,9094 - 0,0103	0,36	2,8467 - 0,2518	0,042	3,7032 - 0,9562
2,00	1,0112 - 0,0123	0,35	2,8622 - 0,2588	0,040	3,7191 - 0,9746
1,90	1,1133 - 0,0147	0,34	2,8779 - 0,2660	0,038	3,7357 - 0,9939
1,80	1,2157 - 0,0174	0,33	2,8938 - 0,2736	0,036	3,7531 - 1,0143
1,70	1,3184 - 0,0205	0,32	2,9100 - 0,2816	0,034	3,7714 - 1,0360
1,60	1,4216 - 0,0241	0,31	2,9265 - 0,2899	0,032	3,7908 - 1,0591
1,50	1,5253 - 0,0284	0,30	2,9433 - 0,2985	0,030	3,8113 - 1,0837
1,40	1,6296 - 0,0334	0,29	2,9604 - 0,3076	0,028	3,8332 - 1,1101
1,30	1,7347 - 0,0393	0,28	2,9778 - 0,3172	0,026	3,8566 - 1,1385
1,20	1,8408 - 0,0464	0,27	2,9956 - 0,3272	0,024	3,8818 - 1,1692
1,10	1,9480 - 0,0550	0,26	3,0138 - 0,3377	0,022	3,9090 - 1,2028
1,00	2,0568 - 0,0654	0,25	3,0324 - 0,3487	0,020	3,9387 - 1,2396
0,95	2,1119 - 0,0715	0,24	3,0514 - 0,3604	0,019	3,9546 - 1,2595
0,90	2,1675 - 0,0783	0,23	3,0710 - 0,3727	0,018	3,9714 - 1,2805
0,85	2,2238 - 0,0859	0,22	3,0911 - 0,3858	0,017	3,9891 - 1,3027
0,80	2,2808 - 0,0945	0,21	3,1118 - 0,3997	0,016	4,0078 - 1,3263
0,75	2,3387 - 0,1041	0,20	3,1331 - 0,4144	0,015	4,0277 - 1,3514
0,70	2,3976 - 0,1150	0,19	3,1552 - 0,4300	0,014	4,0490 - 1,3783
0,65	2,4576 - 0,1274	0,18	3,1781 - 0,4468	0,013	4,0717 - 1,4072
0,60	2,5191 - 0,1416	0,17	3,2018 - 0,4647	0,012	4,0962 - 1,4385
0,55	2,5823 - 0,1580	0,16	3,2266 - 0,4840	0,011	4,1228 - 1,4726
0,50	2,6476 - 0,1772	0,15	3,2526 - 0,5048	0,010	4,1519 - 1,5100 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$
0,49	2,6610 - 0,1814	0,14	3,2798 - 0,5273		
0,48	2,6745 - 0,1857	0,13	3,3086 - 0,5518		
0,47	2,6880 - 0,1902	0,12	3,3391 - 0,5787		
0,46	2,7017 - 0,1949 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,11	3,3716 - 0,6083 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$		

5^e table : $r = \frac{1}{3}$; $\tau = 0$ (lits rectangulaires)

$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$	$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$	$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$
3,00	0,0000 - 0,0000 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,45	2,9539 - 0,2658 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,10	3,8194 - 0,7305 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$
2,90	0,1042 - 0,0017	0,44	2,9707 - 0,2714	0,09	3,8687 - 0,7681
2,80	0,2086 - 0,0035	0,43	2,9877 - 0,2771	0,08	3,9230 - 0,8106
2,70	0,3133 - 0,0055	0,42	3,0048 - 0,2830	0,07	3,9835 - 0,8593
2,60	0,4183 - 0,0077	0,41	3,0222 - 0,2892	0,06	4,0522 - 0,9163
2,50	0,5236 - 0,0100	0,40	3,0398 - 0,2955	0,050	4,1323 - 0,9845
2,40	0,6294 - 0,0126	0,39	3,0577 - 0,3021	0,048	4,1500 - 0,9999
2,30	0,7355 - 0,0154	0,38	3,0758 - 0,3089	0,046	4,1684 - 1,0159
2,20	0,8420 - 0,0185	0,37	3,0941 - 0,3160	0,044	4,1876 - 1,0327
2,10	0,9491 - 0,0220	0,36	3,1128 - 0,3233	0,042	4,2076 - 1,0503
2,00	1,0568 - 0,0258	0,35	3,1317 - 0,3309	0,040	4,2285 - 1,0688
1,90	1,1650 - 0,0300	0,34	3,1510 - 0,3388	0,038	4,2504 - 1,0884
1,80	1,2740 - 0,0347	0,33	3,1705 - 0,3471	0,036	4,2734 - 1,1090
1,70	1,3839 - 0,0400	0,32	3,1904 - 0,3556	0,034	4,2976 - 1,1308
1,60	1,4947 - 0,0459	0,31	3,2108 - 0,3646	0,032	4,3232 - 1,1541
1,50	1,6066 - 0,0527	0,30	3,2315 - 0,3739	0,030	4,3504 - 1,1789
1,40	1,7198 - 0,0604	0,29	3,2526 - 0,3836	0,028	4,3793 - 1,2054
1,30	1,8345 - 0,0692	0,28	3,2742 - 0,3938	0,026	4,4103 - 1,2340
1,20	1,9511 - 0,0795	0,27	3,2963 - 0,4045	0,024	4,4436 - 1,2650
1,10	2,0698 - 0,0914	0,26	3,3190 - 0,4157	0,022	4,4797 - 1,2987
1,00	2,1912 - 0,1056	0,25	3,3422 - 0,4274	0,020	4,5192 - 1,3358
0,95	2,2531 - 0,1136	0,24	3,3660 - 0,4398	0,019	4,5404 - 1,3558
0,90	2,3159 - 0,1224	0,23	3,3905 - 0,4528	0,018	4,5626 - 1,3768
0,85	2,3797 - 0,1321	0,22	3,4158 - 0,4665	0,017	4,5861 - 1,3991
0,80	2,4447 - 0,1428	0,21	3,4419 - 0,4810	0,016	4,6110 - 1,4228
0,75	2,5111 - 0,1547	0,20	3,4688 - 0,4964	0,015	4,6375 - 1,4481
0,70	2,5791 - 0,1679	0,19	3,4968 - 0,5128	0,014	4,6657 - 1,4751
0,65	2,6489 - 0,1827	0,18	3,5258 - 0,5303	0,013	4,6959 - 1,5042
0,60	2,7208 - 0,1995	0,17	3,5560 - 0,5489	0,012	4,7286 - 1,5356
0,55	2,7952 - 0,2186	0,16	3,5877 - 0,5689	0,011	4,7639 - 1,5698
0,50	2,8727 - 0,2405	0,15	3,6208 - 0,5904	0,010	4,8027 - 1,6073 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$
0,49	2,8886 - 0,2452	0,14	3,6557 - 0,6137		
0,48	2,9047 - 0,2501	0,13	3,6927 - 0,6390		
0,47	2,9209 - 0,2552	0,12	3,7320 - 0,6666		
0,46	2,9373 - 0,2604 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,11	3,7740 - 0,6969 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$		

6° table : $r = \frac{1}{3}$; $\tau = 1$ (lits trapèzes, talus 1 sur 1)

$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$	$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$	$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$
3,00	0,0000 - 0,0000 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,45	2,7222 - 0,2006 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,10	3,4213 - 0,6475 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$
2,90	0,1007 - 0,0007	0,44	2,7362 - 0,2056	0,09	3,4599 - 0,6848
2,80	0,2015 - 0,0015	0,43	2,7504 - 0,2108	0,08	3,5022 - 0,7272
2,70	0,3023 - 0,0023	0,42	2,7648 - 0,2162	0,07	3,5492 - 0,7758
2,60	0,4032 - 0,0033	0,41	2,7793 - 0,2218	0,06	3,6025 - 0,8329
2,50	0,5043 - 0,0044	0,40	2,7940 - 0,2276	0,050	3,6644 - 0,9013
2,40	0,6055 - 0,0056	0,39	2,8088 - 0,2336	0,048	3,6778 - 0,9167
2,30	0,7068 - 0,0070	0,38	2,8238 - 0,2399	0,046	3,6920 - 0,9328
2,20	0,8083 - 0,0085	0,37	2,8391 - 0,2464	0,044	3,7068 - 0,9497
2,10	0,9100 - 0,0103	0,36	2,8545 - 0,2532	0,042	3,7222 - 0,9675
2,00	1,0119 - 0,0123	0,35	2,8701 - 0,2602	0,040	3,7383 - 0,9861
1,90	1,1141 - 0,0147	0,34	0,8860 - 0,2676	0,038	3,7552 - 1,0058
1,80	1,2166 - 0,0174	0,33	2,9021 - 0,2753	0,036	3,7729 - 1,0265
1,70	1,3195 - 0,0205	0,32	2,9185 - 0,2833	0,034	3,7915 - 1,0486
1,60	1,4229 - 0,0241	0,31	2,9351 - 0,2917	0,032	3,8112 - 1,0720
1,50	1,5268 - 0,0284	0,30	2,9521 - 0,3004	0,030	3,8321 - 1,0970
1,40	1,6313 - 0,0334	0,29	2,9693 - 0,3096	0,028	3,8543 - 1,1239
1,30	1,7366 - 0,0394	0,28	2,9869 - 0,3192	0,026	3,8781 - 1,1528
1,20	1,8429 - 0,0465	0,27	3,0049 - 0,3293	0,024	3,9037 - 1,1840
1,10	1,9505 - 0,0551	0,26	3,0233 - 0,3400	0,022	3,9314 - 1,2181
1,00	2,0597 - 0,0656	0,25	3,0421 - 0,3512	0,020	3,9616 - 1,2556
0,95	2,1150 - 0,0717	0,24	3,0614 - 0,3630	0,019	3,9778 - 1,2758
0,90	2,1708 - 0,0785	0,23	3,0812 - 0,3755	0,018	3,9949 - 1,2971
0,85	2,2273 - 0,0861	0,22	3,1015 - 0,3887	0,017	4,0129 - 1,3197
0,80	2,2846 - 0,0947	0,21	3,1224 - 0,4027	0,016	4,0319 - 1,3437
0,75	2,3428 - 0,1044	0,20	3,1440 - 0,4176	0,015	4,0521 - 1,3693
0,70	2,4020 - 0,1153	0,19	3,1664 - 0,4335	0,014	4,0737 - 1,3966
0,65	2,4624 - 0,1278	0,18	3,1896 - 0,4504	0,013	4,0969 - 1,4261
0,60	2,5243 - 0,1421	0,17	3,2137 - 0,4686	0,012	4,1218 - 1,4579
0,55	2,5880 - 0,1587	0,16	3,2388 - 0,4881	0,011	4,1489 - 1,4926
0,50	2,6537 - 0,1780	0,15	3,2651 - 0,5092	0,010	4,1785 - 1,5306 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$
0,49	2,6672 - 0,1822	0,14	3,2927 - 0,5320		
0,48	2,6808 - 0,1866	0,13	3,3218 - 0,5569		
0,47	2,6945 - 0,1911	0,12	3,3528 - 0,5841		
0,46	2,7083 - 0,1958 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,11	3,3858 - 0,6141 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$		

7° table : $r = \frac{1}{3}$; $t = 2$ (lits trapèzes, talus 2 sur 1)

$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$	$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$	$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$
3,00	0,0000 - 0,0000 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,45	2,6523 - 0,1533 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,10	3,2649 - 0,5770 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$
2,90	0,1003 - 0,0003	0,44	2,6651 - 0,1577	0,09	3,2974 - 0,6139
2,80	0,2006 - 0,0007	0,43	2,6780 - 0,1623	0,08	3,3330 - 0,6559
2,70	0,3009 - 0,0012	0,42	2,6910 - 0,1671	0,07	3,3724 - 0,7044
2,60	0,4013 - 0,0017	0,41	2,7042 - 0,1720	0,06	3,4170 - 0,7614
2,50	0,5017 - 0,0023	0,40	2,7175 - 0,1772	0,050	3,4685 - 0,8300
2,40	0,6022 - 0,0029	0,39	2,7304 - 0,1826	0,048	3,4799 - 0,8455
2,30	0,7028 - 0,0037	0,38	2,7444 - 0,1882	0,046	3,4917 - 0,8617
2,20	0,8034 - 0,0046	0,37	2,7581 - 0,1940	0,044	3,5040 - 0,8787
2,10	0,9042 - 0,0056	0,36	2,7720 - 0,2001	0,042	3,5168 - 0,8965
2,00	1,0050 - 0,0068	0,35	2,7861 - 0,2065	0,040	3,5301 - 0,9153
1,90	1,1060 - 0,0082	0,34	2,8003 - 0,2132	0,038	3,5441 - 0,9351
1,80	1,2072 - 0,0098	0,33	2,8147 - 0,2202	0,036	3,5587 - 0,9561
1,70	1,3086 - 0,0117	0,32	2,8293 - 0,2275	0,034	3,5742 - 0,9783
1,60	1,4102 - 0,0140	0,31	2,8441 - 0,2352	0,032	3,5904 - 1,0020
1,50	1,5121 - 0,0167	0,30	2,8592 - 0,2433	0,030	3,6077 - 1,0273
1,40	1,6144 - 0,0200	0,29	2,8745 - 0,2517	0,028	3,6260 - 1,0544
1,30	1,7172 - 0,0240	0,28	2,8901 - 0,2607	0,026	3,6456 - 1,0836
1,20	1,8206 - 0,0289	0,27	2,9059 - 0,2701	0,024	3,6667 - 1,1153
1,10	1,9248 - 0,0350	0,26	2,9221 - 0,2800	0,022	3,6895 - 1,1498
1,00	2,0300 - 0,0427	0,25	2,9387 - 0,2905	0,020	3,7144 - 1,1878
0,95	2,0830 - 0,0472	0,24	2,9556 - 0,3016	0,019	3,7278 - 1,2083
0,90	2,1365 - 0,0524	0,23	2,9729 - 0,3133	0,018	3,7418 - 1,2300
0,85	2,1904 - 0,0582	0,22	2,9907 - 0,3258	0,017	3,7566 - 1,2529
0,80	2,2448 - 0,0649	0,21	3,0089 - 0,3391	0,016	3,7722 - 1,2772
0,75	2,2999 - 0,0725	0,20	3,0177 - 0,3533	0,015	3,7889 - 1,3032
0,70	2,3556 - 0,0813	0,19	3,0471 - 0,3685	0,014	3,8066 - 1,3310
0,65	2,4123 - 0,0914	0,18	3,0671 - 0,3847	0,013	3,8256 - 1,3610
0,60	2,4700 - 0,1033	0,17	3,0879 - 0,4022	0,012	3,8461 - 1,3933
0,55	2,5290 - 0,1172	0,16	3,1095 - 0,4211	0,011	3,8683 - 1,4286
0,50	2,5896 - 0,1337	0,15	3,1321 - 0,4415	0,010	3,8925 - 1,4673 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$
0,49	2,6020 - 0,1373	0,14	3,1557 - 0,4637		
0,48	2,6144 - 0,1411	0,13	3,1806 - 0,4880		
0,47	2,6270 - 0,1450	0,12	3,2069 - 0,5146		
0,46	2,6396 - 0,1491 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,11	3,2349 - 0,5441 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$		

TABLES DE BOUDIN POUR LE CALCUL DES AXES D'ABAISSMENT DES CANAUX PRISMATIQUES

1^o table : $r = 0$, τ quelconque (lits très larges)

$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$	$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$	$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$
1,00	0,000000 - 0,000000 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,55	0,0108 - 0,4608 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,10	0,3184 - 1,2184 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$
0,99	0,000000 - 0,010000	0,54	0,0118 - 0,4718	0,09	0,3471 - 1,2571
0,98	0,000000 - 0,020000	0,53	0,0129 - 0,4829	0,08	0,3799 - 1,2999
0,97	0,000000 - 0,030000	0,52	0,0141 - 0,4941	0,07	0,4179 - 1,3479
0,96	0,000001 - 0,040001	0,51	0,0154 - 0,5054	0,06	0,4628 - 1,4028
0,95	0,000002 - 0,050002	0,50	0,0168 - 0,5168	0,050	0,5170 - 1,4670
0,94	0,000003 - 0,060003	0,49	0,0183 - 0,5283	0,048	0,5293 - 1,4813
0,93	0,000006 - 0,070006	0,48	0,0199 - 0,5399	0,046	0,5422 - 1,4962
0,92	0,000010 - 0,080010	0,47	0,0216 - 0,5516	0,044	0,5557 - 1,5117
0,91	0,000016 - 0,090016	0,46	0,0234 - 0,5634	0,042	0,5699 - 1,5279
0,90	0,000025 - 0,100025	0,45	0,0253 - 0,5753	0,040	0,5848 - 1,5448
0,89	0,000037 - 0,110037	0,44	0,0274 - 0,5874	0,038	0,6006 - 1,5626
0,88	0,000052 - 0,120052	0,43	0,0296 - 0,5996	0,036	0,6173 - 1,5813
0,87	0,000071 - 0,130071	0,42	0,0320 - 0,6120	0,034	0,6351 - 1,6011
0,86	0,000095 - 0,140095	0,41	0,0345 - 0,6245	0,032	0,6540 - 1,6220
0,85	0,000126 - 0,150126	0,40	0,0371 - 0,6371	0,030	0,6742 - 1,6442
0,84	0,000164 - 0,160164	0,39	0,0399 - 0,6499	0,028	0,6959 - 1,6679
0,83	0,000209 - 0,170209	0,38	0,0429 - 0,6629	0,026	0,7193 - 1,6933
0,82	0,000263 - 0,180263	0,37	0,0462 - 0,6762	0,024	0,7446 - 1,7206
0,81	0,000327 - 0,190327	0,36	0,0497 - 0,6897	0,022	0,7722 - 1,7502
0,80	0,00040 - 0,20040	0,35	0,0534 - 0,7034	0,020	0,8027 - 1,7827
0,79	0,00049 - 0,21049	0,34	0,0573 - 0,7173	0,019	0,8191 - 1,8001
0,78	0,00059 - 0,22059	0,33	0,0614 - 0,7314	0,018	0,8364 - 1,8184
0,77	0,00071 - 0,23071	0,32	0,0658 - 0,7458	0,017	0,8548 - 1,8378
0,76	0,00084 - 0,24084	0,31	0,0705 - 0,7605	0,016	0,8744 - 1,8584
0,75	0,00092 - 0,25099	0,30	0,0756 - 0,7756	0,015	0,8953 - 1,8803
0,74	0,00116 - 0,26116	0,29	0,0810 - 0,7910	0,014	0,9177 - 1,9037
0,73	0,00135 - 0,27135	0,28	0,0868 - 0,8068	0,013	0,9418 - 1,9288
0,72	0,00156 - 0,28150	0,27	0,0930 - 0,8230	0,012	0,9678 - 1,9558
0,71	0,00180 - 0,29180	0,26	0,0996 - 0,8396	0,011	0,9961 - 1,9851
0,70	0,00206 - 0,30206	0,25	0,1066 - 0,8566	0,010	1,0271 - 2,0171
0,69	0,00235 - 0,31235	0,24	0,1141 - 0,8741	0,009	1,0615 - 2,0525
0,68	0,00267 - 0,32267	0,23	0,1222 - 0,8922	0,008	1,1001 - 2,0921
0,67	0,00303 - 0,33303	0,22	0,1309 - 0,9109	0,007	1,1440 - 2,1370
0,66	0,00342 - 0,34342	0,21	0,1403 - 0,9303	0,006	1,1947 - 2,1887
0,65	0,00385 - 0,35385	0,20	0,1504 - 0,9504	0,005	1,2548 - 2,2498
0,64	0,00432 - 0,36432	0,19	0,1613 - 0,9713	0,004	1,3285 - 2,3245
0,63	0,00483 - 0,37483	0,18	0,1731 - 0,9931	0,003	1,4237 - 2,4207
0,62	0,00538 - 0,38538	0,17	0,1859 - 1,0159	0,002	1,5582 - 2,5562
0,61	0,00598 - 0,39598	0,16	0,1998 - 1,0398	0,001	1,7886 - 2,7876 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$
0,60	0,0066 - 0,4066	0,15	0,2150 - 1,0650		
0,59	0,0073 - 0,4173	0,14	0,2317 - 1,0917		
0,58	0,0081 - 0,4281	0,13	0,2501 - 1,1201		
0,57	0,0090 - 0,4390	0,12	0,2704 - 1,1504		
0,56	0,0099 - 0,4499 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,11	0,2930 - 1,1830 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$		

2^e table : $r = \frac{1}{3}$; $t = 0$ (lits rectangulaires)

$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$	$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$	$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$
1,00	0,000000 - 0,000000 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,55	0,0148 - 0,6759 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,10	0,3851 - 1,6024 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$
0,99	0,000000 - 0,016611	0,54	0,0162 - 0,6904	0,09	0,4187 - 1,6476
0,98	0,000000 - 0,033113	0,53	0,0177 - 0,7050	0,08	0,4571 - 1,6976
0,97	0,000000 - 0,049507	0,52	0,0193 - 0,7196	0,07	0,5015 - 1,7538
0,96	0,000001 - 0,065795	0,51	0,0210 - 0,7343	0,06	0,5538 - 1,8180
0,95	0,000003 - 0,081979	0,50	0,0228 - 0,7491	0,050	0,6170 - 1,8927
0,94	0,000006 - 0,098061	0,49	0,024 - 0,7640	0,048	0,6313 - 1,9093
0,93	0,000010 - 0,114043	0,48	0,0267 - 0,7790	0,046	0,6463 - 1,9266
0,92	0,000016 - 0,129926	0,47	0,0288 - 0,7940	0,044	0,6620 - 1,9446
0,91	0,000026 - 0,145714	0,46	0,0311 - 0,8091	0,042	0,6785 - 1,9634
0,90	0,000040 - 0,161409	0,45	0,0336 - 0,8243	0,040	0,6958 - 1,9831
0,89	0,000058 - 0,177014	0,44	0,0362 - 0,8397	0,038	0,7141 - 2,0038
0,88	0,000081 - 0,192531	0,43	0,0390 - 0,8552	0,036	0,7335 - 2,0255
0,87	0,000111 - 0,207963	0,42	0,0420 - 0,8708	0,034	0,7541 - 2,0484
0,86	0,000149 - 0,223311	0,41	0,0452 - 0,8866	0,032	0,7760 - 2,0726
0,85	0,000196 - 0,238579	0,40	0,0485 - 0,9025	0,030	0,7994 - 2,0983
0,84	0,000253 - 0,253770	0,39	0,0521 - 0,9186	0,028	0,8245 - 2,1257
0,83	0,000321 - 0,268887	0,38	0,0559 - 0,9349	0,026	0,8516 - 2,1551
0,82	0,000401 - 0,283933	0,37	0,0599 - 0,9514	0,024	0,8810 - 2,1868
0,81	0,000496 - 0,298910	0,36	0,0642 - 0,9681	0,022	0,9131 - 2,2212
0,80	0,00061 - 0,31382	0,35	0,0687 - 0,9851	0,020	0,9483 - 2,2588
0,79	0,00073 - 0,32867	0,34	0,0735 - 1,0023	0,019	0,9673 - 2,2790
0,78	0,00088 - 0,34346	0,33	0,0787 - 1,0198	0,018	0,9874 - 2,3003
0,77	0,00105 - 0,35820	0,32	0,0842 - 1,0376	0,017	1,0087 - 2,3227
0,76	0,00124 - 0,37289	0,31	0,0900 - 1,0557	0,016	1,0313 - 2,3464
0,75	0,00146 - 0,38753	0,30	0,0962 - 1,0742	0,015	1,0554 - 2,3716
0,74	0,00170 - 0,40212	0,29	0,1028 - 1,0930	0,014	1,0812 - 2,3986
0,73	0,00197 - 0,41667	0,28	0,1098 - 1,1122	0,013	1,1090 - 2,4276
0,72	0,00227 - 0,43118	0,27	0,1173 - 1,1318	0,012	1,1391 - 2,4589
0,71	0,00261 - 0,44565	0,26	0,1253 - 1,1519	0,011	1,1719 - 2,4929
0,70	0,00298 - 0,46009	0,25	0,1338 - 1,1726	0,010	1,2079 - 2,5301
0,69	0,00339 - 0,47450	0,24	0,1429 - 1,1938	0,009	1,2477 - 2,5711
0,68	0,00384 - 0,48889	0,23	0,1527 - 1,2156	0,008	1,2922 - 2,6168
0,67	0,00433 - 0,50327	0,22	0,1632 - 1,2381	0,007	1,3428 - 2,6685
0,66	0,00487 - 0,51763	0,21	0,1745 - 1,2614	0,006	1,4015 - 2,7282
0,65	0,00546 - 0,53198	0,20	0,1866 - 1,2855	0,005	1,4711 - 2,7988
0,64	0,00610 - 0,54632	0,19	0,1996 - 1,3105	0,004	1,5560 - 2,8850
0,63	0,00680 - 0,56066	0,18	0,2136 - 1,3365	0,003	1,6659 - 2,9961
0,62	0,00756 - 0,57500	0,17	0,2288 - 1,3636	0,002	1,8211 - 3,1524
0,61	0,00838 - 0,58935	0,16	0,2454 - 1,3920	0,001	2,0869 - 3,4193 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$
0,60	0,0093 - 0,6037	0,15	0,2635 - 1,4219		
0,59	0,0102 - 0,6181	0,14	0,2833 - 1,4535		
0,58	0,0112 - 0,6325	0,13	0,3050 - 1,4870		
0,57	0,0123 - 0,6469	0,12	0,3289 - 1,5227		
0,56	0,0135 - 0,6614 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,11	0,3554 - 1,5610 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$		

3^e table : $r = \frac{1}{3}$, $v = 2$ (lits trapèzes, talus 2 sur 1)

$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$	$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$	$\frac{y}{H_u}$	$\frac{i_s}{H_u}$
1,00	0,000000 - 0,000000 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,55	0,0042 - 0,7888 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,10	0,1945 - 1,8638 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$
0,99	0,000000 - 0,018196	0,54	0,0046 - 0,8065	0,09	0,2140 - 1,9131
0,98	0,000000 - 0,036316	0,53	0,0051 - 0,8243	0,08	0,2364 - 1,9672
0,97	0,000000 - 0,054365	0,52	0,0057 - 0,8421	0,07	0,2625 - 2,0274
0,96	0,000000 - 0,072348	0,51	0,0063 - 0,8600	0,06	0,2935 - 2,0958
0,95	0,000000 - 0,090269	0,50	0,0069 - 0,8780	0,050	0,3313 - 2,1754
0,94	0,000001 - 0,108132	0,49	0,0076 - 0,8961	0,048	0,3399 - 2,1932
0,93	0,000002 - 0,125941	0,48	0,0083 - 0,9143	0,046	0,3489 - 2,2116
0,92	0,000003 - 0,143700	0,47	0,0091 - 0,9326	0,044	0,3584 - 2,2307
0,91	0,000004 - 0,161412	0,46	0,0100 - 0,9510	0,042	0,3684 - 2,2506
0,90	0,000006 - 0,179081	0,45	0,0110 - 0,9695	0,040	0,3789 - 2,2714
0,89	0,000009 - 0,196710	0,44	0,0121 - 0,9881	0,038	0,3899 - 2,2932
0,88	0,000013 - 0,214302	0,43	0,0132 - 1,0068	0,036	0,4016 - 2,3161
0,87	0,000018 - 0,231860	0,42	0,0144 - 1,0256	0,034	0,4141 - 2,3402
0,86	0,000024 - 0,249386	0,41	0,0157 - 1,0446	0,032	0,4274 - 2,3657
0,85	0,000032 - 0,266882	0,40	0,0171 - 1,0638	0,030	0,4417 - 2,3928
0,84	0,000042 - 0,284350	0,39	0,0186 - 1,0832	0,028	0,4570 - 2,4217
0,83	0,000054 - 0,301793	0,38	0,0202 - 1,1028	0,026	0,4735 - 2,4526
0,82	0,000069 - 0,319213	0,37	0,0219 - 1,1226	0,024	0,4914 - 2,4858
0,81	0,000087 - 0,336612	0,36	0,0238 - 1,1426	0,022	0,5110 - 2,5218
0,80	0,00011 - 0,35399	0,35	0,0258 - 1,1628	0,020	0,5326 - 2,5612
0,79	0,00013 - 0,37135	0,34	0,0280 - 1,1832	0,019	0,5443 - 2,5822
0,78	0,00016 - 0,38870	0,33	0,0304 - 1,2039	0,018	0,5566 - 2,6044
0,77	0,00020 - 0,40604	0,32	0,0329 - 1,2249	0,017	0,5696 - 2,6279
0,76	0,00024 - 0,42337	0,31	0,0356 - 1,2462	0,016	0,5835 - 2,6528
0,75	0,00029 - 0,44069	0,30	0,0385 - 1,2679	0,015	0,5984 - 2,6792
0,74	0,00035 - 0,45800	0,29	0,0416 - 1,2900	0,014	0,6143 - 2,7073
0,73	0,00041 - 0,47530	0,28	0,0450 - 1,3125	0,013	0,6314 - 2,7375
0,72	0,00048 - 0,49260	0,27	0,0487 - 1,3354	0,012	0,6499 - 2,7701
0,71	0,00056 - 0,50990	0,26	0,0526 - 1,3588	0,011	0,6701 - 2,8055
0,70	0,00065 - 0,52720	0,25	0,0569 - 1,3827	0,010	0,6923 - 2,8442
0,69	0,00075 - 0,54450	0,24	0,0615 - 1,4072	0,009	0,7169 - 2,8868
0,68	0,00087 - 0,56181	0,23	0,0665 - 1,4323	0,008	0,7445 - 2,9343
0,67	0,00100 - 0,57913	0,22	0,0719 - 1,4581	0,007	0,7758 - 2,9828
0,66	0,00114 - 0,59646	0,21	0,0777 - 1,4846	0,006	0,8120 - 3,0504
0,65	0,00130 - 0,61381	0,20	0,0840 - 1,5119	0,005	0,8550 - 3,1237
0,64	0,00148 - 0,63118	0,19	0,0909 - 1,5402	0,004	0,9078 - 3,2132
0,63	0,00168 - 0,64857	0,18	0,0985 - 1,5696	0,003	0,9758 - 3,3285
0,62	0,00190 - 0,66598	0,17	0,1068 - 1,6001	0,002	1,0720 - 3,4905
0,61	0,00214 - 0,68341	0,16	0,1159 - 1,6319	0,001	1,2369 - 3,7669 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$
0,60	0,0024 - 0,7009	0,15	0,1258 - 1,6652		
0,59	0,0027 - 0,7184	0,14	0,1367 - 1,7002		
0,58	0,0030 - 0,7359	0,13	0,1488 - 1,7372		
0,57	0,0034 - 0,7535	0,12	0,1623 - 1,7765		
0,56	0,0038 - 0,7711 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$	0,11	0,1774 - 1,8185 $\frac{U^2}{g \cdot H_u}$		

Inexactes. Ce sont là des causes d'erreurs systématiques importantes, qui rendent l'emploi de ces tables peu recommandable, tant pour les canaux artificiels que pour les cours d'eau naturels. Ces tables ont d'ailleurs l'inconvénient de ne pas permettre l'ajustement des valeurs de C par tronçons.

B) TABLE DE BRESSE

Elle correspond au cas particulier des canaux prismatiques de grande largeur de section rectangulaire, dans le cas des axes d'aval et des pentes modérées. Il s'agit donc d'axes de relèvement du type A_1 et des axes d'abaissement du type A_2 .

Soit H_u la hauteur du mouvement uniforme et Y l'exhaussement de la ligne d'eau réalisée à l'extrémité B en aval. (fig. 42)

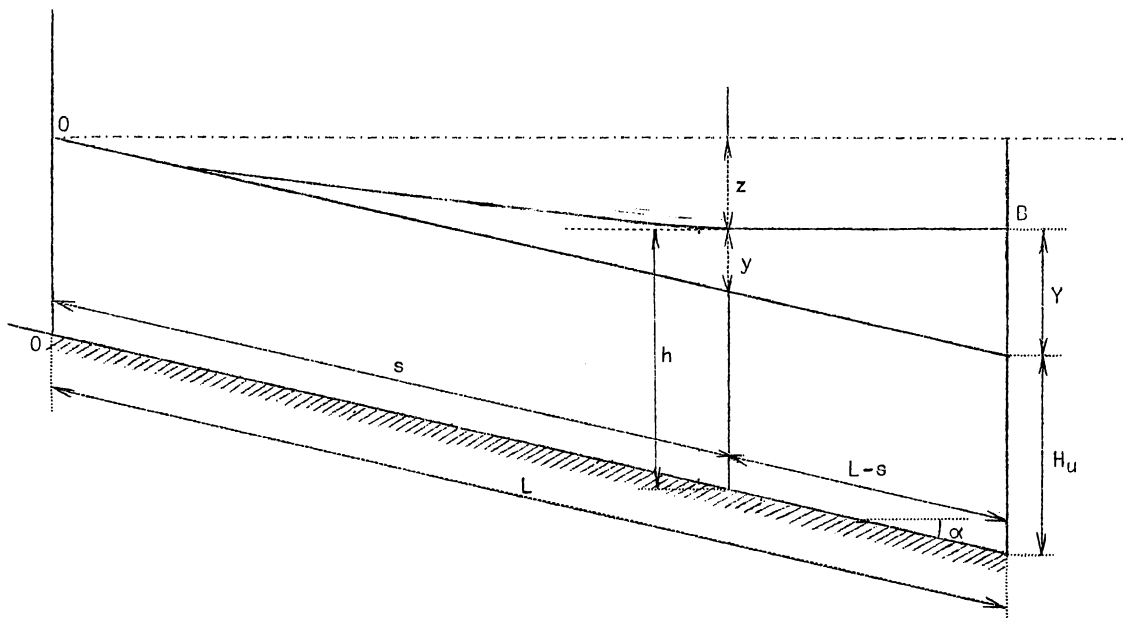


Fig. 42.

y est un exhaussement quelconque, à distance s de l'origine du remous O . En cette origine O , on admet que l'axe se raccorde tangentielllement à la droite H_u . On a :

$$H_u + i_s = h + z \quad \text{et} \quad i_s = \frac{dz}{ds} = i - \frac{dh}{ds}$$

L'équation différentielle du mouvement permanent est :

$$i - \frac{dh}{ds} = \frac{\alpha}{g} \frac{u \cdot du}{ds} + \frac{u^2}{C^2 \cdot h} \quad \text{car} \quad R = h.$$

Le débit invariable par unité de largeur du lit est $q = u \cdot h = \text{constante}$.

Donc $u \cdot dh + h \cdot du = 0$ et $du = -\frac{u}{h} \cdot dh$, $u \cdot du = -u^2 \cdot \frac{dh}{h}$.

D'autre part $\frac{u^2}{h} = \frac{q^2}{h^3}$

Donc $i - \frac{dh}{ds} = \frac{\alpha \cdot q^2 \cdot dh}{g \cdot h^3 \cdot ds} + \frac{q^2}{C^2 \cdot h^3}$

TABLE DE BRESSE

$\frac{H_u}{h}$	$\frac{h}{H_u}$	$\psi\left(\frac{h}{H_u}\right)$	$\frac{H_u}{h}$	$\frac{h}{H_u}$	$\psi\left(\frac{h}{H_u}\right)$
10,00	0,10	- 0,505	0,99	1,01	1,416
5,00	0,20	- 0,404	0,98	1,02	1,191
3,33	0,30	- 0,302	0,97	1,03	1,060
2,50	0,40	- 0,198	0,96	1,04	0,970
2,22	0,45	- 0,144	0,95	1,05	0,895
2,00	0,50	- 0,088	0,94	1,06	0,838
1,82	0,55	- 0,029	0,93	1,07	0,783
1,67	0,60	+ 0,032	0,93	1,08	0,749
1,54	0,65	0,099	0,92	1,09	0,712
1,43	0,70	0,171	0,91	1,10	0,676
1,39	0,72	0,202	0,90	1,11	0,651
1,35	0,74	0,235	0,89	1,12	0,626
1,33	0,75	0,252	0,88	1,13	0,602
1,32	0,76	0,270	0,88	1,14	0,580
1,30	0,77	0,288	0,87	1,15	0,561
1,28	0,78	0,306	0,86	1,16	0,541
1,27	0,79	0,326	0,85	1,17	0,525
1,25	0,80	0,346	0,85	1,18	0,509
1,23	0,81	0,367	0,84	1,19	0,493
1,22	0,82	0,387	0,83	1,20	0,479
1,20	0,83	0,411	0,82	1,22	0,454
1,19	0,84	0,435	0,80	1,25	0,420
1,18	0,85	0,460	0,77	1,30	0,373
1,16	0,86	0,487	0,74	1,35	0,335
1,15	0,87	0,516	0,71	1,40	0,304
1,14	0,88	0,546	0,69	1,45	0,277
1,12	0,89	0,578	0,67	1,50	0,257
1,11	0,90	0,614	0,62	1,60	0,218
1,10	0,91	0,652	0,59	1,70	0,190
1,09	0,92	0,695	0,56	1,80	0,166
1,08	0,93	0,743	0,53	1,90	0,146
1,06	0,94	0,798	0,50	2,00	0,132
1,05	0,95	0,862	0,44	2,25	0,102
1,04	0,96	0,940	0,40	2,50	0,082
1,03	0,97	1,040	0,33	3,00	0,055
1,02	0,98	1,178	0,29	3,50	0,041
1,01	0,99	1,412	0,25	4,00	0,031
1,00	1,00	∞	0,20	5,00	0,020

On admet que C est constant.

A l'origine, $h = H$ et $\frac{dh}{ds} = 0$, donc $i = \frac{q^2}{C^2 \cdot H_u^3}$, $q^2 = i \cdot C^2 \cdot H_u^3$.

$$\text{Donc } i = \frac{dh}{ds} = \frac{-\alpha \cdot i \cdot C^2}{g} \cdot \frac{H_u^3}{h^3} \cdot \frac{dh}{ds} + i \cdot \frac{H_u^3}{h^3}$$

$$i \cdot \left(1 - \frac{H_u^3}{h^3}\right) \cdot ds = \left[1 - \frac{\alpha \cdot i \cdot C^2}{g} \cdot \frac{H_u^3}{h^3}\right] \cdot dh$$

$$i \cdot ds = \frac{\frac{h^3}{H_u^3} - \frac{\alpha \cdot i \cdot C^2}{g}}{\frac{h^3}{H_u^3} - 1} \cdot dh = dh + \frac{1 - \frac{\alpha \cdot i \cdot C^2}{g}}{\frac{h^3}{H_u^3} - 1} \cdot H_u \cdot d\left(\frac{h}{H_u}\right) \quad (70)$$

C'est l'équation de Bresse que l'on intègre sous la forme

$$s - s_0 = \frac{h - h_0}{i} + \frac{H_u}{i} \cdot \left(1 - \frac{\alpha \cdot i \cdot C^2}{g}\right) \int \frac{d\left(\frac{h}{H_u}\right)}{\frac{h^3}{H_u^3} - 1}$$

On pose

$$\int \frac{d\left(\frac{h}{H_u}\right)}{\frac{h^3}{H_u^3} - 1} = -\Psi\left(\frac{h}{H_u}\right) + C^{te}$$

Comme $\frac{\alpha \cdot i \cdot C^2}{g} = \frac{H_c^3}{H_u^3}$

Il vient
$$s - s_0 = \frac{h - h_0}{i} + \frac{H_u^3 - H_c^3}{H_u^2 \cdot i} \cdot \left[\Psi\left(\frac{h_0}{H_u}\right) - \Psi\left(\frac{h}{H_u}\right)\right]$$

L'intégration de Bresse donne

$$\Psi\left(\frac{h}{H_u}\right) = \frac{1}{6} \cdot \log \frac{\frac{h^2}{H_u^2} + \frac{h}{H_u} + 1}{\left(\frac{h}{H_u} - 1\right)^2} - \frac{1}{3} \sqrt{3} \cdot \text{arc cotg} \frac{2 \frac{h}{H_u} + 1}{\sqrt{3}} \quad (71)$$

Une table de cette fonction pour les valeurs de $\frac{h}{H_u}$ correspondant aux axes de relèvement et d'abaissement a été établie par Bresse : un extrait en est reproduit ci-contre, d'après le traité d'hydraulique de M. Flamant. Tolkmitt a établi des formules et des tables analogues pour des lits prismatiques de section parabolique. Elles sont moins recommandables que celles de Bresse. La formule de Bresse suppose $\alpha = \text{Constante}$ et $C = \text{Constante}$, mais on peut leur donner des valeurs appropriées quelconques et les faire varier par sections. En général, on admet $\alpha = 1$.

En cas de très faible pente, on peut encore écrire $i \cdot ds = dh + \frac{dh}{\frac{h^3}{H_u^3} - 1}$ en négligeant le terme $\frac{\alpha \cdot i \cdot C^2}{g}$

En posant $h = H_u + y$ (fig. 39), on a

$$i \cdot ds = dy \cdot \left[1 + \frac{H_u^3}{(H_u + y)^3 - H_u^3}\right] = \frac{(H_u + y)^3}{(H_u + y)^3 - H_u^3} \cdot dy$$

En divisant et intégrant, on obtient

$$i.s = H_u \cdot \left[\frac{1}{3} \log \frac{y}{y_0} + \frac{2}{3} \cdot \frac{y - y_0}{H_u} + \frac{y^2 - y_0^2}{9 H_u^2} - \frac{y^3 - y_0^3}{27 H_u^3} \dots \right] \quad (72)$$

Lorsque $y - y_0$ n'est pas élevé, mais faible par rapport à H_u , on peut écrire :

$$\log \frac{y}{y_0} = \frac{y - y_0}{y_0} - 1, \quad \text{d'où} \quad y - y_0 = y_0 \cdot \log \frac{y}{y_0}$$

et
$$i.s = \frac{H_u + 2 y_0}{3} \cdot \log \frac{y}{y_0} \quad (73)$$

On admettra pour y_0 , 1 cm par exemple. A la tête du remous, on a

$$i.L = \frac{H_u + 2 y_0}{3} \cdot \log \frac{Y}{y_0}$$

donc
$$i.(L - s) = \frac{H_u + 2 y_0}{3} \cdot \left[\log \frac{Y}{y_0} - \log \frac{y}{y_0} \right] \quad (73 \text{ bis})$$

C) METHODE APPROXIMATIVE DU MOUVEMENT UNIFORME

Si l'on se rapporte à l'équation aux différences finies de l'axe hydraulique, dans les cas pratiques et pour des tronçons de longueur modérée, le 1er terme du 2^e membre, qui représente la variation d'énergie cinétique du courant, est généralement faible. Si on le néglige, l'équation s'identifie avec celle du mouvement uniforme. C'est le principe d'une méthode approximative qui consiste à tracer l'axe par une série de segments successifs de droites du mouvement uniforme, correspondant au débit et aux sections considérées.

Dupuit en France et Rühlmann en Allemagne ont simplifié les formules de Bresse dans cette hypothèse. Il suffit d'y négliger le terme $\frac{\alpha \cdot i \cdot C^2}{g}$.

On a :
$$i_s = i - \frac{dh}{ds} = i - \frac{d(H_u + y)}{ds} = i - \frac{dy}{ds} \quad (\text{fig. 42})$$

En mouvement uniforme, on a

$$u = C \cdot \left(i - \frac{dy}{ds} \right)^{1/2} \cdot (H_u + y)^{1/2} \quad \text{et} \quad q = C \cdot \left(i - \frac{dy}{ds} \right)^{1/2} \cdot (H_u + y)^{3/2}$$

A l'origine du remous $i_s = i$ et $y = 0$,

donc
$$C \cdot \left(i - \frac{dy}{ds} \right)^{1/2} \cdot (H_u + y)^{3/2} = C \cdot i^{1/2} \cdot H_u^{3/2}$$

d'où
$$\left(i - \frac{dy}{ds} \right) \cdot (H_u + y)^3 = i \cdot H_u^3$$

Donc
$$i.ds = \frac{(H_u + y)^3}{(H_u + y)^3 - H_u^3} \cdot dy \quad (74)$$

ce qui est bien l'équation simplifiée de Bresse indiquée plus haut et obtenue en négligeant $\frac{\alpha \cdot i \cdot C^2}{g}$, mais qui implique que α et C sont invariables.

Elle a été intégrée comme suit par Rühlmann

$$i.ds = \left(1 + \frac{1}{3 \frac{y}{H_u} + 3 \frac{y^2}{H_u^2} + \frac{y^3}{H_u^3}} \right) \cdot dy = \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{H_u}{y} + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} \cdot \frac{y}{H_u} - \frac{1}{9} \cdot \frac{y^2}{H_u^2} + \frac{1}{27} \cdot \frac{y^3}{H_u^3} \dots \right] \cdot dy \quad (75)$$

TABLE DE RUHLMANN DES AXES DE RELEVEMENT

$\frac{Y}{H}$	$\varphi(\frac{Y}{H})$	$\frac{Y}{H}$	$\varphi(\frac{Y}{H})$	$\frac{Y}{H}$	$\varphi(\frac{Y}{H})$
0,01	0,0067	0,36	1,4473	0,92	2,1916
0,02	2444	0,37	4638	0,94	2148
0,03	3863	0,38	4801	0,96	2380
0,04	4889	0,39	4969	0,98	2611
0,05	5701	0,40	5119	1,00	2839
0,06	6376	0,41	5275	1,10	3971
0,07	6958	0,42	5430	1,20	5084
0,08	7482	0,43	5583	1,30	6179
0,09	7933	0,44	5734	1,40	7264
0,10	8353	0,45	5884	1,50	8337
0,11	8739	0,46	6032	1,60	9401
0,12	9098	0,47	6179	1,70	3,0458
0,13	9434	0,48	6324	1,80	1508
0,14	9751	0,49	6468	1,90	2553
0,15	1,0051	0,50	6611	2,00	3594
0,16	0335	0,52	6893	2,10	4631
0,17	0608	0,54	7170	2,20	5664
0,18	0869	0,56	7444	2,30	6694
0,19	1119	0,58	7714	2,40	7720
0,20	1361	0,60	7980	2,50	8745
0,21	1595	0,62	8243	2,60	9768
0,22	1821	0,64	8503	2,70	4,0789
0,23	2040	0,66	8759	2,80	1808
0,24	2254	0,68	9014	2,90	2826
0,25	2461	0,70	9266	3,00	3843
0,26	2664	0,72	9517	4,00	5,3958
0,27	2861	0,74	9765	5,00	6,4020
0,28	3054	0,76	2,0010	6,00	7,4056
0,29	3243	0,78	0254	8,00	9,4097
0,30	3428	0,80	0495	10,00	11,412
0,31	3610	0,82	0735	15,00	16,414
0,32	3789	0,84	0975	20,00	21,415
0,33	3964	0,86	1213	30,00	31,415
0,34	4136	0,88	1449	50,00	51,416
0,35	4306	0,90	1683	100,00	101,420

En cas de relèvement, l'intégrale est :

$$\frac{i.s}{H_u} = \frac{1}{3} \log \frac{y}{H_u} + \frac{2}{3} \frac{y}{H_u} + \frac{1}{9} \frac{y^2}{H_u^2} - \frac{1}{27} \frac{y^3}{H_u^3} + \frac{1}{108} \frac{y^4}{H_u^4} \dots + Cte = \varphi \left(\frac{y}{H_u} \right) + Cte \quad (75 \text{ bis})$$

En cas d'abaissement :

$$\frac{i.s}{H_u} = \frac{1}{3} \log \frac{y}{H_u} - \frac{2}{3} \frac{y}{H_u} + \frac{1}{9} \frac{y^2}{H_u^2} + \frac{1}{27} \frac{y^3}{H_u^3} + \frac{1}{108} \frac{y^4}{H_u^4} \dots + Cte = \varphi' \left(\frac{y}{H_u} \right) + Cte \quad (75 \text{ ter})$$

On peut donc écrire :

$$i.(L - s) = H_u \cdot \left[\varphi \left(\frac{Y}{H_u} \right) - \varphi \left(\frac{y}{H_u} \right) \right] \quad (75 \text{ quater})$$

Rühlmann a établi des tableaux des fonctions φ et φ' dont des extraits figurent pages 83 et 84. Ils donnent des résultats satisfaisants et indépendants de la valeur de C, qui peuvent se rapporter aux valeurs observées de H_u , c'est-à-dire tenir compte des conditions réelles d'écoulement. Selon les tableaux, on adopte comme valeur minimum de $\varphi \left(\frac{Y}{H} \right)$, 0,0067, donc on néglige les $y < 0,01 H_u$. La longueur du remous est alors

$$L = \frac{H}{i} \cdot \left[\varphi \left(\frac{Y}{H_u} \right) - 0,0067 \right]$$

et le remous admissible pour une longueur limitée se déduit des tables par

$$\varphi \left(\frac{Y}{H_u} \right) = \frac{i \cdot L}{H_u} + 0,0067 \quad (76)$$

On déduit la valeur de H_u de $\frac{\omega}{1}$ (ω = largeur du lit) ou mieux de $H_u = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{C^2 \cdot 1,2}}$, c'est-à-dire que H_u varie par section et représente pour chacune d'elle la hauteur correspondant au débit donné.

TABLE DE RUHLMANN DES AXES D'ABAISSEMENT

$\frac{y}{H}$	$\varphi \left(\frac{y}{H_u} \right)$	$\frac{y}{H_u}$	$\varphi' \left(\frac{y}{H_u} \right)$	$\frac{y}{H_u}$	$\varphi' \left(\frac{y}{H_u} \right)$
0,01	0,0067	0,17	0,8344	0,36	0,9708
0,02	0,2287	0,18	0,8473	0,38	0,9775
0,03	0,3463	0,19	0,8591	0,40	0,9833
0,04	0,4356	0,20	0,8700	0,42	0,9885
0,05	0,5034	0,21	0,8801	0,44	0,9931
0,06	0,5577	0,22	0,8895	0,46	0,9971
0,07	0,6025	0,23	0,8982	0,48	1,0006
0,08	0,6405	0,24	0,9063	0,50	1,0036
0,09	0,6733	0,25	0,9138	0,55	1,0096
0,10	0,7020	0,26	0,9209	0,60	1,0140
0,11	0,7273	0,27	0,9275	0,65	1,0166
0,12	0,7500	0,28	0,9336	0,70	1,0184
0,13	0,7703	0,29	0,9394	0,75	1,0194
0,14	0,7886	0,30	0,9448	0,80	1,0199
0,15	0,8053	0,32	0,9546	0,90	1,0203
0,16	0,8205	0,34	0,9632	1,00	1,0203

Le principe de cette méthode peut encore recevoir une interprétation plus simple, mais un peu sommaire, d'après M.M. Koechlin.

On a
$$U = C \cdot \sqrt{H_u \cdot i}$$
 pour un lit de section rectangulaire infiniment large.

En admettant C constant
$$u = C \cdot \sqrt{(H_u + y) \cdot i'}$$

d'où
$$\frac{U}{u} = \sqrt{\frac{H_u \cdot i}{(H_u + y) \cdot i'}}$$

Mais
$$\frac{U}{u} = \frac{\omega}{\omega_u} = \frac{1 \cdot (H_u + y)}{1_u \cdot H_u} \quad (77)$$

On admet que $\frac{1_u}{1}$ est voisin de l'unité pour un lit de très grande largeur,

d'où
$$\frac{H_u + y}{H_u} = \sqrt{\frac{H_u \cdot i}{(H_u + y) \cdot i'}}$$

d'où
$$i' = i \cdot \frac{H_u^3}{(H_u + y)^3} \quad (78)$$

Cette formule permet de procéder au tracé par tronçons successifs convenablement choisis, en partant d'une section connue et en opérant sur les sections moyennes des tronçons.

Si le lit n'est pas régulier, on détermine H_u par la formule $\frac{\omega_u}{1_u}$, c'est-à-dire que l'on considère une section rectangulaire fictive, comme pour l'application de la méthode de Rühlmann.

D) Intégration de proche en proche aux différences finies

Depuis 1930, à la suite des publications de Bahkmeteff, aux Etats-Unis, de nombreux auteurs ont proposé des méthodes d'intégration et ont établi des tables pour leur application, à l'instar de ce qui avait été fait par les auteurs précédemment cités depuis plus d'un siècle, mais n'était guère connus en dehors de l'Europe. Un défaut de toutes ces méthodes d'intégration anciennes ou plus récentes est qu'elles doivent recourir à des hypothèses plus ou moins restrictives, par exemple sur la forme de la section, ou génératrices d'inexactitudes, par exemple la constance de la valeur de C. Elles ont en outre, quel que soit leur degré d'exactitude, un inconvénient commun. C'est que leur application donne lieu à l'emploi de tables numériques qui exigent des interpolations, en raison desquelles le travail de calcul numérique est rendu fastidieux.

Pour ces raisons et selon l'expérience de trente-cinq années d'enseignement pratique, il apparaît que les méthodes les plus recommandables d'intégration de l'équation différentielle des axes hydrauliques du mouvement permanent graduellement varié dans les canaux prismatiques sont celles qui procèdent de proche en proche, par différences finies, sans aucune hypothèse restrictive quelconque. On admettra généralement $\alpha = 1$, mais cela n'est pas une restriction; rien n'empêche de prendre une autre valeur de α , même variable, telle que $\alpha = 1 + \frac{N}{Q^2}$ (Chap. IX, par. 12).

Ces méthodes se prêtent aussi très bien au calcul par les machines à calculer électroniques.

Tenant compte de ce que

$$Q^2 = \frac{\omega_u^3 \cdot C_u^2 \cdot i}{\chi_u} = \frac{g \cdot \omega_c^3}{\alpha \cdot l_c},$$

on écrira l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{dh}{ds} = i \cdot \frac{1 - \frac{\omega_u^3 \cdot C_u^2 \cdot \chi}{\omega^3 \cdot C^2 \cdot \chi_u}}{1 - \frac{\omega_c^3 \cdot l}{\omega^3 \cdot l_c}} \quad (79)$$

Si le lit a une section rectangulaire infiniment large

$$\frac{dh}{ds} = i \cdot \frac{1 - \frac{H_u^3 \cdot C_u^2}{h^3 \cdot C^2}}{1 - \frac{H_c^3}{h^3}} \quad (68)$$

Cette équation peut être intégrée aux différences finies de plusieurs manières.

a) *METHODE DES TANGENTES*

On connaît tous les éléments du point initial 0, on peut donc calculer $(\frac{dh}{ds})_0$. On écrit

$$h_1 = h_0 + (\frac{dh}{ds})_0 \cdot (s_1 - s_0) \quad \text{ou} \quad s_1 = s_0 + \frac{(h_1 - h_0)}{(\frac{dh}{ds})_0} \quad (80)$$

Cela revient à tracer l'axe par une succession de tronçons de tangentes. Cette méthode donne lieu en principe à une cumulation d'erreurs systématiques (fig. 44).

b) *METHODE DES CORDES*

En assimilant un élément d'axe à un élément de parabole et en se donnant h_0 et h_1 , ce qui permet de calculer $h_m = \frac{h_0 + h_1}{2}$, on peut calculer $(\frac{dh}{ds})_m$ et on écrit :

$$s_1 = s_0 + \frac{h_1 - h_0}{(\frac{dh}{ds})_m} \quad (81)$$

Cela revient à tracer la courbe par une succession de cordes approximatives. On détermine donc des points sensiblement exacts de l'axe, mais pas leurs tangentes (fig. 44). Le résultat est direct en se donnant h_1 et h_0 . Si l'on donne s_1 et s_0 , on ne connaît ni h_1 ni h_m et l'on ne peut calculer directement h_1 , il faut alors procéder par approximations successives, ce qui augmente beaucoup le travail.

c) *METHODE DES ISOCLINES DE MASSAU*

Si l'on donne à $\frac{dh}{ds}$ plusieurs valeurs arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ etc.,

elles définissent des courbes

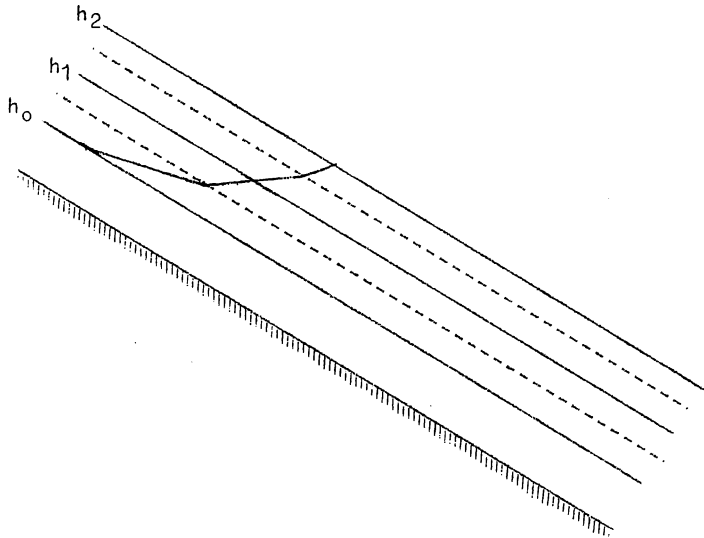
$$f(h) = \alpha_1, \quad f(h) = \alpha_2, \quad \dots \quad \text{etc...}$$

d'égales valeurs de $\frac{dh}{ds}$, appelées isoclines.

Dans le cas particulier de l'équation des axes hydrauliques dans les lits prismatiques, à une valeur constante de $\frac{dh}{ds}$ correspond une valeur constante de h . Donc les isoclines sont des droites parallèles au fond du lit. On procède comme suit au calcul de l'axe. On trace une série d'isoclines h_0, h_1, \dots, h_m et les parallèles situées à mi-distance de ces isoclines, soit

$$\frac{h_0 + h_1}{2}, \quad \frac{h_1 + h_2}{2}, \quad \dots, \quad \frac{h_{m-1} + h_m}{2}$$

On calcule $(\frac{dh}{ds})_1, (\frac{dh}{ds})_2, \dots, (\frac{dh}{ds})_m$.



A partir du point initial 0, on trace un tronçon de tangente $(\frac{dh}{ds})_0$ jusqu'à la première médiane. De ce point, on trace un tronçon de tangente $(\frac{dh}{ds})_1$ jusqu'à la deuxième médiane, etc... La deuxième tangente coupe l'isocline h_1 au point exact 1 et y constitue la tangente, et ainsi de suite. (fig. 43).

Fig. 43.

$$\begin{aligned} \text{Donc } s_1 &= s_0 + \frac{h_1 - h_0}{2 (\frac{dh}{ds})_0} + \frac{h_1 - h_0}{2 (\frac{dh}{ds})_1}, & s_2 &= s_1 + \frac{h_2 - h_1}{2 (\frac{dh}{ds})_1} + \frac{h_2 - h_1}{2 (\frac{dh}{ds})_2}, \\ &\dots & & \\ s_n &= s_{n-1} + \frac{h_n - h_{n-1}}{2 (\frac{dh}{ds})_{n-1}} + \frac{h_n - h_{n-1}}{2 (\frac{dh}{ds})_n}, & & \\ s_m &= s_{m-1} + \frac{h_m - h_{m-1}}{2 (\frac{dh}{ds})_{m-1}} + \frac{h_m - h_{m-1}}{2 (\frac{dh}{ds})_m} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \dots \\ s_n \\ s_m \end{aligned}} \right\} (82)$$

Cette méthode ne peut donc être appliquée qu'en se donnant les valeurs successives de h , c'est-à-dire les dh (ou les Δh).

Il est d'ailleurs recommandable de toujours procéder de la sorte plutôt que de se donner les ds (ou Δs).

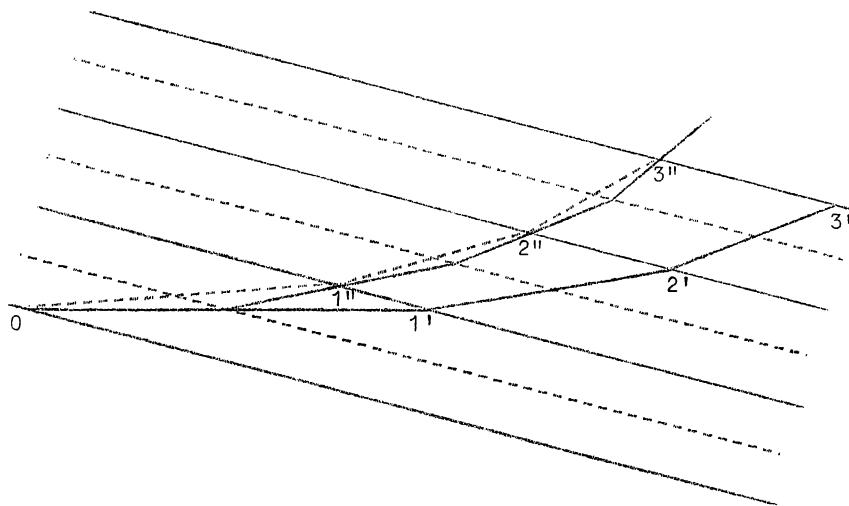


Fig. 44.

On obtient une précision plus uniforme. Il est exceptionnel que l'on ne puisse pas procéder ainsi et qu'il faille se donner les ds (ou Δs). La figure 44 compare schématiquement les trois méthodes. La cumulation des erreurs de la méthode des tangentes y est fortement exagérée. En fait, les erreurs sont toujours très faibles.

En principe, les méthodes des cordes et des isoclines donnent la même exactitude, mais la méthode des isoclines est plus systématique et donne des résultats plus complets, puisqu'elle détermine les points de l'axe et les tangentes.

d) On peut encore procéder à partir de l'équation

$$i.ds - dh = \frac{\alpha}{2g} .d(u^2) + \frac{u^2}{C_m^2 . R} .ds \quad (83)$$

Aux différences finies, elle devient :

$$i.(s_1 - s_0) + (h_0 - h_1) = \frac{\alpha}{2g} .(u_1^2 - u_0^2) + \frac{(s_1 - s_0)}{C_m^2 . R_m} .\left(\frac{u_0 + u_1}{2}\right)^2 \quad (84)$$

Si l'on se donne h_0 et h_1 , l'inconnue est s_1 et elle est donnée directement par l'équation.

Si l'on se donne s_0 et s_1 , h_1 n'est pas connu et il faut procéder par approximations successives. On admet pour commencer $u_1 = u_0$. On obtient une première valeur de h_1 , d'où u_1 et l'on fait un calcul de deuxième approximation et ainsi de suite. La convergence n'est pas très

rapide et les calculs sont fortement augmentés. Il vaut donc mieux se donner h_1 et déterminer s_1 .

Cette méthode-ci mérite d'être appelée exactement méthode des cordes. Elle donne le point 1 exact par la corde $O1$, mais pas la tangente.

Si l'on néglige le terme $\frac{\alpha}{2g} \cdot (u_1^2 - u_0^2)$, on trace l'axe par des segments de droite du mouvement uniforme (voir C), mais cela ne simplifie pas beaucoup les calculs.

L'équation aux différences finies ci-dessus peut encore s'écrire

$$Z_1 - Z_0 = \frac{\alpha_m}{2g} \cdot (u_1^2 - u_0^2) + \frac{(s_1 - s_0)}{C_m^2 \cdot R_m} \cdot \left(\frac{u_0 + u_1}{2}\right)^2 \quad (85)$$

$Z_1 - Z_0$ est la différence des niveaux du plan d'eau en 0 et en 1. Si on les mesure, ainsi que u_0 , u_1 , R_m , $s_1 - s_0$, on peut déterminer C_m . On peut donc ainsi faire des mesures de C pour divers débits et divers états des eaux et les comparer aux formules connues, qui permettent éventuellement d'extrapoler en dehors du domaine des mesures. On peut ensuite avec grande assurance appliquer l'équation ci-dessus aux cours d'eau dont on a mesuré les valeurs de C pour prédéterminer les lignes d'eau qui seront produites par diverses circonstances, telles que des travaux.

E) Remarque générale

Non seulement les méthodes de calcul aux différences finies, mais aussi celles qui utilisent des tables d'intégration procèdent de proche en proche. Cette voie est très commode, notamment pour le calcul au moyen de machines digitales. Elle est aussi très suggestive. Mais elle a un très grand inconvénient, c'est que toute erreur faite en cours de calcul se répercute sur tous les calculs suivants, sans compensation ni même atténuation. Il faut donc procéder aux calculs avec la plus grande attention et circonspection. Le meilleur moyen d'éviter les erreurs et d'exercer un contrôle est de tabuler les calculs d'une manière très ordonnée, ce qui met en évidence les variations insolites. Les opérations prennent ainsi une allure très systématique. On peut opérer encore un contrôle par un tracé graphique des axes, auquel se prête particulièrement la méthode des isoclines. Mais la faible pente du fond exige une anamorphose des échelles. L'échelle des hauteurs h sera beaucoup plus grande que celle des distances s . Il en résulte diverses conséquences. L'inclinaison du fond sur le dessin est beaucoup plus grande que dans la réalité. Par exemple,

si éch. $s = \frac{1}{5000}$ et éch. $h = \frac{1}{10}$, si $i = 0,0005$,

sur le dessin $\bar{i} = \frac{\frac{0,50}{10}}{\frac{1000}{5000}} = 0,25$.

D'autre part, les distances s ne peuvent être portées correctement suivant le fond d'inclinaison $0,25$; il est plus exact de les porter

suisant l'horizontale, car

$$x = \frac{s}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 i}} = \sim s$$

Les perpendiculaires au fond se rapprochent plus de la verticale sur le dessin anamorphosé que dans la réalité. On portera donc les h suivant les verticales.

Des tableaux de calcul ad hoc seront établis pour chaque méthode. A titre d'exemple, ci-après les dispositions d'un tableau pour le calcul par les isoclines.

On écrit :

$$\frac{dh}{ds} = i \cdot \frac{1 - \frac{\omega_u^3 \cdot C_u^2 \cdot \chi}{\omega^3 \cdot C^2 \cdot \chi_u}}{1 - \frac{\omega_c^3 \cdot l}{\omega^3 \cdot l_c}} = i \cdot \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{D}'} \quad (79)$$

11.- METHODES SOMMAIRES RAPIDES

D'après la formule et les tableaux de Rühlmann (par. 10, C), pour les cours d'eau à très faible pente, lorsque Y est grand par rapport à H_u et, en tout cas, lui est supérieur, on peut écrire

$$\varphi\left(\frac{Y}{H_u}\right)_0 = 0 \quad \text{et} \quad \varphi\left(\frac{Y}{H_u}\right) = 1 + \frac{Y}{H_u} .$$

de sorte que approximativement $i \cdot L = Y + H_u$.

Donc l'origine de la courbe de remous se trouve dans ce cas sur la verticale du point de rencontre de l'horizontale menée par l'extrémité de la courbe et du fond, supposé en pente uniforme. Ce résultat est assez exact lorsque $Y > H_u$ (fig. 45).

Pour des calculs sommaires, on peut admettre que la courbe d'exhaussement est une parabole du 2^e degré à axe vertical dont le sommet est à l'origine d'aval de la courbe et qui se raccorde tangentielllement à la droite du mouvement uniforme en amont. Elle donne pour le remous hydrau-

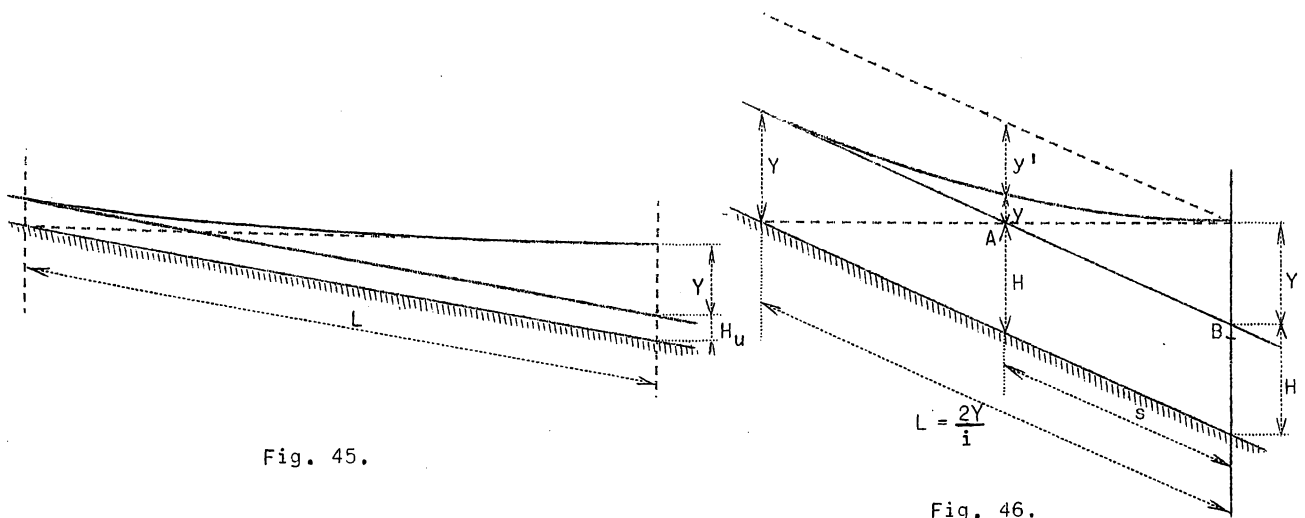


Fig. 45.

Fig. 46.

lique une longueur double du remous hydrostatique, donc $L = 2 \frac{Y}{i}$ (fig. 46). Le résultat est le même que ci-dessus lorsque $Y = H$; il convient bien lorsque $Y < H_u$ est relativement faible. Selon M. Flamant, cette règle se vérifie assez bien sur les cours d'eau naturels à pente modérée en ce sens que l'exhaussement y cesse d'être appréciable au-delà de la distance $L = \frac{2Y}{i}$, ce qui est la limite pratique du remous. Théoriquement, la courbe est asymptotique, mais au-delà de la distance pratique, l'exhaussement est inappréciable.

En un point quelconque, on a

$$y = Y - y' \quad \text{et} \quad y' = i.s - Y \frac{s^2}{4 Y^2} = i.s \left(1 - \frac{i.s}{4 Y}\right)$$

donc
$$y = Y - i.s \left(1 - \frac{i.s}{4 Y}\right)$$

12.- INTEGRATION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE DES AXES HYDRAULIQUES DES CANAUX NON PRISMATIQUES

A.- Les canaux prismatiques ne peuvent guère être que des canaux artificiels. Même calibrés, les cours d'eau naturels ne peuvent constituer des canaux prismatiques, mais ils peuvent s'en rapprocher plus ou moins.

Dans les canaux non prismatiques, le mouvement uniforme qui fait l'objet du Chapitre IX n'est pas possible. Par suite des variations de section du lit, le mouvement permanent est nécessairement varié. Si les variations de section ne sont pas brusques, mais graduelles, le mouvement permanent est graduellement varié. Si les variations sont suffisamment graduelles, tant en profil transversal qu'en ce qui concerne les pentes, la courbure des lignes de courant est négligeable et on peut conserver les équations établies dans l'hypothèse des filets parallèles.

On considèrera l'équation du mouvement permanent graduellement varié sous la forme

$$i.ds - dh = \frac{\alpha}{2g} .d(u^2) + \frac{u^2}{C^2.R} .ds \quad (83)$$

et l'on procèdera à l'intégration aux différences finies comme il a été indiqué plus haut, à savoir :

$$i.(s_1 - s_0) + (h_0 - h_1) = \frac{\alpha}{2g} .(u_1^2 - u_0^2) + \frac{(s_1 - s_0)}{C_m^2.R_m} .\left(\frac{u_0 + u_1}{2}\right)^2 \quad (84)$$

Dans cette relation, les valeurs de u varient non seulement en raison des variations de h_1 mais aussi des variations de section transversale et même de pente du lit. Sous ce rapport, il peut être préférable d'écrire

$$Z_1 - Z_0 = \frac{\alpha}{2g} .(u_1^2 - u_0^2) + \frac{s_1 - s_0}{C_m^2.R_m} .\left(\frac{u_0 + u_1}{2}\right)^2 \quad (85)$$

Ici encore, il sera plus commode de se donner Z_1 et de calculer s_1 que l'inverse. Si l'on se donne s_1 , on ne peut calculer Z_1 que par approximations successives. Or, les variations de u dans les canaux non prisma-

tiques peuvent être plus importantes que dans les canaux prismatiques.

En toute hypothèse, pour une application assurée, il faut connaître les caractéristiques hydrographiques du lit. On le divisera en tronçons approximativement prismatiques et l'on procèdera à l'intégration de proche en proche par tronçons successifs. Les remarques du paragraphe 10, D, d) sont applicables à ces divers tronçons.

B.- Canal de section rectangulaire à pente constante présentant une variation graduelle de largeur.

Si cette variation graduelle de largeur est assez modérée, l'équation du mouvement permanent graduellement varié reste applicable. Comme $\omega = h.l$ et $l = f(s)$, on a

$$\frac{d\omega}{ds} = l \cdot \frac{dh}{ds} + h \cdot \frac{dl}{ds}$$

$$\text{Donc } \sin i - \frac{dh}{ds} = -\frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega^3} \cdot (l \cdot \frac{dh}{ds} + h \cdot \frac{dl}{ds}) + \frac{\chi}{\omega} \cdot \frac{Q^2}{\omega^2 \cdot C^2}$$

$$\sin i - \frac{\chi \cdot Q^2}{\omega^3 \cdot C^2} = \frac{dh}{ds} \cdot (1 - \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2 \cdot l}{\omega^3}) - \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega^3} \cdot h \cdot \frac{dl}{ds}$$

L'équation différentielle de la ligne d'eau devient donc

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\sin i - \frac{\chi \cdot Q^2}{\omega^3 \cdot C^2} + \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega^3} h \frac{dl}{ds}}{1 - \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2 \cdot l}{\omega^3}}$$

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\sin i - \frac{\chi \cdot Q^2}{\omega^3 \cdot C^2} + \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega^2} \cdot \frac{dl}{ds}}{1 - \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2 \cdot l}{\omega^3}}$$

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\sin i - \frac{\chi \cdot Q^2}{\omega^3 \cdot C^2} + \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega^2} \cdot \frac{d(\log l)}{ds}}{1 - \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2 \cdot l}{\omega^3}}$$

(86)

En tout état de cause, pour que ces équations aient une signification, $\frac{dl}{ds}$ doit rester assez faible. Souvent $\frac{dl}{ds}$ sera constant $\frac{dl}{ds} = m$. Si $m > 0$ on a un canal divergent. Si $m < 0$, on a un canal convergent. Dans les deux cas, la longueur de ce canal doit être assez limitée. On a alors

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\sin i - \frac{\chi \cdot Q^2}{\omega^3 \cdot C^2} + \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega^3} \cdot m \cdot h}{1 - \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega^2 \cdot h}}$$

(87)

ou

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\sin i - \frac{\alpha_c Q^2}{\omega^3 C^2} + \frac{\alpha_c Q^2}{g \omega^2} \cdot \frac{m}{1}}{1 - \frac{\alpha_c Q^2}{g \omega^3}} \quad (87)$$

La profondeur critique H_c est donnée par

$$H_c^3 = \frac{\alpha_c Q^2}{g \cdot 1^2}$$

Elle varie donc d'une section à l'autre. Elle décroît de l'amont vers l'aval dans un canal divergent; c'est l'inverse dans un canal convergent. Il n'y a donc plus de droite H_c , mais une courbe H_c , lieu des points où $\frac{dh}{ds} = \infty$. Théoriquement, les lignes d'eau coupent la courbe H_c en des points où leurs tangentes sont perpendiculaires au fond du lit, mais ces points n'ont qu'une signification approximative puisque l'hypothèse des filets liquides parallèles y est en défaut.

La profondeur pour laquelle $\frac{dh}{ds} = 0$, c'est-à-dire pour laquelle l'axe hydraulique a une tangente parallèle au fond du lit, est donnée par

$$\sin i = \frac{Q^2 \cdot (1 + 2h)}{h^3 \cdot 1^3 \cdot C^2} - \frac{\alpha_c Q^2 \cdot m}{g \cdot h^2 \cdot 1^3} \quad (88)$$

Cette profondeur varie d'une section à l'autre. Il n'y a donc plus de droite H_u , mais on peut tracer une courbe H_u des hauteurs pour lesquelles $\frac{dh}{ds} = 0$. H_u diminue de l'amont vers l'aval dans un canal divergent; c'est l'inverse dans un canal convergent.

La condition d'horizontalité $\frac{dh}{ds} = i$ conduit à

$$i = \frac{g \cdot \alpha_c}{\alpha_c \cdot 1 \cdot C^2} - m \cdot \frac{h}{1} = \frac{g \cdot (1 + 2h)}{\alpha_c \cdot 1 \cdot C^2} - m \cdot \frac{h}{1}$$

$$i = \frac{g}{\alpha_c \cdot C^2} \cdot \left(1 + \frac{2h}{1}\right) - m \cdot \frac{h}{1} = \frac{g}{\alpha_c \cdot C^2} + \frac{h}{1} \cdot \left(\frac{2g}{\alpha_c \cdot C^2} - m\right) \quad (89)$$

Le premier terme est celui relatif à la section rectangulaire infiniment large; le deuxième tient compte de la largeur finie et de la non prismaticité. Celle-ci agit dans le même sens que la largeur finie en cas de convergence et en sens inverse en cas de divergence.

La pente de passage est donnée par

$$i_p = \frac{g}{\alpha_c \cdot C_u^2} + \frac{g}{\alpha_c \cdot C_u^2} \cdot \frac{2h}{1} - \frac{m \cdot h}{1} \quad (90)$$

Elle varie avec $\frac{h}{1}$ et elle est plus grande pour un canal convergent que pour un canal divergent. Pour un même débit, une même pente et des largeurs comparables, un canal convergent sera en régime tranquille et un canal divergent en régime torrentiel. La pente de passage peut atteindre la valeur i , surtout dans un canal convergent à forte pente ou dans un canal divergent à faible pente; c'est-à-dire que les courbes H_c et H_u peuvent se couper dans l'étendue du lit.

Les considérations du paragraphe 9 relatives aux axes simples d'aval et d'amont restent plus ou moins valables en principe dans un canal découvert assez long qui ne s'écarte pas trop dans son ensemble d'un certain caractère prismatique. Par contre, un canal convergent ou divergent est nécessairement de longueur limitée, de telle sorte que la notion d'axe simple n'y a plus de vraie signification.

Quant à l'effet des conditions d'amont ou d'aval, il faut se référer aux cas concrets, les axes pouvant être composés (voir chapitre suivant).

13.- SECTIONS IRREGULIERES

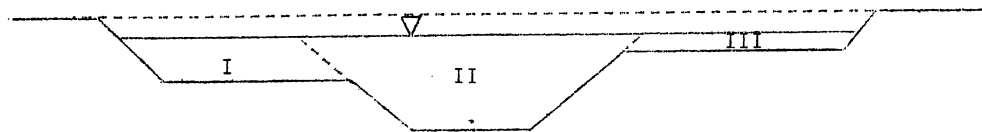


Fig. 47.

Certains canaux ont des profils irréguliers. En temps de crue notamment les cours d'eau peuvent occuper un lit mineur profond et un lit majeur peu profond (fig. 47).

Les conditions de l'écoulement sont très variables d'une partie de la section à l'autre. On décomposera la section transversale en parties dans lesquelles les conditions d'écoulement sont différentes et on écrira :

$$Q = \sqrt{i} \cdot (C_1 \cdot \omega_1 \cdot \sqrt{R_1} + C_2 \cdot \omega_2 \cdot \sqrt{R_2} + C_3 \cdot \omega_3 \cdot \sqrt{R_3}) \quad (91)$$

Les limites de séparation des diverses parties devraient être normales aux isodromes (voir pl. 9, fig. 3). Si les diverses fractions de la section ont des talus caractérisés, on pourra par approximation disposer les séparations suivant les prolongements des talus.

La propriété $\frac{dQ}{dh} = 1$ reste vraie dans les conditions indiquées au paragraphe 4, fig. 23.

Pour de telles sections complexes, on opérera en déterminant une courbe de variation de Q en mouvement permanent uniforme en fonction de h . On peut ensuite déduire de cette courbe la valeur de Q correspondant à toute valeur de h . Ceci suppose le canal prismatique. S'il ne l'est pas, la courbe de Q en fonction de h varie d'une section à l'autre, l'écoulement étant supposé libre.

L'exposé qui précède suppose aussi que la surface de l'eau reste horizontale dans le sens transversal. Or, si le lit est très irrégulier, des courants de vitesses très différentes peuvent se différencier et la surface de l'eau peut être courbe dans le sens transversal et même présenter des discontinuités, surtout si le canal présente une courbure dans le sens transversal. Il faut alors recourir à l'observation et à l'expérience sur modèles à échelle réduite.

M. Hegly a étudié cette question au Laboratoire du Saüty à Metz pour le grand canal d'Alsace. Il a, en appliquant la formule de Bazin (dont il fut un collaborateur), vérifié l'exactitude de la formule (91). Il a constaté :

- 1) qu'il n'y a pas de mouvement transversal si le mouvement longitudinal est uniforme;
- 2) Il y a des échanges transversaux entre les diverses parties du lit lorsque le mouvement est graduellement varié. Cela est d'ailleurs nécessaire puisque les courbes de remous ne peuvent rester en concordance pour des débits partiels constants;

3) les ondes sur un tel canal sont uniques, ce qui exige aussi des mouvements transversaux. Il doit donc y avoir de tels mouvements lors des crues et des décrues (voir plus loin).

La répartition des vitesses dans une section complexe ou irrégulière est évidemment fortement influencée par ces irrégularités.

14.- LIGNE D'ENERGIE

Si l'on porte à partir de l'axe hydraulique vers le haut, la hauteur $\frac{\alpha \cdot u^2}{2g}$ à la même échelle que h , le lieu de tous les points ainsi obtenus est la ligne d'énergie. Elle représente la fonction

$$\mathcal{E} = h + \frac{\alpha \cdot u^2}{2g} \quad (42)$$

en fonction de s , telle que

$$\frac{d\mathcal{E}}{ds} = i - \frac{\chi \cdot u^2}{\omega \cdot C^2} \quad (43)$$

Cette fonction varie d'une manière décroissante en fonction de s , c'est-à-dire que la ligne d'énergie est toujours en pente. Cette pente est caractéristique des pertes de charge des fluides réels en mouvement par rapport à la constance de la charge E pour les liquides parfaits (th. de Bernoulli, par. 1). La fonction E est rapportée à un plan de charge horizontal (par. 3).

Dans le cas du mouvement permanent uniforme, la perte de charge est constante par unité de longueur et telle que

$$\frac{\chi \cdot u^2}{\omega \cdot C^2} = i, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\mathcal{E}}{ds} = 0.$$

La pente de la ligne d'énergie est donc la même que celle du fond du lit prismatique et de la ligne d'eau.

En cas de mouvement permanent graduellement varié dans un lit prismatique, la pente de la ligne d'énergie est inférieure à celle du fond pour un axe de relèvement (au-dessus de H_u) et supérieure pour un axe d'abaissement (en-dessous de H_u), mais il y a toujours pente, alors que la ligne d'eau peut être en contrepente.

\mathcal{E} présente un minimum en fonction de h pour $h = H_c$ et tel que

$$\mathcal{E}_{\min} = \mathcal{E}_c = \frac{3}{2} H_c.$$

Une ligne d'eau peut cependant dans un lit prismatique couper la droite H_c à condition que la ligne d'énergie reste toujours en pente, même si $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h}$ et $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial s}$ sont positifs. Il faut et il suffit que $\frac{\partial E}{\partial s}$ (ou $\frac{\Delta E}{\Delta s}$) soit négatif. On montrera au chapitre suivant que l'intersection de la droite H_c par la ligne d'eau est souvent caractéristique d'un mouvement varié avec perte de charge spéciale.

Dans le cas d'un lit non prismatique (voir paragraphe 12), la droite H_c est remplacée par une courbe H_c qui peut être coupée par la ligne d'eau, la ligne d'énergie restant en pente. C'est notamment le cas des canaux rectangulaires à parois convergentes. La forte courbure des filets liquides près de la droite ou de la courbe H_c affecte d'ailleurs l'application des formules fondées sur l'hypothèse des filets rectilignes et sensiblement parallèles.

La position de la ligne d'énergie par rapport à la ligne d'eau est caractéristique de la rapidité de l'écoulement. Le rapport

$$\frac{u^2}{2 g \cdot h} = \frac{\alpha^2}{2} ,$$

facteur cinétique de courant divisé par 2, distingue l'écoulement rapide de l'écoulement lent, selon que α^2 est plus grand ou plus petit que 1 (par. 3, A.).

15.- CAS DES RIVIERES REELLES

Les cours d'eau naturels constituent des canaux découverts qui sont loin de satisfaire aux conditions de régularité géométrique et de nature de parois auxquelles satisfont les canaux expérimentaux à l'aide desquels ont été établies les formules de l'hydraulique, même dans leurs parties sensiblement rectilignes en plan. Or, les cours d'eau naturels sont généralement sinueux en plan (voir chapitre XVII). Cependant, les observations et les mesures faites sur les cours d'eau vérifient convenablement certaines formules, par exemple, celle de Strickler et celle de Bazin. Elles définissent naturellement un coefficient de rugosité moyen, car la rugosité des parois n'est pas uniforme. Il en résulte que ce coefficient de rugosité moyen peut varier selon l'état des eaux. Selon A. Einstein (Der hydraulische oder Profil Radius, Schweizerische Bauzeitung, 24-2-34), on peut raisonner comme suit :

L'écoulement étant turbulent, il se produit à la paroi des tourbillons uniformément répartis par m^2 . Si e est l'énergie par mètre de courant d'eau, par m^2 de paroi on a

$$e' = \frac{e}{\chi} .$$

Cette énergie est communiquée uniformément au volume d'eau.

Par m^3 , on a
$$e'' = \frac{e}{\omega} .$$

Si φ est le volume de dissipation de l'énergie des tourbillons par m^2 de paroi, on a

$$e' = \varphi \cdot e'' , \quad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{e'}{e''} = \frac{e}{\chi} \cdot \frac{\omega}{e} = \frac{\omega}{\chi} = R .$$

Le rayon hydraulique moyen représente donc le volume d'eau dans lequel se dissipe l'énergie des tourbillons produits par m^2 de paroi.

Si la paroi d'un canal est de rugosité uniforme et si on la divise en n parties égales, le mouvement étant uniforme, l'énergie des tourbillons de chaque fraction de paroi se dissipe dans une fraction $1/n$ du volume. Chaque n^o du volume d'eau correspond à une unité indépendante, sans transport d'énergie de l'une à l'autre. Les lignes de séparation peuvent être considérées comme des normales aux isodromes. Par exemple, dans une section circulaire fermée, ce sont des rayons. R est donc le même pour toutes les parties de la section et $u = C \sqrt{R \cdot i}$.

Si les rugosités sont différentes, on peut encore considérer des unités indépendantes, mais pas d'égale énergie. En admettant que i et u soient constants

$$\frac{u}{\sqrt{i}} = C_1 \cdot R_1^{1/2} = C_2 \cdot R_2^{1/2} \dots = C_n \cdot R_n^{1/2}$$

et

$$\omega = R_1 \cdot \Delta x_1 + R_2 \cdot \Delta x_2 \dots + R_n \cdot \Delta x_n.$$

d'où

$$\omega = \frac{u^2}{i} \cdot \sum \frac{\Delta x}{c^2}$$

et

$$u = \sqrt{i} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{\sum \frac{\Delta x}{c^2}}} \quad \text{et} \quad C_m = \sqrt{\frac{\gamma_c}{\sum \frac{\Delta x}{c^2}}} \quad (92)$$

La notion de C_m est ainsi bien définie pour une section transversale. On peut l'étendre à la longueur d'un tronçon de cours d'eau.

16.- MOUVEMENT DE L'EAU DANS LES COURBES

Dans les courbes, les forces de masse de l'accélération centripète s'ajoutent à celles de la gravité et modifient donc le mouvement. Des essais de laboratoire effectués sur des canaux circulaires de section rectangulaire raccordés sans transition à des canaux prismatiques ont mis en évidence des perturbations assez complexes de la répartition des vitesses. Dans les cours d'eau naturels, des courbes très aiguës peuvent créer des pertes de charge très importantes, notamment lors des crues. Ces questions ne peuvent guère être étudiées théoriquement, mais seulement sur des modèles à échelle réduite, par les lois de la similitude approximative. On comprend aisément qu'il faut éviter les courbes de rayon très faible par rapport à la largeur du plan d'eau et les discontinuités de courbure. Il faudra passer des tronçons droits aux courbes par des raccordements progressifs. Dans les courbes, la surface transversale de l'eau n'est plus horizontale. Il se produit un dévers, c'est-à-dire un relèvement de l'eau à la rive concave par rapport à la rive convexe. La théorie élémentaire suivante, due à Grashof, admet tous les filets liquides animés de la vitesse moyenne u tangentielle. Les lignes d'égale charge sont normales aux forces, donc la surface libre est telle que (fig. 48)

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z} = \frac{u^2}{g \cdot x}$$

donc

$$g \cdot dz = u^2 \cdot \frac{dx}{x} \quad g \cdot z = u^2 \cdot \log x + c$$

Mais pour $x = r_1, z = 0$, donc

$$0 = u^2 \cdot \log r_1 + c \quad \text{et} \quad z = \frac{u^2}{g} \cdot \log \frac{x}{r_1}$$

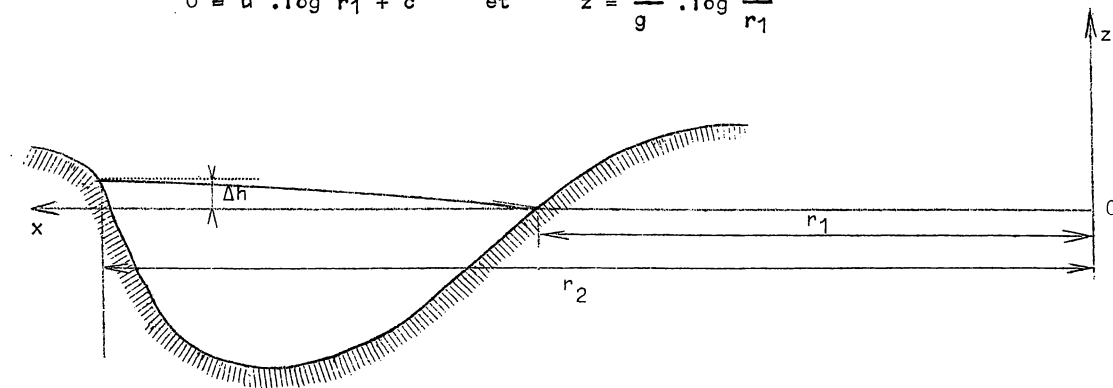


Fig. 48.

Donc, à la rive concave,

$$\Delta h = \frac{u^2}{g} \cdot \log \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{Grashof}) \quad (93)$$

Si l'on admet la loi du tourbillon à axe vertical

$$v = \frac{A}{r}, \quad \text{on a} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{A^2}{g \cdot x^3}$$

$$\text{d'où} \quad g \cdot dz = A^2 \cdot x^{-3} \cdot dx \quad g \cdot z = -\frac{A}{2} \cdot x^{-2} + c \quad c = \frac{A^2}{2r_1^2}$$

$$\text{d'où} \quad \Delta h = \frac{A^2}{2g} \cdot \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) = \frac{u^2}{2g} \cdot \left[\left(\frac{r_0}{r_1} \right)^2 - \left(\frac{r_0}{r_2} \right)^2 \right] \quad (94)$$

$$\text{si } u = \frac{A}{r_0}.$$

En fait, dans un canal découvert en courbe, il se produit un mouvement hélicoïdal et les plus grandes vitesses sont observées près de la rive concave. On aurait donc plutôt $v = B \cdot x$.

$$\text{Alors} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{B^2 \cdot x}{g}, \quad g \cdot dz = B^2 \cdot x \cdot dx$$

$$g \cdot z = \frac{B^2 \cdot x^2}{2} + c \quad c = -\frac{B^2 \cdot r_1^2}{2}$$

$$\text{d'où} \quad \Delta h = \frac{B^2}{2g} \cdot (r_2^2 - r_1^2) = \left(\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \right) = \frac{u^2}{2g} \cdot \left(\frac{r_2^2}{r_0^2} - \frac{r_1^2}{r_0^2} \right) \quad (95)$$

$$\text{avec } u = B \cdot r_0$$

La perte de charge pourrait s'exprimer par $\xi \cdot \frac{u^2}{2g}$.

ξ , est généralement petit ($< 0,10$) si $\frac{r_0}{1}$ est assez grand, par exemple de l'ordre de 5.

Pour des valeurs de $\frac{r_0}{1}$ de l'ordre de 1, ξ devient déjà notable (0,2 à 0,4). Pour de plus petites valeurs, ξ croît fortement, mais les phénomènes se compliquent et il faut recourir aux essais sur modèles (voir L.J. TISON, Cours d'Hydraulique, 2^o partie).

Dans un cours d'eau généralement sinueux, ces pertes de charge s'ajouteront à celles du frottement des parois et seront, sauf pour des courbes exceptionnelles, englobées dans le coefficient C_m .

Ces pertes de charges supplémentaires constituent aussi une des raisons invoquées pour donner à α la valeur 1.

Certains auteurs proposent même d'affecter le terme $\frac{u^2}{2g}$ d'un facteur inférieur à l'unité ou de le négliger purement et simplement, pour tenir compte de l'ensemble des pertes de charges accidentelles se produisant dans une rivière naturelle et qui ne figurent pas dans les équations. On est ramené ainsi au principe de la méthode du paragraphe 10, C), c'est-à-dire celle des tronçons du mouvement uniforme qui, approximative pour les canaux prismatiques rectilignes, serait par contre plus appropriée pour les cours d'eau naturels. La simplification des équations qui en résulte facilite en tous cas leur intégration, à laquelle on peut appliquer toutes les méthodes considérées au paragraphe 12.

17.- EQUATION DU MOUVEMENT PERMANENT GRADUELLEMENT VARIE A DEBIT VARIE

Il y a dans ce cas apport ou départ latéral de débit. On se réfère au chapitre X, paragraphe 2, B), fig. 13. Admettons sur la longueur ds une variation de débit dQ. La composante de la vitesse du débit différentiel parallèle à la vitesse u du courant est w. L'équation des quantités de mouvement peut alors être écrite comme suit :

$$(p_0 \cdot \omega_0 - p_1 \cdot \omega_1 + \gamma_e \cdot \omega \cdot ds \cdot i - f' \cdot \omega \cdot ds) \cdot dt = \gamma_e \cdot \omega \cdot ds \cdot du + \rho_e \cdot dQ \cdot dt \cdot (u - w)$$

ou $\gamma_e \cdot (\omega_0 \cdot z_0 - \omega_1 \cdot z_1) + \gamma_e \cdot \omega \cdot (Z_0 - Z_1) - f' \cdot \omega \cdot ds = \gamma_e \cdot \omega \cdot \frac{ds}{dt} \cdot du + \rho_e \cdot dQ \cdot (u - w)$

$$(Z_{s0} - Z_{s1}) - \frac{f'}{\gamma_e} \cdot ds = \frac{1}{2g} \cdot d(u^2) + \frac{1}{g} \cdot \frac{dQ}{\omega} \cdot (u - w)$$

$$- \frac{dZ}{ds} - \frac{u^2}{C^2 \cdot R} = \frac{1}{2g} \cdot \frac{d(u^2)}{ds} + \frac{u^2}{g} \cdot \frac{dQ}{Q} \cdot (1 - \frac{w}{u}) \tag{96}$$

$$- \frac{dE}{ds} = i - \frac{dE}{ds} = \frac{u^2}{C^2 \cdot R} + \frac{u^2}{g} \cdot \frac{Q'}{Q} \cdot (1 - \frac{w}{u}) \tag{96 bis}$$

Si $Q' > 0$ et $w < u$, Z et E diminuent, à égalité de u. C'est notamment le cas si $w = 0$ (introduction latérale). Si $w > u$, Z et E augmentent. C'est l'inverse si $Q' < 0$ (ponction). Si $w = u$, la variation de débit ne modifie pas l'équation de l'axe, mais intervient évidemment d'une manière numérique par les valeurs de u. Aux différences finies, on aura, si $w = 0$

$$- \Delta Z = \frac{u_m^2 \cdot \Delta s}{C_m^2 \cdot R_m} + \frac{u_1^2 - u_0^2}{2g} + \frac{Q^2 - Q_0^2}{2g \cdot \omega_m^2} \tag{97}$$

En effet $\frac{u \cdot dQ}{\omega} = \frac{Q \cdot dQ}{\omega^2}$.

Si $\frac{dQ}{ds} = Q' = \text{constante}$, $Q_1 = Q_0 + Q' \cdot \Delta s$

$$\frac{Q_1^2 - Q_0^2}{\omega_m^2} = \frac{(2Q_0 + Q' \cdot \Delta s) \cdot Q' \cdot \Delta s}{\omega_m^2} = \frac{Q' \cdot \Delta s}{\omega_m} \cdot \frac{Q_0 + Q_1}{2\omega_m} = \frac{Q' \cdot \Delta s}{\omega_m} \cdot \frac{Q_m}{\omega_m} = \frac{Q' \cdot \Delta s}{\omega_m} \cdot u_m$$

Donc $- \Delta Z = \frac{u_m^2 \cdot \Delta s}{C_m^2 \cdot R_m} + \frac{(u_1 - u_0) \cdot u_m}{g} + \frac{Q' \cdot u_m}{g \cdot \omega_m} \cdot \Delta s$ (98)

Si le débit est décroissant, par évacuation sur un déversoir latéral, on admet $w = u$

et $- \Delta Z = \frac{u_m^2}{C_m^2 \cdot R_m} \cdot \Delta s + \frac{(u_1 - u_0) \cdot u_m}{g}$ (99)

$$\omega_0 \cdot u_0 - \omega_1 \cdot u_1 = \Delta Q = m \cdot h_m^{3/2} \cdot \Delta s$$

h_m étant l'épaisseur moyenne de la lame déversante sur la longueur Δs du déversoir, m le coefficient de débit. D'après Engels

$$- \Delta Z = 1,087 \cdot \frac{u_1^2 - u_0^2}{2g} = 1,087 \cdot (u_1 - u_0) \cdot u_m \tag{100}$$

Pour un canal prismatique rectangulaire, l'équation (96 bis) devient

$$i - \frac{dh}{ds} \cdot (1 - \frac{Q^2}{g \cdot l^2 \cdot h^3}) - \frac{Q \cdot \frac{dQ}{ds}}{g \cdot l^2 \cdot h^2} = \frac{Q^2}{l^2 \cdot h^2 \cdot C^2} \cdot \frac{x}{l \cdot h} + \frac{Q^2}{g \cdot l^2 \cdot h^2} \cdot \frac{dQ}{ds} \cdot (1 - \frac{w}{u})$$

d'où, en admettant $\frac{w}{u} = 1$,

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{1^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1+2h}{C^2 \cdot 1 \cdot h} + \frac{Q}{g \cdot 1^2 \cdot h^2} \cdot \frac{dQ}{ds}}{1 - \frac{Q^2}{g \cdot 1^2 \cdot h^3}} \quad (96 \text{ ter})$$

Si $w = 0$

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{1^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1+2h}{C^2 \cdot 1 \cdot h}}{1 - \frac{Q^2}{g \cdot 1^2 \cdot h^3}} \quad (96 \text{ quater})$$

On voit donc que le rapport $\frac{w}{u}$ a une grande importance si $\frac{dQ}{ds}$ est assez grand.

18.- CAS DES SECTIONS FERMEES

Il s'agit de canaux qui ne sont plus partout concaves vers le haut et dont non seulement les parois recoupent deux fois une verticale, mais forment des profils fermés (galeries souterraines, canalisations d'égoûts). L'écoulement peut s'y faire à niveau libre jusqu'à atteindre le plafond à la limite. Les canaux sont généralement cylindriques. Des sections fréquentes sont la section circulaire et l'ovoïde normal (fig. 49). Les caractères géométriques établis au paragraphe 5, A) pour les sections ouvertes régulièrement concaves ne sont plus vérifiés.

$\frac{l}{h}$ varie de 0 à 0 en passant par un maximum. $\frac{dl}{dh}$ d'abord positif devient ensuite négatif.

$\frac{dX}{dh}$ est toujours positif, mais R, d'abord croissant, passe par un maximum et puis décroît.

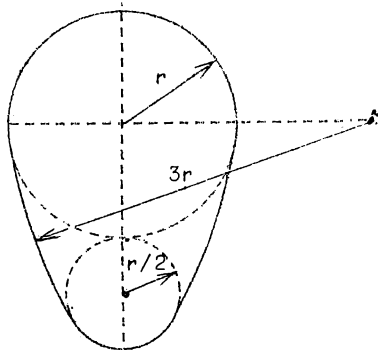


Fig. 49.

$\frac{\omega}{l}$ et $\frac{X}{l}$ sont toujours croissants, mais tendent vers l'infini pour $h = h_{max}$, hauteur de la section fermée.

On a toujours $\frac{d\omega}{dh} = 1$, mais d'abord croissant, passant par un maximum, puis décroissant.

La vitesse moyenne maximum se produit pour la valeur maximum de R. Pour la section circulaire elle correspond à $h = 0,83 h_{max}$; pour l'ovoïde normal à $h = 0,85 h_{max}$. Dans ce cas, la vitesse moyenne maximum atteint à peu près 1,12 fois la vitesse moyenne du remplissage total.

Le débit maximum se produit pour une valeur de h supérieure à celle qui correspond à la vitesse maximum.

Le débit maximum d'une section circulaire se produit

pour $h = 0,94 h_{max}$, dans l'ovoïde normal $h = 0,94$. Il en résulte que des débits voisins du débit maximum peuvent être écoulés sous deux hauteurs différentes. C'est ainsi que le débit à gueule bée peut s'écouler dans la section circulaire sous $h = 0,81 h_{max}$, dans l'ovoïde normal sous $h = 0,86 h_{max}$. Le débit maximum de l'ovoïde normal est environ 1,06 fois le débit à gueule bée. Dans ces conditions, les figures 26 et 28 du paragraphe 6 subissent d'importantes modi-

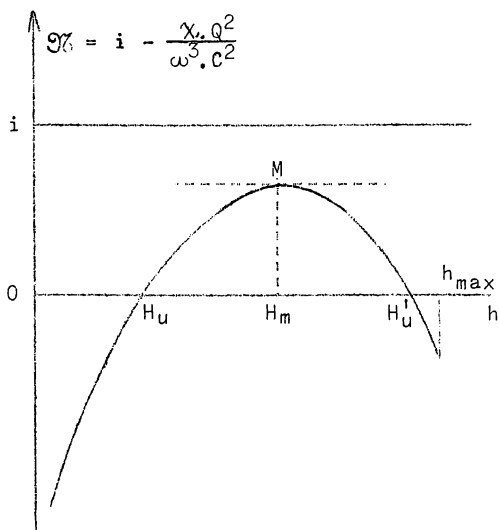


Fig. 50.

fications. La figure 50 représente la variation de

$$i = i_0 - \frac{\alpha \cdot Q^2}{\omega^3 \cdot C^2}$$

en fonction de $h \equiv 0$ à h_{\max} . La valeur maximum correspond à H_m . Il n'y a rien de changé à la figure 27 représentant la variation de

$$D = \sqrt{i - i_0^2} = \frac{\alpha \cdot Q^2 \cdot l}{g \cdot \omega^3}$$

On voit qu'il peut y avoir deux hauteurs du mouvement uniforme pour certaines valeurs assez élevées de Q_1 , soit $H_u < H_m$ et $H_u' > H_m$ mais $< h_{\max}$.

La représentation de la variation de H_c et de H_u pour un canal et un débit donnés en fonction de i diffère alors sensiblement de la figure 28 et, en écartant le cas fortuit que $H_p = H_m$, elle peut se présenter sous les deux formes des figures 51 et 52, selon que $H_p > H_m$ ou $H_p < H_m$.

D'après cela, les formes des axes peuvent être celles représentées aux figures 53 à 58.

On remarquera que i ne peut pas descendre en-dessous de i_m , ce qui signifierait que sous la pente considérée, la section est insuffisante pour écouler le débit considéré. Le cas de la fig. 51 ($H_m > H_p$) correspond nécessairement à des canaux très lisses; dans le cas de la fig. 52 ($H_m < H_p$) à des canaux plus rugueux. Lorsque, dans le cas de ces deux figures, i est non seulement plus grand que i_p , mais que i_{hm} , on retrouve le cas des axes B des canaux découverts à forte pente (fig. 59).

Enfin, on pourrait considérer qu'en cas de très forte rugosité, i_p soit supérieur à i_{hm} . Les axes hydrauliques peuvent alors prendre diverses formes. Les fig. 60 à 66 sont assez explicites à ce sujet.

Toutes ces représentations sont cependant schématiques, notamment dans les cas où les lignes d'eau passent de l'écoulement découvert à l'écoulement à gueule-bée, en raison des phénomènes qui peuvent provenir de l'entraînement d'air. Lors du passage inverse de l'écoulement à gueule-bée à l'écoulement découvert, des perturbations peuvent également se produire.

Il y a lieu de remarquer pour finir que l'existence d'un maximum de débit pour un remplissage partiel résulte purement de l'application des formules du mouvement uniforme aux canalisations fermées, mais que les expériences ne confirment pas nettement ces conclusions. On a vu plus haut que l'écart théorique n'est d'ailleurs pas considérable (6 % seulement), de telle sorte que les perturbations d'un écoulement très voisin de celui de l'écoulement à gueule-bée (entraînement d'air par exemple) peuvent aisément le masquer, abstraction faite des imprécisions expérimentales, qui peuvent aisément atteindre le pourcentage en question. L'étude théorique, du moins dans les cas complexes et importants, devra donc judicieusement être suivie d'expériences, auxquelles elle servira d'introduction.

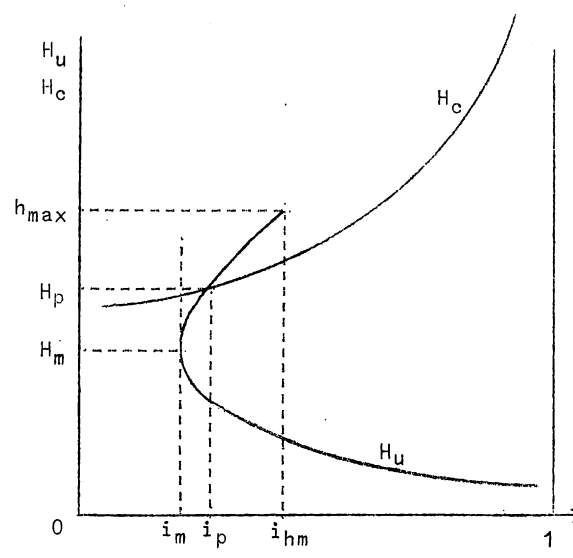


Fig. 51.

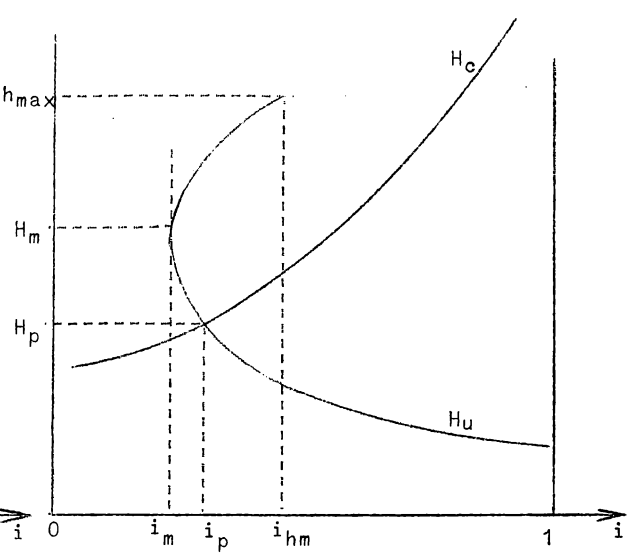


Fig. 52.

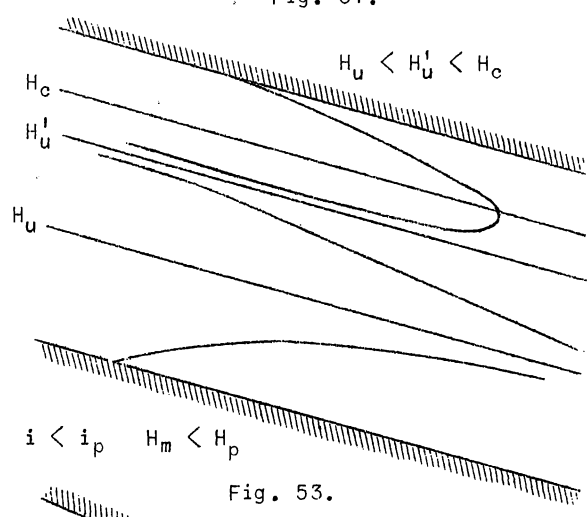


Fig. 53.

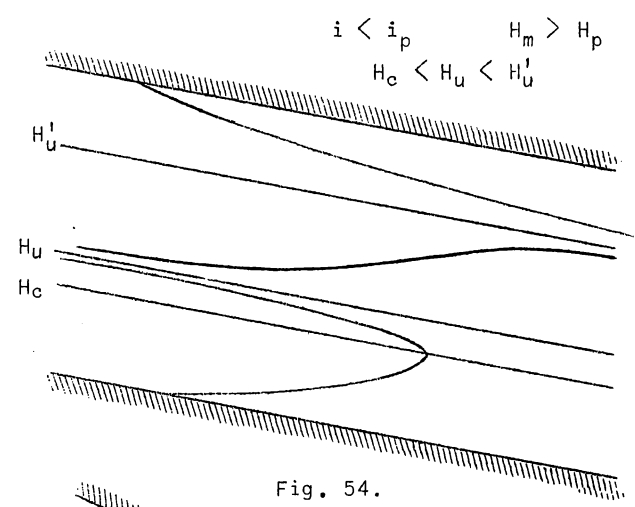


Fig. 54.

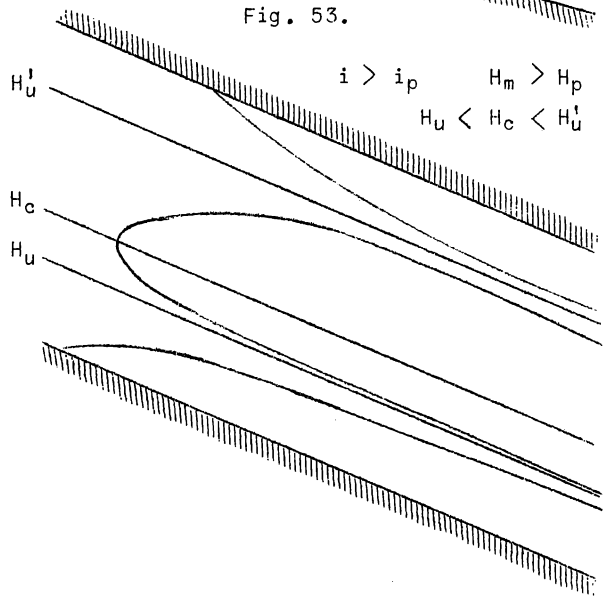


Fig. 55.

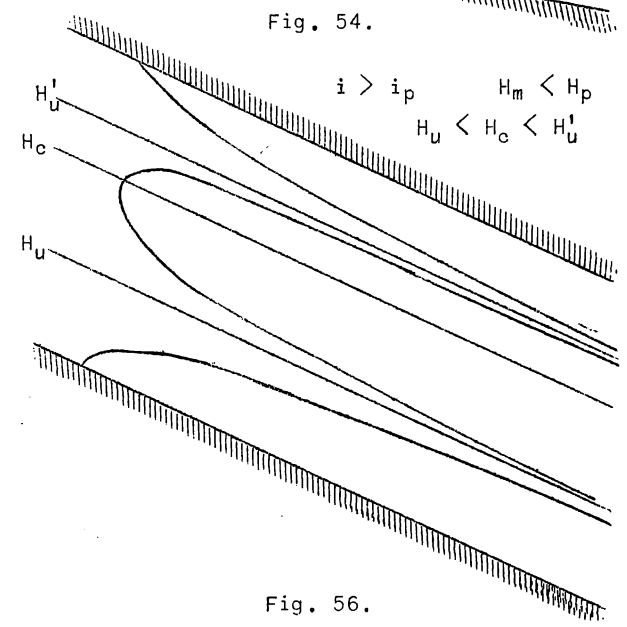


Fig. 56.

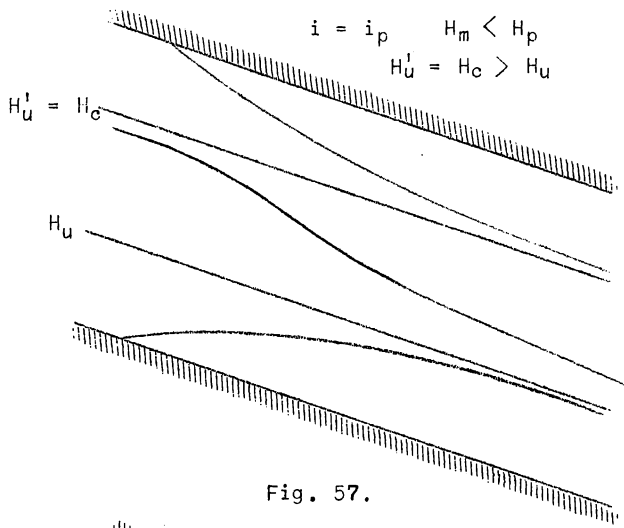


Fig. 57.

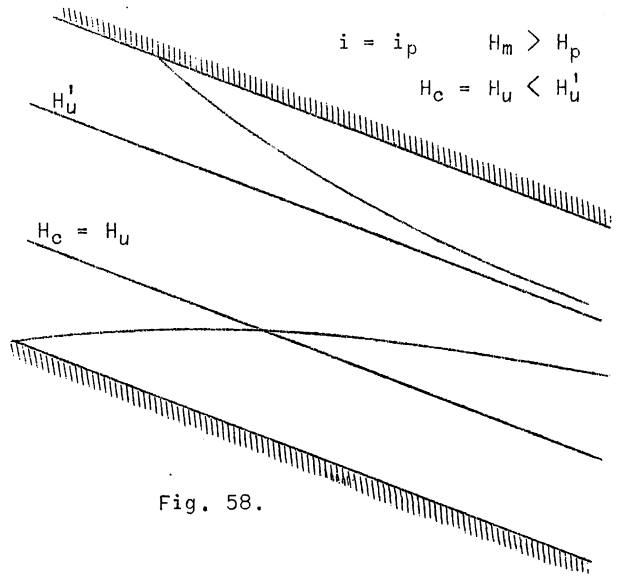


Fig. 58.

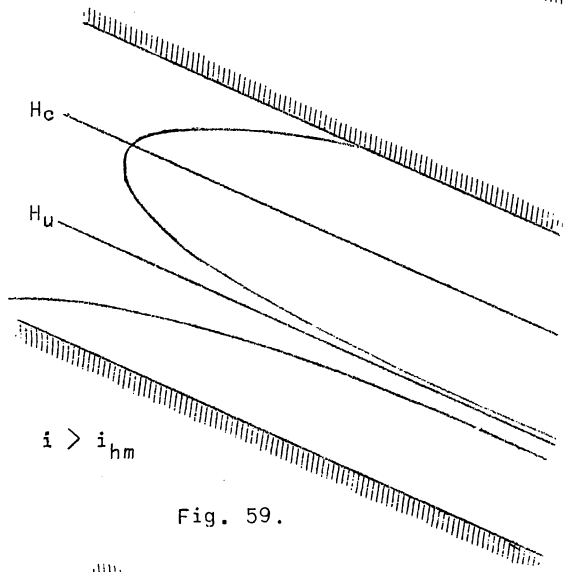


Fig. 59.

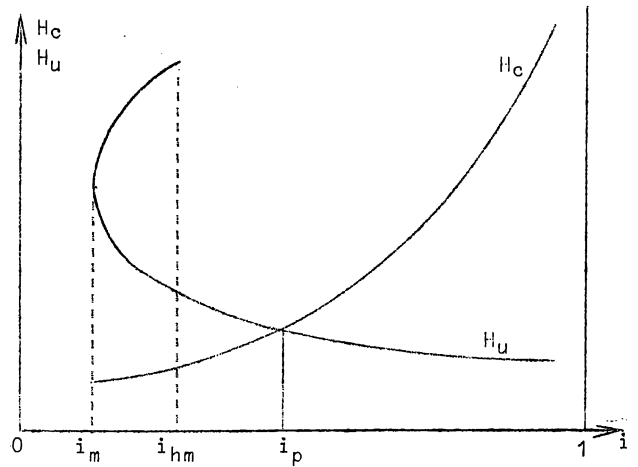


Fig. 60.

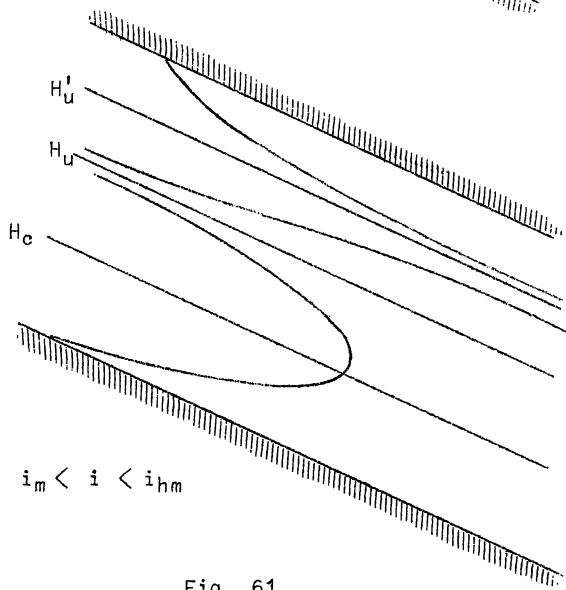


Fig. 61.

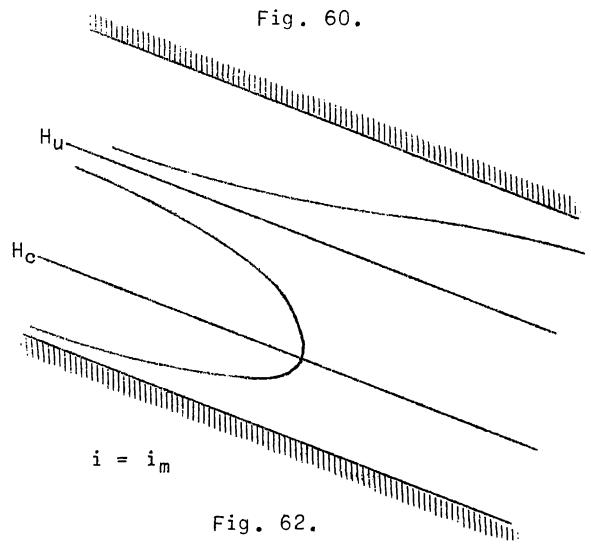


Fig. 62.

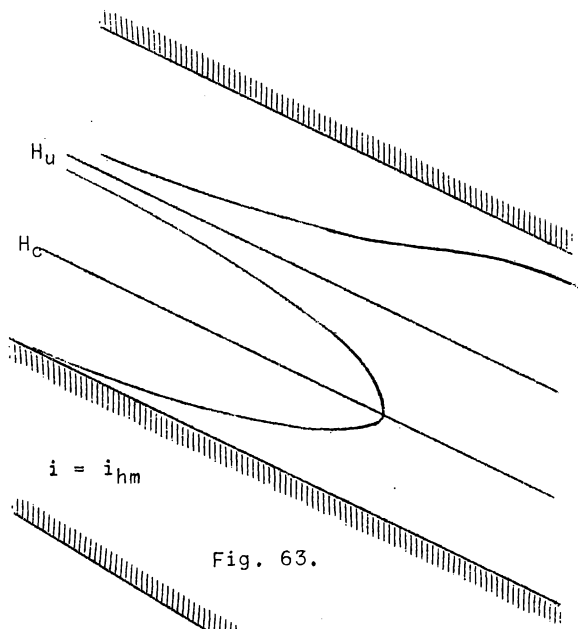


Fig. 63.

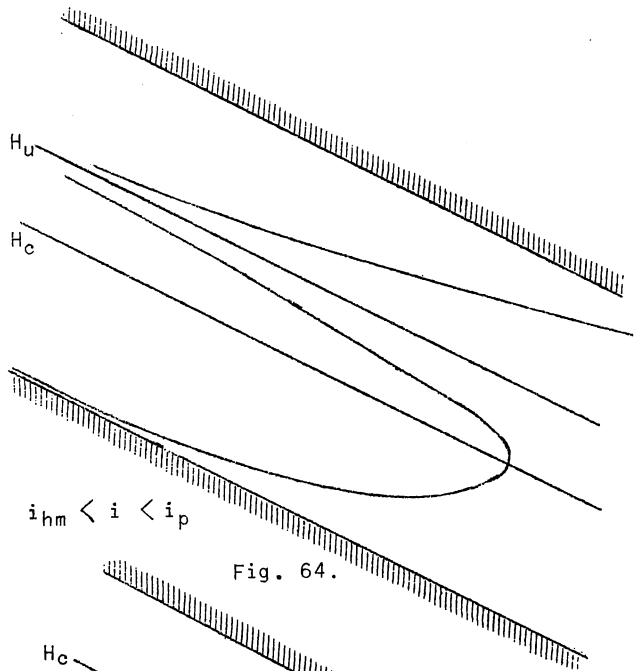


Fig. 64.

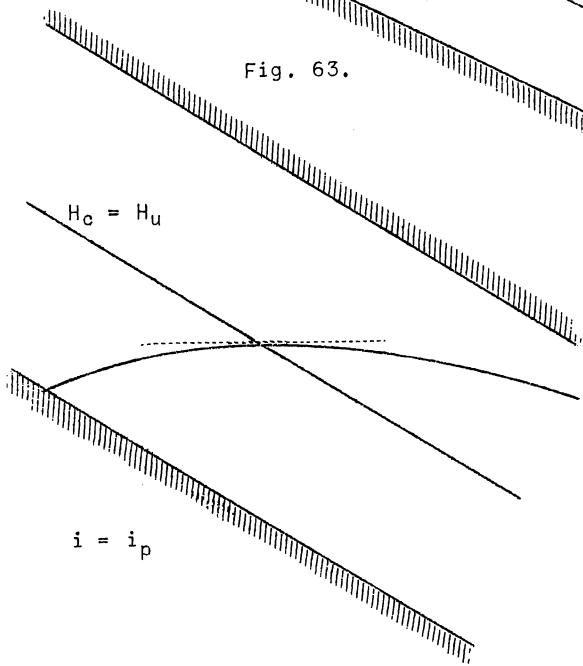


Fig. 65.

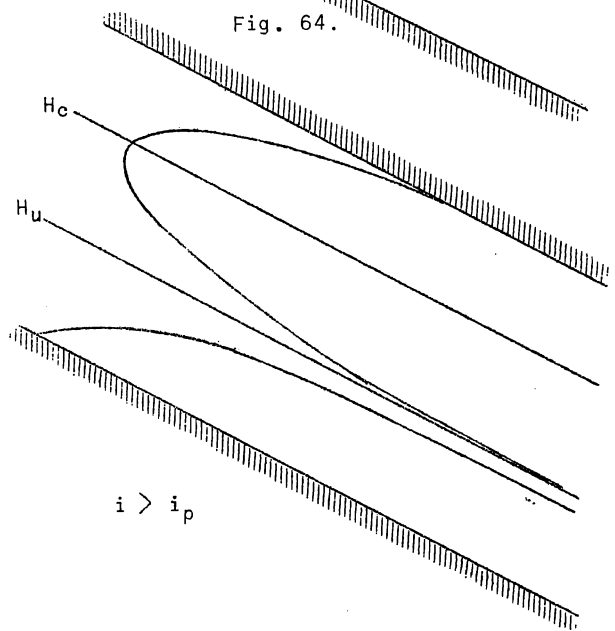


Fig. 66.

19.- EFFET DE LA COURBURE DES FILETS LIQUIDES

Cette question a été étudiée par Boussinesq dans son célèbre mémoire intitulé : "Essai sur la théorie des eaux courantes". La difficulté du problème impose des restrictions; en général on se borne à considérer les canaux prismatiques et même le plus souvent de section rectangulaire de largeur indéfinie. En fait, on y ajoute encore des simplifications restrictives, telles que la négligence de $(\frac{dh}{ds})^2$, c'est-à-dire que l'on considère encore de faibles inclinaisons et de faibles courbures. On peut établir de la sorte une généralisation de l'équation des lignes d'eau des canaux prismatiques. La conclusion générale est que le raccordement entre le mouvement uniforme (H_0) et le mouvement permanent graduellement varié est accompagné d'une série d'ondulations amorties, surtout dans le cas des écoulements lents et dans le cas du passage du mouvement permanent graduellement varié au mouvement uniforme. Dans le cas des écoulements rapides, les transitions se font par des ressauts, notamment le passage du mouvement uniforme au mouvement graduellement varié, ces ressauts étant éventuellement ondulés. (Voir le chapitre suivant pour les ressauts).

Boussinesq a aussi appliqué ces équations au cas d'un fond ondulé, dont les effets dépendent de la longueur et de la hauteur des ondulations successives. Si les ondulations sont d'égales longueurs et hauteur et de même pente moyenne, les ondulations de la surface de l'eau sont aussi régulières et en avance sur celles du fond (c'est-à-dire que les crêtes forment déversoir).

M. Ch. De Keyser a préconisé pour les canaux prismatiques une méthode basée sur l'étude des lignes de courant dans les écoulements à potentiel de force et de vitesse, ce qui est hypothétique. Il admet que ce sont des arcs d'hyperboles équilatères. Les sections transversales ne sont pas planes, mais aussi déterminées par des arcs d'hyperboles équilatères orthogonaux aux précédents. L'équation différentielle devient ce qui suit :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{X^1}{\omega^1 \cdot C^2} \left(\frac{Q}{\omega^1}\right)^2}{\sqrt{1 - i^2} - \frac{1}{g} \cdot \left(\frac{Q}{\omega^1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\omega^1} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{ds}\right)^2}}$$

Dans cette équation, X^1 et ω^1 se rapportent aux sections transversales courbes, de même que l (largeur de la surface libre). On écrit $Q = \omega^1 \cdot u^1$, u^1 étant une vitesse moyenne constante suivant les lignes de courant hyperboliques, c'est-à-dire normales en chaque point aux sections transversales courbes. H_0 n'est plus une constante pour un débit donné mais décroît lorsque la courbure augmente. Il n'y a donc plus de droite H_0 mais une courbe H_0 . Le coefficient C est admis constant. Les arcs sont tous des arcs d'hyperbole, qui se tracent par la connaissance d'une asymptote, qui est la droite H_0 , et d'un point initial avec la tangente $\frac{dh}{ds}$ en ce point, calculée par les formules du paragraphe 7, c'est-à-dire en négligeant l'effet de la courbure. On pourrait tenir compte de la variation de C en le faisant varier par tronçons, mais il faut alors recommencer toutes les opérations pour chaque tronçon comme pour un nouvel axe (nouvelle asymptote, nouveau point initial), ce qui complique beaucoup le calcul.

Lorsque $i = 0$, les axes deviennent des paraboles dans cette théorie.

Les différences avec les résultats du paragraphe 7 ne peuvent être sensibles que dans les parties à forte courbure, qui ne se rencontrent guère en pratique et pour lesquelles toutes les théories sont sujettes à caution. Les formules du paragraphe 7 ont l'avantage de permettre la considération de la variation de C , ce qui fait que dans les parties courantes des axes, correspondant aux calculs pratiques, elles donnent des résultats qui concordent bien avec les expériences et les observations.

On remarquera dans le calcul des axes que les parties à forte courbure, voisines de H_C , sont toujours relativement courtes et associées à des écoulements qui ne sont plus graduellement variés, mais fortement variés, présentant parfois des discontinuités (ressauts, voir chapitre suivant, ou nappes déversantes). Ces écoulements variés s'accompagnent de perturbations très turbulentes : rouleaux, projections, déferlements, vagues, etc...), et de dissipation d'énergie. Les équations du mouvement permanent graduellement varié cessent alors d'être applicables. Il s'agit alors de phénomènes dits "courts" relevant de la similitude de Froude plutôt que de celle de Reynolds.

Une analyse exacte de ces phénomènes n'est guère possible que par l'expérience, éventuellement à échelle réduite. Mais l'étude préliminaire par l'équation des axes hydrauliques des régions à forte courbure est moins absolument inexacte que pourrait le laisser supposer les hypothèses de base des formules.



CHAPITRE XI

MOUVEMENT PERMANENT VARIE

AXES COMPLEXES

1.- GENERALITES

Les formes des lignes d'eau simples du mouvement permanent graduellement varié, les considérations relatives aux axes simples d'amont et d'aval et les hypothèses fondamentales du calcul de ces axes, à savoir la progressivité de toutes les variations, y compris celles des formes des lits et des pentes, suggèrent que fréquemment les lignes d'eau seront complexes, c'est-à-dire formées de plusieurs tronçons d'axes simples raccordés par des zones à variation rapide, sinon discontinues. De telles variations ou discontinuités peuvent aussi exister aux extrémités d'amont et d'aval des axes.

Enfin, les lits peuvent présenter des variations non graduelles, voire brusques, quasi discontinues, de forme, de section, de fond et de pente, ou contenir des obstacles produisant des effets de même nature.

Dans toutes ces zones de grande variation se produit le mouvement varié, qui en général se raccorde en amont et en aval, à une distance suffisante mais assez limitée, à des lignes d'eau de mouvement permanent graduellement varié, souvent de natures différentes. On a alors des lignes d'eau ou axes hydrauliques composés.

Les mouvements fortement variés d'étendue limitée sont de deux natures.

Ceux provoqués dans les écoulements lents par des accidents du lit sont généralement assez peu turbulents et n'entraînent qu'une faible dissipation d'énergie, à tel point qu'on la néglige souvent. Les phénomènes correspondants sont donc résolus par le théorème de Bernoulli.

Dans les écoulements rapides, les résistances ou les obstacles d'aval peuvent transformer l'excès d'énergie cinétique en énergie potentielle, phénomène accompagné d'ailleurs de pertes notables d'énergie. Ces phénomènes sont régis par le principe des quantités de mouvement.

Dans les deux cas, il est d'ailleurs difficile en général de déterminer par les méthodes de l'hydraulique ce qui se passe dans l'étendue limitée où le mouvement est très varié, surtout s'il y a des phénomènes très prononcés d'agitation de la surface libre : rouleaux, vagues déferlantes, projections d'eau. Dans certains cas, si l'écoulement à surface libre est lisse, comme par dessus un déversoir, on peut, par des méthodes approximatives, tracer les lignes d'écoulement dans la zone variée. Mais en général, on se borne à établir les conditions d'écoulement en amont et en aval de la zone variée, dans la section jusqu'à laquelle l'écoulement reste à filets sensiblement parallèles et dans la section à partir de laquelle l'écoulement redevient à filets sensiblement parallèles. D'une manière géné-

rable, si les pertes de charges sont négligeables, on a recours à la constance de la fonction \mathcal{E} (théorème de Bernoulli). Si au contraire les pertes de charge sont élevées, on a recours à la constance de la fonction \mathcal{M} (théorème d'Euler).

Enfin, on observera que dans les régions de mouvement varié, la hauteur d'eau passe fréquemment par H , c'est-à-dire par une valeur minimum de \mathcal{E} par rapport à h dans l'écoulement à filets parallèles. Cependant, cela ne change rien au fait que la ligne d'énergie reste en pente, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial E}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial s} - i < 0 \quad (\text{ou} \quad \frac{\Delta E}{\Delta s} < 0 \quad \text{s'il y a une}$$

perte de charge locale).

2.- RESSAUT SUPERFICIEL DANS UN LIT PRISMATIQUE

L'étude des lignes d'eau du mouvement permanent graduellement varié montre que certaines formes peuvent s'incurver jusqu'à présenter une tangente verticale. Il est vrai que les axes possèdent dans ces conditions des courbures incompatibles avec l'hypothèse des filets parallèles, ce qui fait que leurs propriétés géométriques établies d'après cette hypothèse deviennent illusoire dans la zone des fortes courbures.

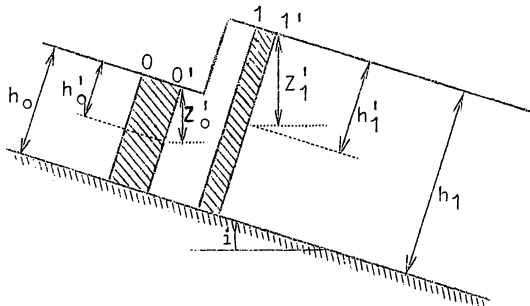


Fig. 67.

Néanmoins, elles attirent l'attention sur la possibilité de dénivellations brusques dans un canal même prismatique, que l'on appelle ressauts superficiels. Ils consistent en une surélévation brusque de l'aval par rapport à l'amont. Dans les considérations théoriques ci-après, nous supposons le lit prismatique.

Considérons un ressaut superficiel idéal se produisant dans un lit de pente i . Soient deux sections 0 et 1 très voisines du ressaut, se déplaçant en $0'$ et $1'$ pendant le temps dt .

Appliquons le théorème des quantités de mouvement projetées sur le fond du lit. Nous admettrons que la composante du poids équilibre les frottements résistants, nous n'envisagerons ni l'une ni les autres. L'action de la pression atmosphérique, qui s'exerce de toutes parts, est nulle globalement. Enfin, il est inutile de s'occuper de la partie commune $O'1'$ aux deux masses liquides $O1$ et $O'1'$. On a vu au chapitre X, paragraphe 2, les discordances auxquelles ce théorème donne lieu en raison de la variation des vitesses dans une section. On se référera donc à une vitesse uniforme moyenne u . Dès lors

$$(\gamma_e \cdot \omega_1 \cdot z'_1 - \gamma_e \cdot \omega_0 \cdot z'_0) \cdot dt = \rho_e \cdot (\omega_0 \cdot u_0^2 - \omega_1 \cdot u_1^2) \cdot dt \quad (101)$$

Comme

$$\omega_0 \cdot u_0 = \omega_1 \cdot u_1 = Q,$$

on a
$$\frac{1}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega_0} + \omega_0 \cdot z_0' = \frac{1}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega_1} + \omega_1 \cdot z_1'$$

Mais
$$z_0' = h_0 \cdot \sqrt{1 - i^2} \quad \text{et} \quad z_1' = h_1 \cdot \sqrt{1 - i^2}.$$

Comme, d'après le chapitre X, paragraphe 3

$$M = \frac{1}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega} + \omega \cdot h' \cdot \sqrt{1 - i^2},$$

on a donc
$$M_0 = M_1 \tag{102}$$

La fonction M , appelée moment, a été définie précédemment au chapitre X, paragraphe 3, ainsi que ses propriétés. On y a aussi défini la fonction ξ déterminant la ligne d'énergie ou ligne de charge, ainsi que ses propriétés.

$$\xi = \frac{u^2}{2g} + h \cdot \sqrt{1 - i^2} = \frac{Q^2}{2g \cdot \omega^2} + h \cdot \sqrt{1 - i^2}$$

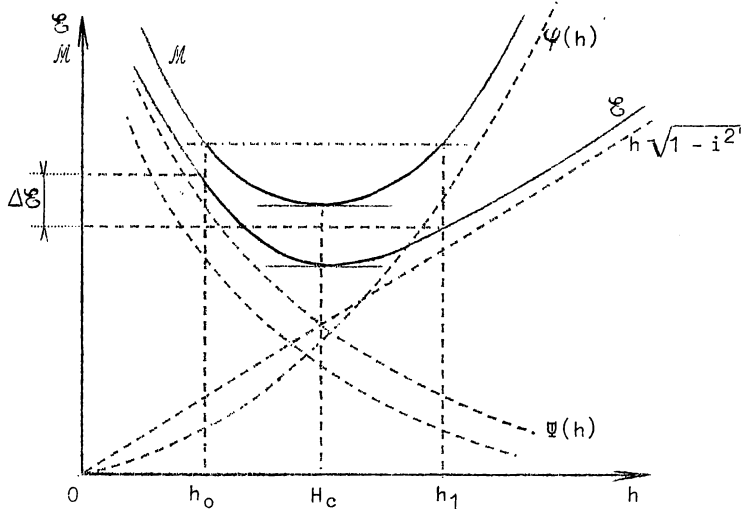


Fig. 68.

La figure 68 reproduit la représentation, en fonction de h , des deux fonctions ξ et M et résume leurs propriétés principales, notamment que les deux fonctions présentent un minimum pour la valeur $h = H_c$, appelée hauteur critique. Elle a été définie et discutée au chapitre X, paragraphe 3. On peut appeler le diagramme de la figure 68 le diagramme de Bélanger-Bresse.

Par la considération de ce diagramme, la possibilité du ressaut superficiel et sa solution s'établissent comme suit. A toute valeur $h_0 < H_c$

correspond une valeur $h_1 > H_c$ satisfaisant à l'équation du ressaut $M_0 = M_1$.

Les hauteurs h_0 et h_1 conjuguées correspondent aux points d'intersection de la courbe M avec une horizontale. Si $h > H_c$, il n'y a plus de ressaut possible.

La hauteur critique H_c et la vitesse critique u_c constituent donc une séparation entre deux régimes bien distincts. Lorsque $u > u_c$, on a appelé l'écoulement rapide (terme préférable à torrentiel, qui correspond à la pente); le ressaut peut se former.

Lorsque $u < u_c$, l'écoulement est lent (terme préférable à tranquille); le ressaut est impossible.

Les deux modes d'écoulement sont donc bien distincts. Ils ne peuvent notamment satisfaire à la similitude hydrodynamique, même approximative.

A la condition $h_0 < H_c$ correspond $u_0 > u_c$ et

$$u_c^2 = \sqrt{1 - i^2} \cdot g \cdot \frac{\omega_c}{l_c} \quad \text{ou} \quad u_c = \sim \sqrt{g \cdot H_{mc}} \quad (H_{mc} = \frac{\omega_c}{l_c})$$

On voit, d'après l'allure des courbes \mathcal{M} et \mathcal{E} , que si $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1$, on a $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_0$. En d'autres termes, le ressaut s'accompagne d'une perte d'énergie

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{Q^2}{2g} \cdot \left[\frac{1}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_1^2} \right] - \sqrt{1 - i^2} \cdot (h_1 - h_0) \quad (102 \text{ bis})$$

Il y a donc une perte d'énergie cinétique, partiellement compensée par l'accroissement d'énergie potentielle due au ressaut. L'énergie perdue est dissipée en tourbillons, agitation, etc...

L'équation (101) peut aussi s'écrire :

$$\omega_1 \cdot z_1' - \omega_0 \cdot z_0' = \frac{1}{g} \cdot \omega_1 \cdot u_1 \cdot (u_0 - u_1),$$

$$\text{d'où} \quad \frac{u_0^2}{2g} + \frac{\omega_0}{\omega_1} \cdot h_0' \cdot \sqrt{1 - i^2} = \frac{u_1^2}{2g} + h_1' \cdot \sqrt{1 - i^2} + \frac{1}{2g} \cdot (u_0 - u_1)^2$$

$$\mathcal{E}_0 - (h_0 - \frac{\omega_0}{\omega_1} \cdot h_0') \cdot \sqrt{1 - i^2} = \mathcal{E}_1 - (h_1 - h_1') \cdot \sqrt{1 - i^2} + \frac{1}{2g} \cdot (u_0 - u_1)^2$$

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 = \frac{1}{2g} \cdot (u_0 - u_1)^2 - (h_1 - h_0 + h_0' - h_1') \cdot \sqrt{1 - i^2} \quad (103)$$

Le deuxième terme est négatif; la perte de charge est donc moindre dans le ressaut à l'air libre que celle donnée par la formule de Bélanger dans les conduites forcées présentant un accroissement brusque de section.

La ligne d'énergie présente donc toujours une chute (abaissement brusque) au droit d'un ressaut superficiel (élévation brusque). L'inverse est évidemment impossible. Il n'y a pas de ressaut négatif.

3.- RESSAUT DANS UN LIT PRISMATIQUE A SECTION RECTANGULAIRE

Dans ce cas, on écrira par unité de largeur de courant, en posant $q = \frac{Q}{l}$, pourvu que le lit soit assez large,

$$\mathcal{M} = \frac{q^2}{g \cdot h} + \frac{h^2}{2} \cdot \sqrt{1 - i^2}$$

$$\mathcal{E} = \frac{q^2}{2g \cdot h^2} + h \cdot \sqrt{1 - i^2}$$

$$H_c = \sim \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad \text{et} \quad u_c = \sim \sqrt{g \cdot H_c}$$

L'équation du ressaut s'écrit

$$\frac{q^2}{g} \cdot \left(\frac{1}{h_0} - \frac{1}{h_1} \right) = \frac{h_1^2 - h_0^2}{2}, \quad (104)$$

$$h_0^2 \cdot (\mathfrak{F}_0^2 + 0,5) = h_1^2 \cdot (\mathfrak{F}_1^2 + 0,5)$$

ou
$$h_0 \cdot h_1 \cdot (h_0 + h_1) = \frac{2 q^2}{g} \quad (104 \text{ bis}),$$

équation du 2^e degré en h_0 ou h_1 .

On a donc
$$h_0 \cdot h_1^2 + h_0^2 \cdot h_1 = \frac{2 q^2}{g} = 0$$

d'où
$$\left. \begin{aligned} h_1 &= -\frac{h_0}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{h^2 + \frac{8 h_0 \cdot q^2}{g}} \\ \frac{h_1}{h_0} &= \sqrt{0,25 + 2 \mathfrak{F}_0^2} - 0,5 \end{aligned} \right\} \quad (104 \text{ ter}).$$

Si h_1 est assez grand par rapport à h_0 , on peut écrire

$$h_1 = q \cdot \sqrt{\frac{2 h_0}{g}} - 0,5 h_0 \quad \left. \vphantom{h_1} \right\}$$

(104 quater)

ou
$$\frac{h_1}{h_0} = q \cdot \sqrt{\frac{2}{g \cdot h_0}} - 0,5 = \mathfrak{F}_0 \cdot \sqrt{2} - 0,5$$

La perte d'énergie due au ressaut est

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{q^2}{2 g} \cdot \left(\frac{1}{h_0^2} - \frac{1}{h_1^2} \right) - (h_1 - h_0) \cdot \sqrt{1 - i^2} \quad (105)$$

ou encore, en se référant à la relation (103)

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{(u_0 - u_1)^2}{2 g} - \frac{(h_1 - h_0)^2}{2 h_1} \cdot \sqrt{1 - i^2} \quad (105 \text{ bis})$$

On a aussi les relations :

$$\frac{h_1 - h_0}{h_0} = \frac{\Delta h}{h_0} = \sqrt{0,25 + 2 \mathfrak{F}_0^2} - 1,50$$

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta h} = \frac{(\sqrt{0,25 + 2 \mathfrak{F}_0^2} + 0,5)^3}{8 \mathfrak{F}_0^2},$$

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{h_0} = \frac{(\sqrt{0,25 + 2 \mathfrak{F}_0^2} + 0,5)^3 \cdot (\sqrt{0,25 + 2 \mathfrak{F}_0^2} - 1,50)}{8 \mathfrak{F}_0^2}$$

4.- EMPLACEMENTS DES RESSAITS - AXES COMPLEXES

L'existence d'un ressaut implique un axe complexe comportant une branche d'amont, située en-dessous de la droite H_c et une branche d'aval, située au-dessus. Supposons que, pour un débit donné, ces deux branches soient connues. Pour trouver l'emplacement du ressaut, on trace la courbe conjuguée des ressauts, courbe conjuguée de la branche d'amont de l'axe

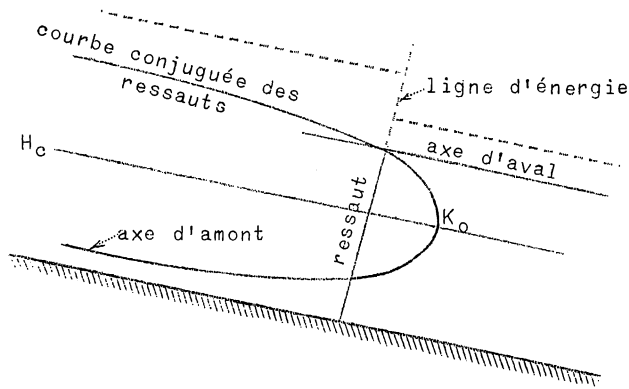


Fig. 69.

d'amont s'abaisse ou vice-versa. L'axe d'amont et sa courbe conjuguée des ressauts se coupent sur la droite H_c . Si l'axe d'aval coupe la courbe des ressauts, ce point de rencontre K détermine l'emplacement et la hauteur du ressaut. (fig. 69)

Il résulte plusieurs conséquences de cette construction. Tout d'abord, si les circonstances d'aval se modifient légèrement, l'axe d'aval se déplace sans changer de forme, tandis que l'axe d'amont est inchangé. Mais le point d'intersection K se déplace, ainsi que le ressaut. Donc, un ressaut empêche la propagation vers l'amont des perturbations d'aval, tant que le ressaut se produit dans l'étendue libre du lit bien entendu. C'est la raison pour laquelle un ressaut rend le débit indépendant des circonstances d'aval, à condition que le ressaut soit suffisamment éloigné du dispositif d'alimentation. C'est aussi la raison pour laquelle un axe susceptible de se relever en ressaut, c'est-à-dire situé sous la droite H_c , ne peut être un axe d'aval.

Il n'y a qu'un nombre restreint de combinaisons d'axes composés.

En cas de faible pente

$$\frac{i}{\sqrt{1 - i^2}} < \frac{\chi_u \cdot g}{C_u^2 \cdot \alpha \cdot l_u}$$

l'axe d'amont doit être nécessairement de forme A_3 et l'axe d'aval peut être des formes A_1 , A_u et A_2 , selon les résistances d'aval. Si le lit est libre en aval, le ressaut correspond à A_u . Mais le ressaut peut même se produire en cas d'abaissement, tant que le lit s'étend en aval du point K_0 , qui constitue la limite aval d'emplacement du ressaut (fig. 70).

Quant à la limite amont, elle ne peut pratiquement remonter jusqu'au point où l'axe A_3 rencontre le lit, mais elle est donnée par le point K_1 de la courbe conjuguée des ressauts situé dans la section initiale d'amont. Lorsque les résistances d'aval s'élèvent de telle sorte que K

par rapport à la droite H_c , c'est-à-dire ayant dans chaque section la hauteur h_1 du ressaut correspondant à la hauteur h_0 de l'axe d'amont dans la même section.

On trace cette courbe des ressauts points par points, d'après l'équation du ressaut ou la courbe de la fonction M du paragraphe précédent. Cette courbe conjuguée des ressauts a nécessairement une croissance des ordonnées inverse de celle de l'axe d'amont; elle s'élève lorsque l'axe

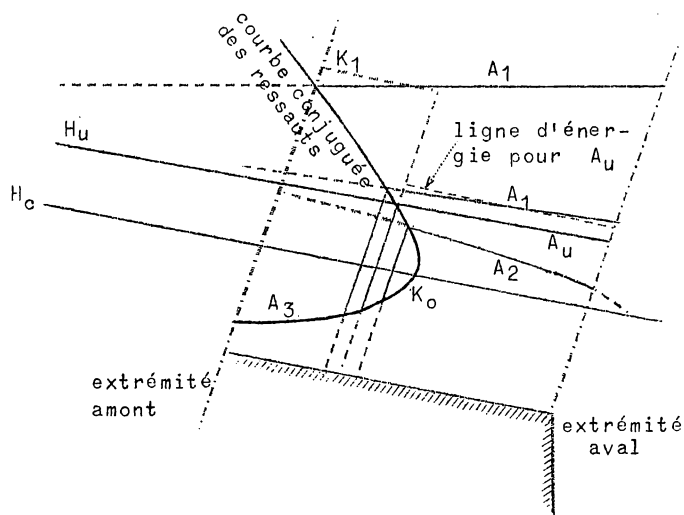


Fig. 70.

dépasse K_1 vers l'amont, le ressaut disparaît et l'on a un axe simple d'aval, mais à débit dépendant, car l'axe influence maintenant directement le dispositif d'alimentation. Si un tel axe se produisait, on ne pourrait le construire que par tâtonnements, car on ne connaît que l'origine d'aval et le débit est inconnu. Le ressaut est d'autant plus rapproché de l'extrémité d'amont que la hauteur h_0 y est plus voisine de H_c ou que les résistances d'aval sont plus grandes, sans dépasser la limite correspondant à K_1 .

En conclusion, le ressaut se produit aisément lorsque $i < i_c$, pente critique, $h < H_c$, profondeur critique ou $u > u_c$ vitesse critique. Si l'extrémité aval est en amont de K_0 et si le lit est libre, le ressaut disparaît. On a un axe simple mais strictement limité en longueur vers l'aval.

Le ressaut se produit moins aisément dans un lit à forte pente, $i > i_c$

ou

$$\frac{i}{\sqrt{1 - i^2}} > \frac{\chi_u \cdot g}{C_u^2 \cdot \alpha \cdot l_u} .$$

Il faut un axe d'aval B_1 , situé au-dessus de la droite H_c ; il faut donc toujours des résistances suffisantes en aval pour provoquer un exhaussement important. L'axe d'amont peut être de la forme B_3 ou B_2 (fig. 71 et 72).

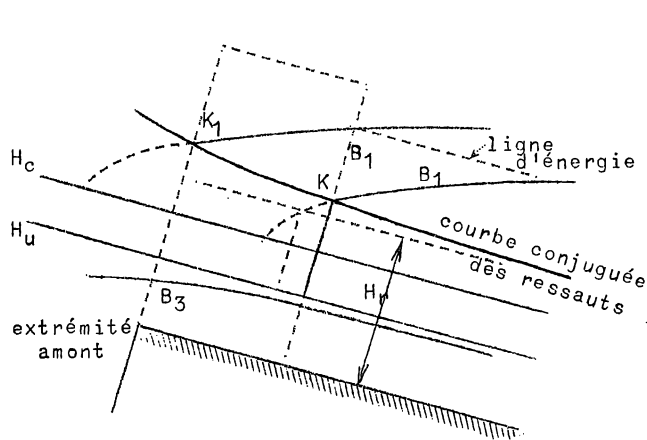


Fig. 71.

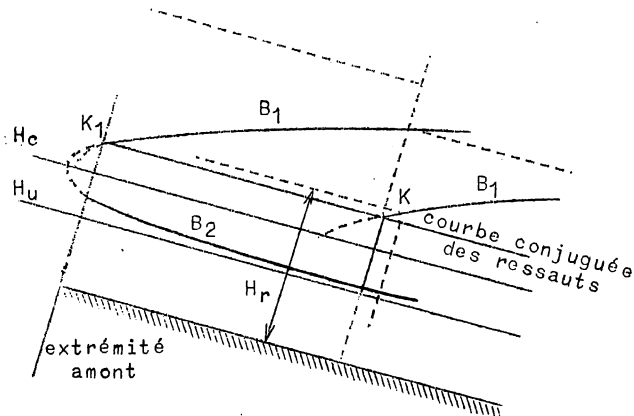


Fig. 72.

On remarque qu'il n'y a pas de limite aval K_0 de l'emplacement du ressaut, ce qui provient de ce que les axes E_3 et B_2 peuvent être des axes simples d'amont s'il n'y a pas de résistances supplémentaires provoquant la formation du ressaut. Par contre, il y a une limite pratique vers l'amont, constituée encore par la section d'alimentation. Si les résistances d'aval sont telles que le point K dépasse K_1 vers l'amont, on a un axe simple, mais à débit dépendant, dont l'existence dépend de conditions très particulières, notamment un très fort exhaussement initial et une longueur strictement limitée vers l'amont. Un tel axe se calcule également par tâtonnements.

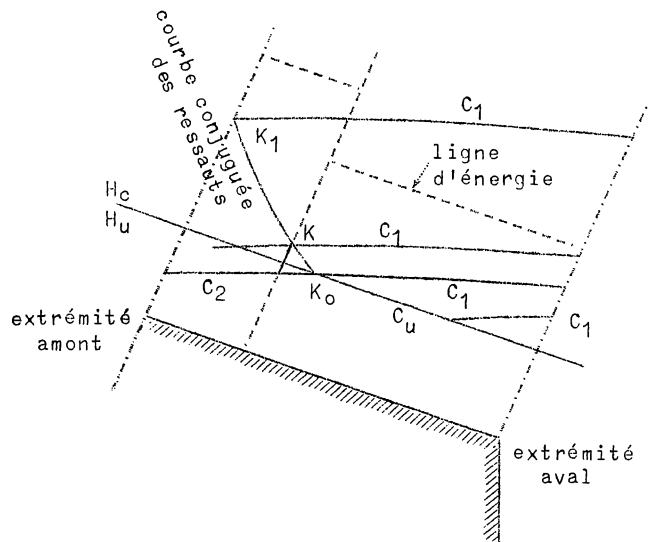


Fig. 73.

Dans le cas de $i = i_p$, les raisonnements sont sensiblement les mêmes, mais il y a une limite aval K_0 . (fig. 73).

Entre les limites K_0 et K_1 , il y a axe composé $C_2 + C_1$ mais il peut y avoir axe simple C_2 ou axe simple C_1 à débit dépendant, selon les résistances d'aval et l'étendue du lit. Dans un cas très particulier, d'ailleurs tout théorique et fortuit.

Il peut même y avoir un axe continu $C_2 + C_1$ lorsque le point K est en K_0 . Si les résistances d'aval sont encore plus faibles, il peut y avoir un axe $C_2 + C_u + C_1$, mais tous ces cas sont purement théoriques et transitoires.

On peut conclure que la formation du ressaut est plus difficile dans les lits à forte pente que dans les lits à faible pente. Il faut que non seulement soient réalisées les conditions propres aux ressauts en général $h_0 < H_c$ et $h_1 > H_c$, mais encore que l'exhaussement initial d'aval soit supérieur à une limite H_2 qui est la hauteur du ressaut h_1 conjuguée à $h_0 = H_u$. On a donc

$$M_c = M_u,$$

ce qui définit $H_2 > H_u$ et aussi $> H_c$, alors que $H_u < H_c$ (fig. 71 et 72).

On se rend compte que le ressaut se produit facilement dans des lits horizontaux ou en contrepente [voir chapitre X, paragraphe 7. D) et E)].

5.- FORMES REELLES DES RESSAUTS

Les ressauts n'affectent pas la forme d'une élévation discontinue quasi verticale, comme il est considéré théoriquement dans les paragraphes précédents; il a une certaine longueur L .

Pour des valeurs de \mathfrak{F}_0^2 comprises entre 4 et 80, $L = \sim 5$ à $4,5 h_1$. Pour \mathfrak{F}_0^2 inférieur à une valeur de l'ordre de 2 à 3, le ressaut n'est pas franc, mais ondulé.

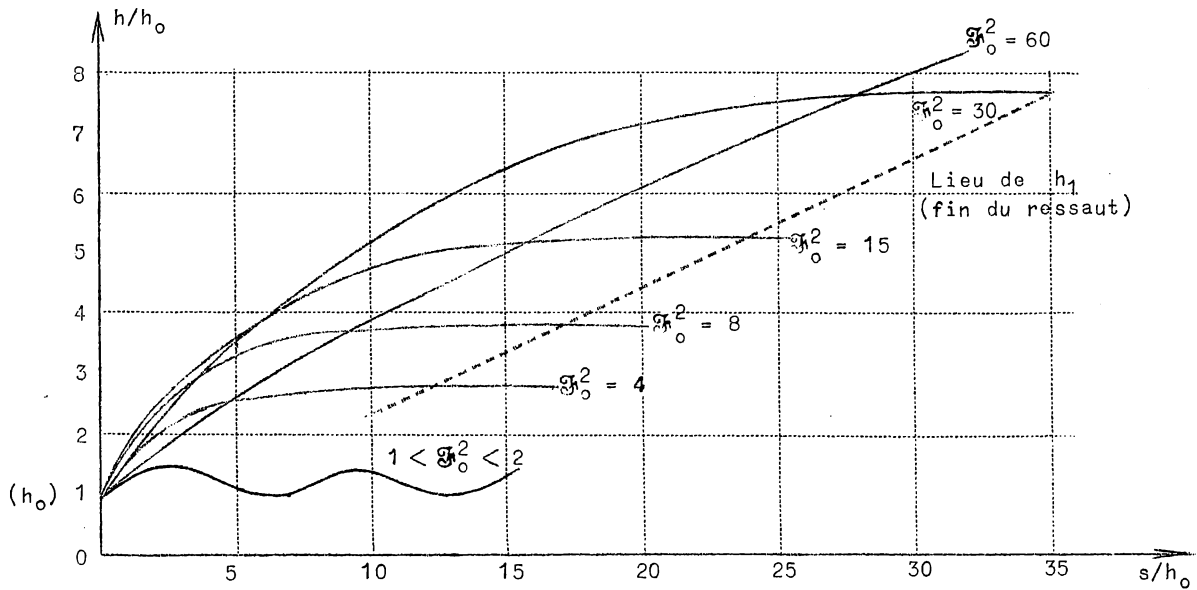


Fig. 74.

La figure 74 représente les allures des ressauts pour diverses valeurs de Fr_0^2 dans un lit prismatique, à section rectangulaire large. Cette allure est pratiquement rectiligne. Le rapport $\frac{h_1 - h_0}{h_0}$ aussi varie peu, entre 0,40 et 0,50, pour des valeurs de Fr_0^2 comprises entre

3 et 30. La longueur L non nulle du ressaut n'a qu'un effet négligeable. Les résultats d'expériences faites dans des canaux expérimentaux rectangulaires sont en assez bon accord avec les formules théoriques. En général cependant les valeurs observées de h_1 sont un peu inférieures aux valeurs calculées. Cela provient notamment de l'inégale répartition des vitesses et du frot-

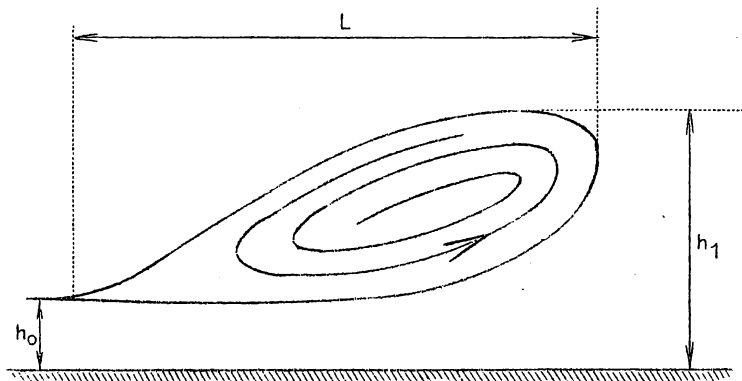


Fig. 75.

ttement des parois, les expériences étant faites généralement dans des canaux horizontaux ou de pente négligeable. Toutefois, la perte importante d'énergie se fait dans un rouleau (tourbillon) couvrant le pied du ressaut (fig. 75).

Du fait des pertes d'énergie supplémentaires, les résultats d'expérience satisfont assez bien à la formule par défaut (104 quator) :

$$\frac{h_1}{h_0} = \mathfrak{F}_0 \cdot \sqrt{2} - 0,5$$

La formule n'est valable que pour $\mathfrak{F}_0 > 1$ ($h_0 < H_c$) et surtout pour des valeurs de $\mathfrak{F}_0 > 4$. Pour $1 < \mathfrak{F}_0 < 2$, le ressaut est ondulé. Pour $2 < \mathfrak{F}_0 < 4$, on aurait plutôt

$$\frac{h_1}{h_0} = \mathfrak{F}_0 \cdot \sqrt{2} - 0,45.$$

A la limite $\mathfrak{F}_0 \leq 2$ du ressaut franc correspond $h_1 \leq 2,37 h_0$ et $h_1 \leq \sim 1,50 H_c$; pour les valeurs inférieures, la perte de charge $\Delta \mathcal{E}$ est très faible.

Il est à remarquer que pour l'établissement de l'équation 102, on a admis que la composante du poids équilibre les frottements. En fait, il faudrait écrire

$$M_1 - M_0 = \frac{P_i - F}{\gamma_e}$$

où P représente le poids du volume d'eau compris entre les sections 0 et 1, α est la pente du fond et F la force de frottement entre les sections 0 et 1.

Si la hauteur moyenne du ressaut est inférieure à H_u , $\frac{P_i - F}{\gamma_e} < 0$ et $M_0 > M_1$; c'est l'inverse si la hauteur moyenne du ressaut est supérieure à H_u , alors $M_0 < M_1$. Ceci peut influencer sur la hauteur réelle du ressaut et dépend notamment de la pente du fond en rapport avec la pente de passage, c'est-à-dire aussi de la rugosité.

6.- RESSAUTS DANS LES LITS A FORTE INCLINAISON

Ordinairement, les pentes sont assez faibles ($i < 0,01$) et n'influencent guère les ressauts. Nous avons admis (paragraphe 2) que leur effet compense la résistance des parois. Celle-ci est faible sur la longueur du ressaut. Aussi si les pentes sont assez élevées, néglige-t-on les frottements en faisant intervenir la composante motrice du poids. L'équation (101) deviendra alors :

$$[\gamma_e \cdot (\omega_1 \cdot z_1^* - \omega_0 \cdot z_0^*) - \gamma_e \cdot i \cdot V_{0,1}] \cdot dt = \gamma_e \cdot (\omega_0 \cdot u_0^2 - \omega_1 \cdot u_1^2) \cdot dt$$

d'où

$$M_0 = M_1 - V_{0,1} \cdot i$$

$V_{0,1}$ représente le volume du ressaut entre les sections 0 et 1, distantes de la longueur L du ressaut. Pour une section rectangulaire large, on peut écrire

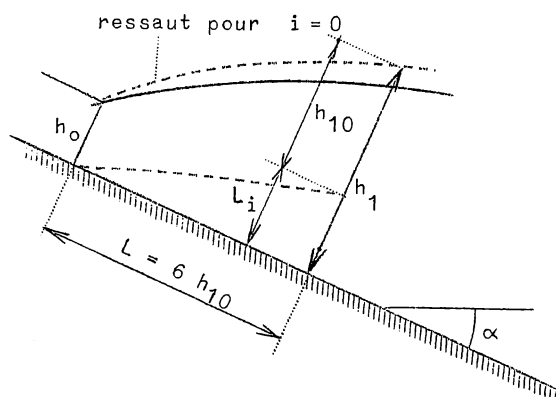


Fig. 76.

$$\frac{h_1^2 - h_0^2}{2} - S_{0,1} \cdot i = \frac{q^2}{g} \cdot \left(\frac{1}{h_0} - \frac{1}{h_1} \right)$$

$S_{0,1}$ représente la surface comprise entre les sections 0 et 1 (fig. 76).

Selon Bakhmeteff et Matzke, on aurait

$$L = 6 h_{0,1} \text{ et } \frac{h_1}{h_{1,0}} = 1 + \sim 5 i$$

d'où

$$h_1 = \sim h_{10} + L \cdot i - h_{10} \cdot i = \sim h_{10} (1 - i) + L \cdot i.$$

Ces formules ne conviendraient toutefois que pour $i \leq 0,07$ à $0,10$.

En désignant par α l'angle d'inclinaison sur l'horizontale du fond d'un canal à

section rectangulaire large, Kindsvater a généralisé l'équation (104) comme suit :

$$\frac{h_1^2}{2} - \frac{h_0^2}{2 \cos^2 \alpha} - \Phi \cdot \left[h_1^2 - \frac{h_0^2}{\cos^2 \alpha} \right] \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{u_0^2 \cdot h_0 \cdot \cos \alpha}{g \cdot h_1} \cdot \left(h_1 - \frac{h_0}{\cos \alpha} \right)$$

ou

$$\left(h_1 + \frac{h_0}{\cos \alpha} \right) - 2 \Phi \cdot \left(h_1 + \frac{h_0}{\cos \alpha} \right) \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 u_0^2 \cdot h_0 \cdot \cos \alpha}{g \cdot h_1}$$

d'où

$$\frac{h_1}{h_0} = \frac{\sqrt{\frac{2 \Phi^2 \cdot \cos^3 \alpha}{1 - 2 \Phi \cdot \operatorname{tg} \alpha} + 0,25} - 0,5}{\cos \alpha} \quad (106)$$

D'après Kindsvater

$$\Phi = \frac{\mathcal{E}_{\text{moy } 01} \cdot L}{h_1^2 - \frac{h_0^2}{\cos^2 \alpha}}$$

$\mathcal{E}_{\text{moy } 01}$ étant l'énergie moyenne du courant sur la longueur $\frac{L}{\cos \alpha}$. Pour $i = \operatorname{tg} \alpha = 0$, on retrouve l'expression (104 ter). D'après des expériences de Kindsvater, on aurait

$$\Phi = 2,58 - 0,021 \mathcal{E}_0^2 \quad \text{pour } \operatorname{tg} \alpha = 0,166.$$

Pour $i = \operatorname{tg} \alpha = 0,32$, on aurait $\Phi = 1,49 - 0,0034 \mathcal{E}_0^2$

D'une manière générale, $\Phi = f(i, \mathcal{E}_0^2)$

Ces questions sont en fait d'une nature telle qu'il est utile de les étudier expérimentalement.

7.- RESSAUTS INCOMPLETS

Au paragraphe 9 du chapitre X et au paragraphe 4, on a établi les conditions aux limites définissant les axes simples d'amont et d'aval et les axes complexes comportant un ressaut parfait.

Les axes simples d'aval correspondent toujours à un écoulement lent et ne peuvent donner lieu à un ressaut dans l'étendue du canal. Il a été indiqué au paragraphe 9 du chapitre X que l'aboutissement en aval dans un réservoir indéfini à niveau constant exige un exhaussement à l'entrée dans le réservoir pour la dissipation de l'énergie cinétique. Cela constitue une sorte de ressaut dans le réservoir.

Dans le cas d'un axe A_3 (fig. 70), lorsque l'origine de l'axe est en amont de K_0 , le ressaut parfait peut se trouver à la limite dans la section d'origine d'aval lorsque le point d'origine se trouve sur la courbe conjuguée des ressauts ($h = h_1$). Il se produira un ressaut incomplet lorsque le point d'origine est compris entre l'axe A_3 et la courbe conjuguée des ressauts (fig. 77) ($h_0 < h < h_1$). Dans ce cas, la perte d'énergie est plus grande que dans le ressaut parfait et elle sera maximum si le point d'origine est sur H_0 . Ce point d'origine peut être déterminé par un dispositif de réglage comme indiqué au paragraphe 9 du chapitre X, à condition que ce dispositif n'influe pas sur les conditions d'alimentation d'amont. L'écoulement étant rapide, la hauteur d'origine sera fortement influencée par la vitesse. En raison de la faible longueur d'un axe A_3 , il semble que la résolution du problème ne peut être attendue que de l'expérimentation.

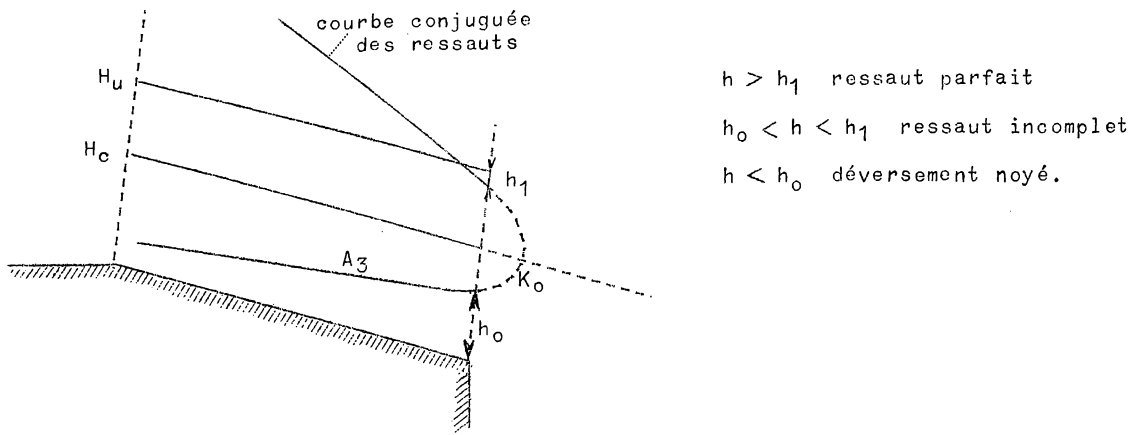


Fig. 77.

Dans le cas où le canal déboucherait dans un réservoir indéfini à niveau constant, ce niveau doit être supérieur au niveau d'origine en raison de la dissipation de l'énergie cinétique. Dans ce cas, ce niveau serait minimum pour $h = H_c$ et correspondrait à $3/2 H_c$. Si le niveau était plus bas, le phénomène serait plus compliqué encore et tendrait finalement vers le déversement libre.

Dans le cas de forte pente, des axes simples d'amont B_2 , B_u et B_3 peuvent présenter de même un ressaut parfait dans la section origine d'aval si l'on y atteint la hauteur h_1 conjuguée de h_0 . De nouveau, pour $h_0 < h < h_1$, on aura un ressaut incomplet avec dissipation maximum d'énergie pour $h = H_c$ si le ressaut est provoqué par un dispositif de réglage

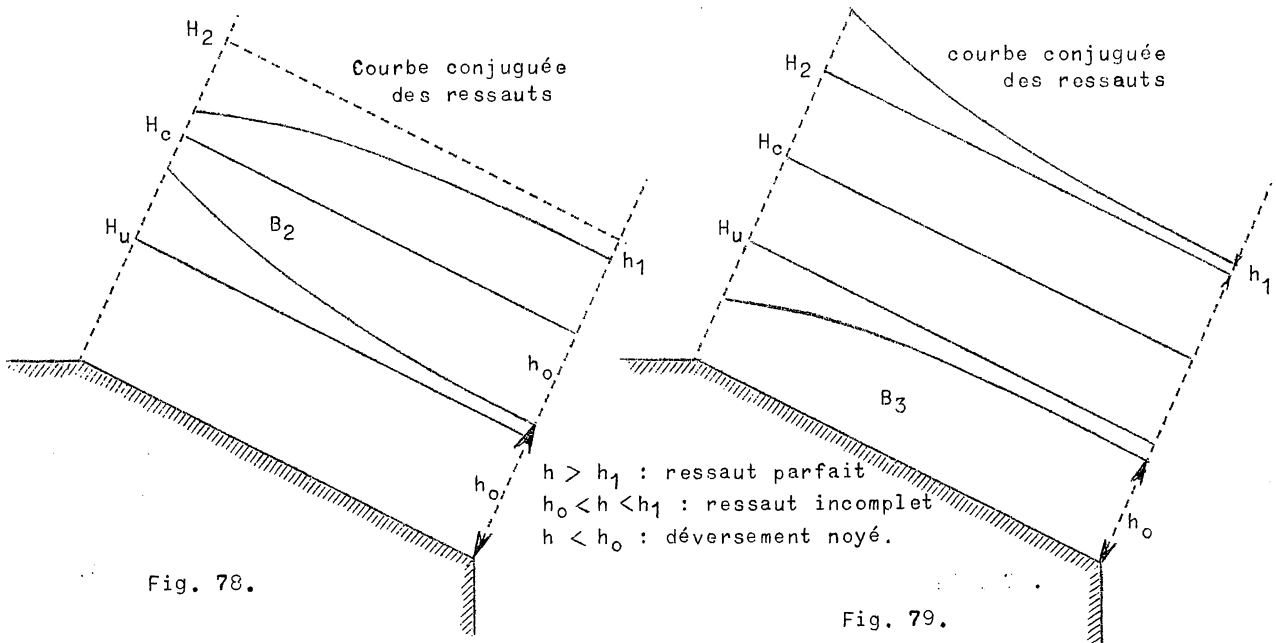


Fig. 78.

Fig. 79.

ou niveau minimum de l'eau dans un réservoir indéfini à niveau constant. De nouveau, pour $h < h_0$, on passe au déversement partiel. Les figures 78 et 79 sont relatives aux axes B_2 et B_3 .

L'exposé de ce paragraphe a pour but d'établir la possibilité, la signification et l'allure ainsi que l'évolution des phénomènes. Ceux-ci sont délicats à traiter par le calcul et relèvent plutôt de l'expérimentation

8.- VARIATION RAPIDE DU NIVEAU DU FOND

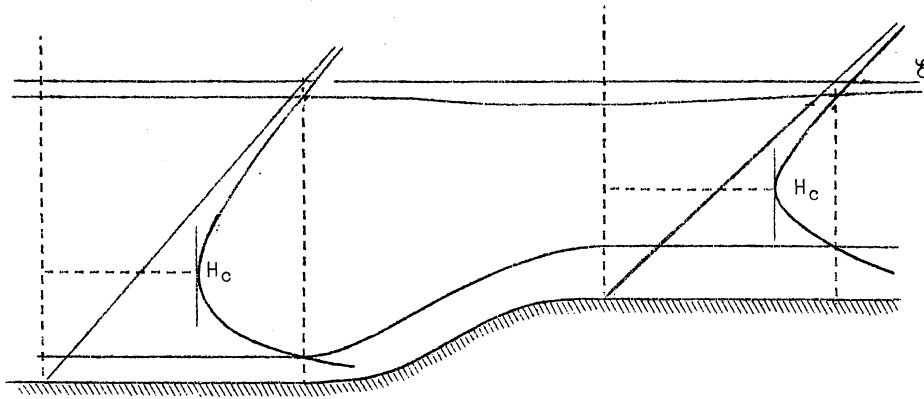


Fig. 80.

Considérons un canal rectangulaire de grande largeur subissant une élévation rapide du fond de l'amont vers l'aval. A distance suffisante en amont et en aval de la zone à filets courbes, traçons les diagrammes de \mathcal{E} (ou $\frac{\mathcal{E}}{H_c}$) en fonction de h (ou de $\frac{h}{H_c}$) et la ligne d'énergie \mathcal{E} (fig. 80). Nous ad-

mettons que la variation du mouvement se produise sans agitation et sans perte de charge appréciable, l'écoulement étant libre. La ligne d'énergie \mathcal{E} est alors une horizontale ou, plus exactement, une parallèle au fond du lit.

On voit que lorsque l'écoulement est rapide, il se produit une augmentation de profondeur et l'inverse s'il est lent. Il est à remarquer que si une perte de charge appréciable se produisait, se traduisant par un abaissement de la ligne d'énergie, le phénomène serait accentué. Il est à remarquer aussi que la solution ne s'applique plus si, par suite du relèvement du fond, h devenant inférieur à $\mathcal{E}_c = \frac{3}{2} H_c$, ce qui est impossible. En d'autres termes, les profondeurs d'aval et d'amont doivent être suffisamment inférieures ou supérieures à H_c .

Si il y avait un approfondissement assez rapide du fond, les variations inverses se produi-

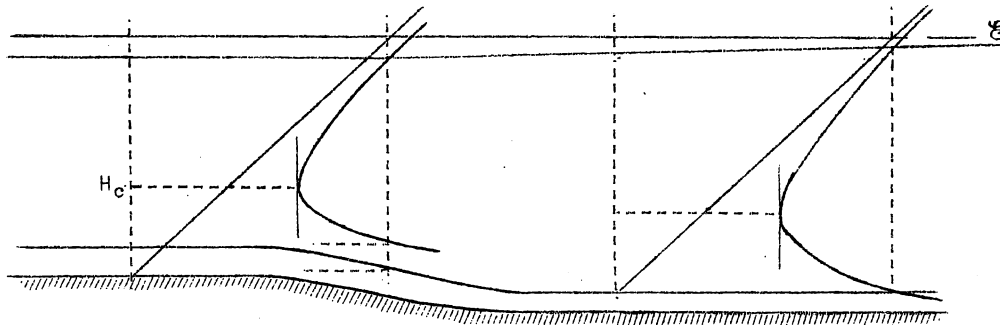


Fig. 81.

duiraient; le courant deviendrait plus rapide ou plus lent. (fig. 81).

Ces solutions ne sont applicables que si les dénivellations ne sont pas trop grandes ni abruptes et n'entraînent pas de perte de charge appréciable, l'écoulement étant libre, sinon il peut se produire des ressauts, (voir plus loin).

9.- CHANGEMENTS BRUSQUES DE PENTE

Supposons que de l'amont vers l'aval, la pente passe d'une valeur inférieure à la valeur critique à une valeur supérieure. Supposons encore un canal rectangulaire assez large et un écoulement libre à l'aval. La profondeur critique est sensiblement la même en amont et en aval, cependant qu'en amont $H_u > H_c$ et en aval $H_u < H_c$. Puisque l'écoulement est libre en aval, on y a $h \equiv H_u$. En amont aussi, $h \equiv H_u$. Donc la profondeur doit passer par H_c au changement de pente.

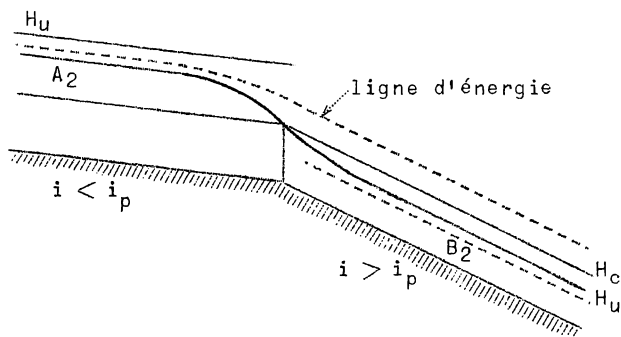


Fig. 82.

La ligne d'eau et la ligne d'énergie auront les allures indiquées à la figure 82; les axes seront du type A_2 en amont, B_2 en aval.

Si la pente d'amont est supérieure à i_p et l'inverse en aval, on aura en amont $h \equiv H_u < H_c$, cependant qu'en aval, on aura $h \equiv H_u > H_c$ en général. Ce qui produira en général un ressaut dont l'emplacement se déterminera comme il a été indiqué au paragraphe 4. (fig. 83).

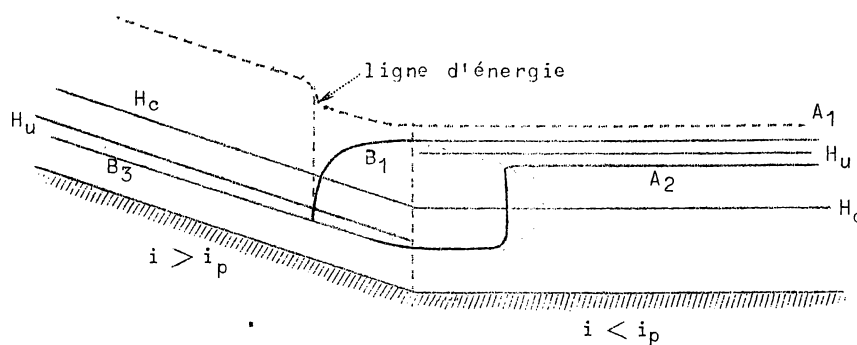


Fig. 83.

10.- CHANGEMENTS DE PENTE TRÈS IMPORTANTS AVEC FORMATION DE RESSAULTS

On suppose des sections rectangulaires de largeur constante assez grande. On envisage deux cas.

1°) Fond à très forte pente suivi d'un radier horizontal.

2°) Fond horizontal suivi d'une forte contrepente. D'après Stevens, les ressauts se produisent comme l'indiquent les figures 84 et 85.

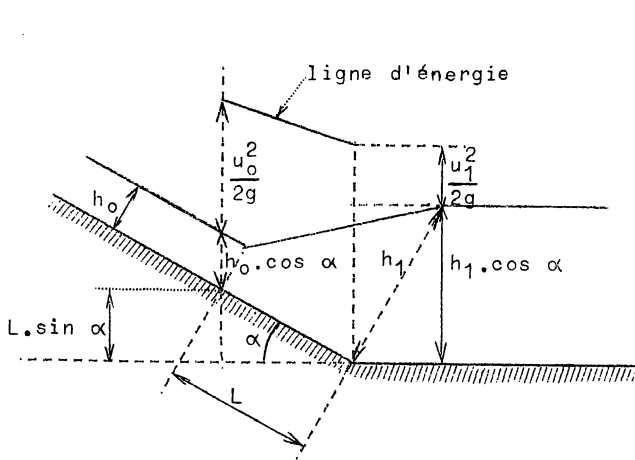


Fig. 84.

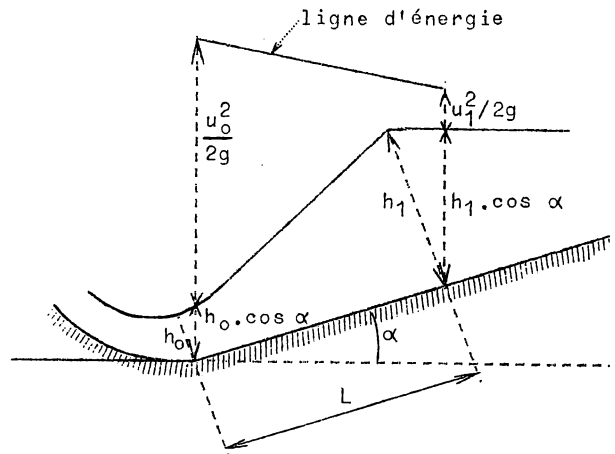


Fig. 85.

Appelons V_{01} le volume du ressaut sur la longueur L . Dans ce cas $V_{01} = S_{01} \cdot L$.
On écrit, dans le cas 1°)

$$\frac{q}{g} \cdot u_0 + \frac{h_0^2}{2} \cos \alpha + \gamma_e \cdot S_{01} \cdot \sin \alpha = \frac{q}{g} \cdot u_1 + \frac{h_1^2}{2} \cos \alpha ;$$

dans le cas 2°)

$$\frac{q}{g} \cdot u_0 + \frac{h_0^2}{2} \cos \alpha = \frac{q}{g} \cdot u_1 + \frac{h_1^2}{2} \cos \alpha + \gamma_e \cdot S_{01} \cdot \sin \alpha$$

On admet, d'après des résultats expérimentaux :

$$\frac{L}{h_0 \cos \alpha} = 9,3 \left(\frac{h_1^2}{h_0^2} \right)^{-0,185} \cdot \left(\frac{h_1}{h_0} - \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$

et

$$\gamma_e \cdot S_{01} = \frac{9,3}{\left[\frac{h_1^2}{h_0^2} \right]^{-0,185}} \cdot \left(\frac{h_1^2 - h_0^2}{2} \right)$$

Dans cette expression, il faut tenir compte de ce que γ_e est réduit par entraînement d'air. L'eau étant décélérée, la composante horizontale du poids est réduite en pente et majorée en contrepente, la composante verticale étant accrue dans les deux cas. Pour ce qui est de la variation des pressions, des mesures faites sur le fond du lit indiquent qu'elles sont pratiquement hydrostatiques. On obtient alors

$$\frac{h_1}{h_0 \cdot \cos \alpha} \cdot \left(\frac{h_1}{h_0} + 1\right) = \frac{2 \mathfrak{g}_0^2}{\cos \alpha \pm m \cdot \sin \alpha}$$

avec

$$m = \frac{9,3}{\left(\frac{\mathfrak{g}_0^2}{2}\right)^{0,185}}$$

On en déduit :

$$\frac{h_1}{h_0} = \frac{1}{2 \cos \alpha} \cdot \left(\sqrt{8 \mathfrak{g}_0^2,37} \pm 9,3 \cdot 20,185 \cdot \text{tg } \alpha + 1 - 1 \right) \quad (107)$$

Cette équation peut être comparée à celle (106) du paragraphe 6. Le signe - correspond au cas 1^o) de pente, le signe + au cas 2^o) de contrepente.

Si $i = \text{tg } \alpha = 0$, on trouve $\frac{h_1}{h_0} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{8 \mathfrak{g}_0^2 + 1} - 1)$

$$\frac{h_1}{h_0} = \sqrt{2 \mathfrak{g}_0^2 + 0,25} - 0,5,$$

ce qui est identique à la formule (104 ter).

Les ressauts se produisent assez facilement sur les lits en assez faible pente, horizontaux ou en contrepente. Mais si la pente devient forte et dépasse notablement $\text{tg } i = 0,10$, le ressaut ne se produit plus que si les valeurs de $\frac{\mathfrak{g}_0^2}{2}$ dépassent une certaine limite, d'autant plus grande que $\text{tg } i$ est plus grand. Au-delà de $\text{tg } i = 0,25$, le ressaut ne se produit plus. Ces questions aussi relèvent plutôt des études expérimentales.

11.- RESSAUTS CREES PAR UNE SAILLIE OU UNE CHUTE BRUSQUES DU RADIER

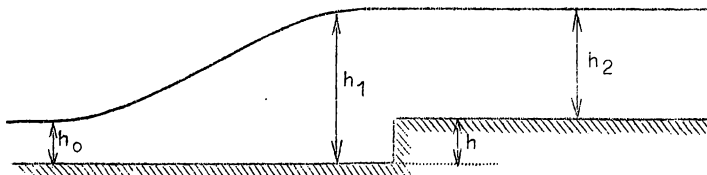


Fig. 86.

Considérons d'abord (fig. 86) une saillie brusque du radier de hauteur h , dans un lit rectangulaire de largeur assez grande et constante.

On a :

$$q = h_0 \cdot u_0 = h_1 \cdot u_1 = h_2 \cdot u_2$$

On applique à deux reprises l'équation des

quantités de mouvement

$$\frac{h_0^2 - h_1^2}{2} = \frac{q}{g} \cdot (u_1 - u_0)$$

$$\frac{h_1^2 - h_2^2}{2} - \frac{h}{2} \cdot (2 h_1 - h) = \frac{q}{g} \cdot (u_2 - u_1)$$

L'élimination de h_1, u_1 et u_2 donne

$$\left(\frac{h_2}{h_0}\right)^2 = 1 + 2 \mathfrak{g}_0^2 \cdot \left(1 - \frac{h_0}{h_2}\right) + \frac{h}{h_0} \cdot \left(\frac{h}{h_0} - \sqrt{1 + 8 \mathfrak{g}_0^2 + 1}\right) \quad (108)$$

Les résultats d'expériences sont en assez bon accord avec ces formules pourvu que $\frac{h}{h_0}$ ne soit pas très grand, l'écart est déjà assez notable pour $\frac{h}{h_0} = 4$. On peut, connaissant \mathfrak{F}_0 et $\frac{h_2}{h_0}$, ajuster $\frac{h}{h_0}$ de manière à satisfaire à l'équation. On a alors un ressaut de longueur $5(h + h_2) = L$ exactement à l'aval du seuil.

En cas de chute du radier, il peut se produire des ressauts de deux types, (fig. 87 et 88).

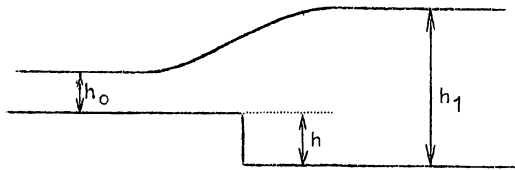


Fig. 87.

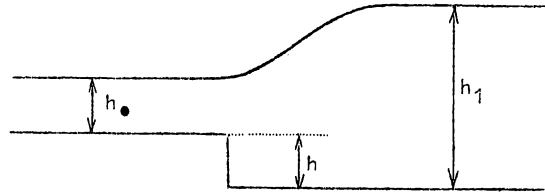


Fig. 88.

Pour une valeur donnée de $\frac{h}{h_0}$, les deux types se produisent de part et d'autre d'une valeur de \mathfrak{F}_0 , avec un ressaut ondulé de transition.

Dans le premier cas
$$\mathfrak{F}_0^2 = \frac{h_1}{2(h_1 - h_0)} \cdot \left[\left(\frac{h_1}{h_0} - \frac{h}{h_0} \right)^2 - 1 \right] \quad (109)$$

Dans le deuxième cas
$$\mathfrak{F}_0^2 = \frac{h_1}{2(h_1 - h_0)} \cdot \left[\left(\frac{h_1}{h_0} \right)^2 - \left(\frac{h}{h_0} + 1 \right)^2 \right] \quad (110)$$

Lorsque l'on fait $h = 0$ dans toutes les équations de ce paragraphe, on retrouve la formule (104 ter). La valeur de transition de \mathfrak{F}_0^2 augmente lorsque $\frac{h}{h_0}$ augmente.

12.- VARIATIONS BRUSQUES DE LARGEUR D'UN CANAL PRISMATIQUE DE SECTION

RECTANGULAIRE

Un rétrécissement brusque produit une surélévation du plan d'eau à l'amont, nécessaire pour produire l'accroissement de vitesse en aval.

En d'autres termes, le rétrécissement agit comme un obstacle à l'écoulement. Supposons l'écoulement lent et libre (fig. 89).

L'équation de Bernoulli donne :

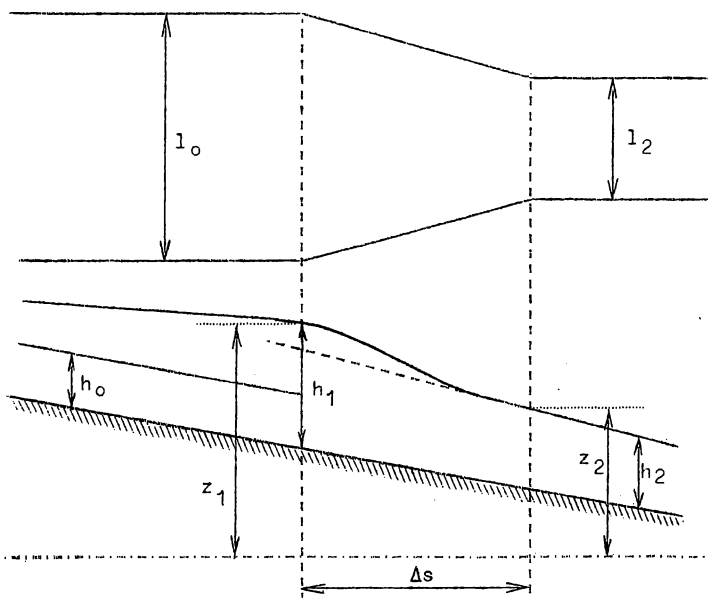


Fig. 89.

$$z_1 + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{u_2^2}{2g} + \Delta z ,$$

z représentant les pertes de charge. Donc

$$z_1 - z_2 = i \cdot \Delta s + (h_1 - h_2) = \frac{Q^2}{2g} \cdot \left(\frac{1}{l_2^2 \cdot h_2^2} - \frac{1}{l_0^2 \cdot h_1^2} \right) + \Delta z$$

Soient h_0 et h_2 les hauteurs du mouvement uniforme

$$h_0 = \frac{Q^2}{C_0^2 \cdot l_0^2 \cdot h_0^2 \cdot i} ; \quad h_2 = \frac{Q^2}{C_2^2 \cdot l_2^2 \cdot h_2^2 \cdot i} .$$

En admettant $C_0 = \sim C_2$, $\frac{h_2}{h_0} = \left(\frac{l_0}{l_2} \right)^{2/3}$

Donc $h_1 - h_2 = \frac{Q^2}{2g} \cdot \left(\frac{1}{l_2^2 \cdot h_2^2} - \frac{1}{l_0^2 \cdot h_1^2} \right) - i \cdot \Delta s + \Delta z .$

et $h_2 - h_0 = h_0 \cdot \left[\left(\frac{l_0}{l_2} \right)^{2/3} - 1 \right]$

Le remous total par rapport au niveau amont du mouvement uniforme est

$$h_1 - h_0 = (h_2 - h_0) + (h_1 - h_2) .$$

Donc, à un rétrécissement brusque correspond une élévation du plan d'eau en amont.

On détermine h_1 par une équation du 3^e degré, dans laquelle on admet généralement $i \cdot \Delta s = \Delta z$.

Cette équation implique que, malgré la variation de largeur, celle-ci soit toujours relativement grande. Dès lors, h_1 diffère peu de h_2 et, en première approximation, on peut écrire

$$h_1 - h_2 = \frac{Q^2}{2g \cdot l_2^2 \cdot h_2^2} \cdot \left(1 - \frac{l_2^2}{l_0^2} \right)$$

Dès lors $h_1 - h_0 = h_0 \cdot \left[\left(\frac{l_0}{l_2} \right)^{2/3} - 1 \right] + \frac{Q^2}{2g \cdot l_2^2 \cdot h_2^2} \cdot \left(1 - \frac{l_2^2}{l_0^2} \right)$

Comme on a $\left(\frac{H_u}{H_c} \right)^3 = \frac{g}{C_u^2 \cdot i}$,

si $H_u > H_c$, écoulement lent, il ne peut pas se produire de ressaut. Si $H_u < H_c$, un ressaut peut se produire éventuellement en amont du rétrécissement si celui-ci est très considérable relativement $\left(\frac{l_2}{l_0} \right)$ petit).

Inversement, à un élargissement brusque correspond un abaissement en amont. En effet, dans l'élargissement, d'amont en aval il doit se produire un accroissement d'énergie potentielle, donc il existe dans l'étendue de l'élargissement une dénivellation $(h_2 - h_1)$. Elle s'ajoute à la différence $(h_0 - h_2)$ des lignes d'eau du mouvement uniforme.

Toutefois, la forme d'écoulement de la figure 90 n'est possible que si $H_c < h_1$ en amont du rétrécissement, donc à fortiori $H_c < h_0$, c'est-à-

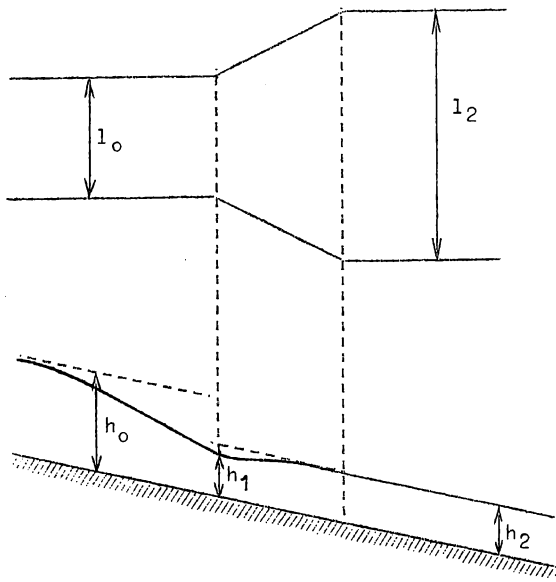


Fig. 90.

dire que la pente est faible et l'écoulement lent. En cas de forte pente et d'écoulement rapide, l'écoulement prendra l'une des formes de la figure 90 bis avec

$$H_{c_0} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{l_0^2 \cdot g}}$$

et

$$H_{c_2} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{l_2^2 \cdot g}},$$

$$\frac{H_{c_0}}{H_{c_2}} = \frac{l_2^{2/3}}{l_0^{2/3}}$$

Une solution complète et exacte serait obtenue en appliquant l'équation du mouvement permanent graduellement varié de proche en proche aux parties prismatiques ou non du lit. Des perturbations de la surface libre peuvent se produire aux arêtes des parois verticales. Leurs effets devraient être étudiés expérimentalement.

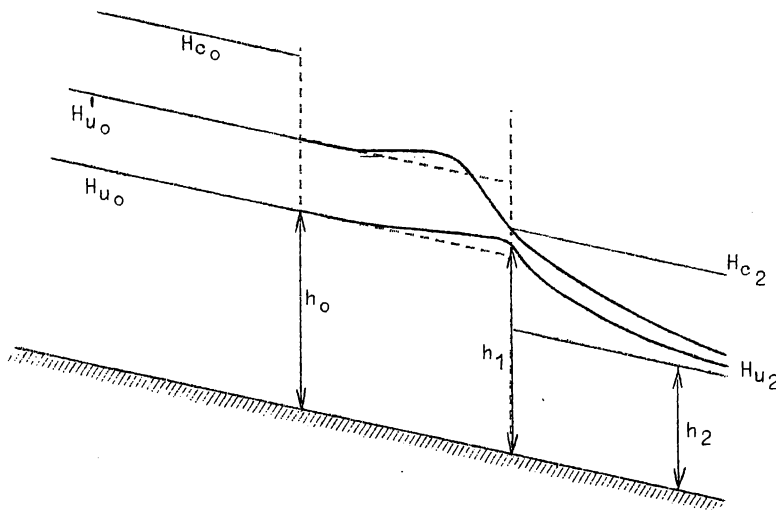


Fig. 90 bis.

tiques ou non du lit. Des perturbations de la surface libre peuvent se produire aux arêtes des parois verticales. Leurs effets devraient être étudiés expérimentalement.

13.- RETRECISSEMENT LOCALISE - REMOUS SOUS LES PONTS

Un rétrécissement localisé combine les effets d'un rétrécissement brusque suivi d'un élargissement brusque. Ce peut être un rétrécissement naturel d'un cours d'eau (ou détroit), un rétrécissement artificiel, réalisé par exemple pour réduire l'ouverture d'un pont, ou résultant de la présence d'obstacles dans un cours d'eau ou canal, tels que les piles d'un pont à passes ou arches multiples ou d'un barrage mobile à pertuis multiples. Dans ce cas, le problème est connu sous le nom ancien de remous sous les ponts. Dans les ouvrages modernes, on évite autant que possible ces diminutions locales de la section des cours d'eau par des piles.

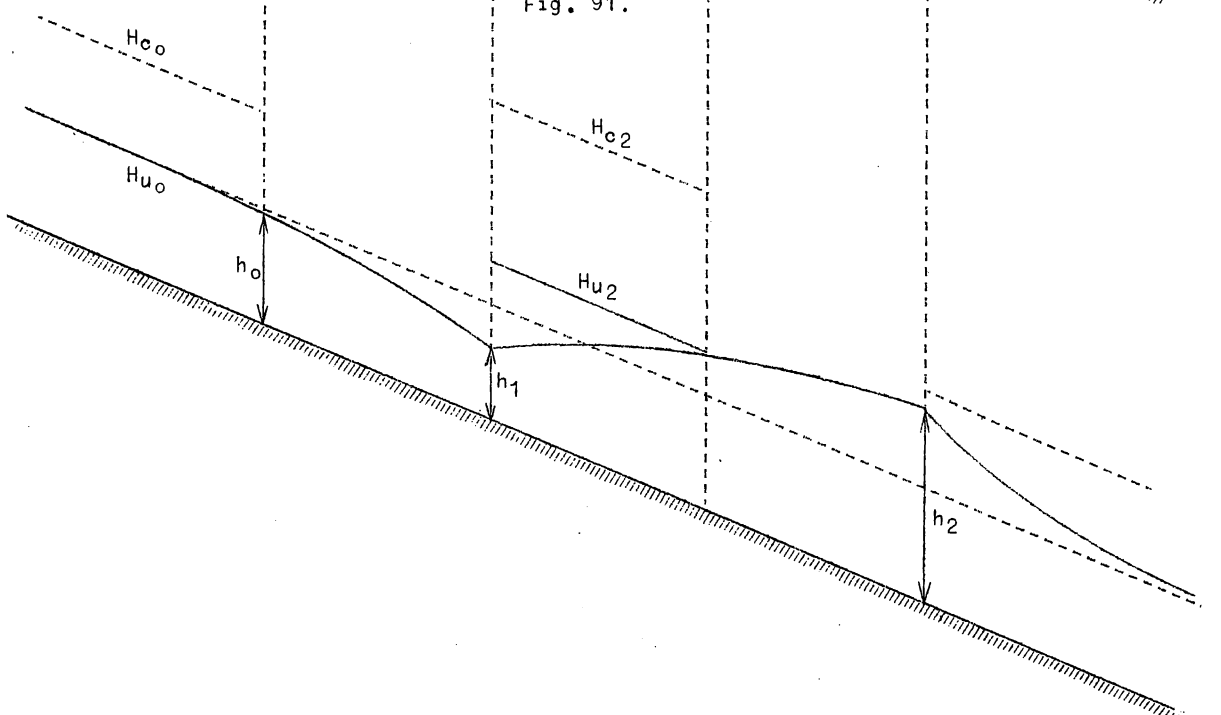
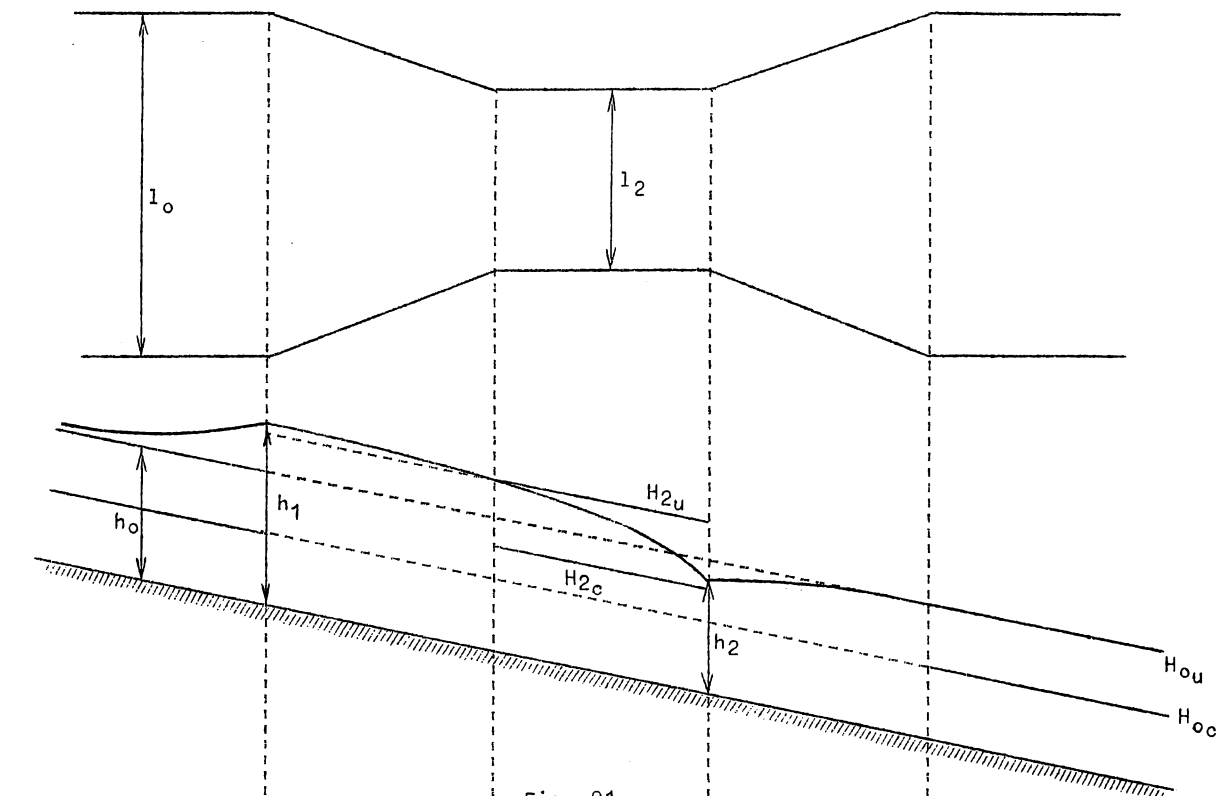
On admet aussi qu'il ne se produit pas de perte d'énergie localisée caractéristique, mais seulement les pertes de charges ordinaires de frottement sur les parois. Dans le cas de piles multiples, il faudrait tenir compte de l'augmentation de χ en plus de la diminution de ω , les deux effets s'associant pour réduire R et C . Il peut aussi se produire des perturbations de la surface libre, dues aux angles dièdres aux arêtes des parois verticales et autres discontinuités. Ceci peut donner lieu au phénomène de contraction, qui accentue les effets du rétrécissement et complique théoriquement et pratiquement beaucoup l'étude du problème. Dans les ouvrages modernes, on évite autant que possible ces complications, en évitant les discontinuités et en profilant les parois solides suivant des profils dits hydrodynamiques, c'est-à-dire réalisant des transitions sans discontinuités d'angles ni de courbure. Le mieux sera de recourir à des études expérimentales sur modèles, en similitude approximative de Froude (ouvrages courts).

Mathématiquement, on se servira, comme dans le paragraphe précédent, du principe des forces vives ou de Bernoulli. On peut appliquer l'équation du mouvement permanent graduellement varié de proche en proche aux tronçons prismatiques et non prismatiques du canal. On peut, d'une manière plus expéditive appliquer plusieurs fois le théorème de Bernoulli, selon ce qui figure au paragraphe précédent. Mais on se rend compte que l'on ne peut opérer ainsi avec quelque assurance que si l'on ne s'écarte pas trop des hypothèses du mouvement permanent graduellement varié, c'est-à-dire si le rétrécissement relatif n'est pas trop grand. Dans un tel cas, que l'on évite d'ailleurs dans les ouvrages normaux et modernes et qui poursuivrait donc probablement un but spécial, il est recommandable de recourir à une étude expérimentale. Ce qui suit concerne des rétrécissements relativement faibles.

En cas de faible pente, l'écoulement peut prendre la forme de la figure 91, en cas de forte pente, celle de la figure 92. Dans le cas de la figure 91, on a un axe d'aval, dans le cas de la figure 92 un axe d'amont.

Dans le cas de la figure 91 (faible pente, régime fluvial), on appelle $h_1 - h_0$ le remous réel, qui importe pour l'amont, cependant que le remous apparent est la dénivellation maximum $h_1 - h_2$, qui peut être sensiblement plus grande.

Dans le cas de la figure 92 (régime torrentiel), l'allure de la ligne d'eau est toute différente. Mais ces allures peuvent être fortement influencées par le fait que l'écoulement ne serait éventuellement pas libre



en aval. Le remous sous les ponts ne peut donc pas être étudié sûrement sans tenir compte des circonstances d'aval et d'amont, ni sans tenir compte de la pente. Il pourrait se produire des ressauts en amont en cas de forte pente, en aval en cas de faible pente. Il est donc difficile de généraliser les conclusions au sujet du phénomène, qui ne peut être considéré isolé de l'ensemble de l'écoulement en amont et en aval. Il ne faut pas perdre de vue cette remarque en examinant les études particulières nombreuses faites à son sujet. Le recours à la théorie des axes hydrauliques sera le moyen le plus sûr, en ayant soin de se référer toujours aux hauteurs H_u et H_c et à la hauteur de charge ξ , ainsi qu'à la fonction M en cas de ressaut. Il y aurait encore une complication supplémentaire si le détroit était accompagné d'un seuil.

Pour les cas d'écoulement libre, de faible pente et d'un rétrécissement relativement faible, on recourait anciennement à la formule de Gauthey du remous sous les ponts. Elle n'établit pas de distinction entre le remous apparent et le remous réel et suppose celui-ci assez petit par rapport à la profondeur d'aval. Dans ce cas, par application du théorème de Bernoulli et en négligeant les pertes de charge, on écrit :

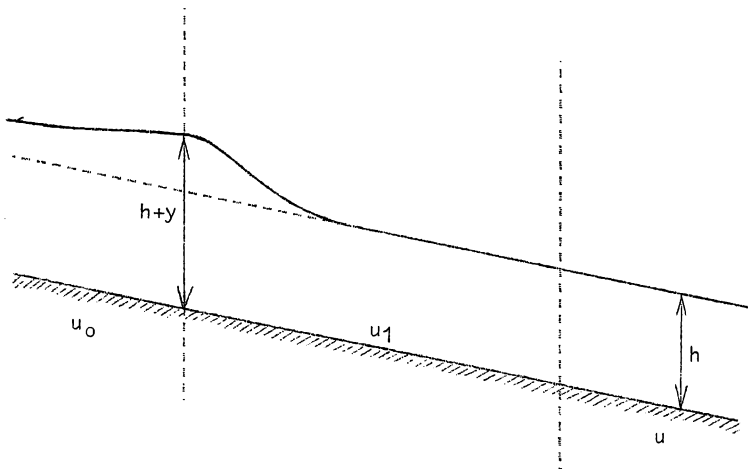


Fig. 93.

$$y = \frac{u_1^2 - u_0^2}{2g}$$

Mais $u_1 = \frac{u \cdot l_0}{m \cdot l_2}$ et $u_0 = \frac{u \cdot h}{h + y}$

donc
$$y = \frac{u^2}{2g} \cdot \left[\frac{l_0^2}{m^2 \cdot l_2^2} - \frac{h^2}{(h + y)^2} \right] \quad (111)$$

On obtient donc le remous y par la résolution d'une équation du 3^e degré. Cette formule est peu rigoureuse par suite des hypothèses faites sur la forme du remous, la négligence des pertes de charge et l'introduction du coefficient de contraction mal connu. Elle ne peut être admise que si y est assez petit par rapport à h . On peut alors négliger y par rapport à h et écrire

$$y = \frac{u^2}{2g} \cdot \left[\frac{l_0^2}{m^2 \cdot l_2^2} - 1 \right], \quad (112)$$

forme simplifiée de la formule de Gauthey proposée par M. Flamant.

Le coefficient de contraction m intervenant dans la formule de Gauthey et dérivées dépend de la forme des piles. L'influence des profils hydrodynamiques est considérable et permet

d'adopter des valeurs de m égales à 1. Il faut être très attentif à ce point, éventuellement étudier expérimentalement les formes. Les grandes valeurs de m diminuent l'importance du remous.

Pour l'emploi de la formule de Gauthey, pour des études sommaires ou préliminaires, on peut admettre les valeurs suivantes, assez anciennes :

VALEURS DE m d'après	NAVIER	CROIZETTE-DESNOYERS (formules de)
1) Piles à avant-bec ogival bien profilé (ou à angle aigu de 45°)	0,95	$0,85 + 0,014 \sqrt{l}$
2) Piles à avant-bec circulaire (ou à angle droit)	0,90	$0,78 + 0,021 \sqrt{l}$
3) Piles terminées carrément	0,80	$0,70 + 0,029 \sqrt{l}$

(l étant l'ouverture en m entre deux piles)

m atteint pratiquement l'unité avec des avant-becs profilés suivant la courbe d'épanouissement des veines liquides avec point d'inflexion. Ces formes sont réalisables en béton armé.

14.- ELARGISSEMENT LOCALISE : EFFETS D'UN BASSIN

On appelle bassin un élargissement de courte longueur, par lequel un rétrécissement brusque succède à un élargissement brusque. Il en résulte également une combinaison des cas du paragraphe 12, également influencé par la pente et les circonstances d'amont et d'aval. Dans ce cas également, on se servira du théorème de Bernoulli ou de l'équation du mouvement permanent graduellement varié, sous les mêmes conditions et réserves qu'au paragraphe précédent. Dans le cas d'écoulement libre et de faible pente, le relèvement dû au rétrécissement d'aval l'emporte et agit jusqu'au delà du bassin (fig. 94, p. 132).

Dans le cas de forte pente et d'écoulement libre, il se produit un exhaussement dans l'étendue du bassin. Un ressaut est possible dans l'étendue du bassin.

15.- DISPOSITIFS D'ALIMENTATION ET D'EVACUATION. - GENERALITES.

Parmi les éléments qui déterminent les formes des courants d'eau, figurent, outre les pentes et les formes du canal, prismatique ou non, les conditions terminales, c'est-à-dire d'alimentation à l'extrémité amont et d'évacuation à l'extrémité aval. Il a été fait déjà référence à ces conditions au paragraphe 9 du chapitre X, relatif à la génération des axes simples d'amont et d'aval. Mais outre que les considérations exprimées dans ce paragraphe étaient limitées et incomplètes par le fait même qu'il s'agissait d'axes simples, elles étaient entachées en outre de quelque incorrection, du moins en ce qui concerne les conditions terminales d'aval des axes simples d'aval.

Le paragraphe 7 du présent chapitre relatif aux ressauts incomplets et les figures 78 et 79 améliorent l'exposé des conditions terminales d'aval lorsque celles-ci sont constituées par un réservoir indéfini. Cependant, il y a encore une omission qui est celle de la ligne d'énergie.

La seule considération de la surface libre, c'est-à-dire de la charge potentielle, ne suffit pas, il faut encore tenir compte de la charge ciné-

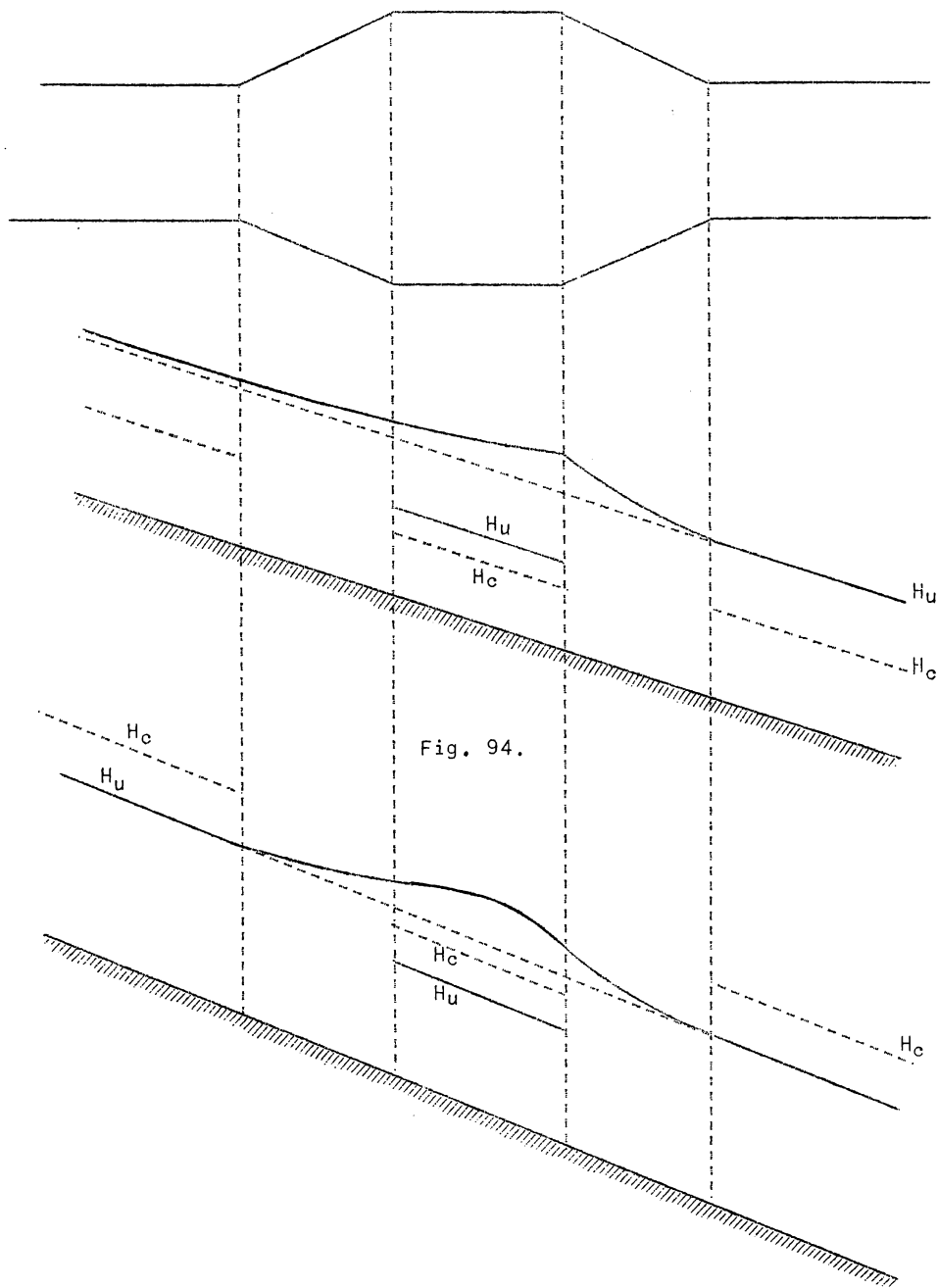


Fig. 94.

Fig. 94 bis.

tique. En règle générale, il faut accompagner le tracé de la ligne d'eau dans toutes ses parties, de la ligne d'énergie. Les dispositifs d'alimentation et d'évacuation d'un canal découvert constituent des régions singulières où le mouvement permanent est varié. Ces régions répondent au caractère d'ouvrages courts et satisfont à la similitude approximative de Froude. Cependant, ainsi qu'il a été montré dans les paragraphes précédents et

au paragraphe 4 du chapitre XI, les conditions terminales ne définissent pas la forme des axes qui, dans les canaux prismatiques, dépendent de la pente.

La considération des dispositifs d'alimentation ou d'évacuation isolés n'a donc guère de signification et peut conduire à des erreurs d'interprétation, les formes d'écoulement associées à ces dispositions terminales étant dans chaque cas, conditionnées par la pente du lit. En outre, on a vu déjà, au paragraphe 4 et au paragraphe 7 que les conditions terminales d'amont et d'aval peuvent s'influencer mutuellement. Ceci peut donner lieu à des ressauts parfaits, incomplets et dénaturés influençant les dispositifs même d'alimentation et d'évacuation. Ceci implique des écoulements rapides, dont les conditions doivent être respectées dans les écoulements semblables.

La possibilité d'existence de ressauts établit la possibilité de pertes de charge importantes dans les dispositifs d'alimentation et d'évacuation, comme pertes de charges localisées. Toutefois en l'absence de tels ressauts ou phénomènes analogues, les pertes de charge locales peuvent être insignifiantes et l'on peut appliquer aux dispositifs d'alimentation et d'évacuation le théorème de Bernoulli sans pertes de charge.

Il est enfin à remarquer que les mêmes dispositifs peuvent servir à l'amont pour l'alimentation et à l'aval pour l'évacuation. Les conditions de fonctionnement pourront cependant être affectées dans l'un et l'autre cas par les conditions d'amont et d'aval, c'est-à-dire par les lignes d'eau et les lignes d'énergie.

Ces généralités ne peuvent recevoir leur vraie signification par l'étude isolée des dispositifs d'alimentation et d'évacuation, mais seulement par leur étude combinée avec celle des axes éventuellement composés d'amont et d'aval.

16.- DEVERSOIRS

Souvent l'alimentation d'un canal découvert se fait par déversement par dessus la crête d'un barrage. De même, les conditions d'aval peuvent être contrôlées par un tel déversoir. Dans les deux cas, la crête peut être fixe ou mobile. Le débit est déterminé principalement par l'épaisseur de la lame déversante sur la crête du déversoir et ne semble donc dépendre que du niveau d'amont et être indépendant du niveau d'aval. Il en est, en effet, ainsi lorsque l'élévation du barrage au-dessus du fond du lit et du niveau de l'eau en aval est telle que la lame déversante arrive sur le fond du lit au pied du barrage avec une vitesse supérieure à la vitesse critique et de telle manière qu'il n'y ait pas de ressaut (forte pente) ou un ressaut assez éloigné (faible pente). Mais si le niveau en aval du barrage est tenu assez élevé par les résistances d'aval, un ressaut peut se produire au pied du barrage. Un tourbillon recouvre alors la nappe à son arrivée au pied du barrage, qui est alors influencée par l'aval. Le coefficient de débit dépend alors du niveau d'aval. Les phénomènes d'écoulement très complexes qui y correspondent doivent être étudiés surtout par voie expérimentale. Les formules qui suivent sont données surtout à titre indicatif.

Le ressaut éloigné du pied du barrage peut présenter l'avantage d'augmenter la chute et donc aussi la puissance, lorsque le barrage constitue par exemple le déversoir de trop plein d'une usine hydro-électrique et que le canal de fuite de celle-ci débouche dans le chenal du déversoir en amont du ressaut. Il faut vérifier toutefois si le gain de chute et de puissance compense les frais supplémentaires de consolidation du chenal exigée éventuellement par la grande vitesse du courant.

17.- DEBIT DES DEVERSOIRS EN MINCE PAROI

Le débit s'écoule par dessus le déversoir sous une certaine épaisseur qui est variable avec le débit.

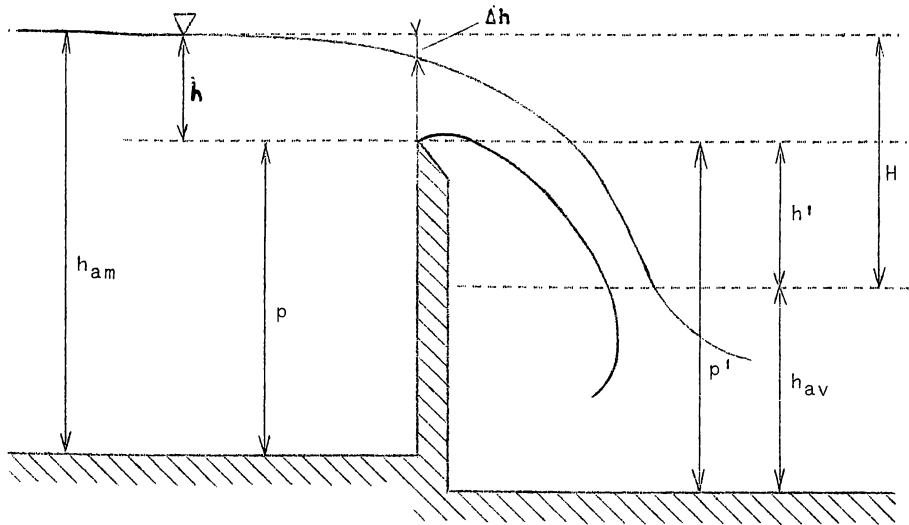


Fig. 95 a.

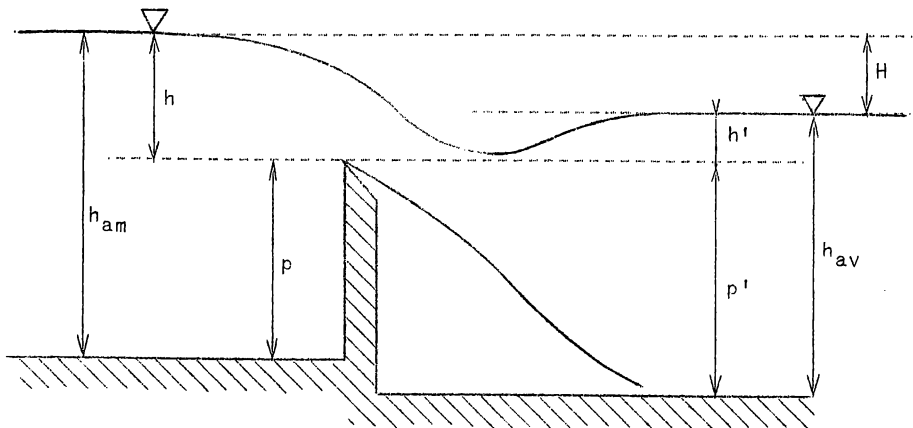


Fig. 95 b.

On désigne par épaisseur h de la lame déversante la différence de niveau entre le plan d'eau non déprimé, à distance suffisante en amont de l'arête du déversoir, et cette arête. Au droit de l'arête, la nappe est déprimée de Δh . Le déversoir peut être émergent (fig. 95 a) ou noyé (fig. 95 b). On désigne par l la longueur du déversoir sans contrac-

tion latérale. La vitesse moyenne à l'amont du déversoir est

$$u = \frac{Q}{h_{am}} = \frac{Q}{p + h}$$

La chute est

$$H = h + h'$$

Les expérimentateurs sont tous d'accord pour mettre les formules donnant le débit, sous une formule simple unique :

$$Q = m \cdot l \cdot \sqrt{2g} \cdot h^{3/2} \quad (\text{Du Buat}) \quad (113)$$

m étant le coefficient de débit variable d'après les conditions d'écoulement, dont les lois ont fait l'objet d'études expérimentales très nombreuses. Il est remarquable d'ailleurs que

les recherches théoriques de M. Boussinesq ont donné des valeurs de m en accord complet avec celles déduites de l'expérience dans certains cas. Les travaux de M. Bazin, font encore autorité et constituent encore l'étude la plus systématique du problème. L'exposé ci-après est fondé sur ses résultats et considère successivement les divers modes d'écoulement et les valeurs correspondantes de m pour le déversoir virtuel en mince paroi.

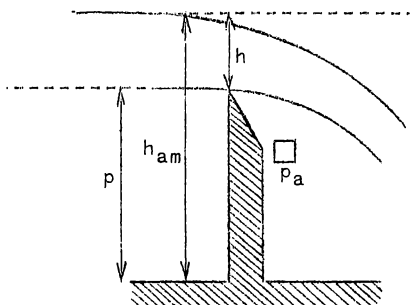


Fig. 96.

Lorsque l'air a librement accès entre la nappe d'écoulement et la paroi aval du déversoir, la nappe est sur les deux faces en contact avec l'air à la pression atmosphérique et est dite libre (fig. 96). Si le déversoir est en mince paroi, le coefficient de base de débit est

$$m_0 = 0,405 + \frac{0,003}{h} \quad (114)$$

à condition que $h > 0,10 \text{ m}$.

Si l'on tient compte des vitesses d'amont, il faut multiplier par un module

$$m_v = (1 + 0,55 \cdot \frac{h^2}{h_{am}^2}) \quad (115)$$

de sorte que

$$m = m_v \cdot m_0 \quad (116)$$

Si l'air n'a pas accès sous la nappe, il se produit un entraînement d'air et une dépression; la nappe se rapproche de la paroi aval sous l'effet de la pression atmosphérique et est dite déprimée (fig. 97 a). Le coefficient de débit est accru d'autant plus que la pression est plus réduite. L'augmentation peut atteindre jusque 10 %.

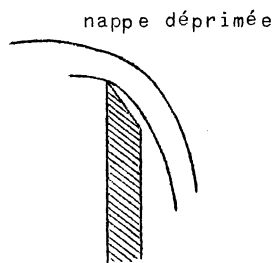


Fig. 97 a.

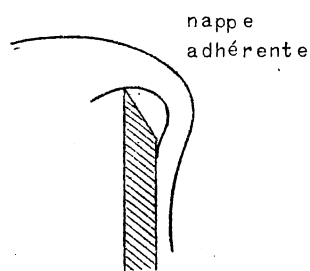


Fig. 97 b.

Cette forme se produit lorsque $h < 0,3 p$ environ et elle n'est pas très stable. Lorsque la dépression augmente et que l'air disparaît, la nappe est adhérente. Il y correspond un module m_{ad} qui est supérieur à 1, croît avec la valeur absolue

de h et dépend de la forme de l'arête du barrage en mince paroi. Pour $h = 0,25$ à $0,30$, $m_{ad} = 1,25$ environ et pour $h = 0,40$ à $0,45$, $m_{ad} = 1,30$ environ. Cette forme peut se produire pour $h < 0,375 p$ environ, limite variable avec le niveau d'aval. Pour certaines valeurs de $\frac{h}{p}$ cette forme de nappe peut exister indifféremment avec celle de nappe noyée en dessous, définie ci-après. Les formes de nappes ci-dessus sont considérées indépendamment du niveau d'aval, qui peut être plus ou moins rapproché de la crête du déversoir, même le dépasser.

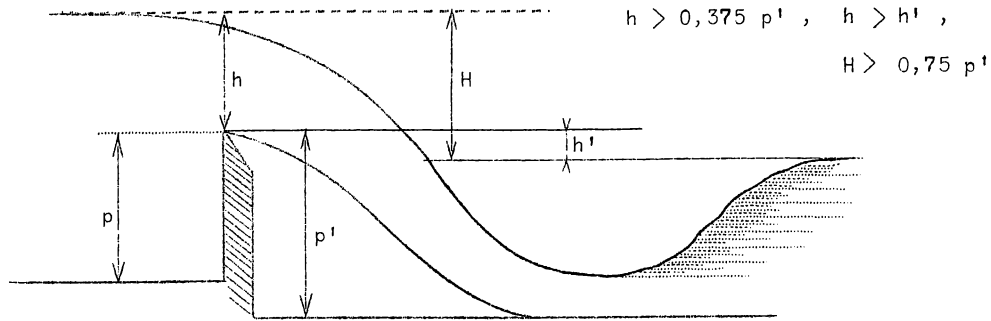


Fig. 98.- Déversoir à nappe noyée en dessous à ressaut éloigné.

Lorsque le niveau aval est assez élevé, la nappe peut prendre la forme dite noyée en dessous. Une zone d'eau morte tourbillonnante s'établit entre la nappe et la paroi aval du barrage (fig. 98). Cette forme ne peut se produire que si $h > 0,375 p'$ et $h > h'$; au-dessous de ces valeurs la nappe est instable ou déprimée. Le coefficient de débit est augmenté par application d'un module.

$$m_n = 0,845 + 0,176 \cdot \frac{p'}{h} - 0,016 \cdot \frac{p'^2}{h^2} \quad (117)$$

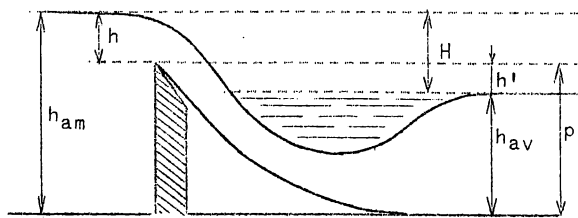
qui pour $2 > \frac{p'}{h} > 1$ peut s'écrire plus simplement

$$m_n = 0,878 + 0,128 \cdot \frac{p'}{h} \quad (118)$$

Tous les modules précédents supposent que l'écoulement est indépendant du niveau d'aval,

c'est-à-dire que la nappe est à ressaut éloigné. Il faut que $H > 0,75 p'$.

Dans ce cas, par suite de la grande vitesse de la nappe lorsqu'elle arrive sur le lit en aval, son épaisseur est inférieure à celle qui correspond à l'écoulement en aval à la vitesse correspondant à la pente du lit. La nappe se relève en ressaut à une certaine distance en aval du



$$h > 0,375 p' , H < 0,75 p' , h > h'$$

Fig. 99.- Déversoir à nappe noyée en dessous influencée par l'aval.

barrage. Le pied de la nappe est recouvert à l'endroit de ce ressaut par un tourbillon. Lorsque la profondeur d'eau en aval croît par rapport à la saillie p' du barrage, le ressaut se rapproche du pied du barrage et à partir d'une certaine profondeur, se produit au pied même du barrage. Le débit est alors influencé par le niveau d'aval et la nappe est dite influencée par l'aval. (Fig. 99).

La nappe influencée par l'aval est en général noyée en dessous. Elle se produit lorsque $H < 0,75 p'$. Comme $H = h + h'$ et que $h > 0,375 p'$ pour que la nappe soit noyée en dessous, on voit que nécessairement $h > h'$ et, au lieu de m_n , il faut employer le module

$$m_{na} = 1,05 + 0,15 \frac{h'}{h} \quad (119)$$

h' étant compté positivement depuis le niveau aval jusqu'à la crête du barrage et le barrage étant toujours émergent.

Si le niveau d'aval s'élève encore, le déversoir est noyé si $h_{av} > p'$, h' se compte alors positivement depuis le seuil jusqu'au niveau d'aval. La nappe est noyée en dessous si $H = h - h' > 0,3 p'$. Elle est ondulée si $H < 0,167 p'$ (fig. 101).

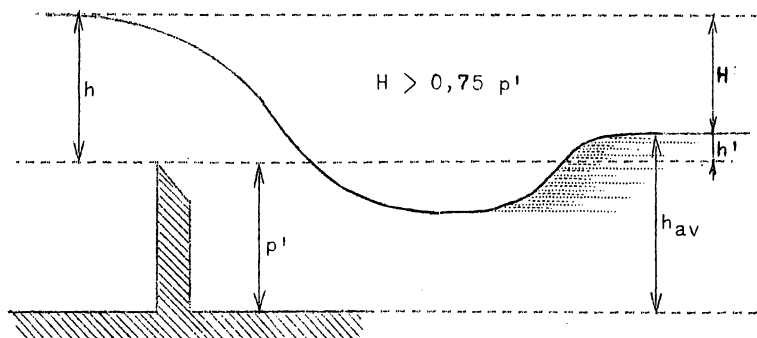
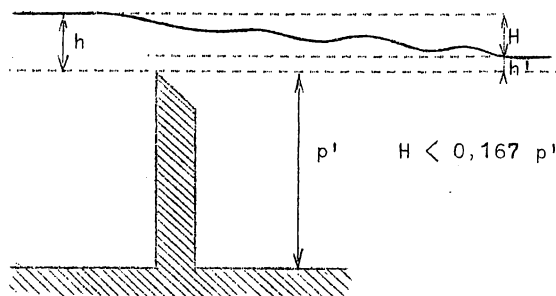


Fig. 100.- Déversoir noyé, nappe noyée en dessous à ressaut éloigné.

Si $0,3 p' > H > 0,167 p'$, le régime est instable.

Si $H > 0,75 p'$, la nappe partiellement noyée est à ressaut éloigné, (fig. 100) même si le déversoir est noyé et le module à employer reste m_n comme pour la nappe noyée en dessous avec déversoir émergent.



Si $H < 0,75 p'$, la nappe est dite plongeante, elle est influencée par l'aval. Si elle est aussi noyée en dessous (fig. 101) c'est-à-dire si $H > 0,3 p'$, le module est

$$m_{pna} = 1,05 \left(1 + \frac{1}{5} \frac{h'}{p} \right) \sqrt[3]{\frac{z}{h}} \quad (120)$$

Fig. 101.- Déversoir noyé, nappe ondulée influencée par l'aval.

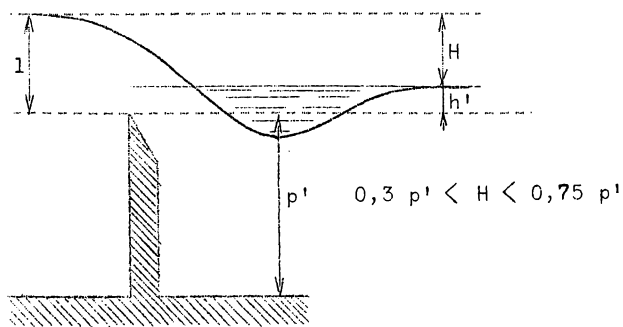


Fig. 101 bis.- Déversoir noyé, nappe noyée en dessous et par dessus ou nappe plongeante.

Lorsque le déversoir à mince paroi est limité par des bords verticaux et que sa largeur l est inférieure à celle L du canal, il y a contraction latérale complète.

D'après les expériences de Francis, il faut réduire la longueur utile du déversoir de $\frac{h}{10}$ pour chaque bord latéral donnant lieu à contraction, à condition que $l > 3$ à $4 h$.

On peut aussi se référer à la formule de Hégly, à substituer à celle de Bazin pour m_0 .

$$m_0 = \left[0,405 - 0,03 \left(1 - \frac{l}{L} \right) + \frac{0,0027}{h} \right] \left[1 + 0,55 \frac{l^2 \cdot h^2}{L^2 \cdot h_{am}^2} \right] \quad (121)$$

Si le déversoir est oblique par rapport au courant, en appelant β l'angle du déversoir avec la normale au courant, on a en première approximation

pour $\beta =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	
$m_\beta =$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,80	(probablement).

On considère la longueur réelle du déversoir (ouvrant oblique).

Toutes les données précédentes ont trait à des déversoirs en mince paroi à parements verticaux. Si le déversoir en mince paroi est incliné sur la verticale d'un angle α compté positivement vers l'amont (fig. 102), on doit multiplier le débit par un module m_α . Pour les faibles valeurs de α ,

d'après Boussinesq,	$m_\alpha = 1 - 0,39 \frac{\alpha}{\pi}$	}	(122)
d'après Bazin,	$m_\alpha = 1 - 0,11 \cotg \alpha$		

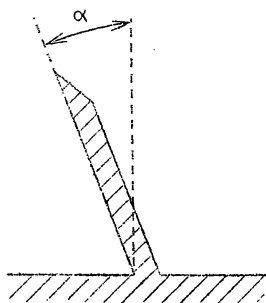


Fig. 102.

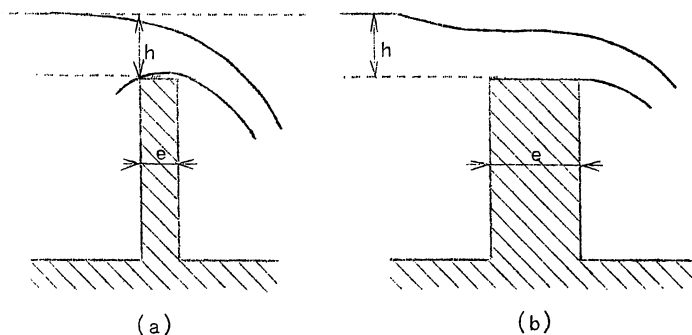


Fig. 103.

Les valeurs d'expérience sont :

tg α	1	0,66	0,33	-0,33	-0,66	-1	-2	-4
m _α	= 0,93	0,94	0,96	1,04	1,07	1,10	1,12	1,09

Si le déversoir à parois verticales est à crête horizontale épaisse, d'épaisseur e (par exemple un barrage de poutrelles), lorsque $\frac{h}{e} > 2$, les formules des déversoirs en mince paroi sont applicables (fig. 103 a). Lorsque $\frac{h}{e} < 1,50$, la nappe est adhérente à la crête et il faut multiplier le débit par un module (fig. 103 b) :

$$m_e = 0,70 + 0,185 \cdot \frac{h}{e} \quad (123)$$

Si $1,50 < \frac{h}{e} < 2$, l'écoulement est instable.

Les indications qui précèdent peuvent convenir pour des études préliminaires. Pour de plus amples détails et plus de précision, on consultera les tables de Bazin. D'autres formules ont été données pour les déversoirs en mince paroi et qui donnent des résultats un peu différents de celles de Bazin.

Les conditions d'expérience influent assez fortement sur les résultats, notamment la répartition des vitesses en amont du déversoir. Une uniformisation des vitesses réduit les débits par rapport au cas où les vitesses de surface sont plus grandes que les autres, comme dans les expériences de Bazin. La longueur du canal en amont influe aussi, Bazin ayant utilisé des canaux assez longs. Enfin, on évitera les contractions latérales. Pour des mesures de haute précision, en laboratoire, il faut procéder par tarage au lieu de recourir à des formules. Pour les déversoirs en mince paroi, même des détails tels que le rayon de l'arrondi de l'arête déversante exercent une influence.

Au laboratoire d'hydraulique fluviale de l'Université de Liège, les déversoirs verticaux en mince paroi sans contraction latérale tarés répondaient avec une excellente approximation à la formule de 1929 de Rehbock

$$Q = (1,782 + 0,24 \frac{h_e}{p}) \cdot 1 \cdot h_e^{3/2} \quad (m^3/sec)$$

$$h_e = h + 0,0011 \quad (en\ m)$$
} (124)

dans laquelle

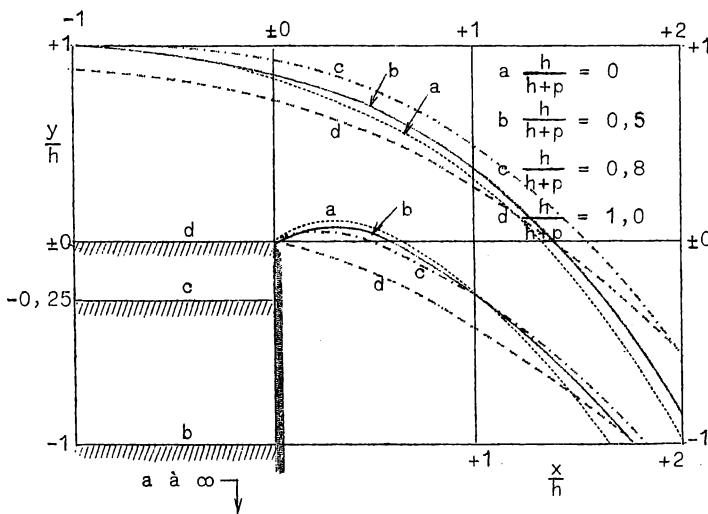


Fig. 104.

La figure 104 reproduit, selon Hunter Rouse, le profil d'une nappe déversante libre aérée sur un déversoir vertical à mince paroi, pour diverses valeurs de $\frac{h}{h+p}$. Au droit de l'arête, la surface supérieure serait déjà déprimée d'environ $0,15 h$. A une distance $3 h$ en amont du déversoir, la dépression du plan d'eau est négligeable. D'après Creager, on aurait, par rapport à h pris comme unité : (fig. 105)

$$(x - a)^2 = (y + b) \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (125)$$

v étant la vitesse horizontale au tiers inférieur de la section

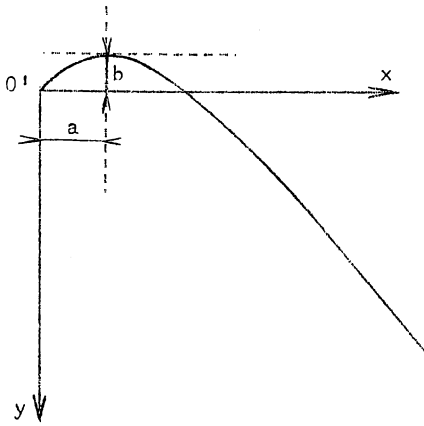


Fig. 105.

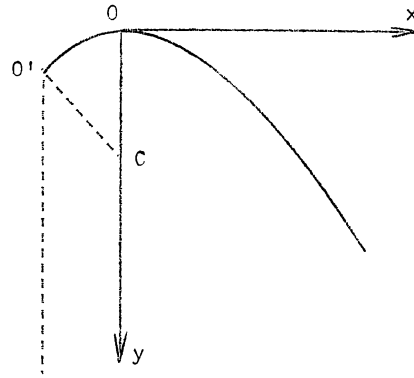


Fig. 106.

contractée de la nappe (où la pression est maximum). En rapportant la courbe à la tangente et à la normale au sommet, on aurait sensiblement

$$y = 0,47 x^{1,80} \quad (126)$$

Scimeri propose

$$y = 0,50 x^{1,85} \quad (127)$$

De 0 en 0', on aurait sensiblement un arc de cercle de centre C. (fig. 106)

La courbure des filets liquide affecte la répartition des pressions, qui n'obéissent plus à la loi hydrostatique. La figure 107 reproduit divers écoulements sur déversoirs à minces parois, selon le niveau d'aval, et indique les répartitions des pressions dans les divers cas :

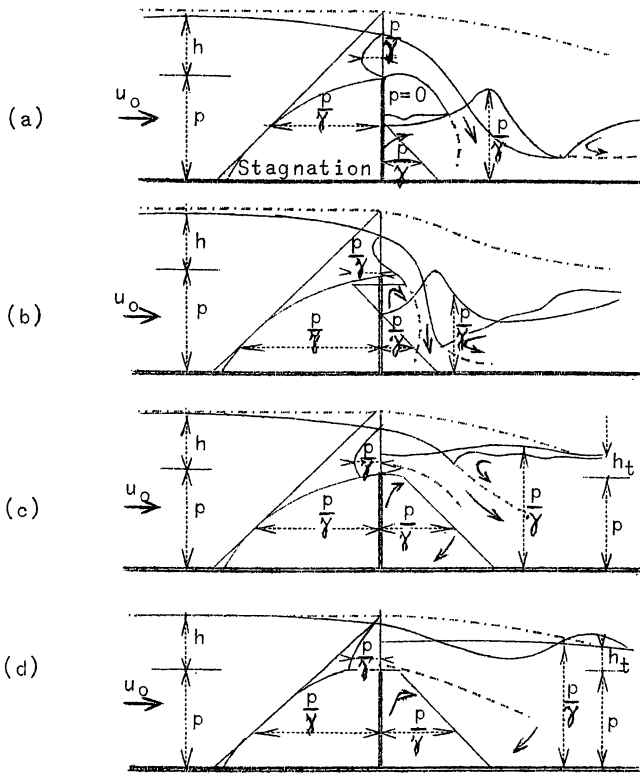


Fig. 107.

- a) nappe libre aérée;
- b) nappe déprimée ou noyée par dessous;
- c) déversoir noyé, nappe plongeante;
- d) déversoir noyé, nappe ondulée.

18.- DEVERSOIR A CRETE EPAISSE

La théorie élémentaire de ce déversoir à crête plane horizontale épaisse est fondée sur le principe de Belanger du débit maximum. Il découle directement du diagramme de la figure 17, chapitre X, pa-

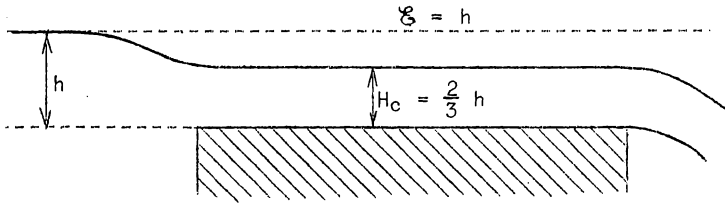


Fig. 108.

ragraphe 3 en considérant l'écoulement libre. En effet, tout abaissement de la hauteur d'eau augmente le débit jusqu'à ce que l'on atteigne

$$H_c = \frac{2}{3} h \text{ (fig. 108)}$$

en admettant qu'il n'y ait pas de perte de charge.

Dès lors
$$q = \sqrt{g \cdot H_c^{3/2}} = \frac{2}{3 \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 g \cdot h^{3/2}} \quad (128)$$

ou
$$q = 0,385 \sqrt{2 g \cdot h^{3/2}}$$

(en négligeant la vitesse d'amont).

Mais cette formule très simple et classique n'est cependant pas correcte si la crête a une épaisseur assez grande. La surface de la nappe ne peut en effet être confondue avec une droite H_c , quelle que soit la pente de la crête. En fait, les lignes de courant sont courbes aux environs des deux extrémités du déversoir sur une assez longue distance, ce qui influe sur H_c et sur le débit maximum. Si l'épaisseur de la crête est assez grande pour que, dans une certaine région, les filets soient sensiblement parallèles, la ligne d'énergie n'y sera pas horizontale mais en pente et il y aura eu perte de charge depuis l'origine amont du déversoir. L'endroit du minimum d'énergie ne sera pas dans cette région, mais à l'extrémité,

où la courbure est forte. Les figures 109 et 110 empruntées à Hunter Rouse, montrent les effets de l'épaisseur de la crête, de la courbure des filets liquides et de la rapidité du courant (facteur cinétique du courant

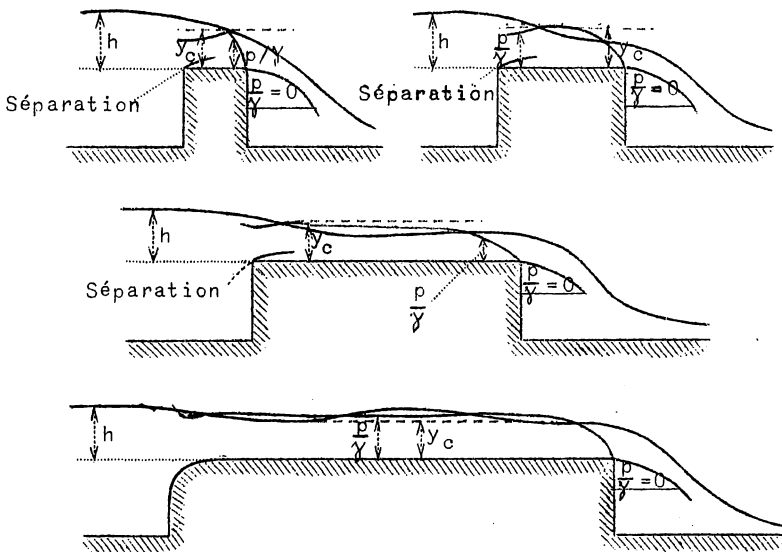


Fig. 109.

$$g^2 = 2 \frac{\xi_{cin.}}{\xi_{pot}}$$

sur l'allure de la nappe déversante en cas de crête horizontale. La vitesse d'amont a une grande importance et la hauteur critique

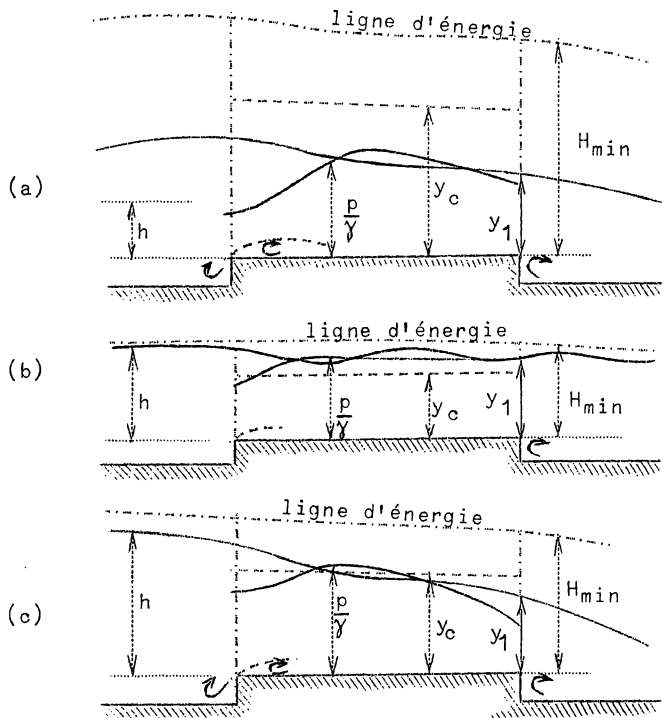


Fig. 110.

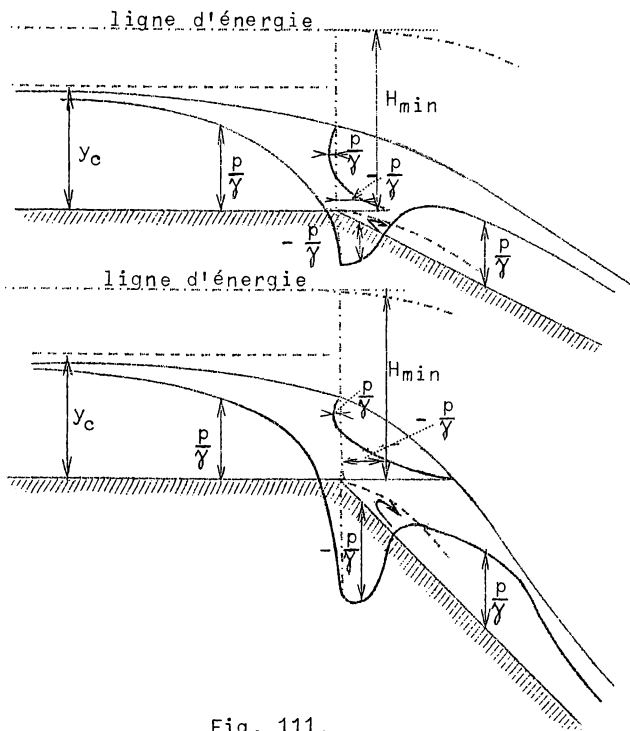


Fig. 111.

n'est pas toujours atteinte ni constante dans l'étendue de la crête épaisse.

Si la crête est en pente ou suivie d'un glacis en pente, la courbure des filets liquides est aussi appréciable (fig. 111 d'après Hunter Rouse) dans la région aval de la crête.

Les formes des nappes d'écoulement doivent, en cas de crête assez épaisse, être compatibles, même dans les régions à forte courbure, avec les formes d'axes correspondantes du mouvement permanent graduellement varié. Si l'écoulement est libre en aval, on comprend aisément que la formule (128) est assez rigoureusement applicable lorsque la pente est supérieure à la pente de passage, à condition de faciliter l'entrée des filets liquides à l'extrémité amont du déversoir en arrondissant convenablement l'arête. Si la pente est inférieure à la pente de passage, nulle ou négative (contre-pente), ce qui dépend aussi de la rugosité de la crête en ce qui concerne la pente de passage, la formule (128) ne sera pas applicable, parce que l'écoulement sera lent si la crête est très épaisse et que le débit sera donc influencé par l'aval, même s'il y a déversement libre à l'extrémité aval du déversoir. Dans le cas de mouvement lent, on aura alors (en cas de réservoir indéfini à l'amont, vitesse d'amont nulle), en admettant qu'il n'y ait pas de perte

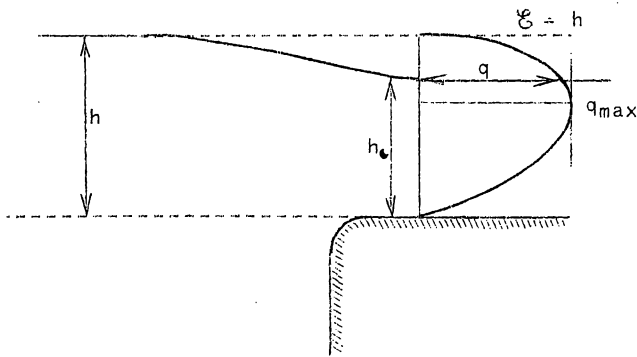


Fig. 112.

de charge à l'entrée

$$h_0 > \frac{2}{3} \cdot h, \quad \xi = h \quad \text{et}$$

$$q = h_0 \cdot \sqrt{2g(h - h_0)} \quad (129)$$

(chapitre X, paragraphe 3). Mais h_0 dépend lui-même des conditions d'aval et ne peut être déterminé que par approximations successives, car il est fonction de q . Le débit est naturellement inférieur à celui de la formule (128).

Si le seuil est relativement peu épais et lisse, on voit que la nappe est entièrement dans la région des lignes de courant courbes; il faut se référer aux formules expérimentales établies pour des circonstances analogues ou recourir à l'expérience directe. (fig. 109)

On remarquera que, dans les conditions de la figure 112, h_0 ne peut être $< \frac{2}{3} h$ ni

$$q > \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2g \cdot h}^{3/2}$$

S'il y a une vitesse d'amont appréciable, $\xi > h$, on remarque qu'elle exerce une influence appréciable sur le mouvement de déversement, en relation avec g^2 , c'est-à-dire avec le rapport $\frac{h}{H_c}$, mais aussi avec l'épaisseur, la pente et la rugosité de la crête. (fig. 110)

La formule souvent indiquée

$$q = \frac{2}{3} \cdot m \cdot \sqrt{2g} \cdot \left[\left(h + \frac{\alpha \cdot u^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{\alpha \cdot u^2}{2g} \right)^{3/2} \right] \quad (130)$$

n'est pas très certaine. La valeur de m n'est pas nécessairement et invariablement $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (formule 128), mais varie avec la géométrie du déversoir.

Chaque cas particulier devra faire l'objet d'un examen particulier, compte tenu des circonstances d'amont et d'aval. Lorsque la courbure des lignes de courant est partout très prononcée, que les pertes de charge sont appréciables, par exemple parce qu'il y a formation de ressaut, il faudra recourir à l'expérience.

19.- PRISE D'EAU DANS UN RESERVOIR

On considère en général un réservoir indéfini en surface et en profondeur, c'est-à-dire une vitesse d'amont nulle. Un canal en débouche, raccordé aux limites du réservoir par des arrondis pour éviter la contraction. C'est le cas du déversoir de la figure 112 pour un déversoir à crête d'épaisseur infinie, considéré à partir de l'amont. Si l'entrée et l'écoule-

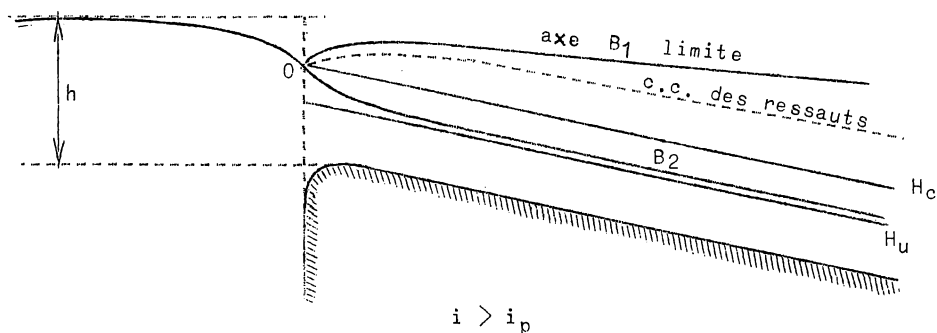


Fig. 113.

lement sont libres et la pente supérieure à la pente de passage, on aura un axe B_2 avec

$$h_0 = H_c = \frac{2}{3} h$$

et

$$q = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2g} \cdot h^{3/2} \quad (\text{fig. 113}) \quad (128)$$

Si l'écoulement n'est pas libre en aval, il peut y avoir des ressauts éloignés, dont la position limite correspond à l'axe B_1 produisant le ressaut en O . Ceci correspond nécessairement à de fortes résistances. Remarquons que l'axe B_1 limite correspond à la disparition du ressaut en O et à l'absence de perte de charge.

Pour des résistances encore plus grandes en aval, le déversement serait noyé mais se produirait sans perte de charge selon la formule

$$q = h_0 \cdot \sqrt{2g(h - h_0)} \quad (129)$$

Mais q serait alors dépendant de l'aval, c'est-à-dire que h_0 est fonction de q et ne peut être déterminé que par tâtonnements. A la limite $h_c = h$, $q = 0$ et la ligne d'eau est horizontale.

Si la pente est inférieure à la pente de passage et si le lit est long on ne pourra avoir que des axes A_1 avec $h_0 > \frac{2}{3} h$. Le débit sera dépendant des résistances d'aval et ne pourra être déterminé que par tâtonnements, selon la formule 129. Il ne pourra donc pas y avoir de ressauts.

Si le lit est très court et se termine par un déversement libre, on pourrait avoir un axe A_2 , mais on retomberait somme toute sur le cas du paragraphe précédent. Il en est de même si le lit étant horizontal ou en contre-pente.

Si le réservoir n'était pas indéfini, il faudrait tenir compte de la vitesse d'amenée, donc

$$\mathfrak{z} = h + \frac{u^2}{2g} .$$

Les mêmes remarques sont à faire à ce sujet qu'au paragraphe précédent. Le débit et l'axe seront déterminés, éventuellement par tâtonnements, en tenant compte des circonstances d'amont et d'aval. Si, en particulier, le réservoir a la même profondeur que le canal et éventuellement la même pente, on retrouve le cas du rétrécissement brusque (paragraphe 12).

20.- DEVERSEMENT A L'EXTREMITE AVAL D'UN CANAL

Il peut arriver qu'à l'extrémité aval d'un canal, le courant se déverse librement, la nappe d'écoulement étant à la pression atmosphoriquie par dessous comme par dessus. Le phénomène comporte une perte de charge et il faut recourir au théorème des quantités de mouvements, appliqué entre la

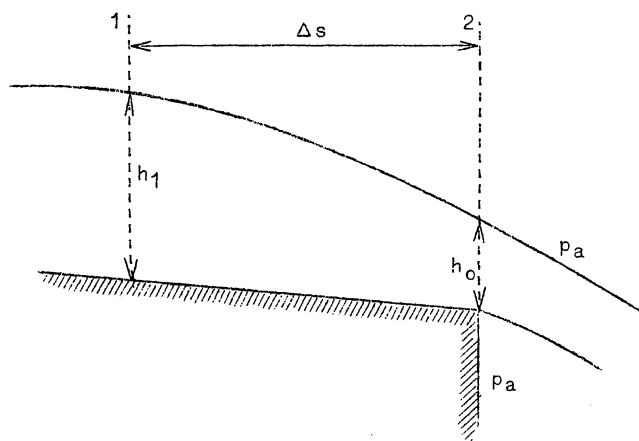


Fig. 114.

section 0 et la section 1 en amont à partir de laquelle se marque la dépression.

On considère une section rectangulaire (fig. 114)

$$\frac{q^2}{g} \cdot \left(\frac{1}{h_0} - \frac{1}{h_1} \right) = \frac{h_1^2}{2} \sqrt{1 - i^2} \quad (131)$$

ou

$$\varphi(h_0) - \varphi(h_1) = \Psi(h_1)$$

$$\varphi(h_0) = M_1$$

Comme M_1 est minimum pour $h_1 = H_c$, il en résulte que h_0 est nécessairement plus petit que

h_0' , tel que

$$\varphi(h_0') = M_c$$

A toute valeur de $h_0 > h_0'$ peuvent correspondre deux valeurs de h_1 (fig. 115).

a) L'une h_1' est $< H_c$. Il y correspond un axe d'amont et un écoulement rapide (fig. 116, c). L'axe correspondant peut être B_2 , B_u ou B_3 en cas de forte pente; un axe B_1 ne peut être déversant. En cas de faible pente, ce peut être un axe A_3 , mais sa longueur doit être très limitée, de telle sorte que l'écoulement se ramène à celui d'un déversoir à crête épaisse et ne peut guère être déterminé que par l'expérience (fig. 116, b).

b) L'autre est $h_1'' > H_c$ et ne peut correspondre qu'à un axe A_2 (écoulement lent et faible pente) (fig. 116, a). Dans ce cas, h_0 pourrait atteindre sa valeur limite h_0' telle que $h_1'' = H_c$, d'où

$$\frac{q^2}{g \cdot h_0} = M_c = \frac{3}{2} \cdot H_c^2$$

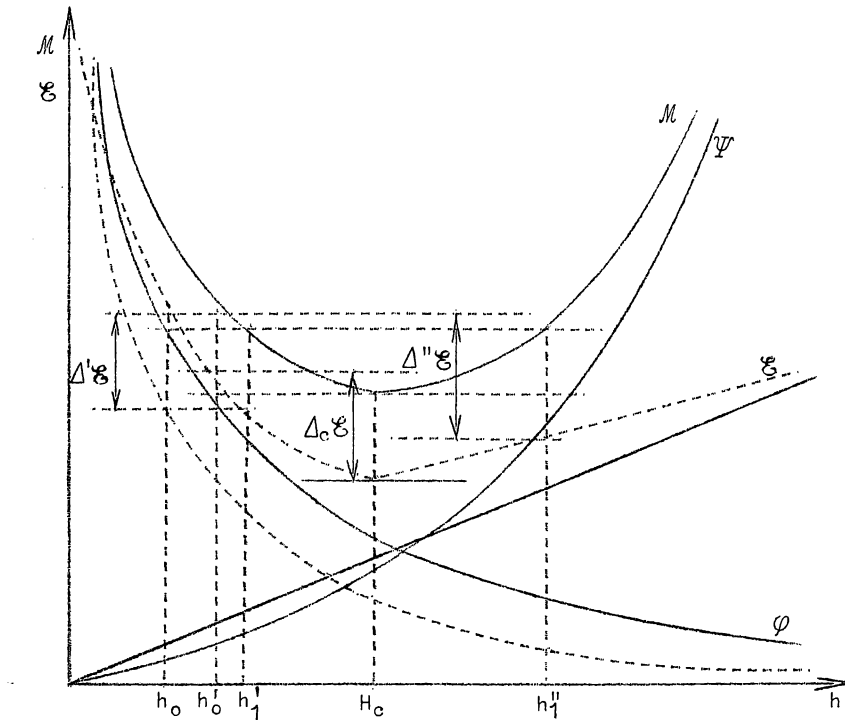


Fig. 115.

Comme $\frac{q^2}{g} = H_c^3$,
 $h_o' = \frac{2}{3} H_c$

d'où

$$q = \sqrt{g \cdot H_c^3} = 1,455 \sqrt{g \cdot h_o'^{3/2}}$$

Ce résultat n'est pas rigoureux, car les filets ne sont pas parallèles. Selon Hunter Rouse, des résultats expérimentaux auraient établi que

$$h_o = 0,715 H_c = 0,715 \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

d'où $q = 1,654 \sqrt{g \cdot h_o'^{3/2}}$

En toute hypothèse, le point d'origine le plus bas d'un axe d'aval A₂ n'est donc pas le point O₂' correspondant à

$h_o = H_c$ (fig. 39, par.9, chapitre X). Dans l'exposé qui précède, Δs n'est pas déterminé et ne peut résulter que

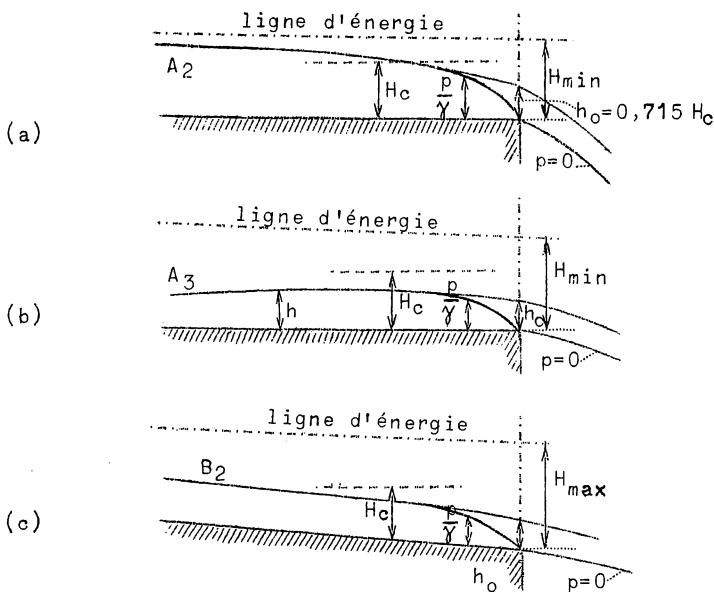


Fig. 116.

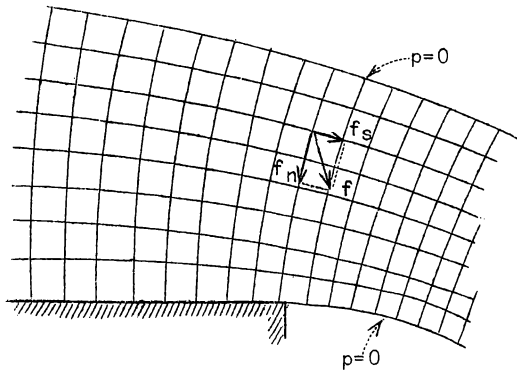


Fig. 117.

de l'expérience ou, approximativement, par le tracé des équipotentiellles et des filets liquides (ou lignes de courant)(fig. 108 et 117). Comme Δs est à la distance à l'arête déversante de la section à partir de laquelle les filets ne sont plus sensiblement parallèles, il peut se produire une résistance de frottement sur ce parcours, supérieure à i par unité de longueur, puisqu'il y a abaissement (voir paragraphe 5). L'équation (131) deviendra donc

$$\varphi_0 = M_1 + \frac{P_i - F}{\gamma_e} < M_1$$

Ceci augmente h_0 par rapport à la figure 115 et aussi h'_0 .

Si l'on considère le déversement libre comme le cas limite d'un déversoir en mince paroi, c'est-à-dire de hauteur $p = 0$, $h_{am} = h$, on a, d'après les formules 114, 115 et 116 (paragraphe 17) :

$$q = \left(0,405 + \frac{0,003}{h}\right) \cdot 1,55 \sqrt{2g} \cdot h^{3/2}$$

$$= \sim \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2g} \cdot h^{3/2}$$

$$q^2 = \frac{4}{9} \cdot 2g \cdot h^3 \quad h^3 = \frac{9}{8} \cdot \frac{q^2}{g} = \sim \alpha \frac{q^2}{g}$$

avec $\alpha = \frac{9}{8} = 1,125$ au lieu de 1,11 .

Donc $h = H_c$, ce qui correspond à ce qui est indiqué ci-dessus en b).

Le phénomène de déversement, tel qu'il est représenté à la figure 115 donne lieu à une augmentation de ξ , de $\Delta' \xi$ dans le cas a, de $\Delta'' \xi$ dans le cas b, avec $\Delta'' \xi > \Delta' \xi$. C'est ainsi que le passage de H_c à h'_0 donne lieu à une augmentation de charge

$$\Delta_c \xi = \xi_{h'_0} - \xi_c = H_c \cdot \left(\frac{43}{24} - \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{24} H_c .$$

Toutefois, cette augmentation de charge est réduite par les pertes de charge de frottement dont il vient d'être question. L'augmentation de h_0 entraîne en effet une diminution sensible de $\Delta' \xi$ et de $\Delta'' \xi$. De même l'augmentation de h'_0 entraîne une diminution de $\Delta_c \xi$.

En tout état de cause, la ligne d'énergie du courant doit rester en pente jusqu'au déversement, mais on constate néanmoins qu'au voisinage du déversement libre, les pertes de charge sont réduites.

Tout comme l'axe B_1 , un axe A_1 ne peut donner lieu à déversement libre.

21.- DEVERSOIRS A CRETES PROFILEES ET A TALUS OU COURSIERS

Pour les formes plus compliquées réalisées par les déversoirs épais à arrondis, talus et gradins construits en maçonnerie, pierres sèches ou charpentes, le nombre de paramètres influant sur le débit est si grand qu'il n'est plus possible d'en donner des formules simples générales. Bazin, Rafter, Rehbock et d'autres auteurs ont donné des formules ou des valeurs de m pour différents types, que l'on peut employer pour des déversoirs semblables, en vertu des lois de similitude. On constate d'une manière générale que m est favorablement influencé par l'inclinaison du parement amont, par des arrondis et par l'inclinaison du parement aval lorsqu'elle est inférieure à 45° . Il est défavorablement influencé par l'épaisseur de la crête, surtout de sa partie plane horizontale et par l'inclinaison du parement aval lorsqu'il est incliné de plus de 45° sur la verticale.

Pour une forme déterminée, m est une fonction complexe de h et de u , donc de p , que l'on peut déduire d'essais sur modèles à échelle réduite. D'après les expériences de M. Escande, publiées en 1928, la loi de similitude n'est cependant pas tout à fait rigoureuse. On constate d'une manière générale que m croît avec h jusqu'à une certaine limite et a un maximum qui est en général supérieur à 0,50 et peut atteindre 0,58 à 0,60 pour les déversoirs bien profilés. Au-delà du maximum, la nappe peut être instable et agitée, les valeurs de m sont incertaines. On établit les déversoirs de préférence de telle manière que m soit maximum pour h_{max} , c'est-à-dire Q_{max} , et favorablement profilés.

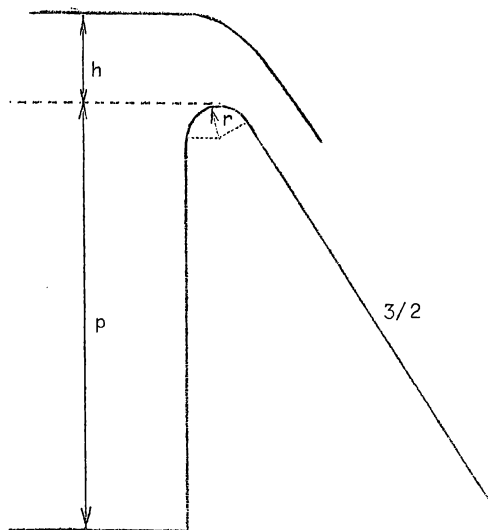


Fig. 118.

D'après Rehbock, pour les déversoirs à crête circulaire du type de la figure 118,

$$m = \frac{2}{3} \left[0,312 + \sqrt{0,30 - 0,01 \left(5 - \frac{h}{r}\right)^2} + 0,09 \frac{h}{p} \right] \quad (132)$$

à condition que $p > r$, $r \gg 0,20 m$

$$\text{et } h < r \cdot \left(6 - \frac{20 r}{p + 3 r}\right).$$

m est maximum lorsque

$$h = r \cdot \left(6 - \frac{20 r}{p + 3 r}\right).$$

D'après Rehbock, cette formule est applicable d'une manière approximative à tous les déversoirs à crête complètement circulaire.

Les crêtes planes sans arrondis peuvent donner des valeurs très faibles. Ainsi, pour le barrage sur le Drac à Avignonnet, la lame se soulève par rapport à la crête aux fortes charges et le déversoir

fonctionne comme en mince paroi. Rehbock a trouvé

$$m = \frac{2}{3} \cdot \left[0,79 - 0,6 \cdot \left(0,74 - \frac{h}{p}\right)^2 \right] \quad \text{pour } h = 0,1 p \text{ à } 0,9 p \quad (\text{fig. 119}) \quad (133)$$

Lorsque $\frac{h}{p}$ est faible on voit que $m_{min} = 0,31$ environ.

Un simple arrondi comme au barrage de Holyoke améliore déjà beaucoup le résultat. Rehbock a trouvé

$$m = \frac{2}{3} \cdot \left[0,87 - 0,5 \cdot \left(0,83 - \frac{h}{p}\right)^2 \right]; \quad h = 0,1 p \text{ à } 0,6 p \quad (134)$$

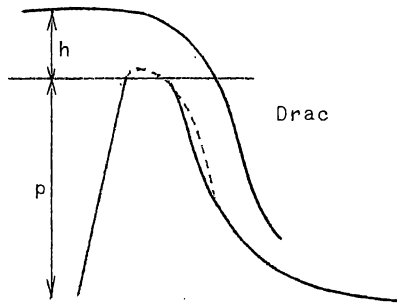


Fig. 119.

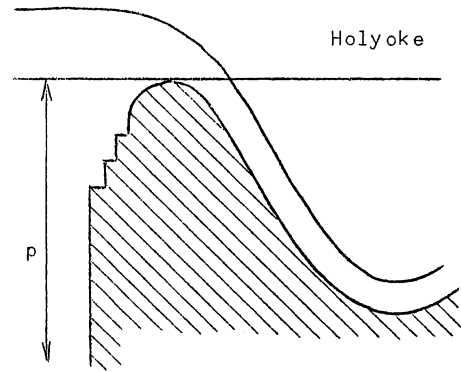


Fig. 120.

Le maximum est $> 0,35$. (fig. 120).

Les déversoirs à crête épaisse et à talus sont moins influencés par l'aval; d'autant plus que la crête est plus épaisse et les talus moins abrupts.

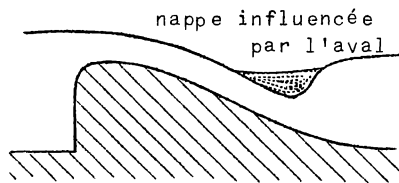


Fig. 121.

C'est ainsi qu'on peut avoir des déversoirs noyés à coursier avec ressaut éloigné. La distance du ressaut dépend du débit et de la hauteur de chute ainsi que de la profondeur à l'aval. Si le débit et la hauteur de chute sont relativement faibles par rapport à la profondeur d'aval, la nappe peut être influencée par l'aval, son pied est recouvert par le ressaut (fig. 121). Si le radier est en cuvette profilée, le pied peut être recouvert d'un tourbillon sans que la nappe soit influencée par l'aval. La nappe se

redresse pour sortir de la cuvette et passe par dessus un tourbillon inférieur pour produire enfin un ressaut recouvert d'un troisième tourbillon supérieur (fig. 122). Si la chute est très forte, la saillie de la nappe au-dessus du tourbillon inférieur peut être assez élevée. Les tourbillons dissipent une grande partie de la puissance de la chute, qui est $Q \cdot \gamma_0 \cdot H$ et qui doit être dissipée autant que possible dans l'étendue du radier pour éviter les affouillements en

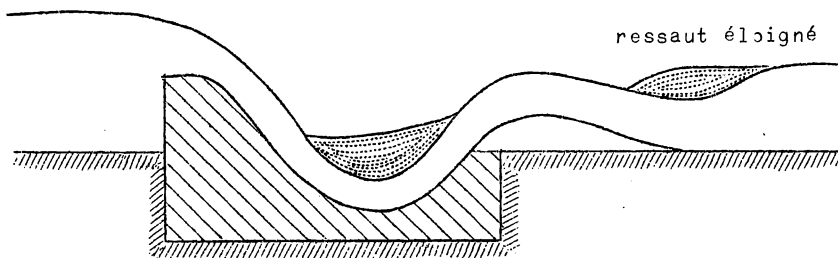


Fig. 122.

aval. Il suffit pour cela, d'après le professeur Rehbock, que le volume du tourbillon de couverture soit compris

$$\text{entre } 3,6 Q \cdot \sqrt{\frac{H}{g}}$$

$$\text{et } 7,2 Q \cdot \sqrt{\frac{H}{g}}$$

Quant à la force verticale exercée sur le radier par l'impulsion de la chute, elle est

$Q = \mu_e \sqrt{\frac{2H}{g}}$. D'après le professeur Rehbock, la longueur du radier doit être comprise entre $1,5 p' + 6 h_{\max}$ à $2 p' + 8 h_{\max}$ pour les déversoirs à chute et entre $4 p' + 2 h_{\max}$ à $8 p' + 4 h_{\max}$ pour les déversoirs noyés. Les meilleures dispositions s'étudient par essais sur modèles réduits.

Les parois latérales exercent aussi une grande influence sur le coefficient de débit, surtout pour les seuils noyés. Pour les seuils noyés, les formules de Bazin sont assez incertaines, on peut employer la formule de Borneman, qui tient compte de la contraction latérale.

$$Q = m \cdot l \cdot \sqrt{2g} \left\{ \frac{2}{3} \cdot \left[\left(H + \frac{\alpha \cdot u^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{\alpha \cdot u^2}{2g} \right)^{3/2} \right] + h' \cdot \sqrt{H + \frac{\alpha \cdot u^2}{2g}} \right\} \quad (135)$$

avec $m = 0,702 - 0,2226 \sqrt{\frac{H}{2}} + 0,1845 \frac{h - H}{h}$

Cette formule n'est qu'approximative et ne peut convenir que pour les études préalables. Pour les déversoirs, α varie de 1,40 à 2,25 environ.

Bazin adoptait une valeur moyenne de $\frac{5}{3} = 1,666$.

La nappe d'écoulement sur un déversoir à crête épaisse arrondie peut être analysé par le tracé approximatif des lignes de courant et des équipotentielles. On peut ainsi connaître les vitesses des divers filets liquides et en déduire la loi des pressions par la relation

$$E = z + \frac{p}{\gamma_e} + \frac{v^2}{2g} = \text{constante},$$

qui est bien satisfaite, les pertes de charge étant négligeables. En raison de la courbure des filets liquides, on trouve que la loi de variation des pressions n'est plus hydrostatique. (fig. 123 et 124). La figure 111 correspond au cas d'un déversoir dont la crête et le coursier

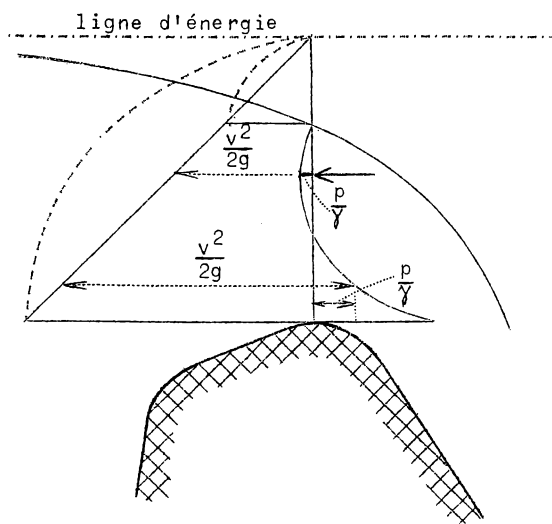


Fig. 123.

aval sont profilés suivant la forme de la surface inférieure de la nappe libre ventilée sur un déversoir à mince paroi (paragraphe 17, fig. 105 et 106). Cependant, ce profil correspond à une épaisseur déterminée h de la nappe déversante sur la crête. Si l'épaisseur est moindre, les pressions sur le coursier aval seront positives, mais si elle est plus grande, ces pressions deviendront négatives. Cependant, en cas de variation continue de courbure et d'un tracé sans discontinuité, il ne se produit pas d'instabilité ni de réduction du coefficient de débit aux plus fortes charges, mais bien en cas de discontinuités, même simplement de courbure, surtout à la crête. Il se produit des zones de séparation et de pression négative (fig. 125) même dans les conditions normales de débit. Il y a donc intérêt à bien profiler les déversoirs, par exemple comme à la figure 111 et pour l'épaisseur maximum de la lame déversante.

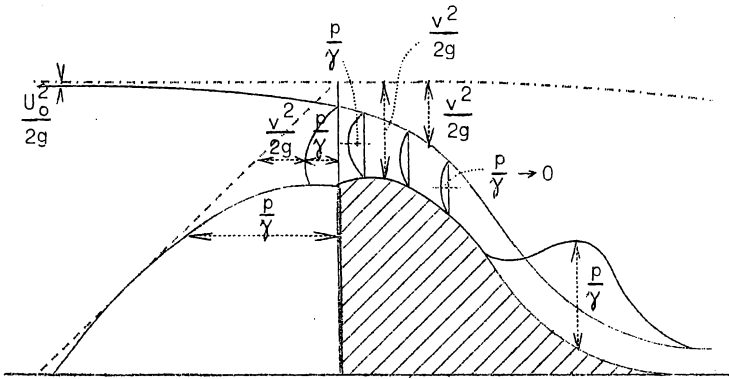


Fig. 124.

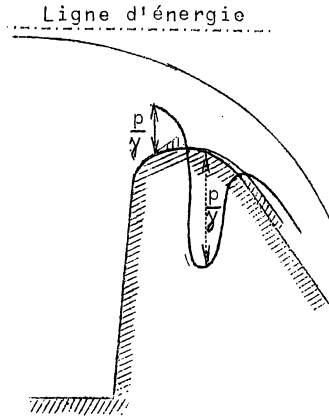


Fig. 125.

22.- RESSAUT AU PIED DES DEVERSOIRS

Dans la section 0, on a

$$u_0 = m_0 \cdot \sqrt{2g(h_{am} + \frac{\alpha \cdot u^2}{2g} - h_0)} \quad \text{et} \quad q = m_0 \cdot h_0 \cdot \sqrt{2g(h_{am} + \frac{\alpha \cdot u^2}{2g} - h_0)}$$

D'autre part

$$q = \pi \cdot \sqrt{2g} \cdot h^{3/2}$$

Donc

$$m^2 \cdot h^3 = m_0^2 \cdot h_0^2 \cdot (h_{am} + \frac{\alpha \cdot u^2}{2g} - h_0) \tag{135}$$

Cette équation détermine h_0 .

Pour des barrages bien profilés,

$m_0 = 0,94 - 0,95$,
ses limites sont 0,8 et 1.

Pour des barrages bien profilés,

$m \equiv 0,42 \text{ à } 0,48$,
mais on peut atteindre jusqu'à 0,62.

Pour des barrages mal profilés, à crête très épaisse

$m \equiv 0,32 \text{ à } 0,3855$

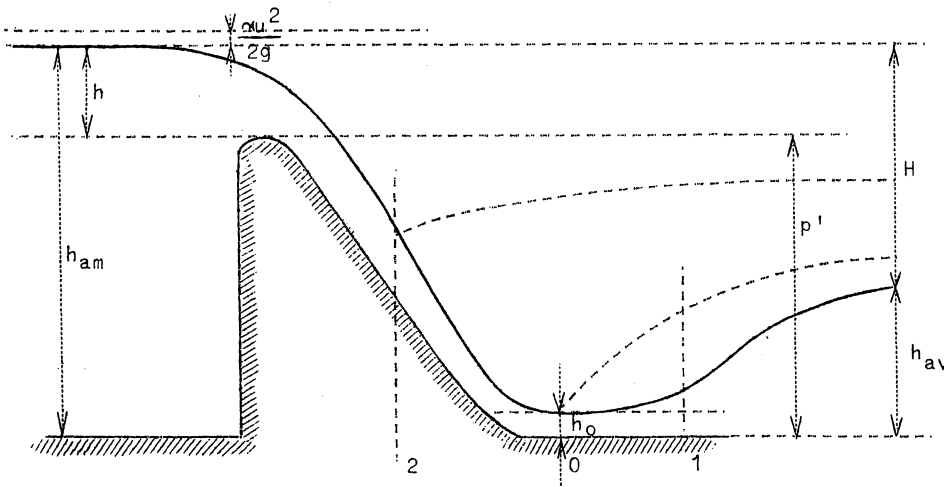


Fig. 126.

m_0 variant d'une manière corrélative.

Supposons qu'au pied du déversoir, dans la section 0 où les filots sont sensiblement parallèles, l'écoulement soit rapide. Il faut pour cela $h_0 < H_c$.

Or $q = m \cdot \sqrt{2g} \cdot h^{3/2} = \sqrt{g} \cdot H_c^{3/2}$, d'où $H_c = (m \cdot \sqrt{2})^{2/3} \cdot h$,

Donc $h_0 < (m \cdot \sqrt{2})^{2/3} \cdot h$.

Or, d'après (135), h_0 dépend de h_{am} , c'est-à-dire de p et de q [$h_{am} = p + h$ et $h = (\frac{q}{m \cdot \sqrt{2g}})^{2/3}$]. La condition $h_0 < 1,26 m^{2/3} \cdot h$ (aux environs de $h_0 < 0,8 h$) est généralement satisfaite. En général, h_0 est inférieur ou voisin à $0,5 h$.

Le facteur cinétique de courant dans la section 0 est

$$\mathfrak{K}_0^2 = \frac{u_0^2}{g \cdot h_0} = 2 m_0^2 \cdot \frac{(h_{am} + \frac{\alpha \cdot u^2}{2g} - h_0)}{h_0}$$

La hauteur correspondante du ressaut est (paragraphe 3)

$$h_1 = h_0 \cdot [\sqrt{0,25 + 2 \mathfrak{K}_1^2} - 0,5]$$

$$= h_0 \cdot [\sqrt{0,25 + 4 m_0^2 \cdot \frac{(h_{am} + \frac{\alpha \cdot u^2}{2g} - h_0)}{h_0}} - 0,5]$$

Pour que le ressaut soit éloigné, on trouve qu'il faut qu'au pied du barrage $h_{av} < h_1$.

Or $h_{av} = p' + H - h < h_1$ et $h_{am} = p' + h$.

Donc $H > p' - h - h_1$

Donc, il faut $H > p' - h - h_0 \cdot [\sqrt{0,25 + 4 m_0^2 \cdot \frac{(p' + h + \frac{\alpha \cdot u^2}{2g} - h_0)}{h_0}} - 0,5]$

ou $\frac{H}{p'} > 1 - \frac{h}{p'} , \frac{h_0}{p'} \cdot [\sqrt{0,25 + 4 m_0^2 \cdot \frac{(p' + h + \frac{\alpha \cdot u^2}{2g} - h_0)}{h_0}} - 0,5]$ (136)

Pour les valeurs de m_0 et de m indiquées et diverses valeurs de $\frac{h}{p'}$, on trouve une valeur limite de $\frac{H}{p'}$ variable, mais assez voisine de la valeur moyenne de 0,75 indiquée par Bazin (paragraphe 17).

Lorsque la chute diminue et atteint la valeur limite $H = 0,75 p'$, le ressaut se produit au pied du barrage. Si H devient inférieur à $0,75 p'$, le ressaut recouvre le pied de la nappe et le débit est influencé par l'aval. On a vu au paragraphe 17 que d'après Bazin, la limite $H = 0,75 p'$ subsiste même si le barrage est noyé ($H < h$). Pour des valeurs données de m_0 et de m , la formule (136) peut être représentée par un diagramme tel que celui de la figure 127 en négligeant $\frac{\alpha \cdot u^2}{2g}$.

Le ressaut éloigné peut être indésirable, pour éviter l'érosion en aval du déversoir. Si la valeur de $\frac{H}{p'}$ est trop grande pour donner lieu à un ressaut au pied du barrage, on peut la diminuer en augmentant p' ou en diminuant H .

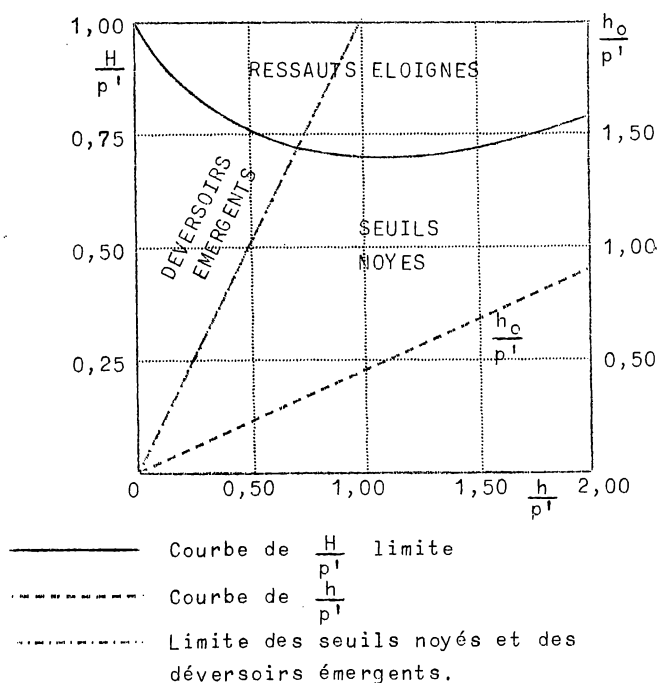


Fig. 127.

On obtient le premier résultat en ménageant un approfondissement en cuvette à l'aval du barrage, de profondeur $\Delta p'$, de telle sorte que $\frac{H}{p' + \Delta p'}$ devienne inférieur à la limite du ressaut éloigné. Le développement horizontal de la cuvette ne peut être déterminé que par l'expérience. Il est de l'ordre de 5 à 6 fois $(h_{av} - h_1)$, h_{av} étant la hauteur maximum du ressaut à l'extrémité aval de la cuvette. Le deuxième résultat peut être obtenu en établissant un seuil à une distance suffisante en aval du pied du barrage, du même ordre que ci-dessus. Si $\Delta p'$ est la hauteur du seuil et Δh l'épaisseur de la lame déversante sur le seuil, H devient

$$H - \Delta H = H - \Delta p' - \Delta h,$$

de telle sorte que le rapport $\frac{H - \Delta H}{p'}$ devient inférieur à la limite du ressaut éloigné. Comme il faut nécessairement $\Delta H > h_{av}$, il faut veiller à ce qu'un nouveau ressaut éloigné ne se forme pas en aval du seuil.

Le seuil peut être combiné avec la cuvette d'amortissement. Cependant, celle-ci suffit seule en principe et semble préférable au seuil. En tout état de cause, les dimensions exactes de ces dispositifs, notamment dans le sens horizontal, et les dispositions accessoires (bossages en saillie, seuils dentés, etc...) ne peuvent être déduites que de l'expérience. On peut se référer au paragraphe 11 et au paragraphe 18 pour calculer la hauteur d'eau sur le seuil ou à l'extrémité aval de la cuvette mais il n'y a pas intérêt à recourir à un seuil à crête épaisse.

En cas de très forte chute, on peut aménager une succession de seuils en cascade à ressauts multiples.

23.- ALIMENTATION PAR ORIFICE DE FOND

L'orifice de fond, dont la hauteur est commandée par une vanne levante, constitue un dispositif classique d'alimentation ou de génération des axes hydrauliques, comme les déversoirs. Il permet le réglage des débits et des niveaux comme les déversoirs à crête mobile. Les figures 128 et 129 reproduisent les schémas d'écoulement (équipotentiellles et lignes de courant) et les diagrammes des pressions.

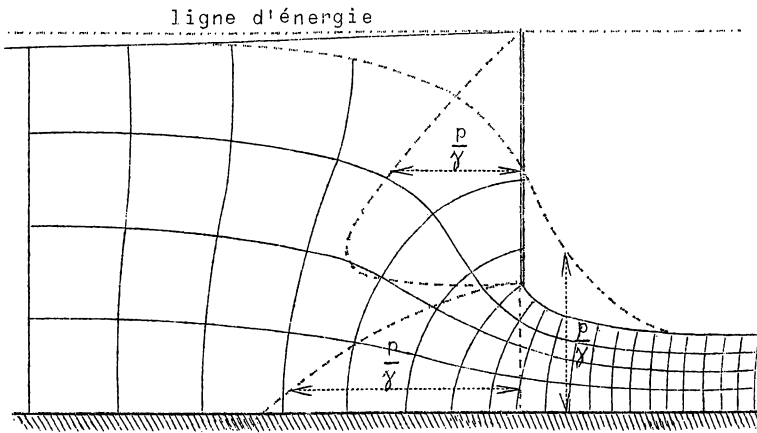


Fig. 128.

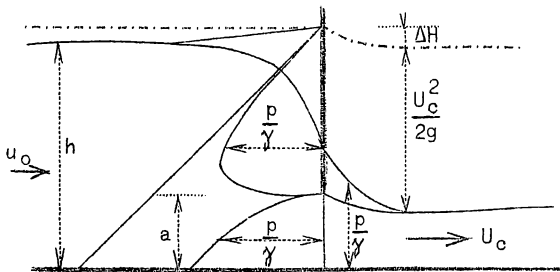


Fig. 129.

Ces figures correspondent à un canal rectangulaire de largeur constante en amont comme en aval de la vanne. Cette notion doit être préférée à celle moins réaliste, mais classique, du réservoir indéfini à niveau constant en amont de la vanne. Elle a aussi l'avantage d'écarter toute contraction latérale. Pratiquement la différence porte sur des coef-

ficients. S'il y a des contractions latérales, par exemple des orifices multiples séparés par des piles, on en tiendra compte par des coefficients appropriés, comme au paragraphe 13. Nous envisagerons dans la suite le cas de la largeur constante, sans contraction latérale. Les figures 128 et 129 correspondent à l'écoulement libre, à fleur d'eau. A une certaine distance en aval de la vanne se produit une section contractée, de hauteur $m \cdot h_0$. Les filets y sont sensiblement parallèles, l'écou-

lement est rapide ($m \cdot h_0 < H_c$). Selon la pente et les résistances en aval, il n'y a pas de ressaut ou un ressaut éloigné. Mais si les résistances d'aval augmentent, le ressaut remonte jusqu'à l'orifice, puis le noie. A partir de cette situation, le débit diminue au fur et à mesure que le niveau aval augmente (fig. 130).

Mais le ressaut ne disparaît pas complètement; il en subsiste une manifestation sous forme d'un abaissement sur la face aval de la vanne $\Delta h = h_{av} - h_b$, qui est un véritable ressaut noyé. Ce phénomène a été observé et expliqué pour la première fois par M. Fr. Keelhoff, professeur à l'Université de Gand (Expériences d'hydraulique, A.T.P.B, 1891. Expériences sur le mouvement de l'eau dans les canaux rectangulaires alimentés par une vanne. A.T.P.B, 1898). Le ressaut noyé est étudié, comme le ressaut parfait, par le principe des quantités de mouvement (fig. 131)

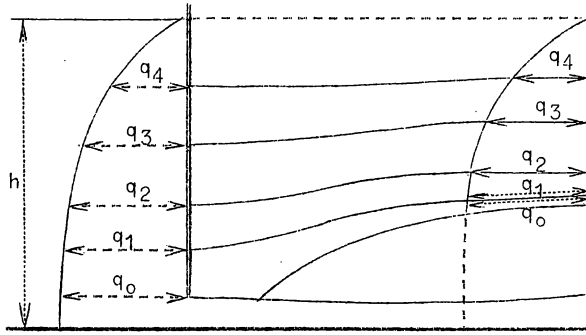


Fig. 130.

En l'appliquant entre les sections 0 et 1, on obtient :

$$\gamma_c \cdot \left(\frac{h_{av}^2}{2} - \frac{h_b^2}{2} \right) \cdot \sqrt{1 - i^2} \cdot dt$$

$$= \frac{1 + \eta}{g} \cdot \gamma_c \cdot \left(\frac{q^2}{m_o \cdot h_o} - \frac{q^2}{h_{av}} \right) \cdot dt$$

d'où :

$$\frac{1 + \eta}{g} \cdot \frac{q^2}{m_o \cdot h_o} + \frac{h^2}{2} \cdot \sqrt{1 - i^2}$$

$$= \frac{1 + \eta}{g} \cdot \frac{q^2}{h_{av}} + \frac{h_{av}^2}{2} \cdot \sqrt{1 - i^2} \quad (137)$$

ou

$$\varphi(m_o \cdot h_o) + \Psi(h_b) = M(h_{av})$$

(137 bis)

$m_o \cdot h_o$ est plus petit que H_c , tandis que h_{av} est plus grand que H_c et même que h_1 , hauteur du ressaut conjuguée à $m_o \cdot h_o$ c'est-à-dire telle que :

$$M(m_o \cdot h_o) = M(h_1) \quad (102)$$

Il est en effet nécessaire que h_a soit plus grand que h_1 , sinon il y aurait un ressaut parfait en aval de la vanne et l'orifice ne serait pas noyé (fig. 132).

Il en résulte que :

$$M(h_{av}) > M(h_1) = M(m_o \cdot h_o)$$

d'où $\varphi(m_o \cdot h_o) + \Psi(m_o \cdot h_o) < M(h_{av})$

donc, d'après (137),

$$\Psi(h_b) > \Psi(m_o \cdot h_o) \quad \text{et} \quad h_b > m_o \cdot h_o .$$

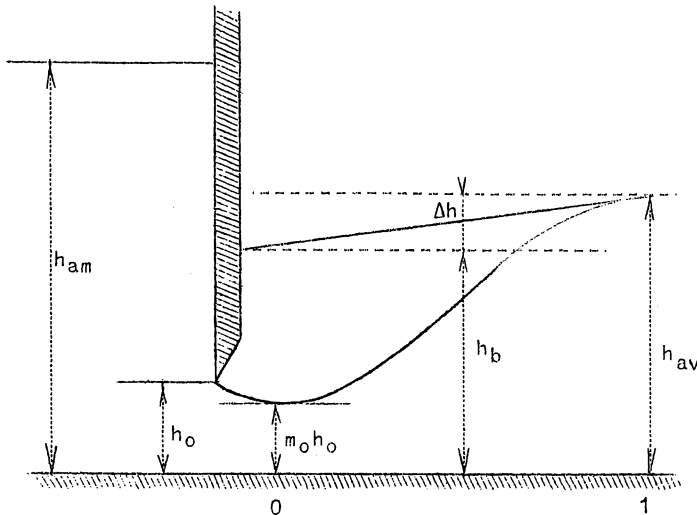
D'autre part (137) s'écrit

$$\varphi(m_o \cdot h_o) + \Psi(h_b) = \varphi(h_{av}) + \Psi(h_{av})$$

Comme $m_o \cdot h_o < h_{av}$, $\varphi(m_o \cdot h_o) > \varphi(h_{av})$, donc $\Psi(h_b) < \Psi(h_{av})$

et donc $h_b < h_{av}$.

On a donc $m_o \cdot h_o < h_b < h_{av}$.



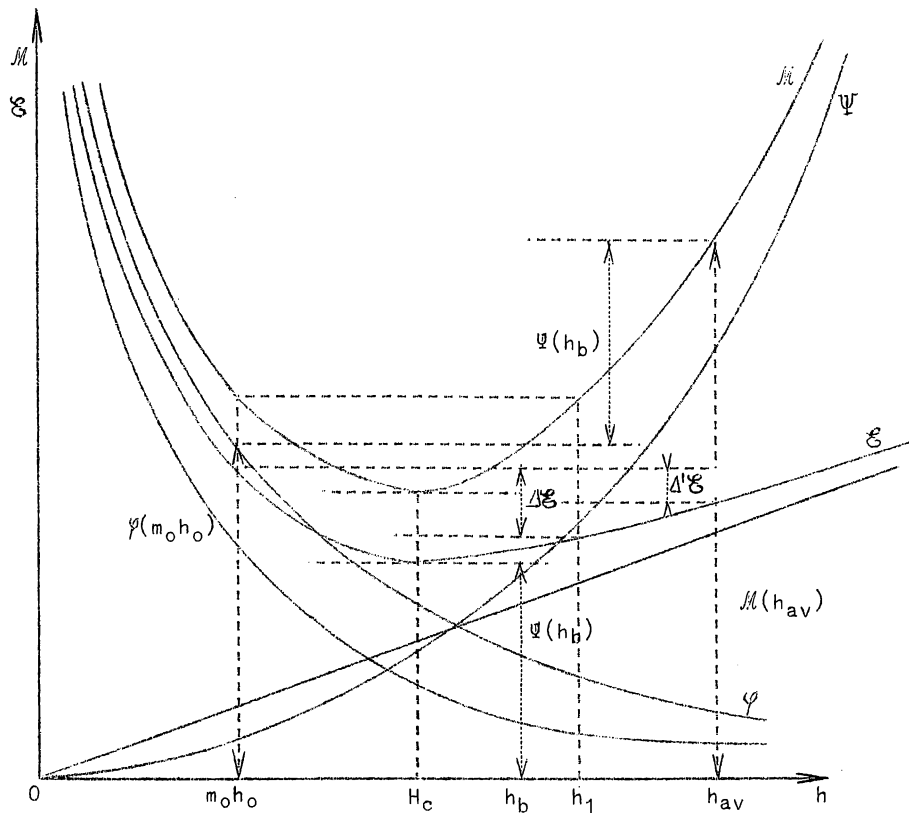


Fig. 132.

Il se produit donc une perte de charge

$$\Delta' z = z(m_0 \cdot h_0) - z(h_{av})$$

qui est plus petite que celle du ressaut parfait

$$\Delta z = z(m_0 \cdot h_0) - z(h_1)$$

On peut écrire une expression particulière de cette perte de charge comme au paragraphe 3. L'équation (137) peut être mise sous la forme

$$\frac{h_{av}^2}{2} - \frac{h_b^2}{2} = \frac{h_{av} \cdot u_{av}}{g} \cdot (u_0 - u_{av}) ,$$

en négligeant η et i . Ou encore

$$\frac{1}{2g} \cdot [u_0^2 - u_{av}^2 - (u_0 - u_{av})^2] = \frac{h_{av}}{2} - \frac{h_b^2}{2 h_{av}} ,$$

d'où

$$\frac{h_{av}}{2} + \frac{u_{av}^2}{2g} + \frac{(u_0 - u_{av})^2}{2g} = \frac{h_b^2}{2 h_{av}} + \frac{u_0^2}{2g}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{av} &= \frac{h_{av}}{2} + \frac{(u_o - u_{av})^2}{2g} = \mathcal{E}_o - h_b + \frac{h_b^2}{2h_{av}} \\ \Delta' \mathcal{E} &= \mathcal{E}_o - \mathcal{E}_{av} = \frac{(u_o - u_{av})^2}{2g} + \left(h_b - \frac{h_b^2}{2h_{av}} - \frac{h_{av}}{2} \right) \\ \Delta' \mathcal{E} &= \frac{(u_o - u_{av})^2}{2g} - \frac{(h_{av} - h_b)^2}{2h_{av}} \end{aligned} \quad (137 \text{ ter})$$

Cette expression est comparable à (105 bis), qui donne

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{(u_o - u_{av})^2}{2g} - \frac{(h_{av} - m_o \cdot h_o)^2}{2h_{av}} \quad (105 \text{ bis})$$

On peut écrire :

$$\Delta' \mathcal{E} = \frac{(u_o - u_{av})^2}{2g} - \frac{\Delta h^2}{2h_{av}}$$

La variation du phénomène est la suivante (fig. 130). Lorsque $h_{av} < h_1$, l'écoulement se produit à gueule bée (ou à fleur d'eau) et le débit est indépendant des circonstances d'aval et constant, en raison d'un ressaut éventuel éloigné. La limite de cette situation est atteinte lorsque $h_{av} = h_1$; le ressaut se produit contre la vanne.

Puis, h_{av} devenant plus grand que h_1 , l'abaissement $\Delta h = h_{av} - h_b$ commence à se produire et il vaut, pour $h_{av} = h_1$, $\Delta h = h_1 - m_o \cdot h_o$.

Puis h_{av} devient plus grand que h_1 et $h_b > m_o \cdot h_o$; en même temps le débit diminue. Les éléments du diagramme de la figure 132 se modifient en conséquence. Au fur et à mesure que h_{av} augmente et tend vers h_{am} , le débit diminue et $h_b > m_o \cdot h_o$ se rapproche de h_{av} . Finalement, pour $h_{av} = h_{am}$, $q = 0$, $h_b = h_{av}$ et il n'y a plus de mouvement.

h_{am} est la hauteur en amont de la vanne, à distance suffisante de celle-ci. Contre la vanne, la hauteur est sensiblement

$$h_{am} + \frac{u^2}{2g}, \quad u = \frac{q}{h_{am}} \quad (\text{fig. 115})$$

On a donc

$$h_{am} + \frac{u^2}{2g} = h_b + \frac{u_o^2}{2g}$$

Comme

$$u \cdot h_{am} = u_o \cdot m_o \cdot h_o = q,$$

$$h_{am} + \frac{m_o^2 \cdot u_o^2 \cdot h_o^2}{2g \cdot h_{am}^2} = h_b + \frac{u_o^2}{2g}$$

d'où

$$u_o = \frac{\sqrt{2g \cdot (h_{am} - h_b)}}{\sqrt{1 - \frac{m_o^2 \cdot h_o^2}{h_{am}^2}}}$$

et

$$q = \frac{m_o \cdot h_o \cdot \sqrt{2g \cdot (h_{am} - h_b)}}{\sqrt{1 - \frac{m_o^2 \cdot h_o^2}{h_{am}^2}}} \quad (138)$$

h_b est déterminé par (137), qui implique que l'on connaisse q . Le débit est donc dépendant des circonstances d'aval et ne peut être déterminé que par tâtonnements.

Selon Hunter Rouse, on aurait, aussi bien pour l'écoulement noyé que pour l'écoulement à gueule bée

$\frac{h_o}{h_{am}} =$	0	0,2	0,3	0,4	0,5
$m_o =$	0,611	0,6046	0,6036	0,6043	0,6066

Ces valeurs correspondent à une vanne à arête aiguë en mince paroi, analogue au déversoir à mince paroi. Si la vanne est profilée, selon le même principe que pour les déversoirs (paragraphe 17 et paragraphe 21), on adoptera comme profil de la partie inférieure de la vanne celui de l'écoulement à l'air libre (fig. 128). Cependant, ce profil variera avec $\frac{h_o}{h_{am}}$. On adoptera aussi celui correspondant au débit maximum. On remarquera que m_o varie d'ailleurs assez peu.

Cette formule (138) tient compte de la perte de charge locale, par substitution de h_b à h_{av} .

Lorsque $h_{av} < h_1$, l'écoulement est à gueule bée ou à fleur d'eau et le débit est constant, indépendant des circonstances d'aval. Outre le coefficient de contraction, on devrait introduire un coefficient de perte de charge très voisin de l'unité (de l'ordre de 0,95 à 0,98 pour $\frac{h_o}{h_{am}} = 0$ à 1 pour $\frac{h_o}{h_{am}} \equiv 1$).

Nous le considérerons comme compris dans m_o . L'expression du débit est dès lors :

$$\left. \begin{aligned}
 q &= \frac{m_o \cdot h_o \cdot \sqrt{2 g \cdot (h_{am} - m_o \cdot h_o)}}{\sqrt{1 - \frac{m_o^2 \cdot h_o^2}{h_{am}^2}}} \\
 q &= \frac{\sqrt{2 g \cdot h_{am} \cdot m_o \cdot h_o}}{\sqrt{h_{am} + m_o \cdot h_o}}
 \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

Les traités d'hydraulique négligent le plus souvent u , vitesse en amont de la vanne, c'est-à-dire qu'ils considèrent un réservoir de surface indéfinie à niveau constant. Sous réserve de contraction latérale, réduite par un profilage transversal approprié des pertuis, les équations (138) et (139) deviennent alors

$$q = m_o \cdot h_o \cdot \sqrt{2 g \cdot (h_{am} - h_b)} \quad (138 \text{ bis})$$

pour l'écoulement noyé et

$$q = m_o \cdot h_o \cdot \sqrt{2 g \cdot (h_{am} - m_o \cdot h_o)} \quad (139 \text{ bis})$$

pour l'écoulement à gueule-bée.

La variation de l'écoulement noyé avec h_{av} (ou h_b) n'est pas modifiée.

L'écoulement à fleur d'eau varie comme suit avec $m_o \cdot h_o$. Posons

$$\frac{m_o \cdot h_o}{h_{am}} = a < 1 .$$

On déduit de (139 bis)
$$m_o \cdot h_o = \sqrt[3]{\frac{a}{2(1-a)} \cdot \frac{q^2}{g}}$$

Or $H_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$, donc
$$m_o \cdot h_o = H_c \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{2(1-a)}} \quad (140)$$

q atteint un maximum pour $\frac{dq}{d(m_o \cdot h_o)} = 0..$

On trouve
$$m_o \cdot h_o = \frac{2}{3} \cdot h_{am}, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{2}{3}$$

et
$$m_o \cdot h_o = H_c, \quad q = \sqrt[3]{g \cdot (m_o \cdot h_o)^{3/2}}$$

On admet que, dans ces conditions, $m = \frac{2}{3}$, donc $h_o = h_{am}$

et
$$q = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \cdot \sqrt[3]{g \cdot h_{am}^{3/2}} \quad (128)$$

D'après des mesures effectuées sur les orifices profonds fermés par des vannes au barrage d'Assuan, pour l'écoulement à gueule-bée, la valeur $m_o = \frac{2}{3}$ convient bien à la formule (139 bis). Le débit est par excès pour les fortes levées de la vanne, par défaut pour des faibles. Il n'y a pas de contraction latérale, h_{am} est grand par rapport à h_o . (cfr J.H. Jones - The sluice discharge measurements at Assuan - Engineering, 27 sept. 1929, p. 137). (Voir aussi : The calibration of the Assuan Dam sluices - Engineering, 21 juin 1929).

Voir paragraphe 18). C'est la formule de Bélanger du déversoir à crête

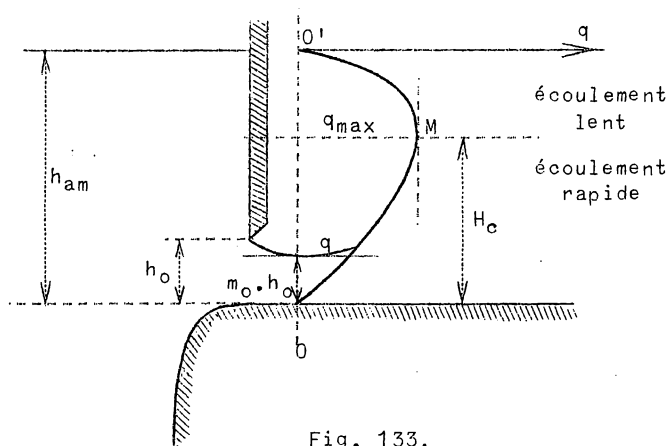


Fig. 133.

épaisse limitant un réservoir indéfini. En négligeant toute perte de charge, l'orifice de fond complète ainsi la figure 112 pour le déversoir à crête épaisse (fig. 133). La partie supérieure de la courbe O'M correspond à l'écoulement sur déversoir à crête épaisse, avec maximum q_m lorsqu'il est possible (paragraphe 18).

La partie inférieure de la courbe représente le débit de l'orifice de fond selon la formule (139 bis) avec le même maximum q_m lorsqu'il est possible. Le cas du déversement libre et de la vanne entièrement retirée sont donc identiques lorsque q_m est possible selon la formule (128) et comme l'indiquent les formules ci-dessus.

En fait, comme il est indiqué au paragraphe 18, cela dépend des conditions d'écoulement en aval, selon que la pente est faible ou forte, l'écoulement lent ou rapide.

Le cas $m_o \cdot h_o = \frac{2}{3} \cdot h_{am}$, $a = m_o = \frac{2}{3}$ constitue donc la limite de l'écoulement à fleur d'eau. Comme $m_o \cdot h_o = H_c$, il y correspond

$h_1 = m_o \cdot h_o = H_c$; c'est aussi la limite du ressaut, de hauteur nulle et sans perte d'énergie. Si h_{av} devient plus grand que $m_o \cdot h_o = \frac{2}{3} \cdot h_a$, l'écoulement devient lent, le débit diminue et devient

$$q = h_{av} \cdot \sqrt{2 g \cdot (h_{am} - h_{av})} \quad (129)$$

il n'y a plus de ressaut possible, parfait ou noyé, et il n'y a pas de perte d'énergie. Il sera montré plus loin les conditions d'aval requises pour réaliser cette situation.

Considérons maintenant les équations (139) de l'écoulement à gueule-bée, plus réalistes, mais plus difficiles à interpréter. En posant toujours

$$\frac{m_o \cdot h_o}{h_{am}} = a < 1, \quad q = \sqrt{2 g} (m_o \cdot h_o)^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a \cdot (1 + a)}}$$

Or $q = \sqrt{g} \cdot H_c^{3/2}$ d'où $H_c = m_o \cdot h_o \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{a \cdot (1 + a)}}$

D'après cela, on trouve $H_c = m_o \cdot h_o$ pour $a = 1$, c'est-à-dire

$$h_{am} = m_o \cdot h_o \quad \text{et} \quad q = \sqrt{g} \cdot (m_o \cdot h_o)^{3/2} \quad (128)$$

Ceci implique que dans la section de contrôle, la hauteur de l'eau soit H_c , l'eau y étant amenée d'une vitesse u telle que

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c = H_c + \frac{u^2}{2g} = \frac{3}{2} \cdot H_c$$

et que les conditions d'écoulement aussi bien en amont qu'en aval soient compatibles avec cette situation. C'est donc une solution singulière de débit maximum.

Une autre solution singulière est

$$m \cdot h_o = h_a, \quad u = 0 \quad \text{et} \quad q = 0,$$

le plan d'eau est horizontal tant en amont qu'en aval de la section de contrôle. Celle-ci n'en est d'ailleurs plus une, lorsque la vanne est retirée. C'est devenu une section quelconque, où tous les débits sont possibles selon les circonstances de l'écoulement.

Quoiqu'il en soit, on remarquera la continuité des formes d'écoulement. A levée de vanne constante, on passe de l'écoulement à gueule-bée à l'écou-

lement noyé à débit décroissant et vice-versa. Evidemment, la transition ne sera pas brusque, comme la théorie indique le passage du ressaut parfait au ressaut noyé; il y aura une transition accompagnée de quelqu'agitation.

De même, le passage de l'écoulement par orifice à l'écoulement par déversement libre et vice-versa se fera avec une transition progressive. Lors du retrait de la vanne, M. Hégly a constaté un abaissement brusque mais faible du niveau amont. L'inverse se produit lors de la pénétration de la vanne dans l'eau (cfr Eydoux, Hydraulique théorique et pratique). Les figures 130 et 131 expliquent bien ce phénomène.

On remarquera :

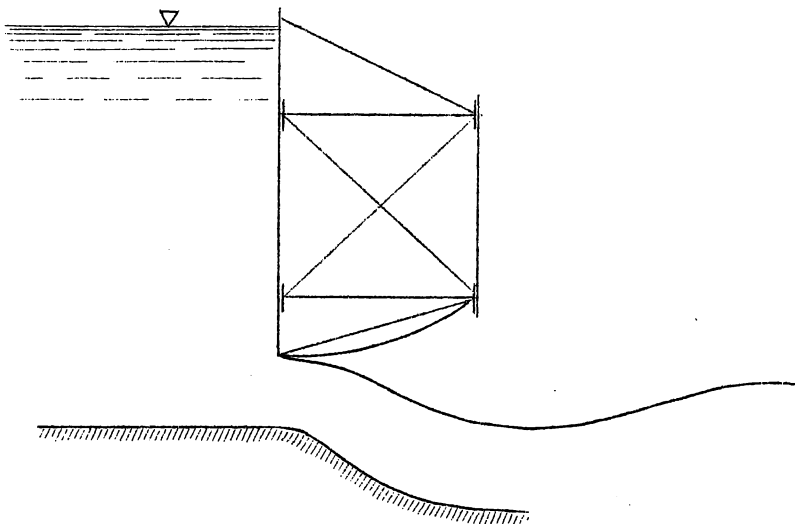
1°) que l'écoulement par orifice de fond à gueule-bée est toujours rapide, jusqu'à la limite H_0 de cet écoulement;

2°) que l'écoulement noyé est toujours lent, quelle que soit la levée de la vanne et même en cas de levée totale.

Il en résulte que l'écoulement par orifice partiellement découvert, tel qu'il est défini dans divers traités et correspondant à des formules du type (135), n'a pas d'existence et que les formules de ce type sont sans signification. Les écoulements noyés sont régis par les formules du type (128) en cas de déversement libre, par les formules des types (138) et (138 bis) en cas d'orifice noyé.

24.- RESSAUT EN AVAL DES ORIFICES DE FOND

Les écoulements à gueule-bée par les orifices de fond sont rapides et permettent de réaliser des facteurs cinétiques de courant \mathcal{G}^2 très élevés. Un ressaut est donc facilement possible et souvent provoquée pour dissiper la grande énergie cinétique en vue d'éviter l'érosion en aval. Les circonstances de l'écoulement sont bien connues par le paragraphe précédent. Si



$h_{av} < h_1$ (fig. 132) le ressaut est éloigné. On peut provoquer un ressaut dans l'étendue du radier, sans noyer l'orifice, par une cuvette d'amortissement (approfondissement) ou par un seuil noyé. On peut se référer aux considérations du paragraphe 22 relatives aux ressauts au pied des déversoirs profilés. Mais la cineticité de la lame d'écoulement est souvent plus grande qu'au pied des diversoirs. Elle n'a pas subi de courbure et elle est parallèle au fond du lit. Son énergie

Fig. 134.

est plus difficile à dissiper. Un seuil placé trop près peut être franchi par la lame sans ressaut. Une cuvette d'amortissement sera généralement plus appropriée, obligeant la nappe d'écoulement à se courber deux fois. Sa longueur devra être assez grande. Selon Escande, les vitesses ne se répartissent dans toute la section qu'à l'aval d'un "point d'éclatement" qui serait situé à une distance $6(h_{av} - h_0)$ en aval de la vanne, h_{av} étant la hauteur maximum du ressaut au droit du seuil ou à la sortie de la cuvette.

Des vibrations intenses peuvent se produire dans les vannes, surtout les grandes vannes de barrages mobiles, notamment par effet direct sur les parties des vannes noyées dans l'eau tumultueuse lorsque l'écoulement noyé est assez turbulent ou lorsque le ressaut atteint la face aval de la vanne. Lorsque l'écoulement est à fleur d'eau, si la conformation de la face inférieure de la vanne n'est pas favorable, par exemple à cause des pièces d'appui, des tourbillons, des pressions et des dépressions pulsatoires peuvent se produire sous et contre la vanne. Elles induisent des vibrations forcées dans les vannes et leurs organes de suspension, pouvant aller jusqu'à la résonance. Il en résulte des sollicitations défavorables ainsi que du bruit. Ces questions seront notamment étudiées sur modèles à échelle réduite. En principe, des dimensions, formes et dispositions appropriées de la partie inférieure des vannes, du radier de fuite et de la cuvette d'amortissement, seront déterminées de manière à réaliser une veine d'écoulement à fleur d'eau, se décollant nettement de la vanne et produisant un ressaut assez éloigné pour être en toute circonstance en dehors de l'espace occupé par la vanne (fig. 134). Les vannes des orifices d'écoulement de la digue du Zuiderzee ont donné lieu aux difficultés suivantes. Une dépression s'est produite sous la traverse inférieure à âme pleine, produisant un effort vers le bas contrariant le levage. On a découpé des ouvertures dans cette âme pour supprimer la dépression. Ce phénomène provenant d'une disposition peu favorable de la partie inférieure de la vanne et d'un ressaut trop rapproché.

25.- AUTRES DISPOSITIFS D'ALIMENTATION

Lorsqu'on a des barrages à vannes levantes, il peut y avoir un déversoir supérieur réglable à crête mobile permettant le déversement superficiel. Ces vannes permettent aussi les écoulements de fond et éventuellement, dans certaines positions, le déversement superficiel et l'écoulement de fond simultanés. Ces mouvements combinés et complexes peuvent être étudiés approximativement par les formules de l'hydraulique précédemment exposées, mais de préférence par des essais sur modèles à échelles réduites. Les résultats sont notamment assez fortement influencés par la conformation du déversoir et de la partie inférieure de la vanne, dont les essais sur modèles détermineront les dispositions les plus appropriées.

Outre les déversoirs superficiels, fixes ou mobiles, et les orifices de fond, on peut utiliser encore d'autres dispositifs d'écoulement en charge, notamment des conduites forcées et des siphons.

Les conduites forcées seront utilisées notamment pour la vidange des lacs artificiels. L'écoulement est naturellement rapide. On peut le ralentir par un canal divergent de longueur suffisante, sans ressaut (barrage d'Eupen) ou avec un ressaut très éloigné.

Les siphons sont le plus souvent automatiques. Ils sont souvent employés comme organes de décharge des barrages de réservoir et des canaux d'évacuation. Pour assurer l'automatisme de l'amorçage, il faut que l'entrée soit à un niveau inférieur à la crête du siphon et que la sortie soit noyée grâce à un seuil de retenue en aval. Ce seuil devra être assez éloigné pour que le ressaut n'influence pas la sortie du siphon (fig. 135). Il en résultera d'ailleurs un gain de chute et de débit appréciable, qui permet de réduire éventuellement le nombre et les dimensions des siphons.

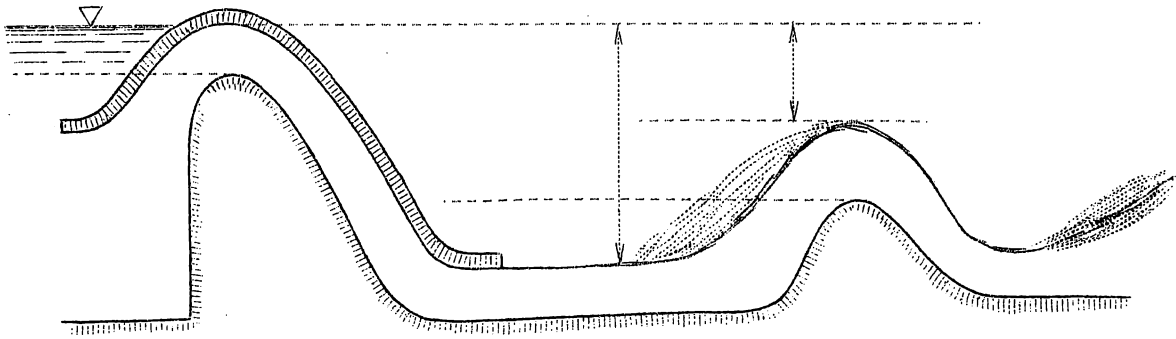


Fig. 135.

D'une manière générale, les ressauts éloignés augmentent la charge active des dispositifs d'écoulement en charge et par conséquent le débit. Le ressaut très éloigné présente aussi un grand avantage lorsque la décharge se produit dans le canal de fuite d'une usine hydroélectrique et que celui-ci aboutit en amont du ressaut. La hauteur du ressaut apporte un gain de chute et de puissance. Il faut toutefois qu'il n'en résulte pas des charges supérieures en raison des dépenses pour le canal.

Les dispositifs d'écoulement en charge présentent des avantages d'un moindre encombrement. Les écoulements de fond permettent l'évacuation des matières solides. Comme inconvénient, il y a la force vive considérable de la nappe, qui exige des revêtements spéciaux et des dispositifs d'amortissement. Si l'eau entraîne des graviers, pour éviter l'engrèvement de la cuvette d'amortissement, on ajoute le seuil terminant la cuvette, qui est formé alors de blocs à claire-voie. Il est essentiel que les dispositions soient étudiées sur modèles de manière que le ressaut soit bien dégagé et ne noie pas le dispositif d'alimentation.

26.- AXES COMPLEXES ENGENDRES PAR LES CONDITIONS TERMINALES

Nous considérons des canaux prismatiques.

A.- Canal à faible pente $H_u > H_c$

- 1) Dans un canal de grande longueur, la partie d'aval peut comporter un axe A_1 ou A_u , déterminé par le point origine d'aval. Le débit est indépendant s'il y a un ressaut et un axe A_3 d'amont, dont le point origine d'amont est déterminé par le débit qui est

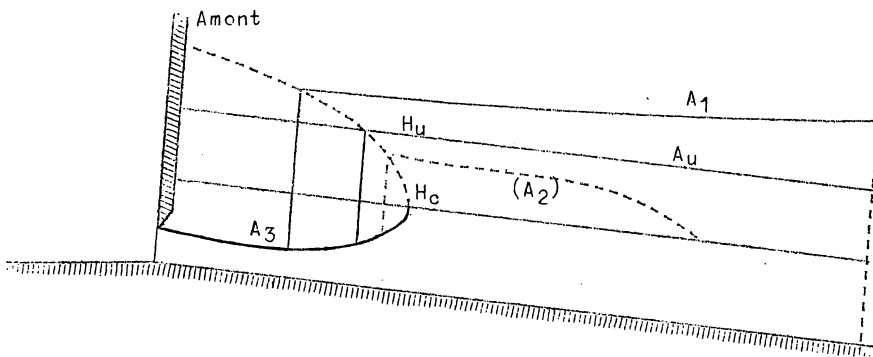


Fig. 136.

indépendant (fig. 136). Un axe d'abaissement A_2 n'est possible que dans un canal de longueur limitée.

2) Lorsque les résistances augmentent, on peut avoir un axe A_1 ou A_u dans toute l'étendue entre l'extrémité amont et l'extrémité aval du canal. Le ressaut est noyé ou l'alimentation se fait par déversement en régime lent (fig. 137). Le débit est dépendant et se calcule par tâtonnements. Dans ce cas également, un axe A_2 n'est passible que si la longueur est limitée.

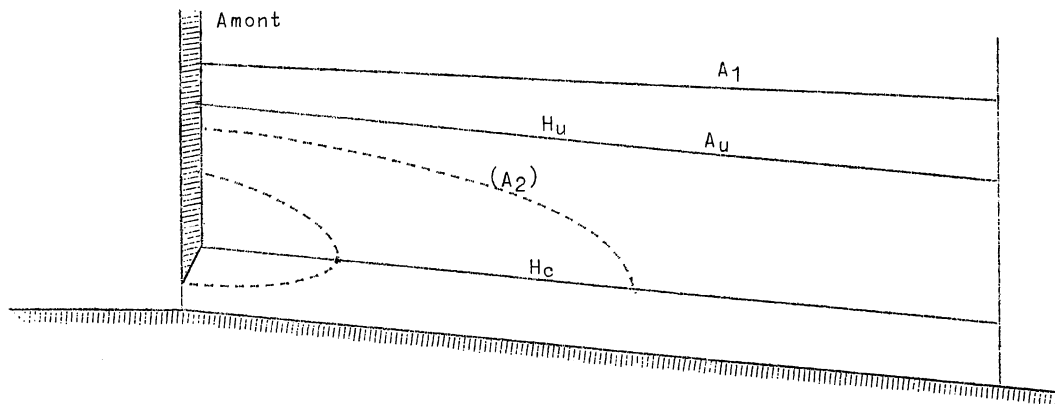


Fig. 137.

3) Lorsque le canal est court, on peut avoir un axe A_3 à l'amont, un ressaut, un axe A_2 se terminant par un déversement dans la section d'aval. Le débit est indépendant (fig. 138). L'axe A_2 est l'axe limite. S'il y a des résistances en aval, on peut avoir un axe A_2 sans déversement.

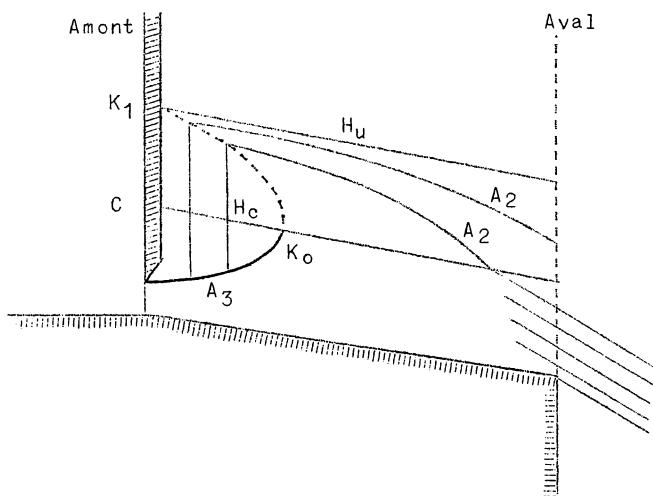


Fig. 138.

4) Dans un canal court, on peut avoir aussi un axe A_2 déversant avec ressaut noyé (fig. 139).

Le débit est dépendant et se calcule par tâtonnements. L'axe A_2 est l'axe limite. S'il y a des résistances, on peut avoir un axe A_2 sans déversement.

5) Dans un canal très court, on peut avoir un court tronçon d'axe A_3 déversant et à débit indépendant (fig. 140).

Plus H_c s'élève, le débit augmentant, plus K_0 et

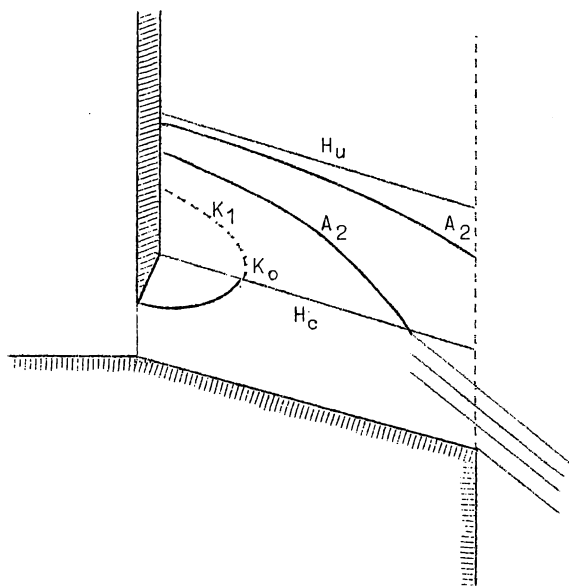


Fig. 139.

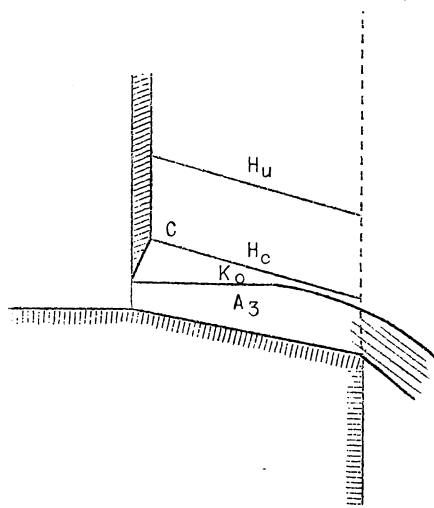


Fig. 140.

K_1 se rapprochent de C , plus l'axe A_3 devient court. Il se réduit à un point pour la levée totale de la vanne. Mais l'écoulement n'est plus possible, H_u étant toujours plus grand que H_c . Si le lit à quelque longueur, on est donc ramené au cas 2 bien avant que K_0 , K_1 et C soient théoriquement confondus et le déversement libre du cas 6 succédera au cas 2. Si le lit est très court, on se trouve dans le cas du déversoir à crête épaisse courte (paragraphe 18), combinaison d'une prise d'eau dans un réservoir (paragraphe 19) et du déversement à l'extrémité aval d'un canal (paragraphe 20). On se réfèrera à cas paragraphes.

6) Le cas 2) en cas de déversement lent se présente suivant la figure 141. Le débit est dépendant et se calcule par tâtonnements.

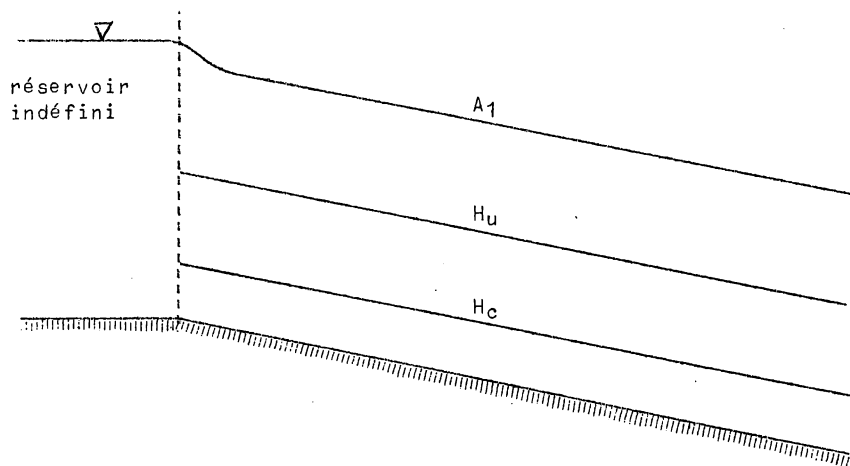


Fig. 141.

B.- Canal à forte pente $H_u < H_c$

1) On peut avoir des axes simples d'amont B_2 , B_u et B_3 en cas d'écoulement libre à l'aval. Le débit est indépendant et se calcule directement (figure 142). La position limite de l'axe B_2 est celle qui coupe la droite H_c dans la section de contrôle d'amont. Elle correspond au débit maximum $q_{max} = \sqrt{g \cdot H_c^3}$.

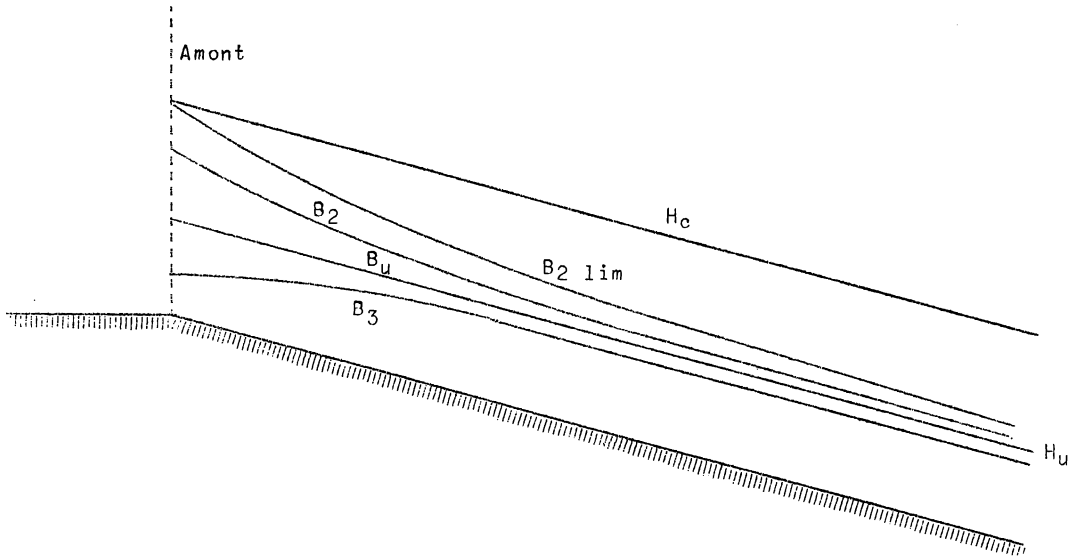


Fig. 142.

2) Tous ces axes peuvent se terminer à l'aval par une nappe déversante libre (fig. 143 a, b, c).

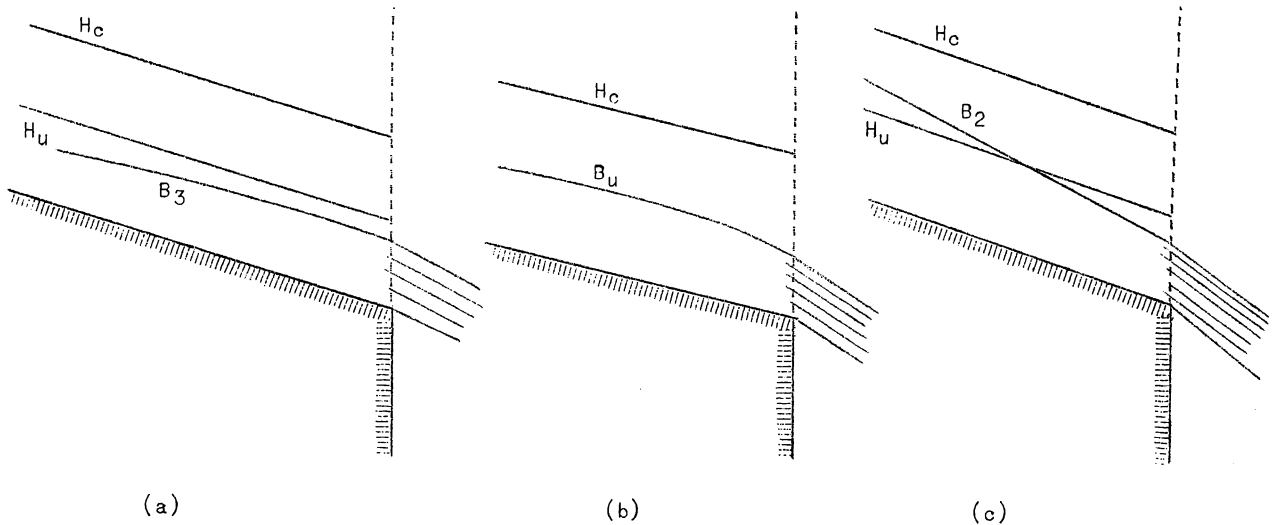


Fig. 143.

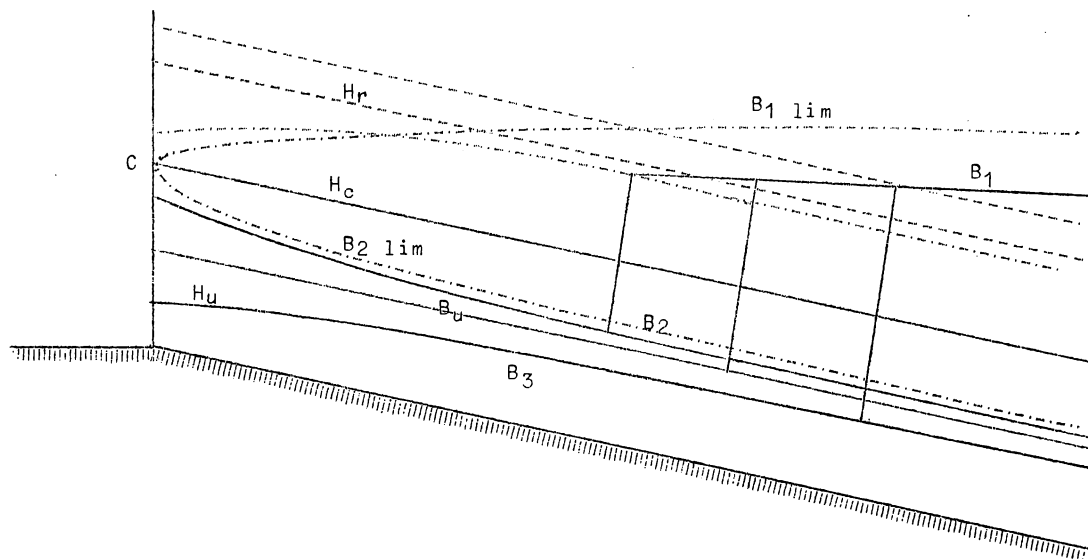


Fig. 144.

3) Tous ces axes peuvent se relever en ressaut vers l'extrémité aval du canal si les résistances sont suffisantes pour y engendrer un tronçon d'axe B_1 avec ressaut parfait. Le débit est indépendant (fig. 144). La limite de l'écoulement à résistances d'aval à débit indépendant correspond à l'axe B_2 limite et à l'axe B_1 limite correspondant, qui coupe B_2 lim au point C avec un ressaut nul, évanouissant.

Pour de plus fortes résistances, on a l'écoulement noyé (fig. 131). Le cas B_2 lim - B_1 lim correspond donc à la levée totale de la vanne et au passage de l'écoulement rapide avec ressaut à l'écoulement lent noyé. Ce passage se fait sans perte de charge (point H_c de ressaut nul).

4) Si le canal est très court et les résistances d'aval très élevées, on peut avoir un axe B_1 entre les deux sections de contrôle. Le débit est dépendant et se calcule par tâtonnements.

Selon le dispositif de contrôle à l'amont, on peut avoir un ressaut noyé ou un déversement (fig. 145 et 146).

C.- Remarques

1) Dans le cas de canaux à faible pente très courts, les cas des figures 136, 138, 139 et 140, peuvent donner lieu à des ressauts incomplets (paragraphe 7) ou à des déversements noyés, compris entre le ressaut incomplet (paragraphe 7) et le déversement libre (paragraphe 20).

2) Dans le cas de canaux à forte pente, les cas des figures 142, 143 et 144 peuvent donner lieu à des ressauts incomplets (paragraphe 7) ou à des déversements noyés, compris entre le ressaut incomplet (paragraphe 7) et le déversement libre (paragraphe 20).

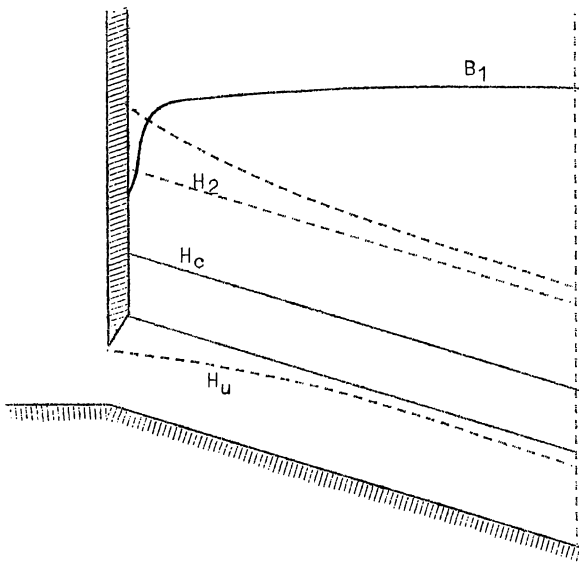


Fig. 145.

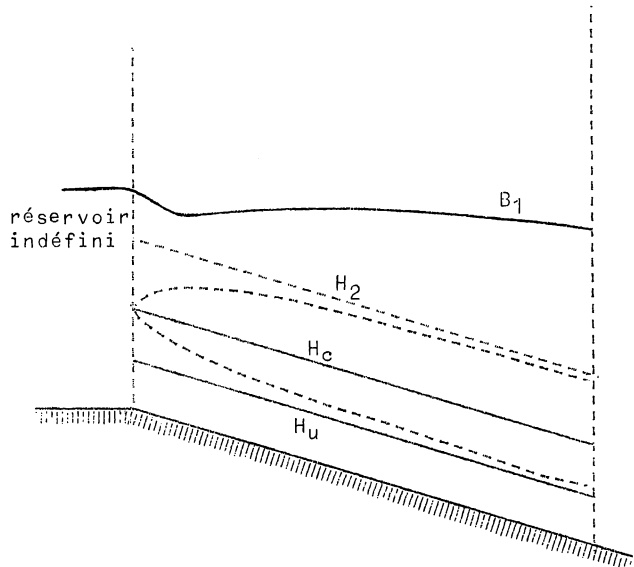
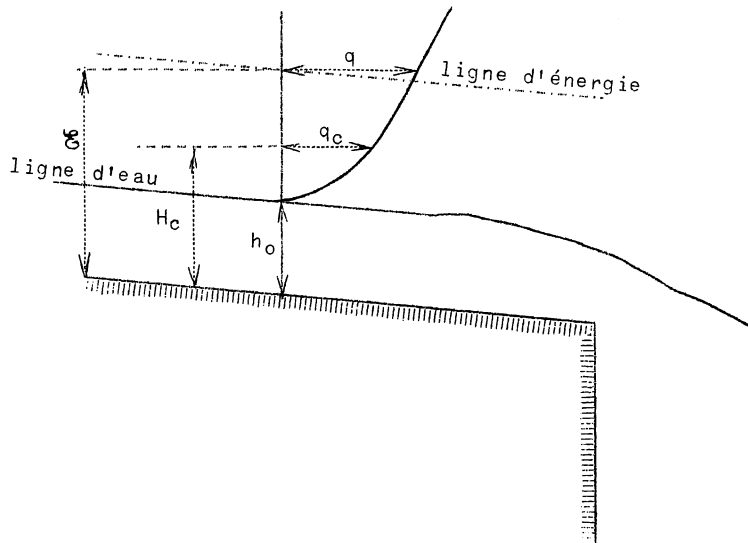


Fig. 146.

3) Déversement noyé. - Il résulte des figures 77, 78 et 79 que le déversement noyé a toujours lieu pour des hauteurs initiales dans la section de contrôle d'aval inférieures à H_c , donc en écoulement rapide. Dès lors le débit est indépendant du fait que le déversement est libre ou noyé et de l'élévation du niveau d'aval, pourvu que la hauteur initiale soit inférieure à H_c . On se réfèrera à la figure 18, paragraphe 3, chapitre X. Soit h_0 la hauteur initiale de la ligne d'eau. On porte la courbe de q en fonction de ξ (semblable à la courbe de la figure 18 à valeur constante h_0 de h), comme indiqué à la figure 147.



L'intersection avec la ligne d'énergie ξ donne q , qui est indépendant du niveau aval dès que $q > q_c$, c'est-à-dire que $\xi > H_c$, ce qui est réalisé dès que $h_0 < H_c$. Pratiquement donc, le fait que le déversement est libre ou noyé, n'influe

guère sur les conditions de l'écoulement.

4) Courbes des débits. - Lorsque l'on a à étudier des problèmes d'axes complexes, à débits dépendants notamment, il y a intérêt à tracer les courbes des débits dans les sections de contrôle d'amont ou d'aval, selon les circonstances du cas concret. A titre d'exemples purement théoriques, les figures 148 et 149 représentent des cas d'écoulement fluvial dont les lignes d'eau sont astreintes à passer par des points fixes dans les sections de contrôle d'amont ou d'aval.

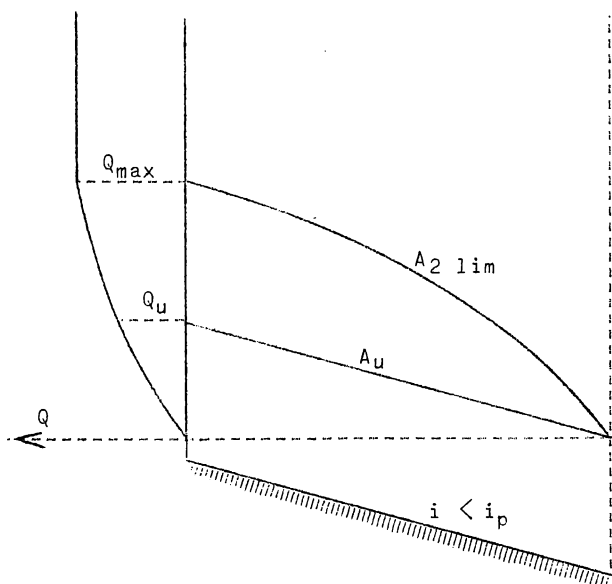


Fig. 148.

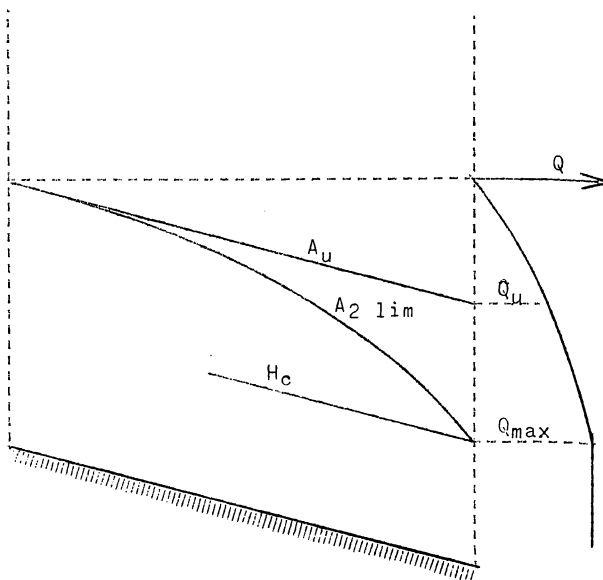


Fig. 149.

27.- DEVERSOIR LATÉRAL ENTRE DEUX CANAUX

Sur la longueur L du déversoir latéral séparant les deux canaux, le débit est varié dans chacun d'eux, de la même quantité $\frac{dQ}{ds}$ en valeur absolue par unité de longueur. On se réfère au chapitre X, paragraphe 17 pour la détermination des deux axes. On admet que le déversement est libre et non influencé par l'aval; la hauteur p' du déversoir au-dessus du canal inférieur doit donc être assez grande. La crête du déversoir est généralement émergente, mais cela ne doit pas être nécessairement réalisé. On appliquera les méthodes du chapitre X, paragraphe 17.

On a
$$\frac{dQ}{ds} = Q' = \pm m \sqrt{2g} \cdot (h - p')^{3/2}$$

On admet que m est constant et que $w = u$. Dans la formule précédente et toutes celles qui suivent, il faut considérer en chaque point $(h - p')$ comme la hauteur de la lame déversante au-dessus de la crête du déversoir latéral, qui est en règle générale horizontale.

Dans le canal supérieur, $h_1 > h_0$ si l'écoulement est lent ($h_0 > H_c$), ce qui correspond

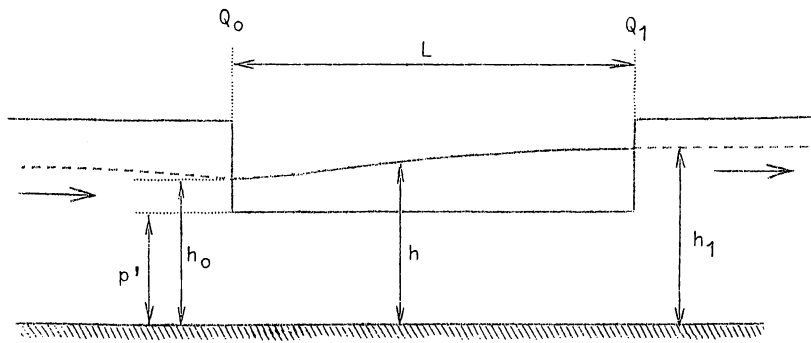


Fig. 150.

en général au régime fluvial ($i < i_p$). (fig. 150). C'est l'inverse en cas d'écoulement rapide ($h_1 < h_0$ si $h_0 < H_c$), ce qui correspond en général à l'écoulement torrentiel ($i > i_p$). On peut le montrer comme suit, en admettant que \mathcal{E} reste constant.

Dès lors :

$$\frac{d\mathcal{E}}{ds} = \frac{d\left(h + \frac{u^2}{2g}\right)}{ds} = \frac{d\left(h + \frac{Q^2}{2g \cdot l^2 \cdot h^2}\right)}{ds} = 0$$

d'où

$$\frac{dh}{ds} = -\frac{1}{2g \cdot l^2} \cdot \frac{d\left(\frac{Q^2}{h^2}\right)}{ds} = -\left[\frac{Q \cdot \frac{dQ}{ds}}{g \cdot l^2 \cdot h^2} - \frac{Q^2}{g \cdot l^2 \cdot h^3} \cdot \frac{dh}{ds}\right]$$

d'où finalement

$$\frac{dh}{ds} = \frac{Q \cdot h}{Q^2 - g \cdot l^2 \cdot h^3} \cdot \frac{dQ}{ds}$$

$\frac{dh}{ds}$ est du même signe que $\frac{dQ}{ds}$ ou de signe contraire selon que Q^2 est $>$ ou $<$ $g \cdot l^2 \cdot h^3$, c'est-à-dire que $h < H_c$ ou $> H_c$.

L'expérience confirme cette variation de h dans le canal supérieur. En général, la variation est inverse dans le canal inférieur.

Pour déterminer rapidement la longueur approximative des déversoirs latéraux, on peut recourir à des formules spéciales.

Celle de Fröhling est

$$\Delta Q = 0,5 L \cdot (h_m - p') \cdot \sqrt[3]{2g \cdot (h_m - p')}; \quad (141)$$

elle donne une longueur par excès.

La formule de Velatta est

$$\Delta Q = 1,5 m \cdot L \cdot \sqrt[3]{2g \cdot (h_m - p')^3}; \quad (142)$$

avec

$$L = 1,9 p' + 0,42 \cdot \frac{h_1 - h_0}{h_1 + h_0 - 2 p'} \ll 13 p'$$

et $p' < 1 < 3,6 p'$, 1 étant la largeur du canal supérieur. Le coefficient de débit m est celui du déversoir rectangulaire transversal, normal au canal. La formule de Velatta correspond au cas $h_1 > h_0$ (fig. 148).

Pour $h_0 > h_1$, Coleman-Smith donnent la formule

$$\Delta Q = 0,315 L^{0,72} \cdot (h_0 - p')^{1,645} \text{ m}^3/\text{sec}. \quad (143)$$

Forchheimer a établi la solution analytique suivante. Il admet pour un canal rectangulaire assez large $R = h$. Il a recours à la formule de Manning (chapitre IX, paragraphe 6, d).

$$u = K \cdot R^{1/6} \cdot \sqrt{R \cdot I}$$

Enfin, sur le déversoir $\frac{dQ}{dL} = m \sqrt{2g} \cdot (h - p')^{3/2}$

Forchheimer écrit $m \sqrt{2g} = \sim 1,9$

Donc $Q = K \cdot b \cdot h^{1,667} \cdot \left(\frac{d(h-p')}{dx}\right)^{1/2}$

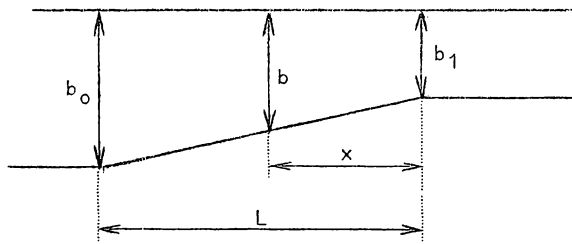


Fig. 151.

Forchheimer fait varier la largeur du canal supérieur de manière que $\frac{Q}{b} = \frac{Q_0}{b_0} = \frac{Q_1}{b_1} = \text{constante}$ (fig.151)

Comme $Q^2 = K^2 \cdot b^2 \cdot h^{3,33} \cdot \frac{d(h-p')}{dx}$

on en tire $\frac{d(h-p')}{dx} = \frac{Q_1^2}{b_1^2 \cdot h^{3,33} \cdot K^2}$

d'où $h - p' = (h_1 - p') + \frac{Q_1^2}{b_1^2 \cdot h^{3,33} \cdot K^2} \cdot x$,

en admettant que la variation de h soit négligeable.

On en déduit $dQ = m \sqrt{2g} \cdot \left[(h_1 - p') + \frac{Q_1^2}{b_1^2 \cdot h^{3,33} \cdot K^2} \cdot x \right]^{3/2}$

ou $\frac{dQ}{m \sqrt{2g}} = \left[\frac{Q_1^2}{b_1^2 \cdot h^{3,33} \cdot K^2} \right]^{3/2} \cdot \left[\frac{b_1^2 \cdot h^{3,33} \cdot K^2}{Q_1^2} \cdot (h_1 - p') + x \right]^{3/2}$

L'intégration donne :

$$\frac{Q_0 - Q_1}{m \sqrt{2g}} \cdot \left[\frac{b_1^2 \cdot h^{3,33} \cdot K^2}{Q_1^2} \right]^{3/2} = \frac{2}{5} \cdot \left\{ \left[\frac{b_1 \cdot h^{3,33} \cdot K^2}{Q_1^2} \cdot (h_1 - p') + L \right]^{5/2} - \left[\frac{b_1 \cdot h^{3,33} \cdot K^2}{Q_1^2} \cdot (h_1 - p') \right]^{5/2} \right\} \quad (144)$$

On peut en déduire la longueur L de déversoir nécessaire pour diminuer le débit de Q_0 à Q_1 .

28.- ECOULEMENT ULTRA RAPIDE AVEC ENTRAINEMENT D'AIR

Lorsque la vitesse devient très grande, la surface devient agitée. Il se forme des vagues qui déferlent et provoquent un mélange d'air et d'eau, la proportion d'air diminuant de la surface vers le fond. Selon Powell, ce phénomène se produit lorsque

$$\mathfrak{F} > \mathfrak{F}_{cr} = \frac{2 - \beta}{(1 + \beta) \cdot M}, \quad \mathfrak{F} = \frac{u}{\sqrt{\frac{g \cdot \omega}{\alpha \cdot l}}}, \quad M = 1 - R \cdot \frac{dX}{d\omega}.$$

Pour les canaux rugueux $\beta = 0$, $\mathfrak{F}_{cr} = 2$.

Pour les canaux lisses $\beta = 0,20$ à $0,25$, $\mathfrak{F}_{cr} = 1,5$ à $1,4$.

Il a déjà été indiqué au chapitre IX, paragraphe 8, que la formule du mouvement uniforme est modifiée. Selon Vreedenburg

$$Q_e = K \cdot (1 - \sin \alpha) \cdot \omega \cdot R^{2/3} \cdot (\sin \alpha)^{1/2}$$

pour une section rectangulaire, K étant le coefficient de Manning pour la rugosité. La vitesse moyenne de l'émulsion d'air et d'eau est

$$u = (1 + 2,5 \sin \alpha) \cdot \frac{Q}{\omega}$$

Selon Powell
$$C = 23 \log_{10} \frac{R}{C} + 14 \mathfrak{F} - 5,5 \cdot \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}_{cr}} - 44 \quad (145)$$

avec
$$\mathfrak{F} = \frac{u}{\sqrt{\frac{g \cdot \omega}{\alpha \cdot l}}}$$

Selon D. Pavel

1) si $i = \operatorname{tg} \alpha < \frac{0,0784}{R^{0,0384}} = i_{cr}$, le mouvement est normal.

2) si $i_{cr} < i < 0,542$, $Q = \beta_1 \cdot \omega_e \cdot C_e \cdot \sqrt{R_e i}$ avec $C_e = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R_e}}}$, $\beta_1 = \frac{0,4 \cos \alpha^{0,14}}{R_e^{0,03} \cdot i^{0,36}}$

3) si $0,542 < i$, on substitue à β_1 la valeur

$$\beta_2 = \frac{0,28}{\cos \alpha^{0,34} \cdot R_e^{0,03} \cdot i^{0,84}}$$

ω_e , R_e et C_e se rapportent à la section réelle d'eau, telle qu'elle est définie ci-après.

L'équation du mouvement permanent graduellement varié est selon Hall

$$\frac{d(z + \frac{u_e^2}{2g})}{ds} = - \sin \alpha + \frac{dh}{ds} \cdot \cos \alpha + \alpha \cdot \frac{u_e}{g} \cdot \frac{du_e}{ds}$$

u_e étant la vitesse réelle de l'eau. La hauteur réelle de l'eau est $h_e = \gamma \cdot h$, h étant la hauteur d'émulsion et γ la proportion moyenne en volume d'eau par rapport au volume total de mélange.

$q_e = h_e \cdot u_e = \text{constante}$, d'où $dh_e = - \frac{h_e \cdot du_e}{u_e} = - \frac{q \cdot du_e}{u_e^2}$

On a donc
$$\frac{ds}{du_e} = \frac{\frac{\alpha \cdot u_e}{g} - \frac{q}{u_e^2} \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha - \frac{K_e^2 \cdot u_e^2}{R_e^{4/3}}}$$

$$R_e = \frac{\omega_e}{X_{ie}} = \frac{\frac{b \cdot q_e}{u_e}}{b + \frac{2 q_e}{u_e}} = \frac{q_e}{u_e + \frac{2 q_e}{b}} = \frac{q_e}{u_e + B}, \quad \text{avec} \quad B = \frac{2 q_e}{b}$$

b est la largeur du canal rectangulaire.

Donc
$$\frac{ds}{du_e} = \frac{\frac{\alpha \cdot u_e}{g} - \frac{q_e \cdot \cos \alpha}{u_e^2}}{\sin \alpha - K_e^2 \cdot u_e^2 \cdot \left(\frac{u_e + B}{q_e}\right)^{4/3}} \quad (146)$$

D'après Hall,

$$\frac{1 - \varphi}{\varphi} = \frac{K_1 \cdot u_e^2}{g \cdot R_e} - K_2$$

$$K_1 = 0,00355 \text{ à } 0,0104, \quad K_2 = 0$$

q_e est le débit d'eau par unité de largeur, u_e est la vitesse de l'eau.

Donc
$$\varphi = \frac{1}{1 + \frac{K_1 \cdot u_e^2}{g \cdot R_e}}$$

et
$$K_e = K \cdot \left[\frac{1 + \frac{B \cdot K_1 \cdot u_e^2}{q_e \cdot g}}{1 + \frac{K \cdot u_e^2}{g} \cdot \left(\frac{u_e + B}{q_e}\right)} \right]^{2/3}$$

K est la valeur usuelle du coefficient de rugosité de Manning correspondant à la nature des parois. La formule 146 permet le calcul de proche en proche.

On déduit h_e de $\frac{q_e}{u_e}$ et $h = \frac{h_e}{\varphi}$

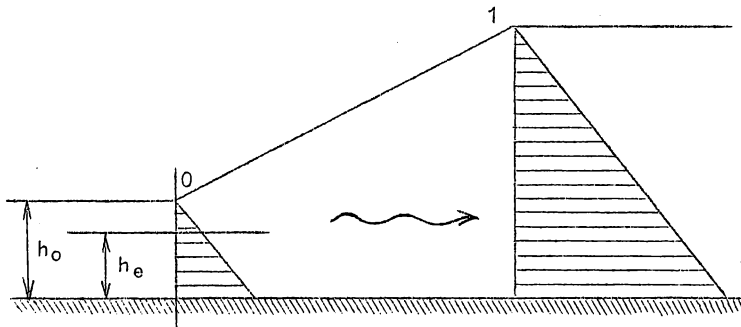


Fig. 152.

Une telle nappe d'eau tumultueuse arrivant au bas du parement aval d'un déversoir à talus ou coursier peut se relever en ressaut (fig. 152).

A l'amont du ressaut, la résultante des pressions est

$$\frac{\gamma_e \cdot h_e \cdot h_0}{2} = \frac{\gamma_e \cdot h_e^2}{2 \varphi}$$

Dès lors, l'équation du ressaut est

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_e \cdot h_e^2}{2 \varphi} + \frac{\gamma_e \cdot Q \cdot u_e}{g} \\ = \frac{\gamma_e \cdot h_1^2}{2} + \frac{\gamma_e \cdot Q \cdot u_1}{g} \end{aligned}$$

$$\frac{h_e^2}{2 \varphi} + \frac{Q^2}{g \cdot h_e} = \frac{h_1^2}{2} + \frac{Q^2}{g \cdot h_1}$$

d'où h_1 .

D'après De Lapp

$$\frac{Q_{mél}}{Q_e} = \mathcal{K} \cdot \mathcal{G}$$

Pour $\mathcal{G} = 4$ à 12 ; $\mathcal{K} = 0,18$ à $0,23$.

Comme $Q_{mél} = u \cdot h_{mél}$, $h_{mél} = \mathcal{K}^2/3 \cdot \sqrt[3]{\frac{Q_{mél}^2}{g}}$.

CHAPITRE XII

CALCUL DES CANAUX ARTIFICIELS A EAU COURANTE

1.- GENERALITES

Le calcul des canaux artificiels à eau courante est complexe, par suite du grand nombre de variables. Ce sont :

- 1°) le débit, ou plutôt les débits, moyens et extrêmes;
- 2°) la dénivellation totale et la longueur, c'est-à-dire la pente moyenne ou encore la pente maximum, déterminée par exemple par la nature du terrain;
- 3°) la largeur et la profondeur minima, si le canal doit servir à la navigation;
- 4°) la vitesse maximum en cas de navigation;
- 5°) la nature du terrain et des revêtements, qui détermine l'inclinaison maximum des talus et les vitesses maxima admissibles près du fond.

En outre, il faut tenir compte de l'économie qui dépend :

- 1°) de la largeur du canal, qui détermine la surface d'emprise;
- 2°) de la section du canal, qui détermine le cube de terrassements et l'importance des revêtements.

Dans le cas où l'on récupère l'énergie hydroélectrique, la pente intervient dans l'économie, car elle correspond à une perte de chute, donc de puissance. Il y a intérêt à réduire la pente au minimum pour un débit donné; cette condition n'est pas incompatible avec celle du minimum de dépense d'établissement. Cependant, le problème est rendu plus complexe et doit être résolu par des calculs numériques.

Les canaux artificiels se calculent d'après les formules du mouvement uniforme et généralement pour le débit maximum. C'est la solution la plus économique. Il faudra alors éventuellement vérifier si les profondeurs correspondant aux débits inférieurs sont suffisantes. Sinon, il faudra établir des ouvrages de retenue produisant les relèvements nécessaires en basses eaux, que l'on déterminera par le calcul des axes hydrauliques. Dans la suite, on se référera toujours à une valeur bien déterminée du débit.

2.- FORME DES CUNETTES MOUILLEES

Pour les canaux terrassés, la section parabolique réalise un profil d'équilibre (chapitre XVI). La section circulaire s'en rapproche également. La réalisation de ces formes est difficile. On y substitue généralement des sections polygonales et la plus courante est celle du trapèze symétrique, dont le rectangle est un cas particulier. Ce profil n'est pas d'équilibre, mais cela n'a guère d'inconvénients car les talus sont généralement

revêtus, au moins aux environs du plan d'eau.

On envisagera principalement ces formes de cunettes. L'étude des formes plus complexes peut se faire d'une manière tout à fait analogue, et les résultats principaux sont les mêmes lorsqu'il s'agit de sections toujours concaves vers le haut et variant d'une manière continue. (Chapitre X, paragraphe 5).

Dans les canaux enterrés et les galeries souterraines, à section fermée, généralement circulaire ou ovoïde, la concavité de la section n'est pas orientée partout vers le haut. Il en résulte des caractéristiques hydrauliques particulières, qui sont schématisées au chapitre X, paragraphe 18.

Il peut se produire que les circonstances topographiques et hydrologiques obligent à donner à la section d'un canal de dérivation ou d'assèchement un profil discontinu, comportant un lit mineur et un lit majeur.

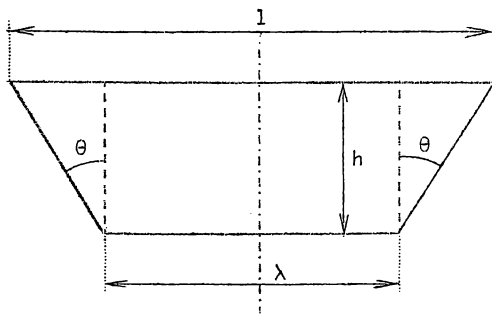


Fig. 153.

L'étude d'un tel profil, d'ailleurs exceptionnel pour un canal artificiel, se fait comme il est indiqué au chapitre XI, paragraphe 13. On pourra d'ailleurs s'inspirer des résultats de l'étude générale des sections simples.

Une section trapèze est définie complètement par : (fig. 153)

- la largeur au plafond λ ou la largeur au plan d'eau l ,
- la profondeur d'eau h ,
- l'angle θ des talus avec la verticale.

On a donc $\omega = h \cdot (\lambda + h \cdot \text{tg } \theta)$ et $\frac{\lambda \cdot h}{\omega} = \frac{\frac{\lambda}{h}}{\frac{\lambda}{h} + \text{tg } \theta}$

$\chi = \lambda + 2 h \cdot \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}$ et $\frac{\lambda}{\chi} = \frac{\frac{\lambda}{h}}{\frac{\lambda}{h} + 2 \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}}$

La largeur au plan d'eau est

$l = \lambda + 2 h \cdot \text{tg } \theta$ et $\frac{\lambda}{l} = \frac{\frac{\lambda}{h}}{\frac{\lambda}{h} + 2 \text{tg } \theta}$

Le rayon hydraulique est

$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{h \cdot (\lambda + h \cdot \text{tg } \theta)}{\lambda + 2 h \cdot \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}}$ et $\frac{R}{h} = \frac{\frac{\lambda}{h} + \text{tg } \theta}{\frac{\lambda}{h} + 2 \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}}$

Il est commode de se servir d'abaques des fonctions $\frac{\lambda \cdot h}{\omega}$, $\frac{\lambda}{\chi}$, $\frac{\lambda}{l}$ et $\frac{R}{h}$ établis en fonction de $\frac{\lambda}{h}$ et de $\text{tg } \theta$, qui se tracent très facilement.

Remarquons que $\frac{d\omega}{dh} = \lambda + 2 h \cdot \text{tg } \theta = 1$ (toujours croissant)

$$\frac{d\chi}{dh} = 2 \cdot \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta} = \text{constante.}$$

$$\frac{dl}{dh} = 2 \text{tg } \theta = \text{constante.}$$

Enfin $\frac{R}{h}$ varie de 1 pour $\frac{\lambda}{h} \equiv \infty$ à $\frac{\text{tg } \theta}{2 \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}}$ pour $\frac{\lambda}{h} = 0$, en restant toujours positif. Donc R est toujours croissant quand h augmente, car

$$R = \frac{\lambda + h \cdot \text{tg } \theta}{\frac{\lambda}{h} + 2 \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}}.$$

Il est très naturel de considérer le paramètre λ qui est une dimension invariable d'une cunette déterminée. Mais, pour certains problèmes, il est utile de se rapporter à la largeur au plan d'eau l, liée à λ par la relation univoque

$$\lambda = l - 2 h \cdot \text{tg } \theta$$

En outre

$$\omega = h \cdot (1 - h \cdot \text{tg } \theta)$$

$$\chi = 1 + 2 h \cdot (\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta} - \text{tg } \theta)$$

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{h \cdot (1 - h \cdot \text{tg } \theta)}{1 + 2 h \cdot (\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta} - \text{tg } \theta)}$$

On en déduit

$$\frac{\lambda}{l} = 1 - \frac{2 h}{l} \cdot \text{tg } \theta$$

$$\frac{\omega}{h \cdot l} = 1 - \frac{h}{l} \cdot \text{tg } \theta$$

$$\frac{\chi}{l} = 1 + \frac{2 h}{l} \cdot (\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta} - \text{tg } \theta)$$

$$\frac{R}{h} = \frac{1 - \frac{h}{l} \cdot \text{tg } \theta}{1 + \frac{2 h}{l} \cdot (\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta} - \text{tg } \theta)}$$

On peut établir, à partir de ces formules, des abaques de $\frac{\lambda}{l}$, $\frac{\omega}{h \cdot l}$, $\frac{\chi}{l}$ et $\frac{R}{h}$ en fonction de $\frac{h}{l}$ et de $\text{tg } \theta$.

Ces formules sont avantageuses pour les sections ayant une faible valeur de λ , notamment les sections triangulaires, pour lesquelles $\lambda = 0$.

On a alors $\text{tg } \theta = \frac{1}{2 h}$, $\frac{\lambda}{l} = 0$, $\frac{\omega}{h \cdot l} = 0,5$, $\frac{\chi}{l} = \frac{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}}{\text{tg } \theta}$,

$$\frac{R}{h} = \frac{\text{tg } \theta}{2\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}}, \quad \frac{R}{h} = \frac{\sin \theta}{2}, \quad \frac{1}{h} = 2 \text{tg } \theta.$$

3.- SECTION MINIMUM ECOULANT UN DEBIT Q SOUS UNE PENTE DONNEE EN MOUVEMENT UNIFORME

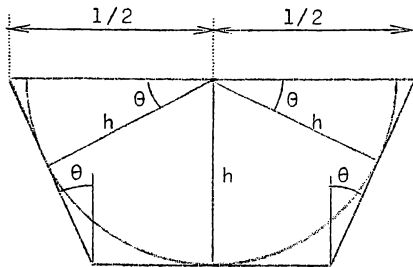


Fig. 154.

En mouvement uniforme

$$u = C \cdot \sqrt{R \cdot i} = C_R \cdot \sqrt{i}$$

(chapitre IX, paragraphes 6 et 7).

Comme $Q = \omega \cdot u$,

$$Q = \omega \cdot C_R \cdot \sqrt{i}, \quad \omega = \frac{Q}{\sqrt{i}} \cdot \frac{1}{C_R} \quad (147)$$

Pour que ω soit minimum, il faut

$$d\omega = 0,$$

$$d'où \quad - \frac{1}{(C_R)^2} \cdot dR = 0$$

$$\text{ou} \quad dR = 0,$$

car ω et R sont fonctions des mêmes variables indépendantes.

Le minimum de ω correspond au maximum de R .

$$\text{Or} \quad R = \frac{\omega}{\chi}, \quad \text{donc} \quad dR = \frac{d\omega}{\chi} - \frac{\omega \cdot d\chi}{\chi^2} = 0$$

et comme $d\omega = 0$, on a donc $d\chi = 0$, pour la même raison que ci-dessus.

$$\text{Donc} \quad d\omega = h \cdot d\lambda + (\lambda + 2 h \cdot \text{tg } \theta) \cdot dh = 0$$

$$d\chi = d\lambda + 2 \cdot \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta} \cdot dh = 0$$

$$d'où \quad h = \frac{\lambda + 2 h \cdot \text{tg } \theta}{2 \cdot \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}}$$

$$\text{et} \quad \left(\frac{h}{\lambda}\right)_{\min} = \frac{1}{2 \cdot (\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta} - \text{tg } \theta)} \quad \text{ou encore} \quad \left(\frac{h}{1}\right)_{\min} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}}$$

Pour	$\text{tg } \theta = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	1,5	2	3	4
$\left(\frac{h}{\lambda}\right)_{\min}$	= 0,5	0,805	0,866	1,22	1,67	2,15	3,12	4,16
$\left(\frac{h}{1}\right)_{\min}$	= 0,5	0,446	0,433	0,354	0,278	0,224	0,158	0,121

Remarquons que l'expression ci-dessus peut s'écrire $h = \frac{1}{2} \cdot \cos \theta$, ce qui montre que le trapèze est circonscrit au cercle de rayon h . (fig. 154).

On voit que $\omega_{\min} = (2 \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} - \operatorname{tg} \theta) \cdot h^2$

$$\chi_{\min} = 2 \cdot (2 \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} - \operatorname{tg} \theta) \cdot h$$

d'où $R_{\min} = \frac{\omega_{\min}}{\chi_{\min}} = \frac{h}{2}$

Donc $\frac{Q^2}{i \cdot C_m^2} = R_m \cdot \omega_m^2 = \frac{(2 \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} - \operatorname{tg} \theta)^2}{2} \cdot h_{\min}^5 = A \cdot h_{\min}^5$

Pour $\operatorname{tg} \theta = 0$

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	1,5	2	3	4
A = 2	1,51	1,50	1,66	2,20	3,05	5,60

Donc, pour une valeur de $\operatorname{tg} \theta$ donnée, on peut déterminer

$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)_{\min} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{h}{l}\right)_{\min} \quad \text{et} \quad A.$$

Pour obtenir h_{\min} il faut observer que

$$\frac{Q^2}{87^2 \cdot A \cdot i} = \frac{h_{\min}^5}{\left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{0,5} h_{\min}}\right)^2} = \Phi(h_{\min}),$$

si l'on se réfère à la formule de Bazin $C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$.

Le premier membre est connu. Si l'on a tracé un abaque de $\Phi(h_{\min})$ en fonction de h_{\min} et γ , on y trouve immédiatement h_{\min} correspondant à la section minimum, pour des valeurs données de Q , θ , i et γ .

On peut se demander quel est le minimum minimorum, si θ est variable.

Etant donné que $dR = 0$, donc $dh = 0$, puisque $R = \frac{h}{2}$, dans le cas du minimum. Alors :

$$d\omega = h \cdot d\lambda + h^2 \cdot d(\operatorname{tg} \theta) = 0,$$

$$d\chi = d\lambda + \frac{2 h \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot d(\operatorname{tg} \theta)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}$$

d'où $d(\operatorname{tg} \theta) \cdot \left(1 - \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}\right) = 0$

ou $1 - 3 \operatorname{tg}^2 \theta = 0$, $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\theta = 30^\circ$.

La section trapèze la plus favorable est donc le $\frac{1}{2}$ hexagone régulier. On constate aisément que les $\frac{1}{2}$ polygones réguliers à nombres pairs de côtés donnent des sections d'autant plus favorables que le nombre de côtés est plus grand. Le minimum absolu est réalisé par le demi-cercle.

Dans ce cas $\omega = \frac{\pi}{2} \cdot r^2$, $\chi = \pi \cdot r$, $R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{r}{2} = \frac{h}{2}$

$$\frac{Q^2}{C^2 \cdot i} = R \cdot \omega^2 = \frac{\pi^2}{8} \cdot r^5 = A \cdot h^5 \quad \text{d'où} \quad A = 1,24,$$

valeur la plus petite possible.

La formule (147) peut se mettre sous la forme

$$\sqrt{i} = \frac{Q}{\omega} \cdot \frac{1}{C_R} \quad (147 \text{ bis})$$

lorsque ω est constant. C'est alors i qui présente un minimum sous lequel un canal de section mouillée donnée écoule un débit donné. Les conditions du minimum de i pour $\omega =$ constante, sont évidemment les mêmes que celles du minimum de ω pour $i =$ constante.

La propriété du minimum de la section mouillée conduit à définir la notion d'un "facteur de concentration" caractérisant la capacité plus ou moins grande de la section d'un canal prismatique d'écouler un débit dans des conditions données. D'après la formule de Manning

$$u = K \cdot R^{1/6} \cdot \sqrt{R \cdot i}$$

on a $Q = K \cdot \sqrt{i} \cdot \frac{\omega^{5/3}}{\chi^{2/3}}$ d'où $\frac{Q}{K \cdot \sqrt{i} \cdot \omega^{4/3}} = \frac{\omega^{1/3}}{\chi^{2/3}}$.

On adoptera comme "facteur de concentration" sans dimensions

$$\varphi^3 = \frac{\omega}{\chi^2} = \frac{Q^3}{K^3 \cdot i^{3/2} \cdot \omega^4} = \frac{R^2}{\omega}$$

Ci-après quelques valeurs de φ^3 . Q est proportionnel à $\varphi = \sqrt[3]{\frac{R^2}{\omega}}$.

A) Canaux découverts. (sections ouvertes)

1) Demi-cercle $\varphi^3 = \frac{1}{2\pi} = 0,159$ (max. maximum).

2) Demi-carré $\varphi^3 = \frac{1}{8} = 0,125$

3) Carré $\varphi^3 = \frac{1}{9} = 0,111$

4) Double carré en hauteur ($h = 2i$)... $\varphi^3 = 0,04$.

5) Triangle isocèle d'angle au sommet 2θ $\varphi^3 = \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{4}$

6) Triangle isocèle rectangle $\varphi^3 = 0,125$ (maximum)

7) Trapèze isocèle d'angle θ $\varphi^3 = \frac{(\frac{1}{h} - \text{tg } \theta) \cdot \cos^2 \theta}{[\frac{1}{h} \cdot \cos \theta + 2 \cdot (1 - \sin \theta)]^2}$

8) Demi-hexagone $\varphi^3 = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{3}} = 0,144$ (maximum)

9) Arc de parabole
$$\varphi^3 = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{h}{l}}{\left(1 + \frac{3}{8} \frac{h^2}{l^2} - \frac{32}{5} \frac{h^4}{l^4}\right)^2} \quad \frac{h}{l} < \frac{1}{4}$$

$\frac{h}{l}$	1/4	1/5	1/6	1/10
φ^3	0,145	0,1215	0,1035	0,065

10) Segment circulaire
$$\varphi^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi - \sin \varphi}{\varphi^2}$$

φ	45°	90°	135°	180°
φ^3	0,0631	0,1155	0,1485	0,159 (maximum).

11) Rectangle
$$\varphi^3 = \frac{\frac{h}{l}}{\left(1 + 2 \frac{h}{l}\right)^2}$$

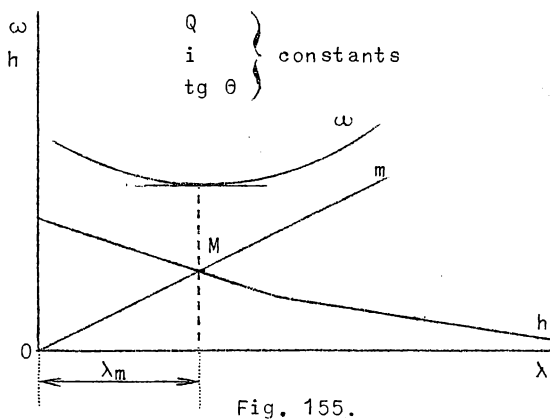
$\frac{h}{l}$	2,5	2	1	1/2	1/4	1/5	1/6	1/10
φ^3	0,0695	0,08	0,111	0,125	0,111	0,102	0,094	0,0695

B) Canaux enterrés (sections fermées).

- 1) Cercle $\varphi^3 = 0,0795$
- 2) Carré $\varphi^3 = 0,0625$
- 3) Rectangle oblong $l = 2 h \quad \varphi^3 = 0,0556.$
- 4) Rectangle élevé $l = \frac{h}{2} \quad \varphi^3 = 0,0556.$

La propriété de la section minimum ne concerne que la cunette mouillée. La question du minimum de terrassement est beaucoup plus complexe. Elle dépend essentiellement du profil du terrain, de sa hauteur par rapport au plan d'eau, de la pente, de la largeur au plan d'eau, et pas seulement de la section mouillée. Si le plan d'eau est à grande profondeur sous le terrain, on sera conduit à réduire λ et l , même à recourir à des sections plus profondes que larges. C'est essentiellement une question qui dépend des circonstances du cas concret.

4.- INFLUENCE DE LA VARIATION DE LA LARGEUR AU PLAFOND λ



Considérons Q , i et $\text{tg } \theta$ constants. Pour $\lambda = 0$ (section triangulaire) il existe des valeurs bien déterminées de h et de ω . Lorsque λ croît, h décroît nécessairement, suivant une courbe asymptotique à l'axe des λ ($h \equiv 0$). (fig. 155).

La condition du minimum de section est $\frac{h}{\lambda} = m$, c'est l'équation d'une droite qui coupe la courbe de h au point M . Pour la valeur de λ_m correspondante, ω est minimum.

La tangente à la courbe de ω est parallèle à l'axe des λ au point correspondant. La concavité de cette courbe est vers le haut. La vitesse est maximum pour $\lambda = \lambda_m$.

Dans les canaux en terre, λ est souvent supérieur à λ_m . Il en résulte qu'une réduction de λ (reserrement ou endiguement) augmente h et réduit ω , donc augmente la vitesse. On peut envisager un tel reserrement pour dévaser ou empêcher le dépôt des vases dans un canal.

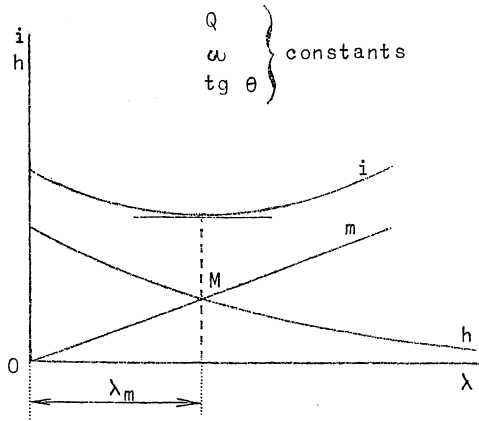


Fig. 156.

Supposons ensuite que Q , ω et $\text{tg } \theta$ soient constants.

Pour $\lambda = 0$, il existe des valeurs bien déterminées de h et de i . Si λ croît, h décroît asymptotiquement à la valeur $h \equiv 0$. (fig. 156).

On a
$$u = \frac{Q}{\omega} = \text{constante.}$$

Traçons la droite $\frac{h}{\lambda} = m$, qui coupe la courbe de h au point M . En ce point i est minimum, comme il est démontré au paragraphe 3. La courbe de i a une tangente parallèle à l'axe des λ en ce point et est partout concave vers le haut. La vitesse est constante.

Nous pouvons tracer un abaque cartésien des courbes de h et de i , côtéées en valeurs échelonnées de ω . Tous les minima de i se trouvent sur une courbe i_m . (fig. 157).

Comme il y a une relation univoque entre ω , h et λ , on peut aussi établir un abaque cartésien de i côtéé en valeurs échelonnées de h et comportant également la courbe i_m . (fig. 158).

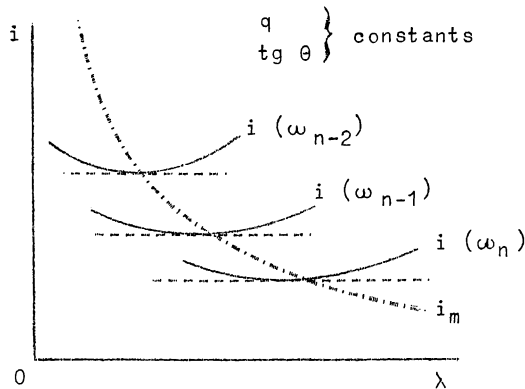


Fig. 157.

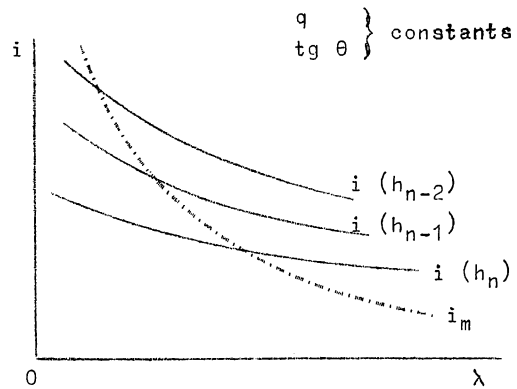


Fig. 158.

5.- VITESSE MAXIMUM

Pour les vitesses critiques d'affouillement, on se réfèrera au chapitre III. On évitera les trop faibles vitesses, qui favorisent les envasements et la croissance des plantes aquatiques. Il y a intérêt à faire usage d'un revêtement permettant d'accroître la vitesse. Actuellement, le

revêtement le plus avantageux est le béton, qui permet les vitesses que supportent les rocs durs, c'est-à-dire de 2 à 3 m/sec. Ces vitesses sont excessives pour les canaux de navigation, dont le revêtement complet serait d'ailleurs trop coûteux. Les revêtements de ces canaux se feront généralement en gazonnages ou en enrochements, permettant des vitesses inférieures à 1 m/sec, limite à ne pas dépasser pour la navigation. La vraie limite est la vitesse de fond maximum v_e .

D'après les considérations précédemment exposées de M. M. Koechlin, (chapitre IX, paragraphe 5 et paragraphe 6, C), on a :

$$u = (1 + 0,60 \cdot \sqrt{R}) \cdot v_{fm2} ,$$

lorsque $u < 3$ m/sec , v_{fm2} étant la vitesse moyenne énergétique de fond.

Il semble que l'on puisse admettre approximativement $v_e = 1,25 v_{fm2}$ pour une section peu large (sensiblement parabolique). (Pour une section rectangulaire très large, théoriquement

$$v_{fm2} = \sim v_e ,$$

mais cette valeur est peu sûre).

On détermine de la sorte, approximativement, la valeur u_1 limite de u . Par conséquent, dans la détermination des dimensions d'un canal quelconque, il faut tenir compte de la condition

$$\omega \geq \frac{Q}{u_1} .$$

Si aucune autre condition incompatible n'est imposée, on cherchera toujours à adopter la solution

$$\omega = \omega_1 = \frac{Q}{u_1} ,$$

et la pente minimum i_m correspondante, qui est suffisante pour éviter les envasements. Ces deux conditions donnent généralement la section minimum et réduisent au minimum la perte d'énergie potentielle.

Pour les canaux d'irrigation et de drainage, il y a intérêt à adopter des profils aussi stables que possible, pour assurer le fonctionnement certain du système et réduire les frais d'entretien et d'exploitation. Il faut donc éviter les envasements comme les affouillements. L'appréciation des vitesses convenables peut être difficile. Elle est en relation avec un autre facteur, facile à observer, c'est la pente naturelle des cours d'eau de la région en état d'équilibre. On pourra se fixer une certaine pente, entre certaines limites pratiques, et on adoptera ω_m correspondant, on vérifiera toutefois la vitesse u .

En fait, ainsi qu'il a été indiqué plus haut, il faut limiter les vitesses de fond, c'est-à-dire R, i , quelle que soit la théorie à laquelle on se réfère. En effet, au chapitre IX, paragraphe 3, on définit la vitesse de cisaillement

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\gamma_e}} \quad \text{et on écrit} \quad v_m^* = \sqrt{g \cdot R \cdot i} .$$

On trouve aussi que la vitesse de fond est $v_f = \sqrt{\frac{2}{f}} \cdot v^*$.

Au paragraphe 5, on trouve $v_{fm2} = \sqrt{\frac{2g}{f}} \cdot \sqrt{R \cdot i}$,

d'où $v_{fm2} = \sqrt{\frac{2}{f}} \cdot v_m^*$.

Enfin au paragraphe 8

$$v_{fm2} = \frac{u}{1 + 0,60\sqrt{R}} = C_1 \cdot \sqrt{R \cdot i} = \sqrt{\frac{2g}{f}} \cdot \sqrt{R \cdot i}$$

On a aussi $f = \approx 0,08 k^{1/3}$.

Enfin $v_{fmax} = 1,25 \cdot v_{fm2}$ et $v_{fmax} \ll v_e$

v_e , k et f sont caractéristiques d'un terrain. Cependant, la forme de la section intervient encore légèrement, puisque $v_{fm2} < \frac{v_e}{1,25}$.

Ce n'est donc pas à vrai dire i qu'il faut limiter, mais R_i . Si on adopte la section minimum (ou la pente minimum), R est maximum et i est minimum. Cette solution peut être souvent la plus avantageuse en principe. Cependant, elle correspond à une section assez concentrée, d'où $v_{fm2} \ll 0,8 v_e$. Les canaux en terre ont souvent une moindre concentration, section large; on peut alors avoir $v_{fm2} < v_e$. Dans les deux cas, il arrivera que R varie peu dans les limites de variation possible des sections. Dans ce cas, il sera permis de se référer à une limitation des pentes, au lieu d'une limitation des vitesses.

Dans le cas de variation assez étendue des débits, il faudra se référer à la plus grande valeur de $R \cdot i$. En cas de mouvement permanent graduellement varié, il faudra substituer à la pente de fond la pente de surface maximum $-\frac{dz}{ds}$. Il faudra aussi, le cas échéant, être attentif à la pente minimum de surface, pour éviter les envasements.

D'une manière plus générale, au lieu de se fixer une section minimum $\omega_1 = \frac{Q}{u_1}$, limiter

$$\frac{Q}{v_e} = \frac{Q}{1,25 \cdot v_{fm2}} = \frac{Q}{u} \cdot \frac{1 + 0,60\sqrt{R}}{1,25} = \omega \cdot \frac{(1 + 0,60\sqrt{R})}{1,25}$$

Le facteur 1,25 s'applique aux sections concentrées; donc, en posant

$$\Omega = \omega \frac{(1 + 0,60\sqrt{R})}{1,25}, \quad \text{on aura} \quad \Omega \ll \Omega_1 = \frac{Q}{v_e}.$$

En réalité, dans les limites de variations pratiques possibles des sections, pour des sections concentrées ou très larges, $1 + 0,60\sqrt{R}$ varie assez peu et l'on peut admettre sensiblement $\omega = \text{constante}$.

6.- CANAL D'ADDUCTION, DE DERIVATION OU DE DRAINAGE

Le niveau initial d'amont est donné.

Pour un canal d'amenée d'usine hydroélectrique, on adoptera en principe la solution précitée : $\omega = \omega_1$ et $i = i_m$. Mais si l'on veut réduire encore la perte de chute, on se fixera $i = i_1$ et on déterminera $\omega_m > \omega_1$. Ou bien on établira, par un calcul d'économie,

$\omega_{ec} > \omega_1$ et on adoptera $i_{ec} = i_m$ correspondant.

Pour un canal d'irrigation, d'alimentation ou de dérivation, on adoptera en principe la solution $\omega = \omega_1$ et $i = i_m$. Mais il faut vérifier que le plan d'eau ainsi réalisé corresponde aux niveaux des diverses prises d'eau. Il faut donc $i < i_1$.

Si le plan d'eau est trop élevé, la solution la plus avantageuse consiste à établir un déversoir à la prise d'eau. Elle est généralement préférable à celle qui consiste à augmenter la pente pour arriver au niveau de la prise, car il faut toujours $\omega \geq \omega_1$, donc les terrassements sont augmentés. En effet, à débit et section constants, lorsque i croît, h décroît et λ croît (paragraphe 4). Donc la largeur du canal augmente, de même que la profondeur des déblais, à cause de la pente accrue. Si la pente exigée devenait trop forte, il faudrait un abaissement général du plan d'eau par un déversoir à l'extrémité amont, solution également onéreuse, à moins qu'une récupération d'énergie hydroélectrique puisse la rendre rentable. Cependant, il faut tenir compte du niveau des nappes souterraines et des pertes par infiltration; c'est une question de cas concret.

Si la pente i_m était trop forte et le plan d'eau trop bas, il faudrait choisir $i = i_1$, en vue d'arriver au niveau de la prise et $\omega = \omega_m > \omega_1$, solution évidemment la plus économique possible, vu les circonstances. S'il y a des prises d'eau successives, le débit diminue d'un tronçon à l'autre. On étudie les tronçons successifs et aux limites, on substitue des raccordements progressifs aux discontinuités de sections et de pentes. Eventuellement, on détermine les axes correspondant à ces raccordements.

Pour un canal de drainage, la situation est inversée, en ce sens que le débit va croissant d'un tronçon à l'autre et que le plan d'eau du canal doit être inférieur aux niveaux de déversement des adducteurs. Il faut donc dans ce cas $i \geq i_1$. Il faut, en vue de l'économie, envisager la solution $i = i_1$ et $\omega = \omega_m$ correspondant, $\omega_m > \omega_1$. S'il arrivait que $\omega_m < \omega_1$, on adopterait $\omega = \omega_1$. La pente minimum correspondante est $i_m < i_1$. On adoptera donc $i = i_1$.

7.- CANAL DE NAVIGATION, LORSQU'ON IMPOSE $\lambda > \lambda_n$.

Si le canal doit servir à la navigation, il faut considérer une limite de vitesse moyenne u_1 , d'où $\omega > \omega_1 = \frac{Q}{u_1}$. Il faut en outre une profondeur suffisante $h > h_n$ et l'on fixe parfois une largeur minimum au plafond $\lambda > \lambda_n$. A h_n , λ_n et $\text{tg } \theta$ correspond une section ω_n . Si $\omega_n > \omega_1$, les conditions $h \geq h_n$ et $\lambda \geq \lambda_n$ sont suffisantes et déterminent la solution. C'est le cas des faibles débits. Si au contraire $\omega_n < \omega_1$, le débit étant plus considérable, il faut considérer les trois conditions :

$$\omega > \omega_1, \quad \lambda > \lambda_n \quad \text{et} \quad h > h_n.$$

Enfin, le niveau initial d'amont est supposé donné et le canal doit nécessairement aboutir dans le bassin d'aval à un niveau supérieur ou au moins égal à celui de ce bassin. Donc, il y aura une limite supérieure de pente, $i < i_1$. En principe, il y aura avantage à adopter la

section minimum ω_n ou ω_1 et la plus petite valeur de i compatible avec les conditions $\lambda \gg \lambda_n$, $h \gg h_n$ et $i < i_1$. Ou bien, on adoptera $i = i_1$ et la plus petite valeur de ω compatible avec $\lambda \gg \lambda_n$, $h \gg h_n$, $\omega > \omega_1$.

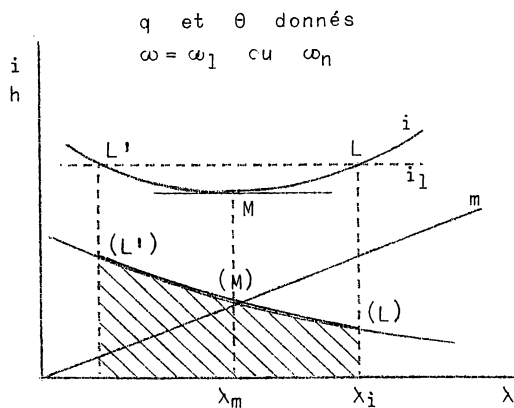


Fig. 159.

On se reportera au diagramme de i et h en fonction de λ (paragraphe 4). Généralement, $\frac{h_n}{\lambda_n} < m$, le point N de coordonnées (h_n, λ_n) se trouve sous la droite m (fig. 159).

Pour que le problème soit soluble, il faut que le point N se trouve

1°) en-dessous de la courbe de h .

2°) entre les ordonnées des points d'intersection L et L' de la droite $i = i_1$ avec la courbe de i .

Si $i_1 < i_m$, il faut augmenter la section, de même que si $\lambda_i < \lambda_n$.

Le point N de coordonnées (λ_n, h_n) doit être situé dans la zone hachurée de la figure 159.

Si ces conditions sont satisfaites et que $\lambda_n < \lambda_m$ (N à gauche de M) on adoptera le plus souvent $i = i_m$. Si $\lambda_n > \lambda_m$, on adoptera $i = i_n$ correspondant à $\lambda = \lambda_n$, et qui sera $< i_1$. Donc, c'est le segment ML qui est pratiquement le lieu des solutions.

Si la valeur de i trouvée est $> i_1$ (il faut pour cela que $\lambda_i < \lambda_n$), ou bien si l'on s'impose i_1 , on se servira des diagrammes de variation de i en fonction de λ , h et ω , contenant la courbe i_m .

Si $\omega_1 < \omega_n$, il suffit d'observer les conditions $h > h_n$ et $\lambda > \lambda_n$. On envisage le diagramme de i en fonction de λ pour $h = h_n$ et la courbe de i_m . On trace la droite $\lambda = \lambda_n$, qui peut occuper trois positions relatives par rapport à l'intersection M de la courbe $i(h_n)$ et de la courbe i_m .

La solution doit se trouver à droite de λ_n sur la parallèle à l'axe des abscisses d'équation $i = i_1$. On choisira évidemment le point donnant la plus petite valeur de ω . Dans ces conditions, dans les trois cas $\lambda_n < \lambda_m$, $\lambda_n = \lambda_m$ et $\lambda_n > \lambda_m$, les solutions à adopter se trouvent sur les segments des courbes i_m , $i(h_n)$ et λ_n tracées en trait fort sur les figures 160, 161 et 162.

Les zones hachurées représentent les zones des solutions possibles, qui déterminent une limite supérieure de i_1 .

Si $\omega_1 > \omega_n$, le problème est plus complexe. Il faut réaliser à la fois trois conditions

$$\omega > \omega_1, \quad h > h_n, \quad \lambda > \lambda_n$$

On trace, en fonction de λ , les courbes de i pour $\omega = \omega_1$.
de i pour $h = h_n$
de i_m

enfin la droite $\lambda = \lambda_n$.

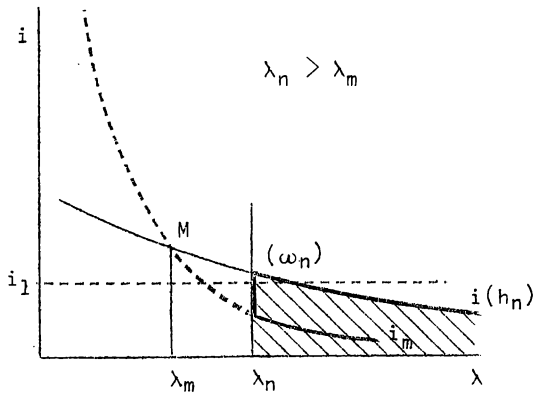


Fig. 160.

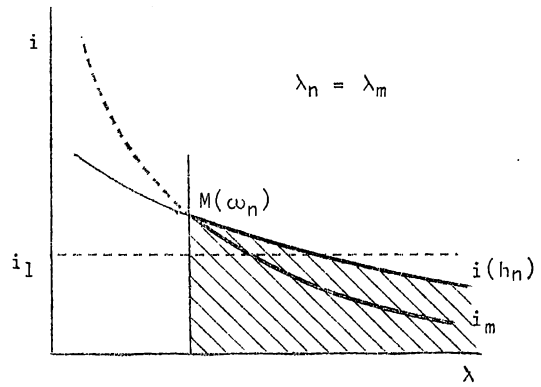


Fig. 161.

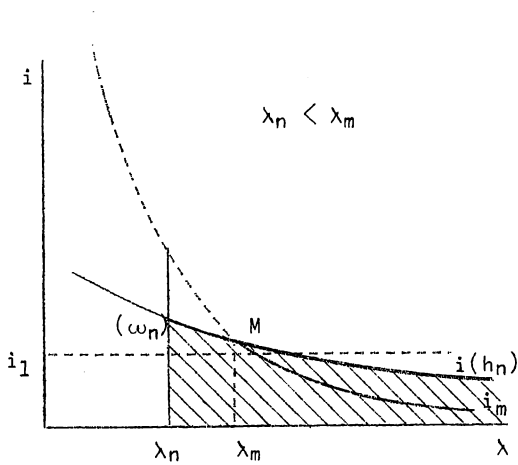


Fig. 162.

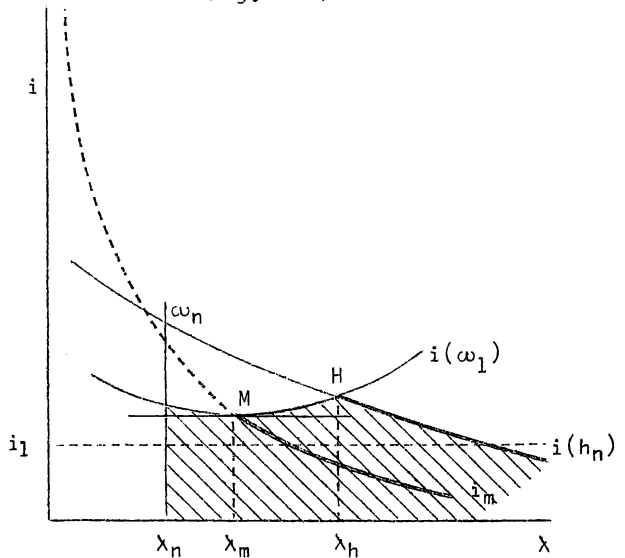


Fig. 163.

La solution dépend des valeurs relatives de λ_n , λ_m et de $\lambda_h > \lambda_n$, valeur de λ correspondant à $\omega = \omega_1$ et $h = h_n$.

Diverses positions relatives de ces courbes sont possibles; elles sont indiquées aux figures 163, 164 et 165. Les solutions possibles sont dans les zones hachurées; il y a donc une limite supérieure de i_1 . On adopte comme solutions les plus petites valeurs de ω correspondant à $i = i_1$. Dans ces conditions, les lieux des solutions sont les segments de courbe dessinés en traits renforcés. Il suffit de prendre leur intersection avec la droite $i = i_1$. Dans le premier cas, pour certaines valeurs de i_1 , il y a deux solutions $\omega = \omega_1$ possibles, de part et d'autre de M . Elles ne se distinguent que par des valeurs différentes de λ . On prend généralement la solution correspondant à la plus grande valeur de λ , par suite du moindre développement des berges et de la moindre fluctuation de niveau en cas de variation de débit.

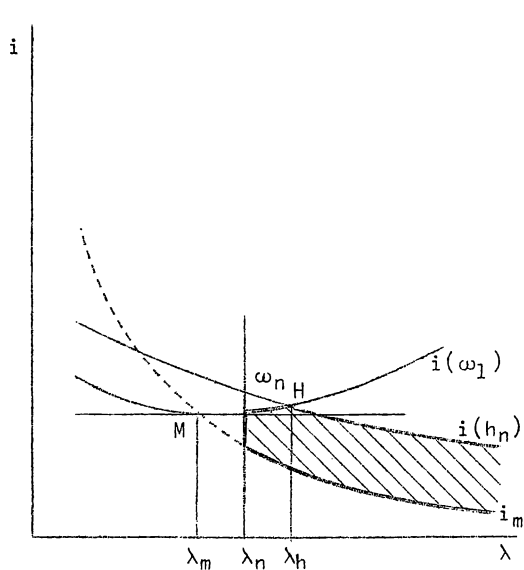


Fig. 164.

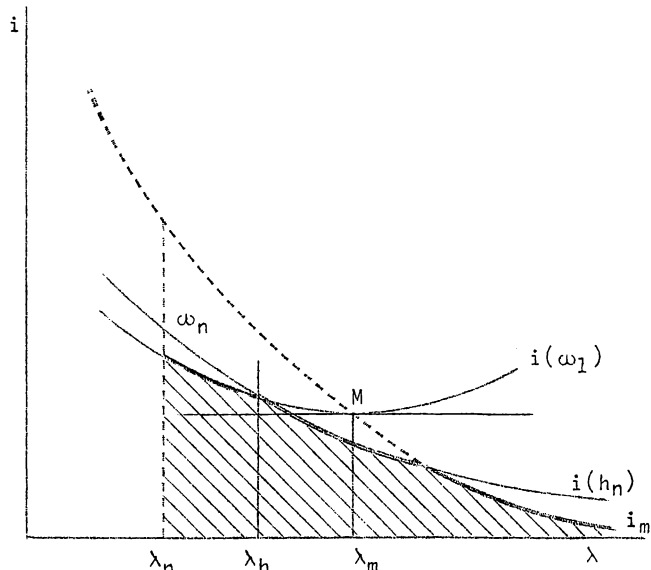


Fig. 165.

Pour la résolution d'un problème concret, il n'est pas nécessaire de tracer les courbes. Il suffit de déterminer λ_m par les deux conditions $\omega = \omega_1$ et $\frac{h}{\lambda} = m$ et le point H par les conditions $\omega = \omega_1$ et $h = h_n$. Les valeurs de λ_m et de λ_h comparées à λ_n indiquent quel est le cas à considérer et si la valeur de λ à adopter comme solution se trouve sur i_m , $i(\omega_1)$, $i(h_n)$ ou est λ_n .

Si l'on veut limiter la vitesse maximum de fond, on écrira

$$\frac{\omega \cdot (1 + 0,60 \sqrt{R})}{1,25} = \Omega < \Omega_1 = \frac{Q}{v_e}$$

On raisonnera sur la fonction Ω comme sur ω . On considère $\Omega = \Omega_1 = \text{constante}$ et on recherche ω et les paramètres correspondants. En fait, pour $\Omega = \text{constante}$, ω varie peu. Il est minimum lorsque R est maximum, c'est-à-dire pour $\frac{h}{\lambda} = m$. En effet,

$$\omega = 1,25 \frac{\Omega_1}{1 + 0,60 \sqrt{R}},$$

dès lors $d\omega = 0$ correspond à $dR = 0$. Pour $\lambda < \lambda_{\min}$, ω décroît lorsque λ augmente; c'est l'inverse pour $\lambda > \lambda_{\min}$. Comme en général, $\lambda_n > \lambda_{\min}$ et que $\lambda > \lambda_n$, la solution la plus favorable correspondra en général à la plus petite valeur possible de λ , soit λ_n . D'une manière générale, on prendra la valeur de λ la plus voisine possible de λ_m , compatible avec $\lambda > \lambda_n$. La considération de $\Omega < \Omega_1$ au lieu de $\omega < \omega_1$.

- 1°) ne change pas le rapport $(\frac{h}{\lambda})_{\min} = m$;
- 2°) ne change pas les courbes i_h , indépendantes de ω ;
- 3°) ne change pas la courbe i_m ;

- 4°) change la courbe $h = f(\lambda)$, mais assez peu et son allure reste la même;
- 5°) change la courbe $i_{\Omega_1} = f(\lambda)$, mais peu et le minimum a lieu pour $(\frac{h}{\lambda})_{min} = m$, donc pour une valeur de ω_m et sur la courbe i_m ;
- 6°) λ_m reste au droit de l'intersection de i_m et de i_{Ω_1} ;
- 7°) λ_h reste au droit de l'intersection de $i(h_n)$ et de i_{Ω_1} ;
- 8°) on peut tracer une courbe de $\omega = f(\lambda)$ pour $\Omega = \Omega_1 = \text{constante}$, elle varie peu;
- 9°) on peut tracer une courbe de $u = \frac{Q}{\omega} = f(\lambda)$, elle varie peu;
- 10°) on peut tracer aussi une courbe $R = f(\lambda)$, elle varie peu.

Comme $R.i = \left(\frac{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}{87}\right)^2 . u^2$ et $Q = \omega . u$,

on obtient

$$(148) \quad \frac{h . (\lambda + h . \text{tg } \theta)}{\lambda + 2 h . \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}} . i = \left[\frac{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{h . (\lambda + h . \text{tg } \theta)}{\lambda + 2 h . \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}}}}}{87} \right]^2 . \frac{v_e^2 . (1 + 0,60 . \sqrt{\frac{h . (\lambda + h . \text{tg } \theta)}{\lambda + 2 h . \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}}})^2}{1,25^2}$$

$$Q = \frac{h . (\lambda + h . \text{tg } \theta) . v_e . (1 + 0,60 . \sqrt{\frac{h . (\lambda + h . \text{tg } \theta)}{\lambda + 2 h . \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}}})}{1,25} \quad (149)$$

L'équation (149) permet, pour un débit donné Q , de déterminer $h = f(\lambda)$ pour $v_e = \text{constante}$. De là on peut déduire $i = f(\lambda)$ et $\omega = f(\lambda)$. L'équation (148) permet de déterminer $i = f(\lambda)$. Il est clair que i est minimum lorsque R est maximum, c'est-à-dire pour

$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)_{min} = m .$$

On a généralement $\lambda_m < \lambda_n < \lambda_h$. La solution optimum est donc généralement $\lambda = \lambda_n$, $h > h_n$, $\omega > \omega_n$, qui donne les plus petites valeurs possibles de ω et de i (point A de la figure 166).

En tous cas, le lieu des solutions acceptables pour $v_f < v_e$ est AB. Toutefois, toutes les solutions dans la surface hachurée sont possibles.

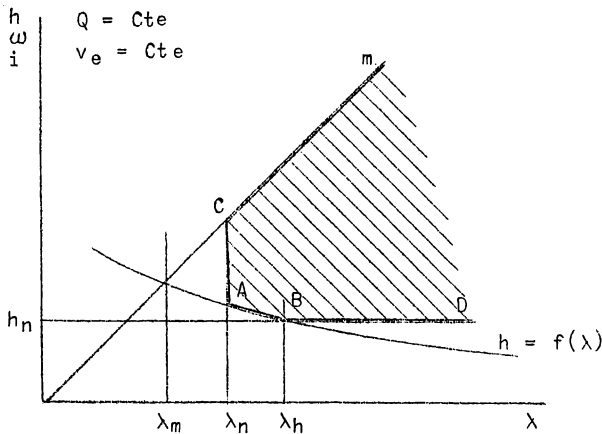


Fig. 166.

8.- CANAL DE NAVIGATION, LORSQUE L'ON IMPOSE $l > l_n$

Les véritables conditions de navigabilité dans un canal ne sont pas $h > h_n$ et $\lambda > \lambda_n$, mais bien l'inscription du gabarit rectangulaire $b_n . h_n$ dans la section. Ce qui conduit à

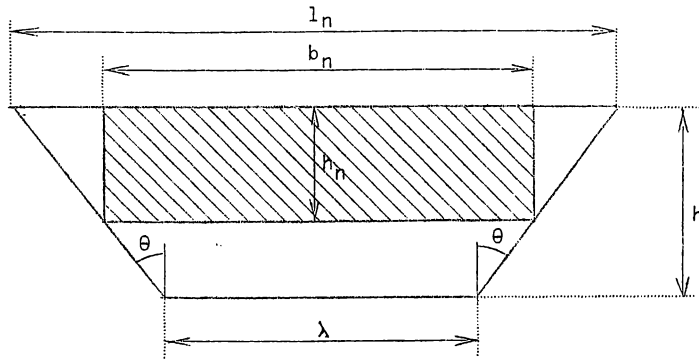


Fig. 167.

$h > h_n$
 et
 $l > l_n = b_n + 2 h_n \cdot \text{tg } \theta$
 (fig. 167).

La section minimum
 et la pente minimum
 correspondent à
 $d\omega = 0$, $dR = 0$
 et $d\chi = 0$,
 d'où

$$d\omega = h \cdot dl + l \cdot dh - 2 h \cdot dh \text{ tg } \theta = 0$$

$$d\chi = dl + 2 dh \cdot (\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta} - \text{tg } \theta) = 0$$

d'où $l = 2 h \cdot \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta} = \frac{2 h}{\cos \theta}$, $(\frac{l}{h})_{\min} = \frac{2}{\cos \theta} = m'$

Il y a une valeur
 minimum de l , corres-
 pondant à la section
 triangulaire ($\lambda = 0$),
 c'est

$$l = 2 h \cdot \text{tg } \theta.$$

La figure 168 repré-
 sente les variations
 de h et de i pour
 Q , θ , ω et donc

$$u = \frac{Q}{\omega}$$

donnés.

Cette figure 168
 correspond à la figure
 156.

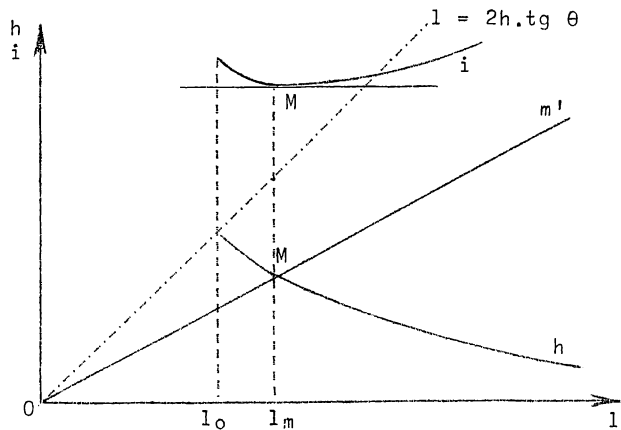


Fig. 168.

Si $\omega_1 = \frac{Q}{u_1} < \omega_n$, il suffit que $h > h_n$, $l > l_n$.

La figure 169 interprète le problème pour Q et θ donnés, en consi-
 dérant $l_n > l_{nm}$, ce qui est généralement le cas lorsque le débit est
 faible.

Les coordonnées (l, h) représentant la solution doivent être à l'in-
 térieur de TAH_nB , plus spécialement de $M'MH_nB$; les valeurs de i
 correspondantes sont à l'intérieur de $I_{(h_n)} I_n I_{1n} I_m$, de préférence sur
 $I_n I_{1n} I_m$. Donc en général $l \gg l_n$ et $h > h_n$. Il est donc pratiquement
 probable que $\lambda < b_n = \lambda_n$ et que la section optimum se rapproche éventuel-

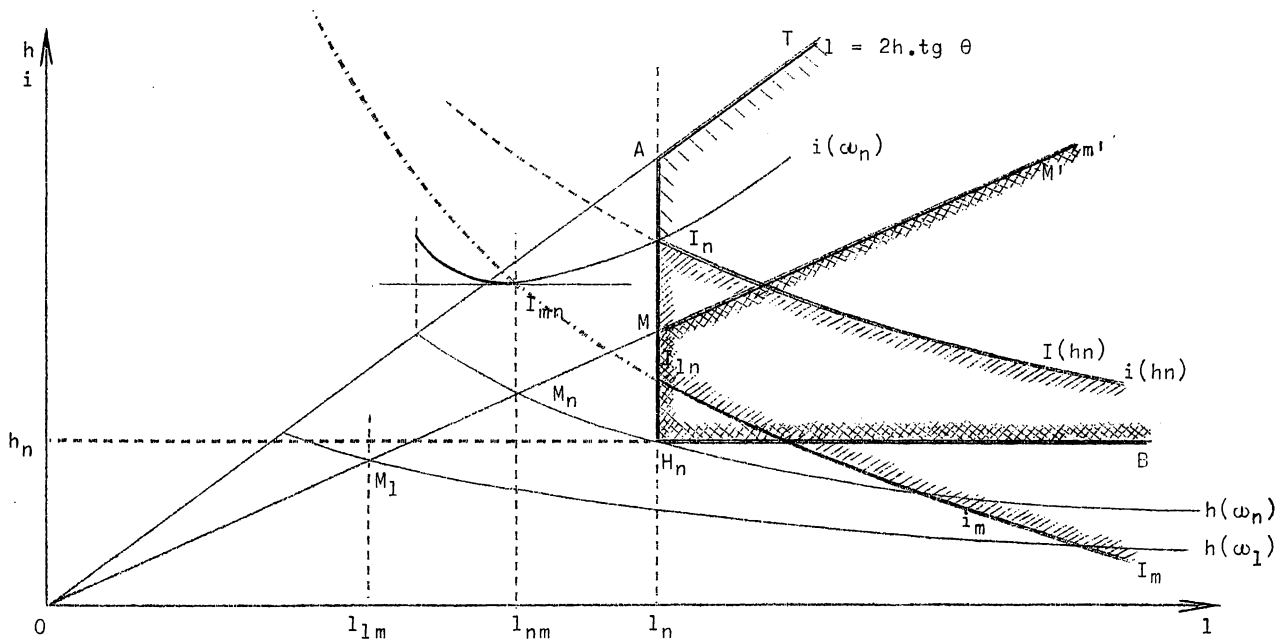


Fig. 169.

lement plus de la section minimum pour une pente donnée (limite supérieure). Elle peut donc être plus favorable que la solution correspondant à $\lambda > \lambda_n$. La réduction de largeur au plan d'eau est favorable à la réduction des terrassements si le plan d'eau est à assez grande profondeur sous le terrain naturel.

Si $\omega_1 > \omega_n$, il faut satisfaire aux trois conditions

$$\omega > \omega_1, \quad h > h_n, \quad l > l_n.$$

Supposons d'abord $l_n > l_{1m}$, cas très probable lorsque les débits ne sont pas trop grands, c'est-à-dire que ω_n n'est pas beaucoup plus petit que ω_1 . La figure 170 est l'interprétation graphique de la discussion et de la résolution du problème.

Les coordonnées (l, h) de la solution doivent se trouver à l'intérieur de TABCD, les valeurs les plus favorables étant à l'intérieur du contour M'MBCD ou sur ce contour. Les solutions (l, i) sont à l'intérieur de ou sur $I_{hn} I_h I_l I_{1m} I_m$. On aura donc encore en général $l \gg l_n$ et $h > h_n$.

Si le débit est assez grand, $l_n < l_{1m}$; la figure 171 interprète alors le problème.

Les coordonnées (l, h) de la section doivent encore être dans l'intérieur de TABCD, de préférence dans et sur M'LCD. Les coordonnées (l, i) sont de préférence sur et dans $I_{hm} I_h I_{m1} I_m$, éventuellement sur $I_{m1} I_{1n}$. Mais comme ce lieu correspond à $\omega = \omega_1$, il est préférable de prendre alors la solution I_{m1} , correspondant à $\omega = \omega_1$ et i_{min} , $l > l_n$ et $h > h_n$.

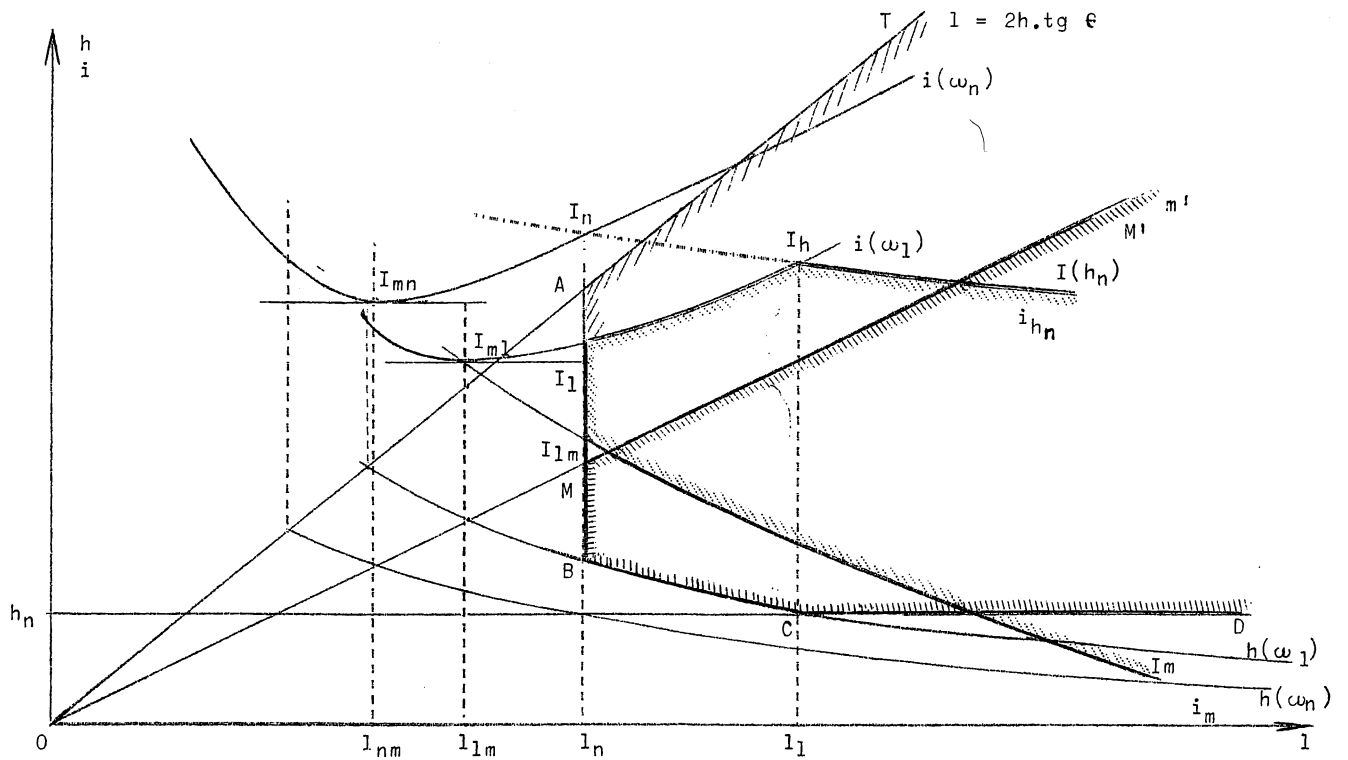


Fig. 170.

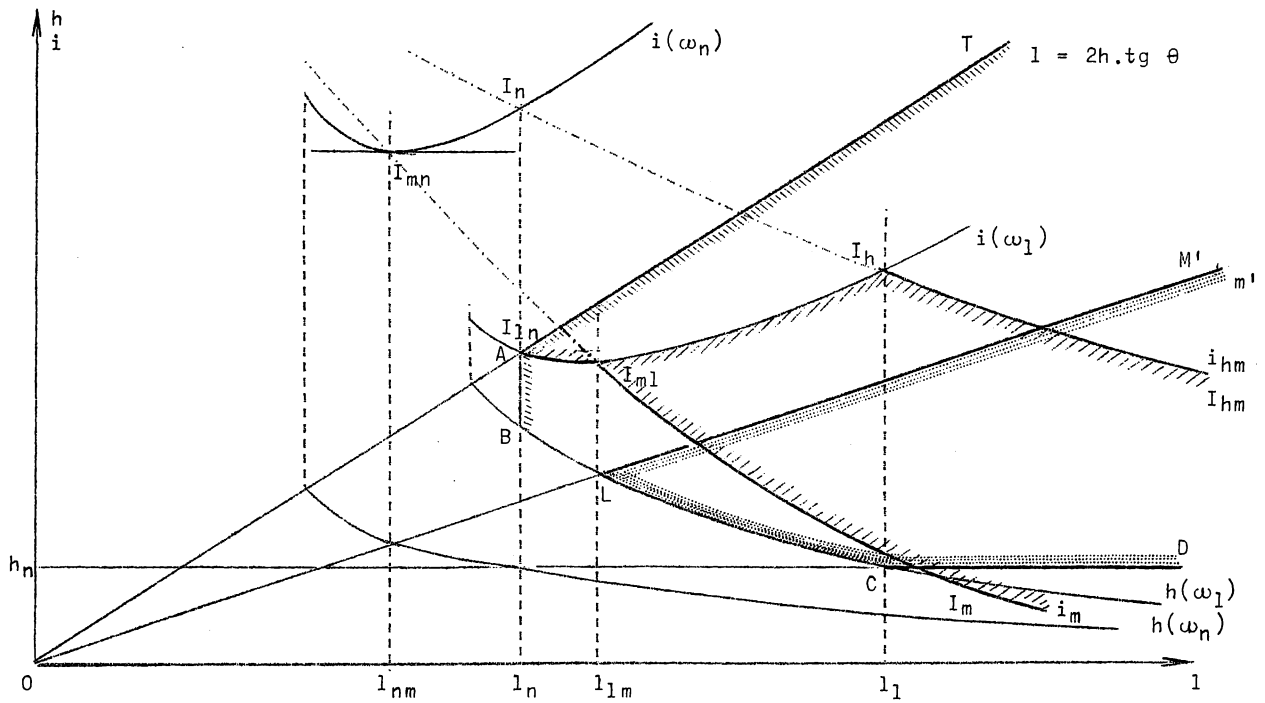


Fig. 171.

Le cas particulier $l_n = l_{1m}$ ne change autre chose que l'évanouissement de $I_{1n} I_{m1}$. Il n'y a pas lieu d'envisager le cas $l_n < l_{nm}$, impossible pratiquement.

Si au lieu de limiter u et ω , par u_1 et $\omega_1 = \frac{Q}{u_1}$, on limitait

$$v_e \geq \frac{1,25 Q}{\omega \cdot (1 + 0,60 \cdot \sqrt{R})}$$

d'où
$$\frac{\omega \cdot (1 + 0,60 \cdot \sqrt{R})}{1,25} = \Omega \geq \Omega_1 = \frac{Q}{v_e}.$$

Au lieu de la courbe h_{ω_1} , on tracera la courbe h_{Ω_1} , de même que i_{Ω_1} au lieu de i_{ω_1} .

Il n'y aura rien de changé lorsque, dans les parties utiles, on aura h_{ω_n} au-dessus de h_{Ω_1} (1er cas), ou bien h_{Ω_1} au-dessus de h_{ω_n} (2° cas).

Comme $\Omega > \omega$, si $\Omega_1 > \omega_n$, à fortiori $\omega_{\Omega_1} < \omega_n$ et on se trouve dans le premier cas.

Si $\Omega_1 > \omega_n$, ω_{Ω_1} peut cependant être $< \omega_n$ et la courbe h_{Ω_1} est en-dessous de celle de h_{ω_n} (1er cas). Les diagrammes restent semblables à ceux établis en fonction de ω_1 .

Lorsque l croît, h_{Ω_1} décroît et $(\frac{\Omega}{\omega})_{\Omega_1}$ décroît aussi. Pour plus de clarté, il est utile de tracer la courbe $(\omega)_{\Omega_1} = f(l)$ et de tracer l'horizontale ω_n afin de voir si $(\omega)_{\Omega_1}$ est $<$ ou $>$ ω_n . C'est ce qui distinguera le cas 1 du cas 2 dans les parties utiles des diagrammes.

L'utilité de la courbe $(\omega)_{\Omega_1} = f(l)$ est surtout appréciable en ce qui concerne le choix des paramètres de la section, car $(\omega)_{\Omega_1}$ peut présenter un minimum éventuellement compris dans l'intervalle l_{1m} et l_1 , qui correspond alors à la solution la plus favorable.

La figure 172 donne l'allure des courbes en se référant à Ω_1 pour un cas défini.

La solution (h, l) doit être dans le contour TAMCD, de préférence dans M'MCD; la solution (i, l) dans $I_{hn} I_h I_m I_m'$.

9.- VARIATION DE R EN FONCTION DE h ET DE λ

Au paragraphe 5, nous avons mis en évidence le critère de la limitation de R.I pour la stabilité du lit du canal. Il est donc opportun d'étudier la variation de R en fonction de h et de λ pour une valeur de ω constante. Il est utile à cet effet d'exprimer R en fonction de ω seul, ce qui peut s'obtenir comme suit

$$R = \frac{\omega}{X} = \frac{h \cdot (\lambda + h \cdot \text{tg } \theta)}{\lambda + 2 h \cdot \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}} = \frac{h^2 \cdot (\lambda + h \cdot \text{tg } \theta)}{h \cdot \lambda + h \cdot \text{tg } \theta + h^2 \cdot (2 \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta} - \text{tg } \theta)}$$

$$R = \frac{\omega \cdot h}{\omega + \xi \cdot h^2} \quad \text{en posant} \quad \xi = 2 \cdot \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta} - \text{tg } \theta \quad (150)$$

On observera que ξ varie peu en fonction de θ

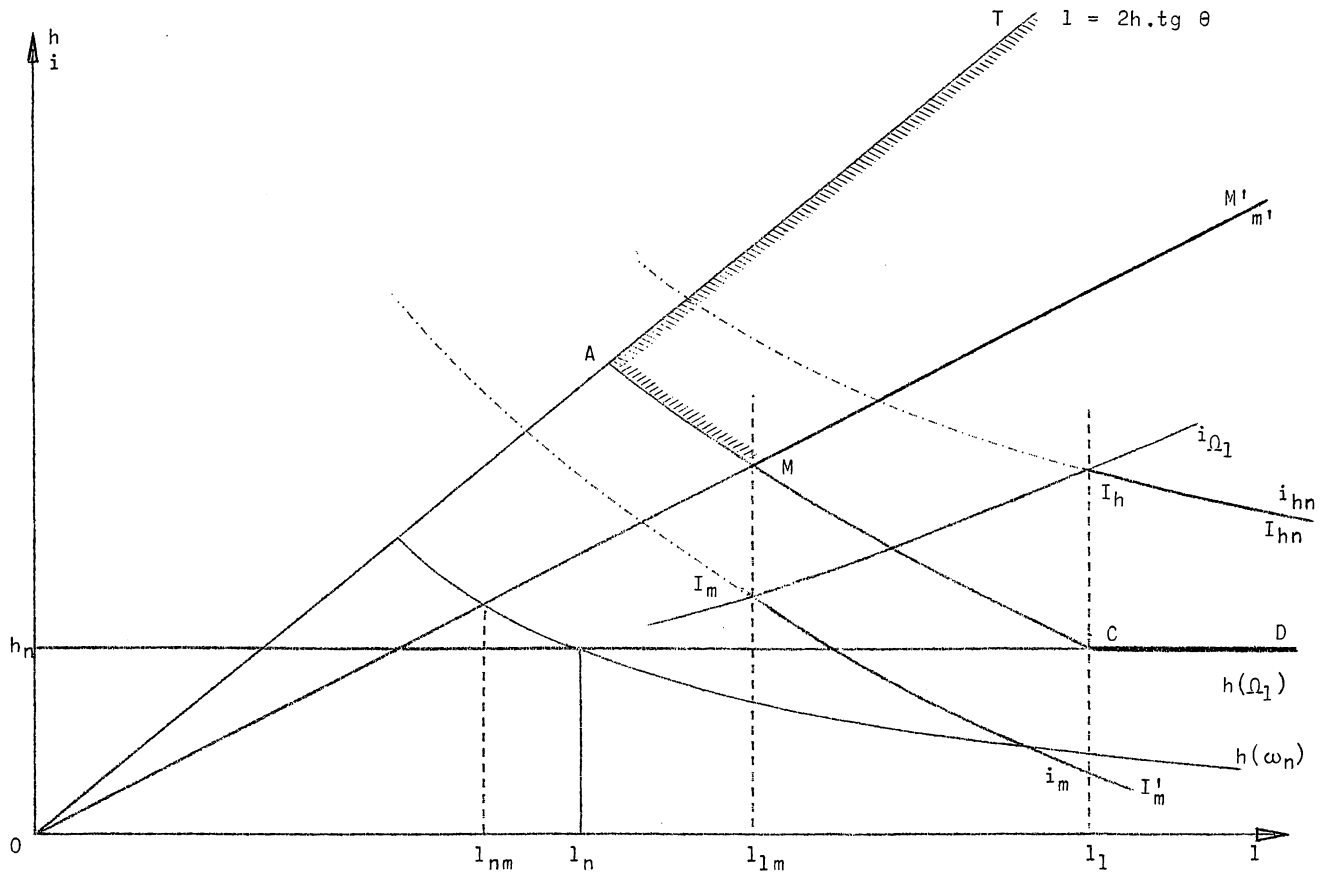


Fig. 172.

$\text{tg } \theta =$	0	0,25	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	1,33	2
$\xi =$	2,00	1,81	1,73	1,82	2,00	2,47

Donc, si ω est constant, R variera surtout avec h et variera peu si h lui-même varie peu. La figure 173 représente la variation de R en fonction de h et de λ pour $\omega = \text{constante}$ et $\theta = \text{constante}$.

L'analyse des deux courbes conduit aux remarques suivantes :

1) Courbe de R en fonction de h

a) Point 0 ... Pour $h = 0$, $R = 0$, $\left(\frac{dR}{dh}\right)_0 = 1$ ($\lambda \equiv \infty$)

b) Point M ... $\frac{dR}{dh} = 0$, $\frac{\omega \cdot (\omega - \xi \cdot h^2)}{(\omega + \xi \cdot h^2)^2} = 0$, $h_m = \sqrt{\frac{\omega}{\xi}}$

$$R_m = \left(\frac{\omega \cdot h}{2 \omega}\right)_m = \frac{h_m}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{\xi}}$$

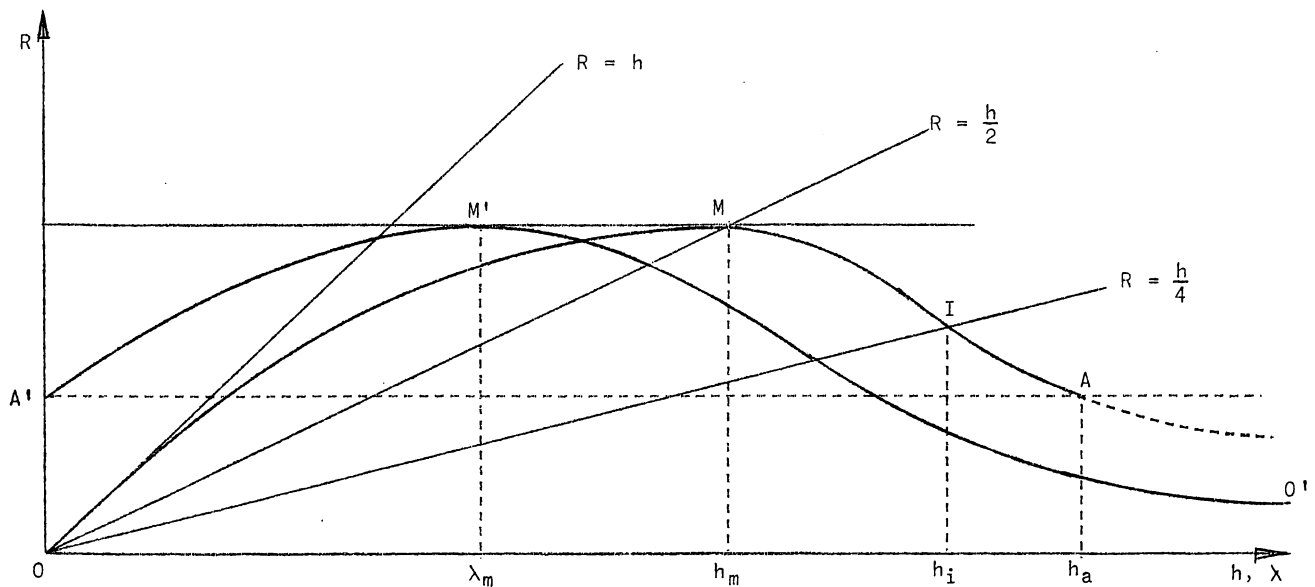


Fig. 173.

c) Point A Correspond à $\lambda_a = 0$, section triangulaire, valeur maximum de h qui termine la courbe.

On a
$$h_a = \sqrt{\frac{\omega}{\text{tg } \theta}}, \quad \lambda_a = 0, \quad R_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \text{tg } \theta}{1 + \text{tg}^2 \theta}}$$

$$\left(\frac{dR}{dh}\right)_a = - \frac{\text{tg } \theta \cdot (\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta} - \text{tg } \theta)}{2 \cdot (1 + \text{tg}^2 \theta)} < 0$$

Il y a un point d'inflexion I car

$$\frac{d^2R}{dh^2} = \frac{\omega \cdot \xi \cdot h \cdot (-3\omega + \xi \cdot h^2)}{(\omega + \xi \cdot h^2)^3}$$

qui s'annule pour la valeur de
$$h_i = \sqrt{\frac{3\omega}{\xi}}, \quad R_i = \frac{h_i}{4}$$

La valeur correspondante de λ est
$$\lambda_i = \sqrt{\frac{4\omega}{3\xi}} \cdot (\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta} - 2 \text{tg } \theta)$$

Les courbes OMA sont fonction de θ , mais elles sont toutes tangentes en O à la droite $R = h$ et le lieu des points M est $R = \frac{h}{2}$. Le lieu du point I est la droite $R = \frac{h}{4}$.

2) Courbe de R en fonction de λ

On trouve
$$R = \frac{\omega \cdot \text{tg } \theta}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta} \cdot \sqrt{\lambda^2 + 4\omega \cdot \text{tg } \theta} - \lambda \cdot (\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta} - \text{tg } \theta)}$$

a) Le point initial A' correspond à $\lambda = \lambda_a = 0$,

$$h_a = \sqrt{\frac{\omega}{\text{tg } \theta}} \quad (\text{point A}) \quad \left(\frac{dR}{d\lambda}\right)_a = \frac{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta} - \text{tg } \theta}{4 \cdot (1 + \text{tg}^2 \theta)}$$

A' est sur la même horizontale que A.

b) Point M' $\lambda = \lambda_m$ $h = h_m$ $R = R_m = \frac{h_m}{2}$

M' est sur la même horizontale que M .

c) La courbe de R en fonction de λ tend asymptotiquement vers zéro, le point à l'infini O' correspondant au point O .

Comme $\lambda_m = 2 h_m \cdot (\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta} - \text{tg} \theta)$ (paragraphe 3),

$\lambda_m \gtrless h_m$ selon que $\text{tg} \theta \gtrless 0,75$. Comme $\text{tg} \theta$ est généralement $> 0,75$, en général $\lambda_m < h_m$.

Le point M' est sur la droite

$$R = \frac{\lambda}{4 \cdot (\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta} - \text{tg} \theta)}$$

qui dépend de θ ; elle se confond avec le lieu de M pour $\text{tg} \theta = 0,75$ et $\text{tg} \theta = 0$ (demi-carré).

Le point A est sur la droite $R = \frac{1}{2} \cdot \frac{h \cdot \text{tg} \theta}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}}$

Si $\text{tg} \theta = 0$, elle se confond avec l'axe des abscisses.

Si $\text{tg} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, elle se confond avec $R = \frac{h}{4}$, A est au point d'inflexion.

Si $\text{tg} \theta = \infty$, elle se confond avec $R = \frac{h}{2}$.

Les deux limites extrêmes n'ont qu'une signification mathématique et le point d'inflexion n'est compris entre M et A que si $\text{tg} \theta > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

On remarque que R varie peu aux environs de M et M' , c'est-à-dire de la pente minimum et aussi lorsque λ est très grand. Si on limite $R \cdot i$, on voit que i variera peu pour une section ω donnée lorsque la section se rapproche de la forme optimum ou lorsqu'elle est très large.

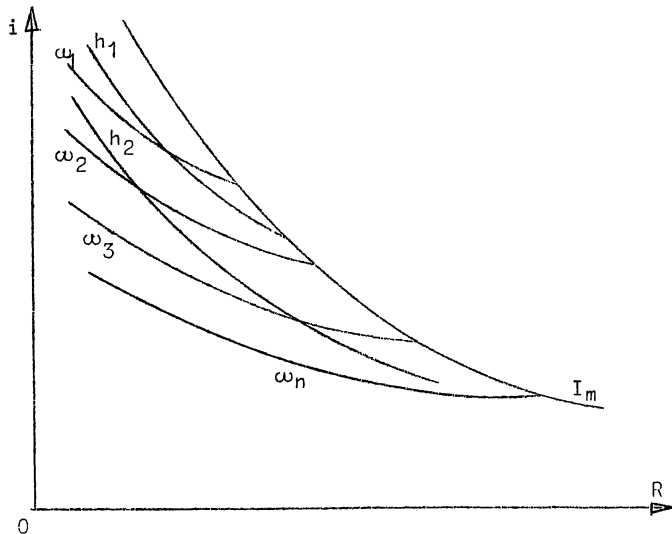


Fig. 174.

On peut d'ailleurs étudier la variation de i en fonction de R

$$\sqrt{i} = \frac{Q}{\omega \cdot C_R}$$

Si $\omega = \omega_1$, $\sqrt{i_{\omega_1}} = \frac{Q}{\omega_1 \cdot C_R}$,
courbe indépendante de θ .

$\frac{di_{\omega}}{dR}$ est toujours < 0 .

Pour diverses valeurs de ω , on obtient un faisceau de courbes asymptotiques aux 2 axes, mais ayant des points terminaux dépendant de θ :

$$R_m = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{g}}$$

L'ensemble de ces points terminaux se trouve sur une courbe I_m

telle que
$$\sqrt{I_m} = \frac{Q}{4 \xi \cdot R^2 \cdot C_R}$$

I_m dépend donc de θ .

Si on impose $h = \text{constante}$, on déduit de (150)

$$\omega = \frac{R \cdot \xi \cdot h}{h - R}, \quad \text{d'où} \quad \sqrt{I_h} = \frac{Q}{\xi \cdot R \cdot C_R} \cdot \frac{h - R}{h^2}$$

Le réseau des courbes i_h dépendantes de θ et asymptotiques aux deux axes, se termine aussi sur la courbe I_m (fig. 174).

10.- LIMITATION DE LA VITESSE DE FOND

On impose
$$\frac{Q}{v_e} = \Omega = \frac{\omega \cdot (1 + 0,60 \sqrt{R})}{1,25} = \text{constante} \quad (\text{paragraphe 5})$$

d'où
$$\omega = \frac{1,25 \cdot Q}{v_e \cdot (1 + 0,60 \sqrt{R})} = \frac{\xi \cdot h^2 \cdot R}{h - R} \quad [\text{dédduit de (150)}]$$

Remarquons que $d\omega = 0$ pour $dR = 0$. En effet

$$d\omega = \frac{1,25 Q}{v_e} \cdot \left[\frac{-0,30 R^{-1/2}}{(1 + 0,60 \sqrt{R})^2} \right] \cdot dR = 0$$

Or, on sait que pour $dR = 0$, $R = \frac{h}{2}$.

Posons $R = \frac{h}{N}$, N étant un nombre > 1 , compris entre 1 et 4, par exemple.

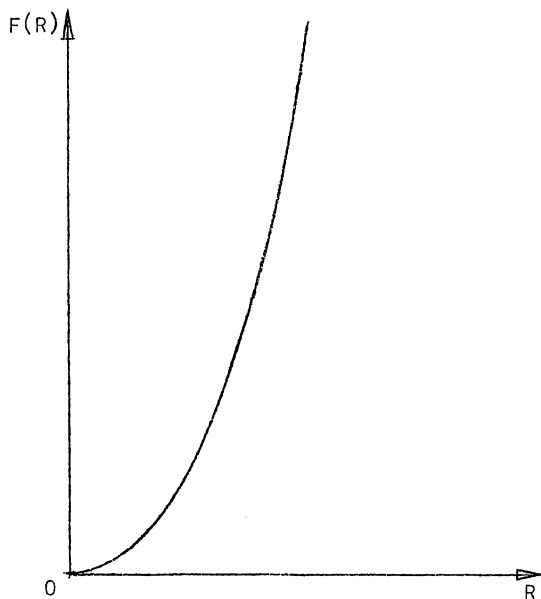


Fig. 175.

$$\omega = \frac{\beta \cdot N^2}{N - 1} \cdot R^2 = \frac{1,25 Q}{v_e \cdot (1 + 0,60 \sqrt{R})}$$

$$F(R) = R^2 \cdot (1 + 0,60 \sqrt{R})$$

$$= \frac{1,25 Q \cdot (N - 1)}{v_e \cdot N^2 \cdot \xi}$$

La fonction $F(R)$ tabulée, varie comme l'indique la figure 175. La valeur du 2^e membre, égale à $F(R)$, détermine R . On en déduit $h = N \cdot R$.

$$\omega = \xi \cdot \frac{N^2}{N - 1} \cdot R^2$$

$$\lambda = \frac{\omega}{h} - h \cdot \text{tg } \theta = \xi \cdot \frac{N}{N - 1} \cdot R - N \cdot R \cdot \text{tg } \theta$$

$$1 = \frac{\omega}{h} + h \cdot \text{tg } \theta = \xi \cdot \frac{N}{N - 1} \cdot R + N \cdot R \cdot \text{tg } \theta$$

Ce calcul se fait aisément pour diverses valeurs de N et on obtient ainsi facilement la courbe de $\omega(\Omega_1)$

Pour $N = 2$, on a une section minimum ou une pente minimum.

Une autre manière de procéder est la suivante. On écrit

$$v_e \gg 1,25 \cdot \sqrt{\frac{2g}{f}} \cdot \sqrt{R \cdot i}$$

$$v_e \gg 1,25 \cdot \sqrt{\frac{2g}{0,08 k^{1/3}}} \cdot \sqrt{R \cdot i}$$

$$v_e \gg 1,25 \cdot \sqrt{50 g \cdot k^{-1/6}} \cdot \sqrt{R \cdot i}$$

$$R \cdot i \ll \frac{v_e^2 \cdot k^{1/3}}{1,25 \cdot 50 g}$$

Posons $R = \frac{h}{N} \quad (N \equiv 1 \text{ à } 4)$

$$h \cdot i \ll N \cdot \frac{v_e^2 \cdot k^{1/3}}{(1,25) \cdot 50 g}$$

$$\omega = \frac{\xi \cdot h^2 \cdot R}{h - R} = \xi \cdot h^2 \cdot \frac{N^2}{N - 1}$$

On a donc
$$\varphi^3 = \frac{\omega \cdot h^2}{(\omega + \xi \cdot h^2)^2} = \frac{N^2 \cdot (N - 1)}{\xi \cdot (N^2 + N - 1)^2}$$

La valeur maximum est obtenue pour $N = 2$ et vaut $\varphi_{\max}^3 = \frac{1}{4 \xi}$.

11.- ABAQUES ET TABLES POUR LE CALCUL DES SECTIONS

Par suite de la variation du coefficient C de la formule de Chézy, le calcul des sections est assez complexe et se fait en principe par tâtonnements. On facilite les calculs par les abaques et tables suivants.

1) Un abaque en coordonnées logarithmiques de $\frac{\lambda h}{\omega}$, $\frac{\lambda}{\xi}$, $\frac{\lambda}{1}$ et $\frac{R}{h}$ en fonction de $\frac{\lambda}{h}$ et de $\text{tg } \theta$, avec les courbes $\frac{\lambda}{h} = \frac{1}{m}$ en fonction de $\text{tg } \theta$ repérant les paramètres des sections minima; (cfr. Abaque 3).

2) Un abaque analogue de $\frac{\omega}{h^3}$, $\frac{\xi}{1}$, $\frac{\lambda}{1}$ et $\frac{R}{h}$ en fonction de $\frac{h}{1}$ et de $\text{tg } \theta$, avec les courbes $\frac{h}{1} = m^3$ correspondant aux sections minima; (cfr. Abaque 4).

3) Un abaque des valeurs de la fonction $\mathfrak{F}(hm)$ en fonction du coefficient γ de la formule de Bazin et de hm ; (cfr. Abaque 5).

4) Un abaque de $C_R = C \cdot \sqrt{R}$ de la formule de Bazin, en fonction des valeurs de γ , donnant également les valeurs de $u = C \cdot \sqrt{R} \cdot \sqrt{i}$; (cfr. Abaque 1).

5) Un abaque analogue de la formule de Manning en fonction des valeurs de K donnant également $u = C \cdot \sqrt{R} \cdot \sqrt{i}$ (cfr. Abaque 2).

6) des tables des valeurs de ξ en fonction de $\text{tg } \theta$ et de $F(R) = R^2 \cdot (1 + 0,60 \sqrt{R})$ en fonction de R . (Voir ci-après).

7) des abaques des fonctions relatives aux sections paraboliques et aux sections circulaires et ovoïdes, ouvertes et fermées. (cfr. ABAQUES 6, 7 et 8).

TABLE DES VALEURS DE ξ EN FONCTION DE $\text{tg } \theta$

$\text{tg } \theta$	ξ	$\text{tg } \theta$	ξ	$\text{tg } \theta$	ξ
0	2,0000	1,3	1,980	3,6	3,873
0,1	1,9100	1,4	2,041	3,8	4,059
0,2	1,8396	1,5	2,1056	4,0	4,246
0,3	1,7880	1,6	2,174	4,2	4,435
0,4	1,754	1,7	2,245	4,4	4,624
0,5	1,736	1,8	2,318	4,6	4,815
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1,730	1,9	2,394	4,8	5,006
0,6	1,732	2,0	2,470	5,0	5,198
0,7	1,741	2,2	2,633	5,2	5,391
0,8	1,760	2,4	2,800	5,4	5,583
0,9	1,790	2,6	2,971	5,6	5,777
1,0	1,82	2,8	3,146	5,8	5,971
1,1	1,873	3,0	3,325	6,0	6,1656
1,2	1,924	3,2	3,505		
		3,4	3,688		

TABLE DES VALEURS DE $F(R)$ EN FONCTION DE R

R	F(R)	R	F(R)	R	F(R)
0,0	0,00000	2,2	9,147	5,8	82,250
0,1	0,01190	2,3	10,104	6,0	88,898
0,2	0,05073	2,4	11,114	6,2	95,869
0,3	0,1196	2,5	12,178	6,4	103,13
0,4	0,2207	2,6	13,300	6,6	110,70
0,5	0,3560	2,7	14,477	6,8	118,59
0,6	0,5236	2,8	15,711	7,0	126,79
0,7	0,7360	2,9	17,002	7,2	135,30
0,8	0,9833	3,0	18,353	7,4	144,14
0,9	1,2712	3,2	21,230	7,6	153,30
1,0	1,600	3,4	24,349	7,8	162,79
1,1	1,971	3,6	27,714	8,0	172,60
1,2	2,386	3,8	31,329	8,2	182,77
1,3	2,846	4,0	35,200	8,4	193,26
1,4	3,351	4,2	39,330	8,6	204,10
1,5	3,903	4,4	43,724	8,8	215,28
1,6	4,503	4,6	48,391	9,0	226,80
1,7	5,151	4,8	53,326	9,2	238,51
1,8	5,849	5,0	58,540	9,4	250,90
1,9	6,595	5,2	64,036	9,6	263,48
2,0	7,394	5,4	69,818	9,8	276,43
2,1	8,244	5,6	75,885	10,0	289,72

CHAPITRE XIII

MOUVEMENT VARIABLE DANS LES CANAUX DECOUVERTS

1.- EQUATIONS DU MOUVEMENT VARIABLE

Les éléments du mouvement permanent uniforme en un point d'un canal prismatique ne dépendent que des coordonnées du point dans la section transversale. Ceux du mouvement permanent varié en un point d'un canal ne dépendent que des trois coordonnées du point. Une section reste toujours identique à elle-même.

En mouvement variable, dans une section, la hauteur d'eau, le débit et les vitesses varient d'un instant à l'autre. Les éléments du mouvement dépendent donc non seulement des coordonnées du point, mais aussi du temps.

On admet en général l'hypothèse que les vitesses varient progressivement et que leurs directions sont toutes sensiblement parallèles et constantes, c'est-à-dire que l'on se place dans les mêmes conditions que dans l'étude du mouvement permanent graduellement varié.

Si l'on considère deux sections infiniment voisines distantes de ds , la différence entre le débit entrant et le débit sortant par les sections d'amont et d'aval doit être égale à la variation du volume compris entre les deux sections.

Donc
$$\frac{\partial Q}{\partial s} \cdot ds \cdot dt = - \frac{\partial \omega}{\partial t} \cdot dt \cdot ds$$

L'équation de continuité en mouvement variable est donc

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 . \quad (151)$$

Si la section ω du cours d'eau est sensiblement rectangulaire et assez large, on peut simplifier l'équation en considérant le débit par unité de largeur, on a

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0 . \quad (151 \text{ bis})$$

Si u est la vitesse moyenne parallèle à la direction générale du courant

$$Q = \omega \cdot u$$

d'où
$$\frac{\partial Q}{\partial s} = u \cdot \frac{\partial \omega}{\partial s} + \omega \cdot \frac{\partial u}{\partial s}$$

et
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \omega}{\partial s} + \omega \cdot \frac{\partial u}{\partial s} = 0 . \quad (152)$$

En considérant le débit par unité de largeur, on peut écrire pour un canal prismatique de section rectangulaire :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial h}{\partial s} + h \cdot \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \quad (152 \text{ bis})$$

Si le canal est prismatique $\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$

d'où
$$\frac{\partial \omega}{\partial h} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial h}{\partial s} \right) + \omega \cdot \frac{\partial u}{\partial s} = 0$$

ou
$$1 \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial h}{\partial s} \right) + \omega \cdot \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \quad (152 \text{ ter})$$

Les coordonnées x ou s , y et z et le temps t sont des variables indépendantes. Les trois déplacements orthogonaux des molécules ξ , η et ζ sont des fonctions de x ou s , y , z et t , de même que les vitesses

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{et} \quad w = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

L'hypothèse admise quant à la constance générale de la direction des vitesses dans les canaux découverts, quasiment prismatiques, conduit à considérer en général v comme nul ou négligeable, ainsi que ses variations. La vitesse verticale w est aussi nécessairement faible, mais pas toujours nulle ou négligeable. Sa variation par rapport à x ou s doit cependant l'être, mais pas cependant toujours $\frac{\partial w}{\partial t}$, qui peut avoir des valeurs appréciables dans certains cas. Pour ce qui est de u , vitesse du mouvement longitudinal le plus important, la formule

$$Q = \omega \cdot u \quad \text{ou} \quad q = h \cdot u$$

implique que u n'est fonction que de x ou s et de t , mais pas de y et de z , ou bien que l'on se réfère à la vitesse moyenne.

En supposant la pente négligeable, les équations complètes d'Euler s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= - \frac{\partial u}{\partial t} - u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= - g - \frac{\partial w}{\partial t} - u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} - w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

Pour simplifier l'étude des phénomènes et selon l'hypothèse exposée ci-dessus, on néglige les vitesses verticales w vis-à-vis de u , ainsi que leurs variations d'une section à l'autre. En outre, on néglige en première approximation les termes des frottements et de pertes de charge, les phénomènes étant de peu d'amplitude et les étendues étant faibles. On a donc :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= - \frac{\partial u}{\partial t} - u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= - g - \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (153)$$

Parallèlement, on omet parfois $\frac{\partial \omega}{\partial s}$ ou $\frac{\partial h}{\partial s}$ dans l'équation de continuité.

2.- FORMULES GENERALES DES ONDES DE TRANSLATION

On donne le nom d'onde de translation à une forme de régime variable caractérisée par le déplacement d'une intumescence ou d'une dépression de la surface libre de l'eau. Ce déplacement s'effectue avec une vitesse appréciable et peu variable, appelée célérité de l'onde. L'intumescence se déplace en conservant sa forme (onde solitaire) ou en se déformant progressivement pour finir éventuellement par déferler. Dans un liquide en repos, les molécules sont plus ou moins déplacées et ne se retrouvent pas au point initial après le passage de l'onde.

On peut appliquer les équations du paragraphe précédent à l'étude d'une telle onde se produisant dans un liquide au repos dans un canal horizontal, de section rectangulaire et de profondeur H , la largeur étant égale à 1. Nous appellerons ζ la hauteur d'un point quelconque de l'intumescence au-dessus de la surface libre initiale, où la pression est nulle.

La 2^e équation d'Euler donne

$$\frac{p}{\rho_e} = g.(H + \zeta - z) + \int_z^{H+\zeta} \frac{\partial w}{\partial t} . dz$$

La vitesse w est nulle au fond; à la surface elle vaut $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$. On suppose qu'elle varie linéairement suivant la profondeur, ce qui est une hypothèse acceptable par suite des faibles valeurs des vitesses verticales.

En effet, l'équation générale de continuité est

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 .$$

On substitue à u sa valeur moyenne, c'est-à-dire une valeur constante de u , indépendante de z . Dès lors

$$dw = - \frac{du}{dx} . dz \quad \text{et} \quad w = - z . \frac{du}{dx}$$

En négligeant ζ par rapport à H , on a, d'après la forme (152 bis) de l'équation de continuité

$$\frac{dh}{dt} + H . \frac{du}{dx} = 0$$

Comme $h = H + \zeta$ $\frac{d\zeta}{dt} + H . \frac{du}{dx} = 0$

donc $\frac{du}{dx} = - \frac{1}{H} . \frac{d\zeta}{dt}$ et $w = \frac{z}{H} . \frac{d\zeta}{dt}$

L'hypothèse de la variation linéaire de w correspond donc à celle de la constance de u et n'est pas exacte, mais suffisamment approximative, attendu que les variations de u peuvent être considérées comme mo-
dérées.

Donc $w = \frac{z}{H} . \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ et $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{z}{H} . \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$

Donc
$$\frac{p}{\rho_e} = g \cdot (H + \zeta - z) + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \cdot \frac{H^2 - z^2}{2H}$$

en admettant que ζ soit assez petit par rapport à H pour que $(H + \zeta)^2 \approx H^2$.

Différencions cette équation par rapport à x et égalons-là à la première équation d'Euler.

$$g \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \cdot \partial t^2} \cdot \frac{H^2 - z^2}{2H} + \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Si l'on applique cette équation à la valeur moyenne de u , on doit envisager la valeur moyenne

$$\int_0^H \frac{H^2 - z^2}{2H^2} \cdot dz = \frac{H}{3},$$

donc, on obtient enfin l'équation

$$g \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \cdot \partial t^2} \cdot \frac{H}{3} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u \cdot \partial u}{\partial x} = 0 \tag{154}$$

qui s'applique au courant. Le mouvement étant turbulent, on admet

$$\eta = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = 1.$$

Avec l'équation de continuité

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(H + \zeta) \cdot u] = 0 \tag{151 bis),}$$

l'équation (154) permet théoriquement, d'après les conditions aux limites, de déterminer ζ , c'est-à-dire la forme de l'onde, et u , c'est-à-dire les vitesses.

Soit V la célérité ou vitesse de propagation de l'onde. Cela suppose que l'onde se déplace sans changer de forme, la célérité étant la même en tous points. Donc, lorsque t croît de dt , x croît de $V \cdot dt$, sans que ζ ni u ne se modifient. Ou encore, ζ et u sont les mêmes à l'instant t en un point $x + dx = x + V \cdot dt$ qu'au point x à l'instant

$t - dt$. Il en résulte que leurs dérivées par rapport à t sont égales à $-V$ fois les dérivées par rapport à x .

En effet, à l'instant t , au point x , on a une certaine valeur A d'une fonction de l'onde.

A l'instant t , au point $x + dx$, on a une certaine valeur $A + \frac{\partial A}{\partial x} \cdot dx$

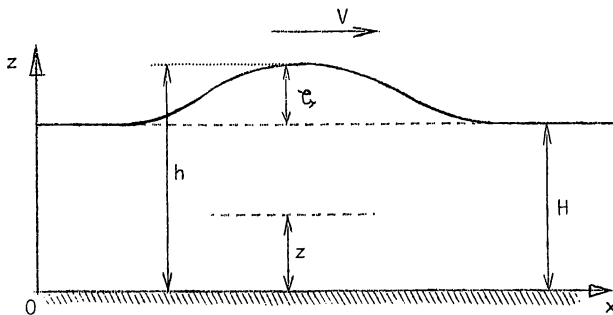


Fig. 176.

A l'instant $t - dt$, au point x , on a une certaine valeur $A - \frac{\partial A}{\partial t} . dt$
 Par suite de la nature du mouvement, les deux dernières valeurs sont équivalentes, d'où :

$$- \frac{\partial A}{\partial t} . dt = \frac{\partial A}{\partial x} . dx, \quad \text{donc} \quad \frac{\partial A}{\partial t} = - \frac{dx}{dt} . \frac{\partial A}{\partial x} = - V . \frac{\partial A}{\partial x} .$$

En écrivant $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - V . \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ et $\frac{du}{dt} = - V . \frac{du}{dx}$,

$$\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x . \partial t^2} = \frac{\partial \partial^2 \zeta}{\partial t . \partial x . \partial t} = - V . \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 . \partial t} = V^2 . \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3},$$

les équations précédentes deviennent ce qui suit

$$V . \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [(H + \zeta) . u]$$

$$g . \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{H . V^2}{3} . \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} - V . \frac{\partial u}{\partial x} + u . \frac{\partial u}{\partial x} = 0 .$$

On peut intégrer par rapport à x et prendre les constantes nulles

$$V . \zeta = (H + \zeta) . u$$

$$V . u = g . \zeta + \frac{V^2 . H}{3} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{u^2}{2}$$

d'où
$$u = \frac{V . \zeta}{H + \zeta} \quad (155)$$

En substituant cette valeur dans la deuxième équation, on obtient

$$V^2 . \frac{\zeta}{H + \zeta} = g . \zeta + \frac{V^2 . H}{3} . \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{V^2}{2} . \left(\frac{\zeta}{H + \zeta} \right)^2$$

$$V^2 . \left[1 - \frac{1}{2} . \frac{\zeta}{H + \zeta} - \frac{H . (H + \zeta)}{3 \zeta} . \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right] = g . (H + \zeta)$$

$$V^2 . \left[1 - \frac{1}{2} . \frac{\zeta}{H + \zeta} - \frac{H^2}{3 \zeta} . \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right] = g . (H + \zeta)$$

On en déduit, en négligeant les puissances de $\frac{\zeta}{H}$ supérieures à la première et les produits de $\frac{\zeta}{H}$ par $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$:

$$V = \sqrt{g . H . \left(1 + \frac{3}{2} . \frac{\zeta}{H} + \frac{H^2}{3 \zeta} . \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)} \quad (156)$$

ou approximativement

$$V = \sqrt{g . H . \left(1 + \frac{3}{4} . \frac{\zeta}{H} + \frac{H^2}{6 \zeta} . \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)} \quad (156 \text{ bis})$$

Donc la célérité dépend essentiellement de $\sqrt{g . H}$.

Ces formules impliquent, selon leur mode d'établissement, que V soit constant. Ceci peut être réalisé de deux manières :

a) $\zeta = \text{constante}$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0$, on a affaire à une onde allongée.

b) $\frac{3}{2} \cdot \frac{\zeta}{H} + \frac{H^2}{3 \zeta} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \text{constante}$, c'est l'onde solitaire.

Lorsque l'une ou l'autre de ces conditions n'est pas satisfaite, la célérité n'est pas la même en tous les points et l'onde de translation n'a pas une forme invariable.

Lorsqu'une onde de translation se déplace à la surface d'une nappe d'eau immobile, au passage de l'onde, il se produit des vitesses et un débit. On peut définir la propagation (ou le déplacement) de certains caractères du mouvement : hauteur, vitesse, débit.

Par exemple, la propagation d'une hauteur

$$h = H + \zeta = \text{constante.}$$

Donc
$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial s} \cdot ds + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdot dt$$

d'où
$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{\zeta} = V_{\zeta} = - \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial t}}{\frac{\partial \zeta}{\partial s}} = - \frac{w}{\sin \alpha_s}$$

On comprend donc que w puisse être négligeable sans que V_{ζ} le soit.

Pour une vitesse moyenne u ,
$$V_u = \frac{- \frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial s}}$$

Pour un débit Q ,
$$V_Q = - \frac{\frac{\partial Q}{\partial t}}{\frac{\partial Q}{\partial s}} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial t}}{\frac{\partial w}{\partial t}}$$
 , en vertu de (151).

On peut considérer la propagation de $h_{\max} = H + \zeta_{\max}$

Donc
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$$
 , d'où
$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \cdot \partial s} \cdot ds + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{\zeta_{\max}} = V_{\zeta_{\max}} = - \left[\frac{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \cdot \partial s}} \right]_{w=0} = - \left[\frac{\frac{\partial w}{\partial t}}{\frac{\partial w}{\partial s}} \right]_{w=0}$$

D'après (151 bis)
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$$
 entraîne
$$\frac{\partial q}{\partial s} = 0$$

donc
$$\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} \cdot ds + \frac{\partial^2 q}{\partial s \cdot \partial t} \cdot dt = 0$$

d'où
$$\frac{ds}{dt} = V_{\zeta_{\max}} = - \frac{\frac{\partial^2 q}{\partial s \cdot \partial t}}{\frac{\partial^2 q}{\partial s^2}}$$

La vitesse de propagation de q_{\max} correspond à $\frac{\partial q}{\partial t} = 0$

d'où
$$V_{q \max} = - \frac{\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 q}{\partial s \cdot \partial t}}$$

En principe, pour une onde quelconque, toutes ces célérités sont différentes et variables, ce qui produit une déformation progressive des ondes. Selon les formules (156) et (156 bis), la célérité est d'autant plus grande que $\frac{\zeta}{H}$ est plus grand, c'est-à-dire que l'intumescence est plus élevée et que $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$ est plus grand, c'est-à-dire que la courbure est plus grande.

3.- ONDES DE TRANSLATION ALLONGEES

Elles correspondent à $\zeta = \text{constante}$,

d'où
$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0 .$$

a) Les équations du paragraphe précédent se simplifient donc et deviennent

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varrho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= - \frac{\partial u}{\partial t} - u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{1}{\varrho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= - g \end{aligned} \right\} \quad (153 \text{ bis})$$

Donc
$$p = \varrho_e \cdot g \cdot (h - z)$$

Différentiations par rapport à x et égalons à la première des équations (153 bis), il vient

$$g \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (154 \text{ bis})$$

u est donc simplement fonction de x et de t , la vitesse horizontale est partout la même et elles le restent toutes dans de mêmes sections droites.

Il faut pour cela que les frottements soient négligeables ($\frac{\partial u}{\partial z} = 0$).

L'équation de continuité (152 bis) prend la forme

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (H + \zeta) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$$

Ces équations conviennent aux ondes allongées d'assez grande hauteur : (fig. 177).

Le raisonnement du paragraphe précédent relatif à V conduit à

$$u = \frac{V \cdot \zeta}{H + \zeta} \quad (155) \text{ inchangé}$$

et
$$V^2 \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\zeta}{H + \zeta} \right] = g \cdot (H + \zeta)$$

$$\text{d'où } V = \sqrt{g \cdot \left(H + \frac{3}{2} \frac{\zeta}{H}\right)} = \sqrt{g \cdot H \cdot \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\zeta}{H}\right)} \approx \sqrt{g \cdot H} \cdot \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{\zeta}{H}\right) \quad (156 \text{ ter})$$

b) Pour les ondes allongées de faible hauteur relative, on peut négliger $\frac{\zeta}{H}$ et on obtient

$$V = \sqrt{g \cdot H} \quad \text{formule de Lagrange} \quad (157)$$

Pour ces ondes de faible hauteur, on peut négliger

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \zeta \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad u \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Les équations (152 bis) et (154) deviennent

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (152 \text{ quater})$$

$$g \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (154 \text{ ter})$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -H \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial t} = g \cdot H \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

$$\text{Comme } g \cdot H = V^2, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = V^2 \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (158)$$

C'est l'équation des cordes vibrantes, dont la solution générale est

$$\zeta = F_1\left(t - \frac{x}{V}\right) + F_2\left(t + \frac{x}{V}\right)$$

F_1 et F_2 étant deux fonctions quelconques.

On voit que, comme il est considéré au paragraphe précédent, quand on fait croître t de dt et x de $\pm V \cdot dt$, les valeurs de F_1 et F_2 ne changent pas. F_1 et F_2 représentent donc deux ondes se déplaçant avec les célérités V et $-V$.

D'après (154 quater)

$$u = \frac{g}{V} \cdot F\left(t - \frac{x}{V}\right) - \frac{g}{V} \cdot F_2\left(t + \frac{x}{V}\right)$$

Le cas général comporte deux ondes se propageant en sens inverse l'une de l'autre, avec des célérités égales et opposées, mais l'une d'elles peut être nulle. Dans ce cas,

$$\zeta = F\left(t - \frac{x}{V}\right), \quad u = \frac{g}{V} \cdot F\left(t - \frac{x}{V}\right) = \frac{V}{H} \cdot \zeta \quad (155 \text{ bis})$$

(155 bis) est l'équation de continuité correspondant à la formule de Lagrange

$$V = \sqrt{g \cdot H} \quad (157)$$

Certains auteurs écrivent aussi $V = \sqrt{g \cdot (H + \zeta)}$, ce qui ne correspond à aucune des formules (156 ter) et (157) et n'est licite que si ζ est négligeable; la formule de Lagrange convient alors.

Il est à remarquer que $V = \sqrt{g \cdot H}$ est la vitesse critique correspondant à la profondeur H . Il en résulte que le ressaut est possible lorsque la vitesse du courant dépasse la célérité d'onde correspondant à la profondeur.

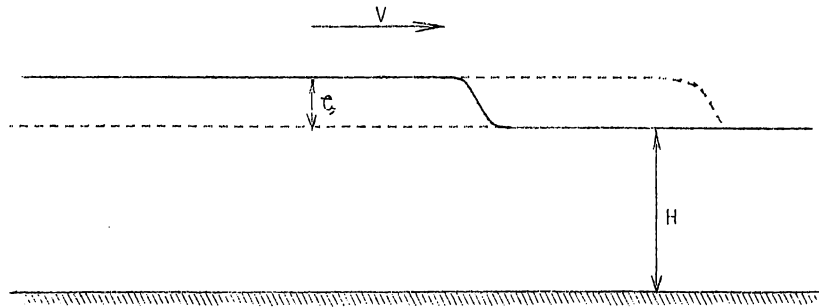


Fig. 177.

4.- ONDE SOLITAIRE

J. Scott Russell a donné le nom d'onde solitaire (1844) à l'onde qui se déplace sans se déformer, c'est-à-dire dont tous les points ont même vitesse et qu'il avait observée pour la première fois en faisant des expériences de traction de bateaux sur des canaux.

Pour que V soit indépendant de ζ , il faut poser (paragraphe 2) :

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\zeta}{H} + \frac{H^2}{3\zeta} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{h}{H}$$

h étant une constante, d'où

$$V = \sqrt{g \cdot (H + h)} = \text{constante} \quad (159)$$

L'onde solitaire a une forme bien déterminée. Elle est entièrement en saillie et théoriquement asymptotique à la surface libre de l'eau. Elle est symétrique par rapport à un axe vertical, sur lequel se trouve le sommet de hauteur h au-dessus du plan d'eau d'équilibre. Le centre de gravité de l'onde est au tiers de cette hauteur et l'onde a deux points d'inflexion à hauteur

$$\zeta = \frac{2}{3} h$$

(fig. 178).

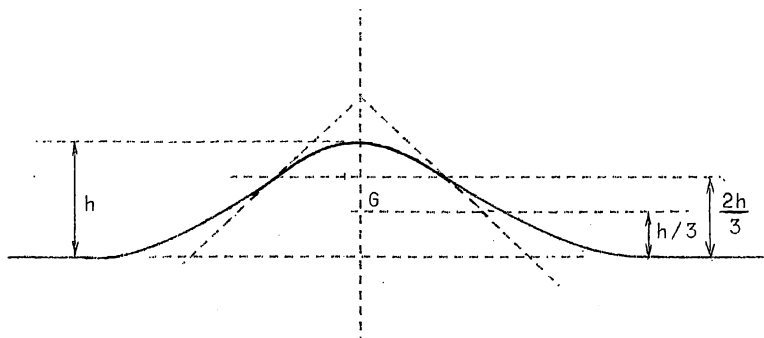


Fig. 178.

Pratiquement, l'onde se raccorde à la surface d'équilibre à distance finie.

Cette onde, qui tend à se former spontanément, ne se déforme pas et se conserve

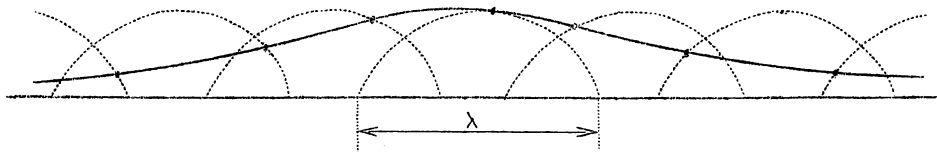


Fig. 179.

sur de très grandes distances. Sa propriété la plus intéressante est la trajectoire des particules liquides, déterminée par M. Boussinesq en eau tranquille (fig. 179). Ce sont des arceaux paraboliques dont la largeur λ est égale au quotient de la surface de l'onde par la profondeur primitive et dont la hauteur est égale à celle de l'onde pour les points de la surface; pour les autres points, elle est proportionnelle à la distance au fond. Donc toutes les particules sont déplacées de la même quantité, le mouvement étant très lent au commencement et à la fin, la vitesse maximum horizontale correspondant au passage du sommet de l'onde.

L'équation de l'onde est
$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{3}{2} \frac{\zeta}{H^3} \cdot (2h - 3\zeta)$$

Multiplions les 2 membres par $2 \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot dx$ et observons que $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$, lorsque $\zeta = 0$, on a

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 = \frac{3 \zeta^2 \cdot (h - \zeta)}{H^3}$$

Appelons $\sigma = \int \zeta \cdot dx$ l'aire de l'onde, on a $d\sigma = \zeta \cdot dx$, donc

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \zeta \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma}$$

donc
$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \sigma}\right)^2 = \frac{3}{H^3} \cdot (h - \zeta), \quad \sqrt{\frac{3}{H^3}} \cdot d\sigma = (h - \zeta)^{1/2} \cdot d\zeta \quad (160)$$

d'où
$$\sqrt{\frac{3}{H^3}} \cdot (\sigma - C) = 2 \cdot \sqrt{h - \zeta}.$$

Pour $\zeta = 0$, $\sigma = 0$, d'où $C^2 = \frac{4 H^3 \cdot h}{3}$

Mais $\sigma = \frac{\Sigma}{2}$ pour $\zeta = h$, donc $C = \frac{\Sigma}{2}$ et $\Sigma = 4 H \cdot \sqrt{\frac{H \cdot h}{3}}$

d'où
$$\lambda = 4 \cdot \sqrt{\frac{H \cdot h}{3}}, \quad h = \frac{3}{16} \cdot \frac{\Sigma^2}{H^3}$$

En éliminant C et h , on obtient :

$$\zeta = \frac{3}{4 H^3} \cdot \sigma \cdot (\Sigma - \sigma).$$

Remplaçant dans (160) $d\sigma$ par $\zeta \cdot dx$, on obtient

$$\sqrt{\frac{3}{H^3}} \cdot dx = \frac{d\zeta}{\zeta \cdot (h - \zeta)^{1/2}} \quad (161)$$

qui est l'équation différentielle de l'onde solitaire $\frac{d\zeta}{dx} = 0$ pour $\zeta = 0$ (asymptote) et $\zeta = h$ (sommet).

$$\text{Pour } x = 0, \zeta = h, \text{ d'où } \zeta = h \cdot \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x}{H} \sqrt{\frac{3h}{4H}} \right) = \frac{2h}{1 + \cosh \left(\sqrt{\frac{3h}{H^3}} \cdot x \right)}$$

ou approximativement

$$\zeta = \frac{h}{1 + \frac{3}{8} \frac{h \cdot x^2}{H^3} + \frac{3}{512} \cdot \frac{h^2 \cdot x^4}{H^6}}$$

La vitesse verticale à la surface est

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{dx}{dt} \cdot \sqrt{\frac{3}{H^3}} \cdot \zeta \cdot (h - \zeta)^{1/2} = \sqrt{g \cdot (H + h)} \cdot \sqrt{\frac{3}{H^3}} \cdot \zeta \cdot (h - \zeta)^{1/2}$$

$$w = \sqrt{3g \cdot \zeta \cdot \left(1 + \frac{h}{H}\right) \cdot \left(\frac{h - \zeta}{H}\right) \cdot \frac{\zeta}{H}}$$

Elle est nulle pour $\zeta = 0$ et $\zeta = h$.

Elle est maximum au point d'inflexion, pour $\zeta = \frac{2}{3} \cdot h$ et vaut

$$w_{\max} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{g \cdot \left(1 + \frac{h}{H}\right) \cdot \frac{h^3}{H^2}}$$

La théorie de l'onde solitaire exposée ci-dessus selon la solution de Boussinesq est affectée des simplifications introduites dans les équations fondamentales (paragraphe 1 et paragraphe 2). Elle est donc approximative et d'autant plus exacte que $\frac{h}{H}$ est plus petit. Une théorie plus exacte a été établie par Lord Rayleigh. Elle conduit à la même valeur de V , mais écrit

$$\zeta = h \cdot \operatorname{sech}^2 \left[\frac{x}{H} \sqrt{\frac{3h}{4(H+h)}} \right]$$

Le caractère approximatif de la solution ressort suggestivement de ce qui suit.

La vitesse moyenne est $u = \frac{V \cdot \zeta}{H + \zeta}$ (155)

La ligne d'énergie est définie par

$$\mathcal{E} = H + \zeta + \frac{u^2}{2g} = H + \zeta + \frac{(H+h) \cdot \zeta^2}{2 \cdot (H+\zeta)^2}$$

$$\mathcal{E} = H + \zeta + \frac{H+h}{2} \cdot \frac{\left(\frac{\zeta}{H}\right)^2}{\left(1 + \frac{\zeta}{H}\right)^2} \approx H + \zeta$$

La ligne d'énergie est sensiblement confondue avec la surface libre de l'onde.

Imprimons à toute la masse liquide une vitesse générale de translation égale et de sens contraire à la célérité V . La surface d'onde devient immobile (fig. 180). La vitesse de courant est

$$U = V - u = \frac{V \cdot H}{H + \zeta}$$

La ligne d'énergie est donnée par

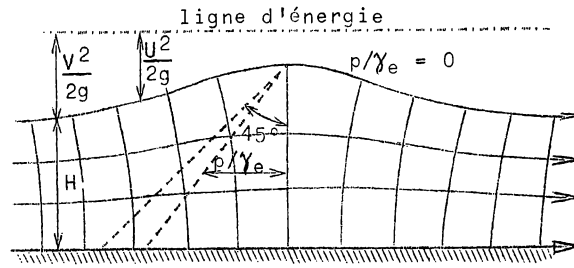


Fig. 180.

$$\mathcal{E} = H + \zeta + \frac{U^2}{2g} = H + \zeta + \frac{v^2 \cdot H^2}{2g \cdot (H + \zeta)^2} = H + \zeta + \frac{(H + h) \cdot H^2}{2(H + \zeta)^2}$$

$$\mathcal{E} = H + \zeta + \frac{(H + h)}{2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\zeta}{H}\right)^2} \approx H + \zeta + \frac{H + h}{2} \cdot \left(1 - \frac{2\zeta}{H} + \frac{\zeta^2}{H^2}\right)$$

$$\mathcal{E} \approx \frac{3H}{2} + \frac{h}{2} = \text{constante}$$

Comme

$$V = \sqrt{g \cdot (H + h)},$$

on a pour $\zeta = 0$

$$U_0 = V = \sqrt{g \cdot (H + h)} > U_{cr}$$

pour $\zeta = h$

$$U_{min} = \frac{V \cdot H}{H + h} = \sqrt{\frac{g \cdot H}{1 + \frac{h}{H}}} \approx \sqrt{g \cdot (H - h)} < U_{cr}$$

La hauteur pour laquelle $U = U_{cr}$ est donnée par

$$\sqrt{g \cdot (H + h)} \cdot \frac{H}{H + \zeta} = \sqrt{g \cdot (H + \zeta)}$$

d'où

$$(H + h) \cdot H^2 = (H + \zeta)^3$$

$$H^3 + H^2 \cdot h = H^3 + 3H^2 \cdot \zeta + 3H \cdot \zeta^2 + \zeta^3$$

En limitant l'équation à

$$H^2 \cdot h = 3H^2 \cdot \zeta,$$

$$\text{on a } \zeta = \frac{h}{3} \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = \frac{3}{2} \cdot H_c = \frac{3}{2} \cdot \left(H + \frac{h}{3}\right) = \frac{3}{2} \cdot H + \frac{h}{2}.$$

La valeur est naturellement identique à celle trouvée ci-dessus, puisque l'on a négligé les mêmes termes. La hauteur critique correspond à celle du centre de gravité de l'onde de faible hauteur. La figure 180 reproduit d'après Hunter-Rouse les équipotentielles, les lignes de courant et la ligne d'énergie de l'onde solitaire rendue immobile, mouvement permanent purement théorique.

Une autre inexactitude de la théorie résulte de ce que l'on néglige les pertes de charge de frottement, c'est-à-dire la dissipation d'énergie. Les expériences de J. Scott Russell ont établi la décroissance de hauteur des ondes au cours de leur progression, perte d'ailleurs très graduelle. La figure 181 reproduit les résultats d'une telle expérience, donnant la décroissance de h en fonction de $x = \int V \cdot dt$.

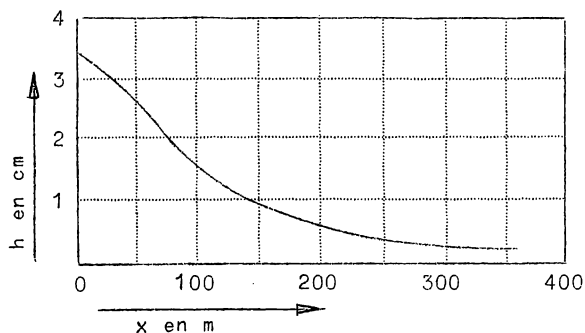


Fig. 181.

Lorsque h devient assez grand par rapport à la profondeur initiale H , l'onde solitaire devient instable. Lorsque h se rapproche de H et avant d'atteindre cette valeur, l'onde se désagrège avec bruit, par exemple lorsqu'elle gravit un lit en contre-pente douce et que H diminue.

Donc $h < H$. Le déferlement se produit lorsque V approche de la valeur $\sqrt{2 g \cdot H}$.

5.- DEFORMATION DES ONDES ALLONGEES DE HAUTEUR MODEREE OU FAIBLE

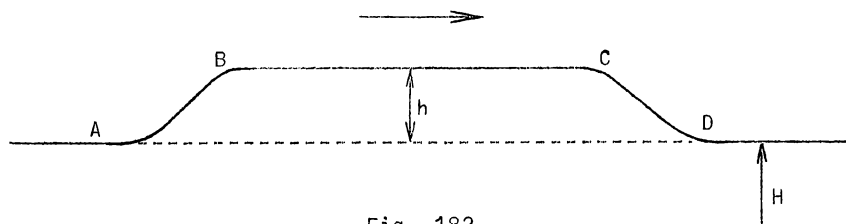


Fig. 182.

Une onde allongée de profil tel que ABCD (fig. 182) et de hauteur constante h sur une partie BC de sa longueur pourrait avoir une célérité constante

$$V = \sqrt{g \cdot H \cdot \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{H}\right)}$$

sur cette partie BC et ne pas se déformer. Mais il ne peut en être de même à ses extrémités AB et BC, parce que ζ varie et qu'il y a courbure de la surface de l'onde. Entre A et B, $\frac{\zeta}{H}$ est plus petit que $\frac{h}{H}$ et la courbure en B introduit dans la formule (156) de V (paragraphe 2) un terme négatif. La queue AB de l'onde avance moins vite que le corps; l'onde tend à se morceler vers l'arrière en ondes courtes et qui prennent une courbure telle qu'elles se déplacent sans se déformer, donc en forme d'ondes solitaires.

Le même phénomène se produit à la tête CD de l'onde. La partie BC avance plus vite et tend à recouvrir CD. Il en résulte un exhaussement de la tête de l'onde, qui prend une forme courbe correspondant à la vitesse générale de translation et qui est nécessairement suivie d'une série d'ondulations, concaves et convexes, comme il est montré ci-après.

Si l'on considère une onde très allongée, produite par exemple par l'envoi prolongé d'un débit dans le canal, le corps de l'onde a une hauteur constante h et une célérité constante

$$V = \sqrt{g \cdot (H + 1,5 h)}$$

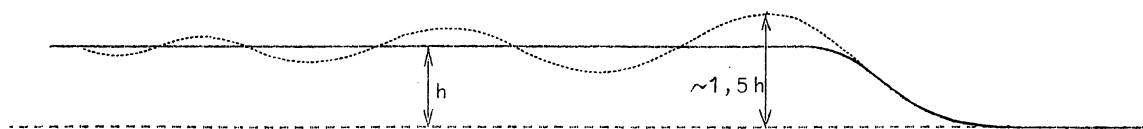


Fig. 183.

plus élevée que celle de la tête. Il en résulte la formation à l'avant d'un exhaussement, appelé onde initiale, dont la hauteur est 1,5 h environ, d'après Bazin. Cette tête surélevée est nécessaire pour qu'elle ait la vitesse générale malgré sa courbure négative.

L'onde initiale a en effet une forme se rapprochant de celle de l'onde solitaire. Pour que sa vitesse de propagation soit la même que celle du corps de l'onde, il faut que sa hauteur soit 1,5 h. (fig. 183).

La courbe de raccord a une courbure positive; il faut donc pour maintenir la célérité constante que ζ soit inférieur à h, donc qu'elle présente un creux et ainsi de suite. La tête de l'onde est donc formée d'une onde initiale suivie d'une série d'ondulations qui vont s'amortissant. Les ondes négatives se déforment nécessairement, puisque l'onde solitaire est toujours en saillie. Dans une onde négative, les deux extrémités avancent plus vite que le fond. Donc, l'arrière s'élève en onde positive suivie d'ondulations. A l'avant l'onde s'allonge, elle s'étend donc

sur une surface toujours plus grande, en même temps que le creux se réduit rapidement.

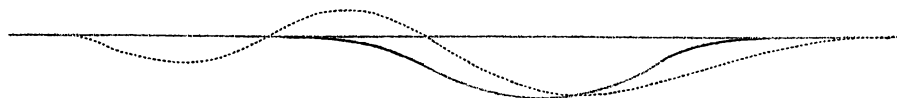


Fig. 184.

Les ondes négatives sont donc

très fugaces (fig. 184). Les résistances internes et externes interviennent encore pour amortir le mouvement des ondes, ce qui influe sur leur forme, leur évolution et leur extension.

D'après les études de M. Boussinesq, les frottements internes ont une influence très faible d'amortissement. L'action des parois peut être plus considérable, d'après la rugosité.

6.- ENERGIE DES ONDES DE TRANSLATION

Les ondes de translation ont une certaine énergie intrinsèque : somme des énergies potentielle et cinétique. Admettons que l'onde ne change pas de volume, le travail des pressions est donc nul, puisqu'elles sont toujours perpendiculaires aux déplacements.

Considérons une onde non amortie de largeur égale à l'unité et de surface Σ . L'énergie potentielle de l'onde par unité de largeur est :

$$\mathcal{E}_1 \text{ pot} = \gamma_e \cdot \Sigma \cdot \zeta_g$$

ζ_g étant l'ordonnée du centre de gravité de la surface Σ . En effet, pour un élément dx , on a

$$d\mathcal{E}_1 \text{ pot} = \gamma_e \cdot \zeta \cdot dx \cdot \frac{\zeta}{2} = \frac{\gamma_e \cdot \zeta^2}{2} \cdot dx$$

L'énergie cinétique $d\mathcal{E}_1 \text{ cin}$ d'un élément de largeur dx est :

$$d\mathcal{E}_1 \text{ cin} = \rho_e \cdot (H + \zeta) \cdot dx \cdot \frac{u^2}{2}$$

Mais, d'après l'équation de continuité :

$$u = \frac{\zeta}{H + \zeta} \cdot V$$

on a
$$d\mathcal{E}_1 \text{ cin} = \frac{\rho_e \cdot \zeta^2}{H + \zeta} \cdot dx \cdot \frac{V^2}{2} = \frac{\rho_e \cdot g \cdot \zeta^2}{2} \cdot dx = \frac{\gamma_e \cdot \zeta^2}{2} \cdot dx = d\mathcal{E}_1 \text{ pot}$$

Donc :
$$\mathcal{E}_1 = 2 \mathcal{E}_1 \text{ pot} = 2 \gamma_e \cdot \Sigma \cdot \zeta_g$$

Cette énergie représente la force vive de choc d'une onde se brisant contre un mur, elle est considérable.

Pour l'onde solitaire,
$$\Sigma = 4 H \cdot \sqrt{\frac{H \cdot h}{3}} \quad \text{et} \quad \zeta_g = \frac{h}{3}$$

Donc :
$$\mathcal{E}_1 = \gamma_e \cdot \left(\frac{4 H \cdot h}{3}\right)^{3/2} = \gamma_e \cdot \left(\frac{\Sigma}{2 H}\right)^3$$

Il en résulte que, comme \mathcal{E}_1 reste sensiblement constant, si H décroît, h augmente. Si l'onde gravit une plage en pente douce, les lames deviennent plus hautes et finissent par déferler en s'amortissant lorsque h se rapproche de H . Donc, pour une énergie donnée \mathcal{E}_1 , les hauteurs et profondeurs de déferlement sont

$$h_d \ll \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{\mathcal{E}_1}{\gamma_e}} \ll H_d$$

7.- ONDE DE CHOC

Au paragraphe 5, on a considéré les ondes allongées pour lesquelles h est notablement plus petit que H , à tout le moins plus petit que $\frac{2}{3} H$. En effet, si h atteint $\frac{2}{3} H$, la hauteur de l'onde initiale atteindra H et il y aura déferlement. L'énergie sera dissipée en tourbillons et projections.

Par le fait même, la partie arrière de l'onde ira rattraper la tête et toute l'onde se déplacera comme une masse d'eau de hauteur sensiblement constante et à front raide. C'est l'onde de gravité de choc avec perte d'énergie à la tête.

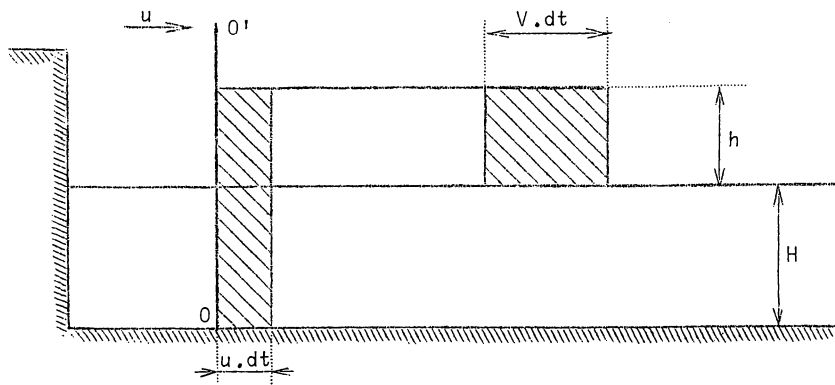


Fig. 185.

On peut envisager comme suit la génération d'une telle onde. Un canal à fond horizontal contient de l'eau immobile sur une profondeur H . Une cloison verticale OO' est mise en mouvement horizontal à une vitesse u . Elle refoule devant elle l'eau dont le niveau est surélevé de h (fig. 185). En vertu de l'équation de continuité

$$(H + h).u.dt = V.h.dt$$

V étant la célérité de la tête de l'onde de choc. Pendant le temps dt , le volume précédemment immobile $H.V.dt$ acquiert par unité de volume la quantité de mouvement $\varphi_e.u$. Cet accroissement de quantité de mouvement équilibre l'impulsion élémentaire des pressions sur les sections terminales.

Donc :

$$\varphi_e.H.V.u.dt = \frac{\gamma_e}{2} . [(H + h)^2 - H^2].dt$$

Eliminant u , on obtient $V^2 = \frac{g}{2} . \left[\frac{(H + h).(2H + h)}{H} \right]$

d'où $V = \sqrt{g.H} . \left[\frac{1}{2} . \frac{H + h}{H} . \left(\frac{H + h}{H} + 1 \right) \right]^{1/2}$ (160)

Si h est assez petit par rapport à H pour pouvoir négliger $\frac{h^2}{H^2}$ par rapport à $\frac{h}{H}$, on trouve

$$V = \sqrt{g.H} . \left(1 + \frac{3}{2} . \frac{h}{H} \right)^{1/2},$$

qui reproduit la formule (156 ter) des ondes allongées de hauteur modérée (paragraphe 3, a).

L'énergie de l'onde par unité de surface horizontale est

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1 \text{ pot} + \mathcal{E}_1 \text{ cin}$$

$$\mathcal{E}_1 \text{ pot} = \frac{\gamma_e \cdot h^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 \text{ cin} &= \rho_e \cdot (H + h) \cdot \frac{u^2}{2} = \rho_e \cdot \frac{V^2 \cdot h^2}{2 \cdot (H + h)} = \frac{\gamma_e \cdot h^2}{4} \cdot \frac{(2H + h)}{H} \\ &= \frac{\gamma_e \cdot h^2}{4} \cdot \left(2 + \frac{h}{H}\right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_1 = \gamma_e \cdot h^2 + \frac{\gamma_e \cdot h^3}{4H} = \gamma_e \cdot h^2 \cdot \left(1 + \frac{h}{4H}\right)$$

Si l'on imprime à toute la masse d'eau une vitesse de translation égale et de sens contraire à la célérité V de l'onde de choc, celle-ci est immobilisée et devient un ressaut superficiel fixe de hauteur h . La vitesse du courant en amont du ressaut est V . Posons

$$H = h_0, \quad H + h = h_1, \quad q_r = H \cdot V = h_0 \cdot V$$

L'équation (160) donne
$$V^2 = \frac{g \cdot h_1 \cdot (h_1 + h_0)}{2 h_0}$$

d'où
$$\left(\frac{h_1}{h_0}\right)^2 + \frac{h_1}{h_0} - \frac{2 q_r^2}{g \cdot h_0^3} = 0$$

$$\frac{h_1}{h_0} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{8 V^2}{g \cdot h_0}} - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + 8 \mathfrak{F}^2} - 1\right),$$

expression identique aux expressions (104) du ressaut parfait dans un canal rectangulaire (chapitre XI, paragraphe 3). Il y a donc identité entre le ressaut parfait et l'onde de gravité de choc à front raide. Sa célérité correspond à la vitesse du courant rapide. Cette célérité est toujours supérieure à $\sqrt{g \cdot H} = \sqrt{g \cdot h_0}$.

On a
$$H_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{h_1^2 \cdot (h_1 + h_0)}{2}}$$

d'où
$$h_0 = \frac{2 H_c^3 - h_1^3}{h_1^2} < H_c$$

$$\frac{h_0}{h_1} = \frac{2 H_c^3}{h_1^3} - 1 < \frac{H_c}{h_1}$$

Le débit est
$$q_r = h_1 \cdot \sqrt{g \cdot \frac{(h_1 + h_0)}{2}}$$

On peut appliquer le même raisonnement aux ondes allongées des paragraphes 3 et 5 et les immobiliser sous forme de ressaut superficiel par une vitesse de translation générale égale et de sens contraire à la célérité V . On obtient alors des ressauts de faible hauteur correspondant aux ondes allongées présentant une onde initiale et des ondulations, c'est-à-dire des ressauts ondulés. On sait qu'ils correspondent à $\mathfrak{F} < 2$ avec une région de transition pour $2 < \mathfrak{F} < 4$.

Or
$$\mathfrak{F} = \frac{V^2}{g \cdot h_0} = \frac{h_1 \cdot (h_1 + h_0)}{2 h_0^2} = \frac{(H + h) \cdot (2 H + h)}{2 H^2}$$

d'où
$$\mathfrak{F} = 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{H} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{H}\right)^2$$

Pour	$\frac{h}{H} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
	$\mathfrak{F} = 1,41$	1,875	2,222	3

Ces chiffres concordent avec ce qui a été dit plus haut. L'onde allongée est ondulée lorsque $\frac{h}{H} < \frac{1}{4}$ à $\frac{1}{2}$ et devient caractéristiquement une onde de choc lorsque $\frac{h}{H} > 1$. Comme le ressaut parfait, l'onde de gravité de choc est précédée d'une zone tourbillonnaire (fig. 186).

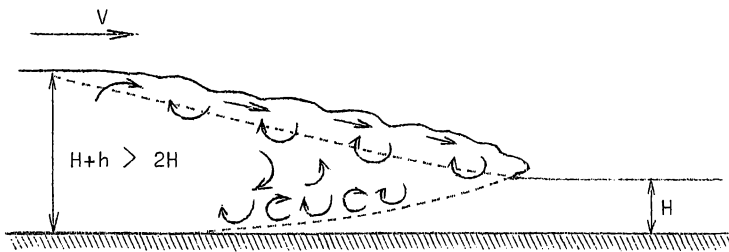


Fig. 186.

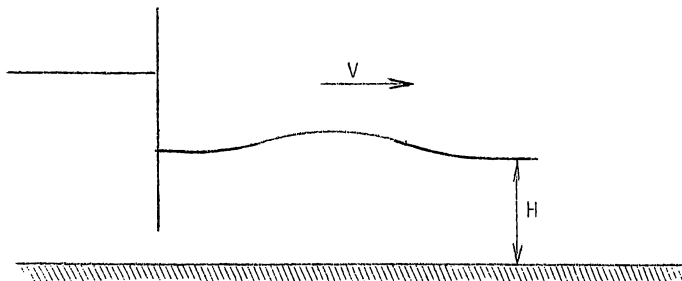


Fig. 187.

Les divers types d'onde décrits dans les paragraphes 3 à 7 peuvent être engendrés par le dispositif de la figure 185 en faisant varier la course de la paroi-écran. Le plus souvent cependant, l'expérience est réalisée par le dispositif de J. Scott Russell représenté à la figure 187. Une vanne peut découvrir un orifice de fond. En soulevant la vanne d'une manière appropriée et pendant un temps plus ou moins long, on peut produire tous les types d'ondes de translation considérés dans un canal horizontal.

8.- ONDES DANS LES EAUX COURANTES

Lorsque le canal est en pente, il y existe normalement un mouvement permanent uniforme ou graduellement varié. En toute première approximation, on peut admettre que la célérité propre de l'onde s'ajoute à la vitesse du courant, d'où

$$V = u \pm \sqrt{g \cdot H} \cdot \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{h}{H}\right) \quad (161)$$

Le signe + convient lorsque l'onde se déplace dans le sens descendant du courant, le signe - lorsque l'onde remonte le courant. Cependant, l'onde remontante perd plus vite sa régularité de forme et s'éteint plus vite, surtout si sa vitesse est faible (faible profondeur). La célérité est supérieure à celle de la formule ci-dessus si l'onde est positive et inférieure si l'onde est négative.

La célérité des ondes descendantes dans un courant très rapide sur un fond à forte pente et très rugueux, est aussi plus grande que l'indique la formule ci-dessus.

Boussinesq a établi une formule très complexe tenant compte de l'inégalité de répartition des vitesses dans le courant (facteurs α et η), de la pente et de la rugosité des parois. En négligeant les termes dépendant de la rugosité des parois et les termes de l'ordre h^2 , la formule de Boussinesq s'écrit :

$$V = u \pm \sqrt{g \cdot H} + \frac{4}{5} \left(2 \pm \frac{u^2 - 2g \cdot H}{2u \cdot \sqrt{g \cdot H}}\right) \cdot \left(\frac{v_m - u}{u}\right)^2 - \frac{8}{35} \cdot \left(3 \pm \frac{u}{\sqrt{g \cdot H}}\right) \cdot \left(\frac{v_m - u}{u}\right)^3$$

où v_m est la vitesse maximum du courant $> u = \frac{q}{h}$ ou $\frac{Q}{\omega}$. Certains auteurs proposent d'écrire la formule (161) sous la forme suivante pour tenir compte de l'inégale répartition des vitesses :

$$V = u \pm \sqrt{g \cdot H} \cdot \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{h}{H} - \mu\right) \quad (161 \text{ bis})$$

μ étant une grandeur expérimentale.

Soit u' l'accroissement de vitesse dû à l'onde. D'après l'équation de continuité et en adoptant pour la vitesse de l'onde la formule de Lagrange :

$$\sqrt{g \cdot H} = \frac{H+h}{h} \cdot u' \approx \frac{H}{h} \cdot u' \quad \text{d'où} \quad h = \sqrt{\frac{H}{g}} \cdot u'$$

Donc

$$V = u - \sqrt{g \cdot H} \cdot (1 - \mu) \pm \frac{3}{4} \cdot u'$$

Par exemple, dans un canal où l'eau circule avec une vitesse u , arrêtons le mouvement par fermeture brusque d'une vanne. Il se produit une onde ascendante. L'accroissement de vitesse est $u' = -u$, donc

$$V = u - \sqrt{g \cdot H} \cdot (1 - \mu) - \frac{3}{4} u = \frac{1}{4} u - \sqrt{g \cdot H} \cdot (1 - \mu)$$

D'après Bazin, la correction peut porter sur le premier terme, et il écrit :

$$V = + \frac{2}{5} \cdot u - \sqrt{g \cdot H} \quad (161 \text{ ter})$$

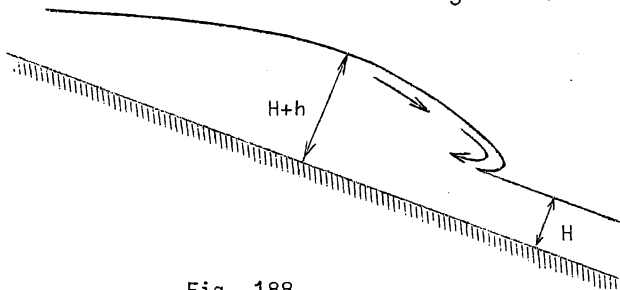


Fig. 188.

Selon Hunter Rouse, aux écoulements très rapides, il peut se produire des phénomènes d'instabilité variables sous forme de longues vagues déferlantes intermittentes, du type d'ondes de choc, mais de hauteur décroissante en arrière du front raide (fig. 188). Elles ont une célérité variable

avec la hauteur et qui s'ajoute à la vitesse du courant. Les vagues les plus hautes peuvent rattraper les moins hautes, les absorber et ainsi croître en amplitude et en célérité. Il peut en résulter que le lit peut être presque à sec. Ce mouvement tumultueux intermittent ne se produit pas dans un canal de forme irrégulière.

9.- CONTRE COURANT

Une onde remontant le courant dans un cours d'eau en pente peut être formée lorsqu'en un point du cours d'eau se déverse latéralement un débit Q' assez important par rapport au débit d'amont Q .

Si Q' est petit par rapport à Q , le débit supplémentaire s'écoule vers l'aval. Le débit y devient $Q + Q'$, ce qui provoque un exhaussement de la ligne d'eau d'aval, provoquant à son tour un exhaussement de la ligne d'eau en amont, et donc un ralentissement progressif du courant, qui se stabilise bientôt.

Si Q' approche de Q , l'action immédiate est une véritable stagnation de l'eau en amont du point de déversement. Le débit aval augmente, la ligne d'eau se relève en aval et donc en amont, avec ralentissement du courant, mais sans onde caractérisée.

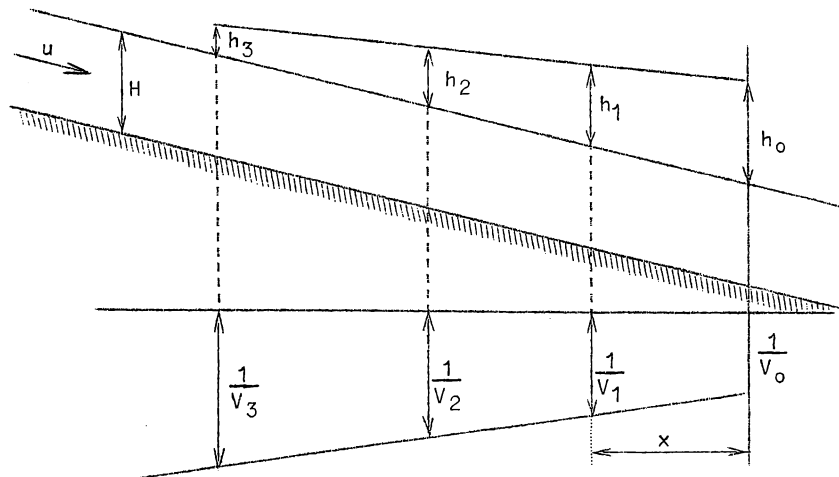


Fig. 189.

Si $Q' > Q$, une fraction du débit Q' remonte vers l'amont sous forme d'une onde remontante (fig. 189). Selon Hunter-Rouse, on peut déterminer la ligne d'eau en aval du front de l'onde par les équations du mouvement permanent graduellement varié.

Pour étudier la marche de l'onde remontante, on peut tracer, d'après l'équation (161) ou (161 bis) la courbe $\frac{1}{V}$ et l'intégrer. On a

$$\int_0^x \frac{dx}{V} = t$$

Il se peut qu'en un point, V devienne nulle; le front de l'onde se fixe alors en ce point sous forme d'un ressaut fixe. Toutefois, ce ressaut fixe ne peut se produire que si la

vitesse en amont dans le canal est supérieure à la vitesse critique, cependant que l'onde remontante peut se produire dans un canal où la vitesse est inférieure à la vitesse critique.

Le débit latéral dans un canal expérimental peut être produit par une vanne latérale contrôlant un orifice de fond. Dans la nature, il peut provenir d'un affluent en crue et peut produire un contre courant dans le cours d'eau principal si celui-ci n'est pas en crue.

10.- ONDES DE CHANGEMENT DE REGIME

Les ondes étudiées précédemment sont des phénomènes accidentels, dont les effets se superposent temporairement à l'état de repos ou de mouvement permanent de l'eau dans un canal. Après extinction du phénomène, l'état antérieur se reproduit sans modification sensible.

Mais il y a des ondes s'étendant sur des périodes assez longues et constituant des régimes variables de grande durée, ce sont celles qui se produisent lors du changement de régime dans un cours d'eau ou un canal. Par exemple, on augmente brusquement ou graduellement, mais pendant un temps assez long, le débit par l'extrémité amont du canal, ce qui constitue une crue, ou une décrue si l'augmentation est négative. L'augmentation de débit peut se faire par un affluent. Ces changements de régime sont fréquents dans la nature et leur étude, très complexe à cause des multiples circonstances qui interviennent, est d'une grande importance.

11.- EQUATIONS DU MOUVEMENT VARIABLE DANS UN CANAL

On admettra les hypothèses simplificatrices habituelles : faible pente superficielle i_s , mouvement par filets sensiblement parallèles à la direction générale du courant; enfin, bien que la vitesse moyenne u soit variable, on admettra que les coefficients α et η relatifs à cette vitesse moyenne sont constants; on adoptera $\eta = 0$ et $\alpha = 1$.

On peut écrire, d'après les 2 équations simplifiées d'Euler :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= - \frac{\partial v}{\partial t} - v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{f}{\rho_e} \\ \frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= - g \end{aligned} \right\} \quad (153 \text{ bis})$$

Selon les hypothèses ci-dessus, $\frac{\partial w}{\partial t}$ est négligeable. Le terme f représente le frottement des parois. Donc

$$\frac{dp}{\rho_e} = - g \cdot dz - \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot dx - \frac{f}{\rho_e} \cdot dx$$

$$- g \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{f}{\rho_e}$$

d'où
$$i_s = \frac{1}{2g} \cdot \frac{\partial(v)^2}{\partial x} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{f}{\gamma_e} \quad (162)$$

Le troisième terme $\frac{f}{\gamma_e}$ tient compte des frottements (cfr chapitre X, paragraphe 2). On néglige le terme $\frac{\partial w}{\partial t}$, car en régime variable, il n'y a

pas d'intumescence locale, ce qui permet de ne pas tenir compte des vitesses verticales vraiment négligeables. Les variations de hauteur ne sont donc pas non plus rapides.

Pour la totalité du courant, nous aurons, en appelant u la vitesse moyenne :

$$i_s = \frac{\alpha}{2g} \cdot \frac{\partial(u)^2}{\partial x} + \frac{1 + \eta}{g} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{f'}{\gamma_e} \quad (163)$$

généralisation de l'équation de Bernoulli (39) (chapitre X, paragraphe 2) pour le mouvement variable. On admet que, en mouvement variable, le frottement obéit encore à la loi de Chézy

$$\int \frac{f.v.d\omega}{Q \cdot \gamma_e} = \frac{f'}{\gamma_e} = \frac{u^2 \cdot \chi}{C^2 \cdot \omega} = \frac{u^2}{C^2 \cdot R}$$

L'équation du mouvement variable devient enfin, en admettant $\eta = 0$ et $\alpha = 1$:

$$i_s = \frac{u^2 \cdot \chi}{C^2 \cdot \omega} + \frac{1}{2g} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad (163 \text{ bis})$$

L'équation de continuité est :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (151)$$

ou
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (152)$$

Pour un canal prismatique

$$1. \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \omega \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (152 \text{ ter})$$

Comme indiqué ci-dessus, h varie peu, donc aussi ω , donc aussi Q ; les variations sont effectivement lentes.

Ces deux équations déterminent u et ω .

Pour ce qui est de h , observons que

$$i_s = i - \frac{\partial h}{\partial s} \cdot (1 - i^2)^{1/2}$$

Donc

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{i - i_s}{(1 - i^2)^{1/2}}$$

est généralement négligeable dans l'équation (152 ter). Celle-ci peut le plus souvent s'écrire

$$1. \frac{\partial h}{\partial t} + \omega \cdot \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \quad (152 \text{ quater})$$

L'élément déterminant en régime variable est $\frac{\partial h}{\partial t}$, vitesse de montée ou de descente en une section. Il est accessible à l'observation et peut être enregistré :

Les fonctions

$$M = \frac{Q^2}{\omega \cdot g} + \omega \cdot h' \cdot \sqrt{1 - i^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{Q^2}{2 g \cdot \omega^2} + h \cdot \sqrt{1 - i^2}$$

sont variables.

La pente de la ligne d'énergie est variable

$$i_e = i_s - \frac{du^2}{2 g \cdot ds} = \frac{u^2}{c^2 \cdot R} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

On a
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{u}{g} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \omega \cdot \left(\frac{2}{g} \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial h'}{\partial t} \right) + \left(\frac{u^2}{g} + h' \right) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

La vitesse de propagation est rapportée au débit, c'est-à-dire qu'on détermine la vitesse de propagation d'un débit instantané déterminé.

Donc
$$dQ = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial Q}{\partial t} \cdot dt = 0$$

En combinant avec l'équation de continuité, on en déduit

$$V_Q = \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial t}}{\frac{\partial Q}{\partial x}} \quad (\text{cfr paragraphe 2})$$

Quant à V_h , il vaut

$$V_h = - \frac{\frac{\partial h}{\partial t}}{\frac{\partial h}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial h}{\partial t} \cdot (1 - i^2)^{1/2}}{i_s - i}$$

12.- ETABLISSEMENT D'UN COURANT DANS UN CANAL RECTANGULAIRE DE GRANDE LARGEUR

La profondeur initiale est H , elle devient $H + h$ sous l'effet de l'onde d'établissement du courant. On a :

$$R = H + h \quad \frac{f'}{\gamma_e} = \frac{u^2}{c^2 \cdot (H + h)}$$

On admet que les mouvements sont assez lents pour qu'il y ait compensation entre la pente et les frottements, donc $i = \frac{f'}{\gamma_e}$ (cas du mouvement uniforme). Enfin, en admettant $\alpha = 1$ et $\eta = 0$, les équations du mouvement deviennent, en considérant que $\omega = H + h$ par unité de largeur

$$g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (154 \text{ bis}) \quad (\text{cfr paragraphe 3, a})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (H + h) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (152 \text{ bis})$$

En admettant que u ne dépende que de h , on peut écrire :

$$g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (H + h) \cdot \frac{\partial u}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

Par élimination de $\frac{\partial h}{\partial t}$ et $\frac{\partial h}{\partial x}$:

$$\frac{\partial h}{\partial x} \cdot (g + u \cdot \frac{\partial u}{\partial h}) = - \frac{\partial u}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} \cdot [(H + h) \cdot \frac{\partial u}{\partial h} + u] = - \frac{\partial h}{\partial t}$$

d'où $g + u \cdot \frac{\partial u}{\partial h} = [(H + h) \cdot \frac{\partial u}{\partial h} + u] \cdot \frac{\partial u}{\partial h}$,

ou $(H + h) \cdot (\frac{\partial u}{\partial h})^2 = g$ $\frac{\partial u}{\partial h} = \sqrt{\frac{g}{H + h}}$

$$u = 2 \cdot [\sqrt{g \cdot (H + h)} - \sqrt{g \cdot H}] + u_0 \quad u = u_0 \quad \text{pour } h = 0.$$

L'accroissement de la vitesse moyenne est égal à la double différence des célérités propres des ondes correspondant au niveau surélevé et au niveau primitif. Ceci permet de déterminer h pour un débit donné Q , puisque

$$u = \frac{Q}{H + h}$$

En remplaçant u et $\frac{\partial u}{\partial h}$ par leurs valeurs dans l'équation de continuité, on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \cdot [u + (H + h) \cdot \frac{\partial u}{\partial h}] = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \cdot [2\sqrt{g \cdot (H + h)} - 2\sqrt{g \cdot H} + \sqrt{g \cdot (H + h)} + u_0]$$

ou $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \cdot [3\sqrt{g \cdot (H + h)} - 2\sqrt{g \cdot H} + u_0] = 0$

d'où $x = [3\sqrt{g \cdot (H + h)} - 2\sqrt{g \cdot H} + u_0] \cdot t + f(h) = (V + u) \cdot t + f(h)$,

en désignant par V la célérité propre $\sqrt{g \cdot (H + h)}$ de l'onde.

Donc le mouvement se fait comme si les sections se déplaçaient parallèlement à elles-mêmes avec la célérité V , en même temps que le liquide traverse ces sections en mouvement avec une vitesse relative u . On a d'ailleurs, en vertu de l'équation de continuité :

$$V \cdot h = \Delta u \cdot (H + h)$$

ou $\Delta u = \frac{V \cdot h}{H + h}$ ($\Delta u = u - u_0$)

formule (155) établie au paragraphe 2.

Elle est identique à la formule ci-dessus de la vitesse moyenne u , car

$$\frac{\Delta u}{V} = 2 \left(1 - \sqrt{\frac{H}{H + h}}\right) = 2 \left[1 - 1 + \frac{h}{2(H + h)}\right] = \frac{h}{H + h}$$

ce qui suppose h^2 négligeable par rapport à h .

Donc
$$V + u = V \cdot \left(1 + \frac{h}{H + h}\right) + u_0 \approx V \cdot \left(1 + \frac{h}{H}\right) + u_0$$

Si le canal est horizontal, $u_0 = 0$ et $\Delta u = u$.

Observons que la vitesse de propagation absolue $(V + u)$ est constante pour une hauteur donnée et croît avec h ; les ordonnées les plus hautes avancent plus vite que les autres et la surface libre de l'onde se déforme à la tête jusqu'à avoir une courbure appréciable, auquel cas les équations simplifiées ne s'y appliquent plus.

13.- ETABLISSEMENT ET ARRET DE COURANT DANS UN CANAL - DEFERLEMENT.

Si dans un canal horizontal et en eau immobile, on verse brusquement un débit q constant par unité de largeur, il se produit une onde en intumescence qui dure tant que l'apport de débit et qui est précédée d'une onde initiale de hauteur $h_1 = K \cdot h$. K varie entre 1 et 2 et est généralement voisin de 1,5. La célérité de l'onde initiale est celle de l'onde solitaire, donc

$$V = \sqrt{g \cdot (H + h_1)}$$

D'autre part, par suite de la continuité

$$q = V \cdot h = \frac{V \cdot h_1}{1,50}$$

d'où
$$q = \frac{h_1}{1,50} \cdot \sqrt{g \cdot (H + h_1)}, \quad \sqrt{g \cdot (H + h_1)} = \frac{1,5 q}{h_1}$$

équation qui donne h_1 et V en fonction de q .

Si $\frac{q}{h \cdot \sqrt{g \cdot H}} < 0,70$, on a approximativement
$$V = \sqrt{g \cdot H} + \frac{3}{5} \cdot \frac{q}{H}$$
.

Si H est faible par rapport au débit, h_1 peut se rapprocher de H . L'onde initiale devient instable et déferle lorsque $h_1 = h \approx H$, c'est-à-dire qu'elle se brise en écumant par chute vers l'avant. L'onde est précédée d'une barre d'écume que viennent constamment recouvrir les particules de l'arrière. Toute l'onde a même hauteur comme une onde de choc.

On a donc
$$q \approx V \cdot H \quad \text{et} \quad V = \sqrt{2 g \cdot H}.$$

La vitesse du courant se détermine par les formules précédentes. Le déferlement peut se produire pour des débits moindres tels que

$$q > \frac{H}{2} \cdot \sqrt{2 g \cdot H}$$

Si on arrête brusquement un courant établi, par exemple par la fermeture d'une vanne, le débit s'annule brusquement et une onde d'arrêt de courant remonte vers l'amont, laissant derrière elle un niveau supérieur au niveau primitif. Elle peut se propager très loin (jusqu'au bassin d'alimentation si la pente est faible; en cas de forte pente, elle disparaît à l'emplacement du ressaut). Par une succession d'ondes, il s'établira un niveau horizontal ou un axe hydraulique si l'écoulement se rétablit en aval par dessus la vanne.

Pour une telle onde dans un canal horizontal, on a une onde initiale de hauteur $h_1 = K \cdot h$ K étant supérieur à 1. Selon Bazin, la valeur moyenne de K pour les ondes remontantes est 1,20.

Après le passage de l'onde, l'eau devient stagnante, donc
$$V \cdot h = u, \quad H = \frac{V \cdot h_1}{K}$$

puisque le débit s'annule, u étant la vitesse initiale de l'eau. La célérité propre de l'onde initiale est

$$\sqrt{g \cdot (H + h_1)} = v + u .$$

La vitesse de propagation absolue de l'onde est

$$v = \sqrt{g \cdot (H + h_1)} - u .$$

On en déduit, si $K = 1$,

$$v = \sqrt{g \cdot H \cdot \left(1 + \frac{u^2}{4 g \cdot H}\right)} - \frac{u}{2}$$

Si $K = 1,20$, Bazin donne la valeur approximative

$$v = \sqrt{g \cdot H \cdot \left(1 + \frac{u^2}{4 g \cdot H}\right)} - \left(1 - \frac{K}{2}\right) \cdot u = \sqrt{g \cdot H \cdot \left(1 + \frac{u^2}{4 g \cdot H}\right)} - \frac{2}{5} u .$$

Comme $\frac{u^2}{4 g \cdot H}$ est généralement faible, on peut écrire

$$v = \sqrt{g \cdot H} - \frac{2}{5} u \quad (\text{cfr paragraphe 8}).$$

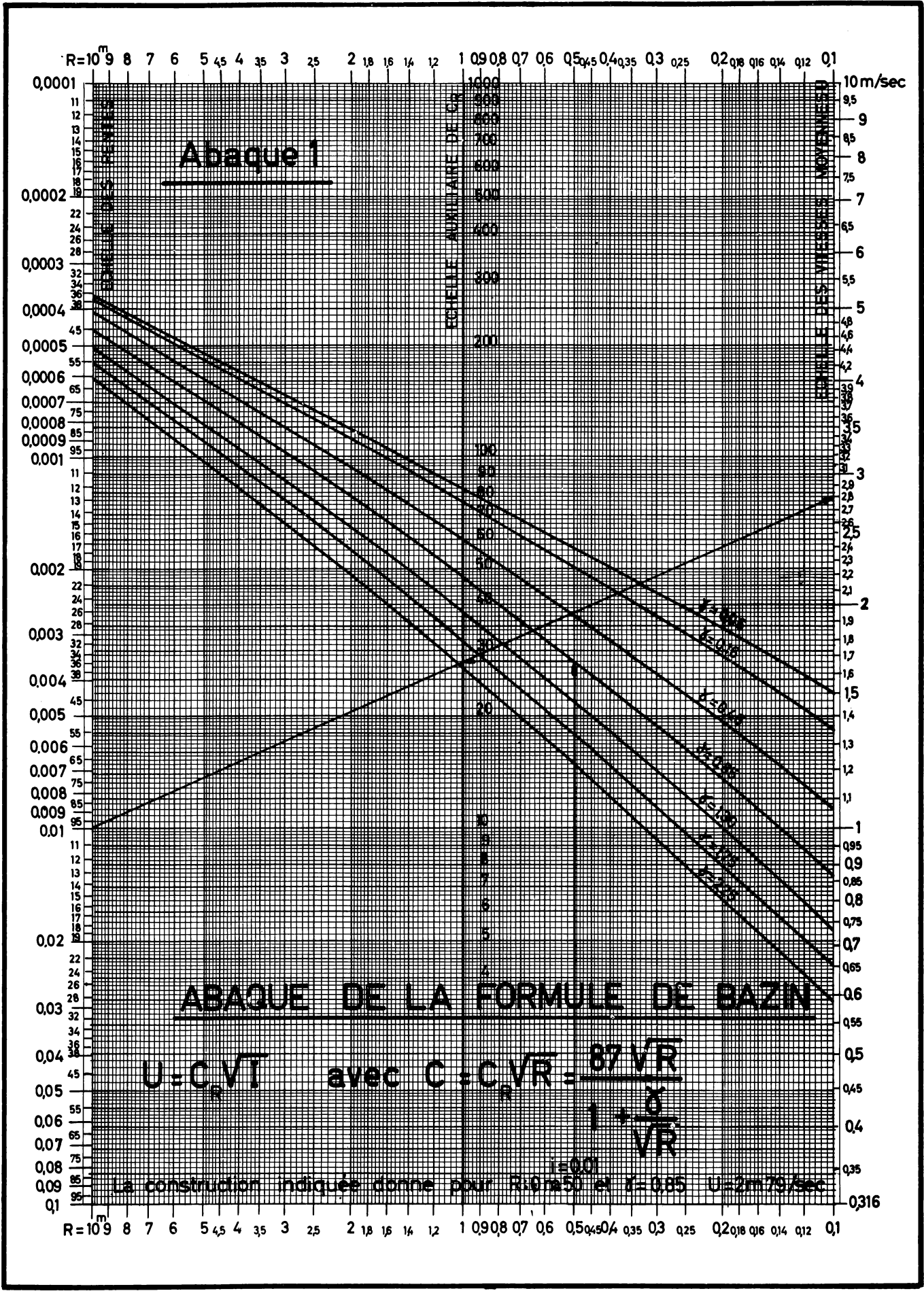
En cas de déferlement,

$$H = h_1 = h, \quad \text{d'où} \quad v = \sqrt{2 g \cdot H} - u .$$

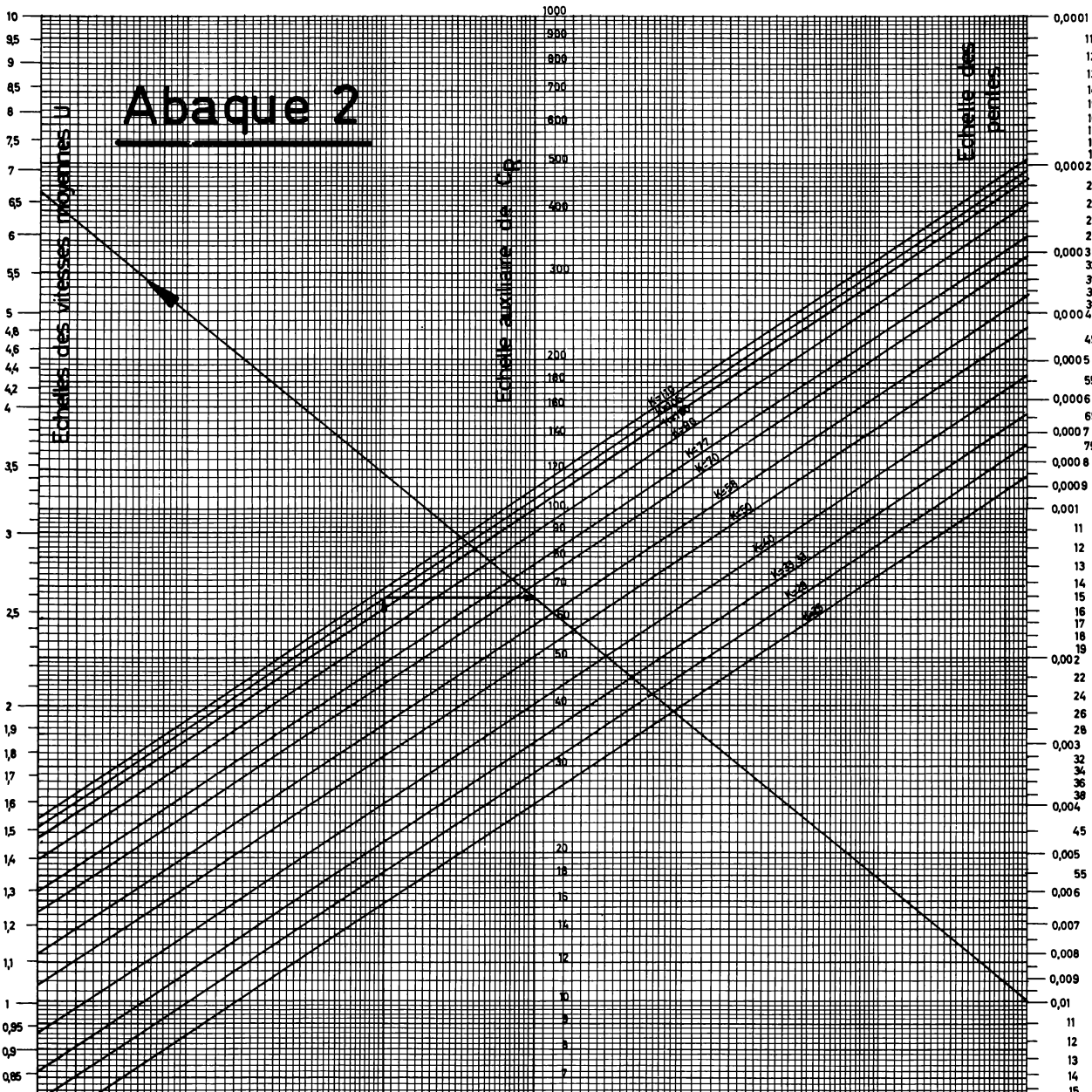
Comme $v = u$, on voit que l'arrêt du courant produit le déferlement si

$$u > \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 g \cdot H}, \quad \text{d'où} \quad q \geq \sqrt{\frac{g \cdot H^3}{2}}, \quad H \leq \sqrt[3]{\frac{2 q^2}{g}} .$$

Des ondes d'établissement et d'arrêt de courant en eau calme se produisent dans les sas d'écluses et dans les biefs y attenants lors des opérations hydrauliques d'éclusage. Elles peuvent donner lieu à des courants assez vifs et à des dénivellations assez sensibles et exercer ainsi des effets notables sur la navigation.



Abaque 2



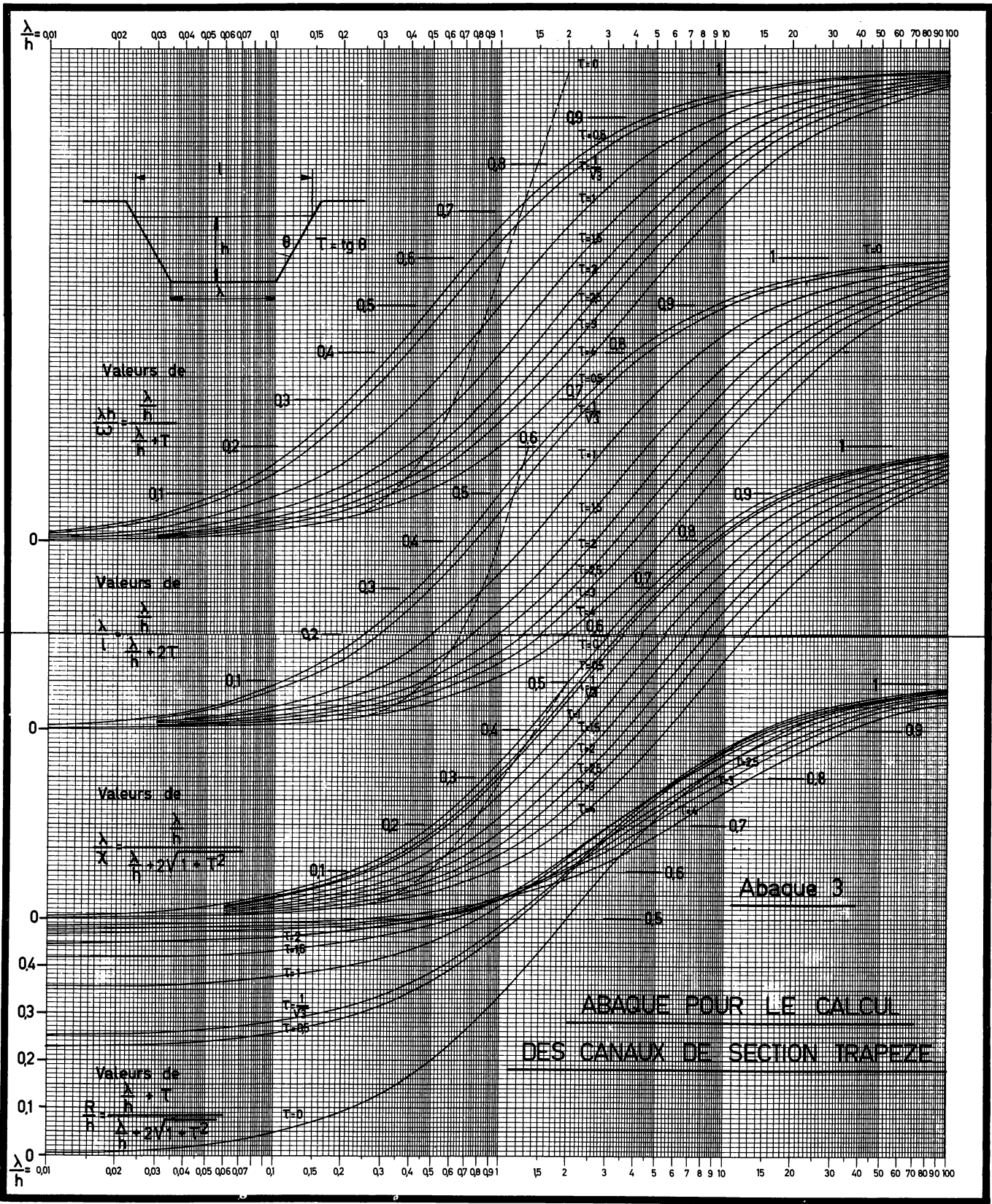
ABAQUE DE LA FORMULE DE MANNING

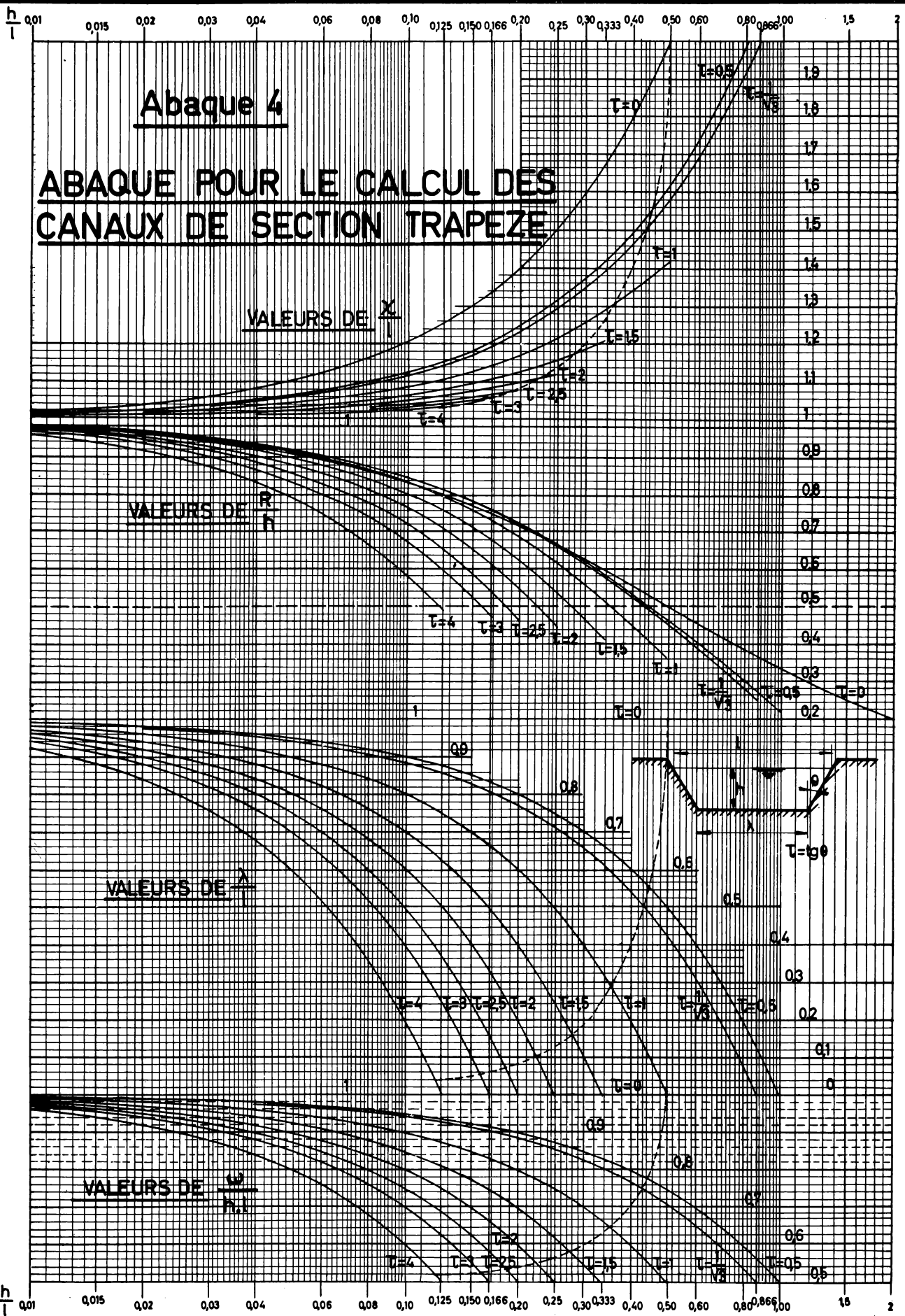
La construction indiquée donne pour $R=0.50m$; $i=0.01$ et $K=105$
 $U=66m/sec$

Valeurs de k de la formule de Strickler $C_p = \frac{20 \cdot R^{2/3}}{k}$ correspondant aux valeurs de K de la formule de Manning

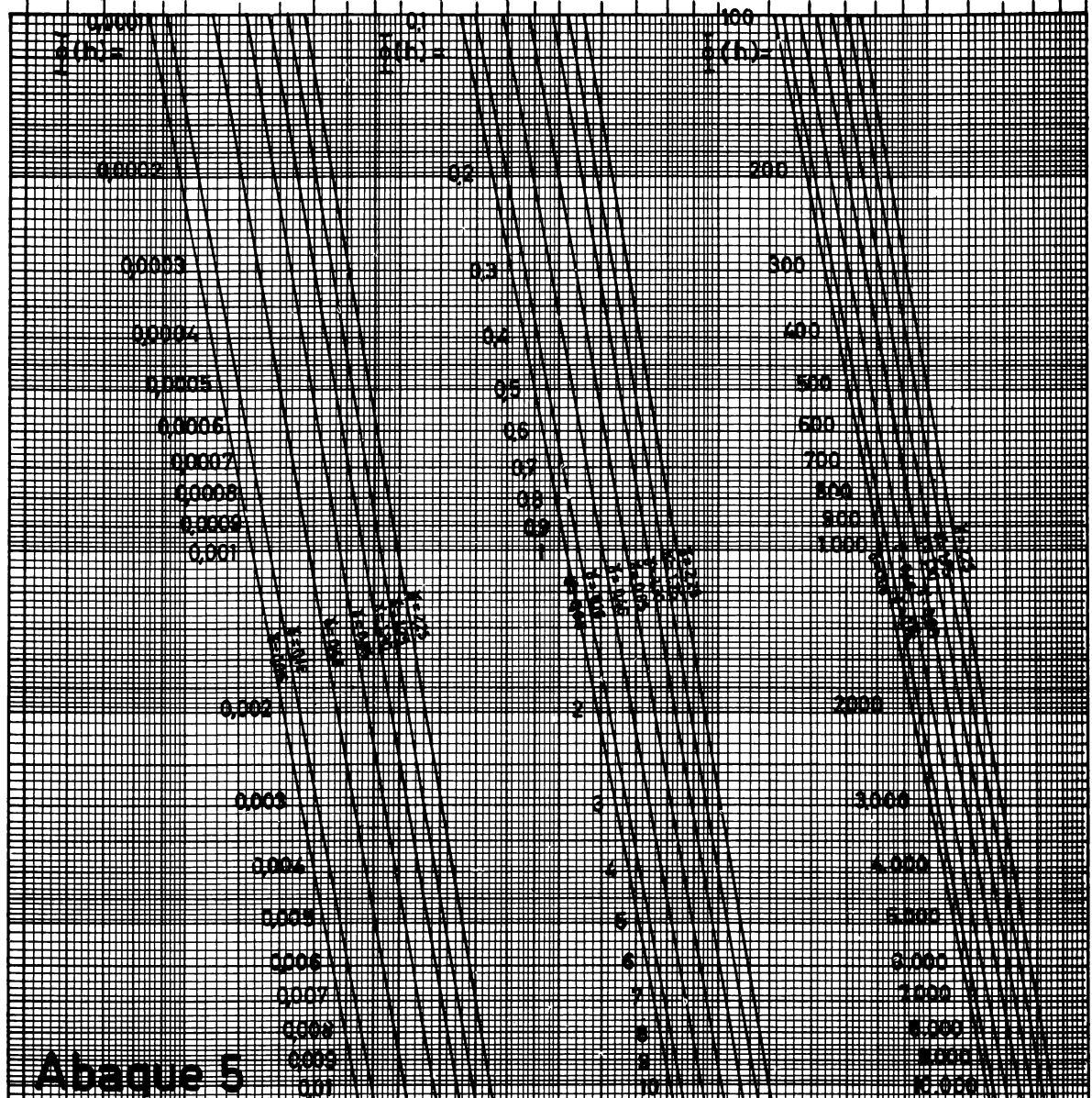
K	110	105	100	90	77	70	58	50	40	33.33	29	25
k	$36.1 \cdot 10^6$	$47.7 \cdot 10^6$	$54.1 \cdot 10^6$	$20.1 \cdot 10^6$	$30.7 \cdot 10^6$	$54.4 \cdot 10^6$	$66.1 \cdot 10^6$	$4.1 \cdot 10^4$	$156.1 \cdot 10^4$	$467.1 \cdot 10^4$	$10.8 \cdot 10^2$	$26.2 \cdot 10^2$

R 0.1 0.12 0.14 0.16 0.18 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5 6 7 8 9 10





h = 0,1 0,14 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1 1,4 2 2,5 3 3,5 4 5 6 7 8 9 10



Abaque 5

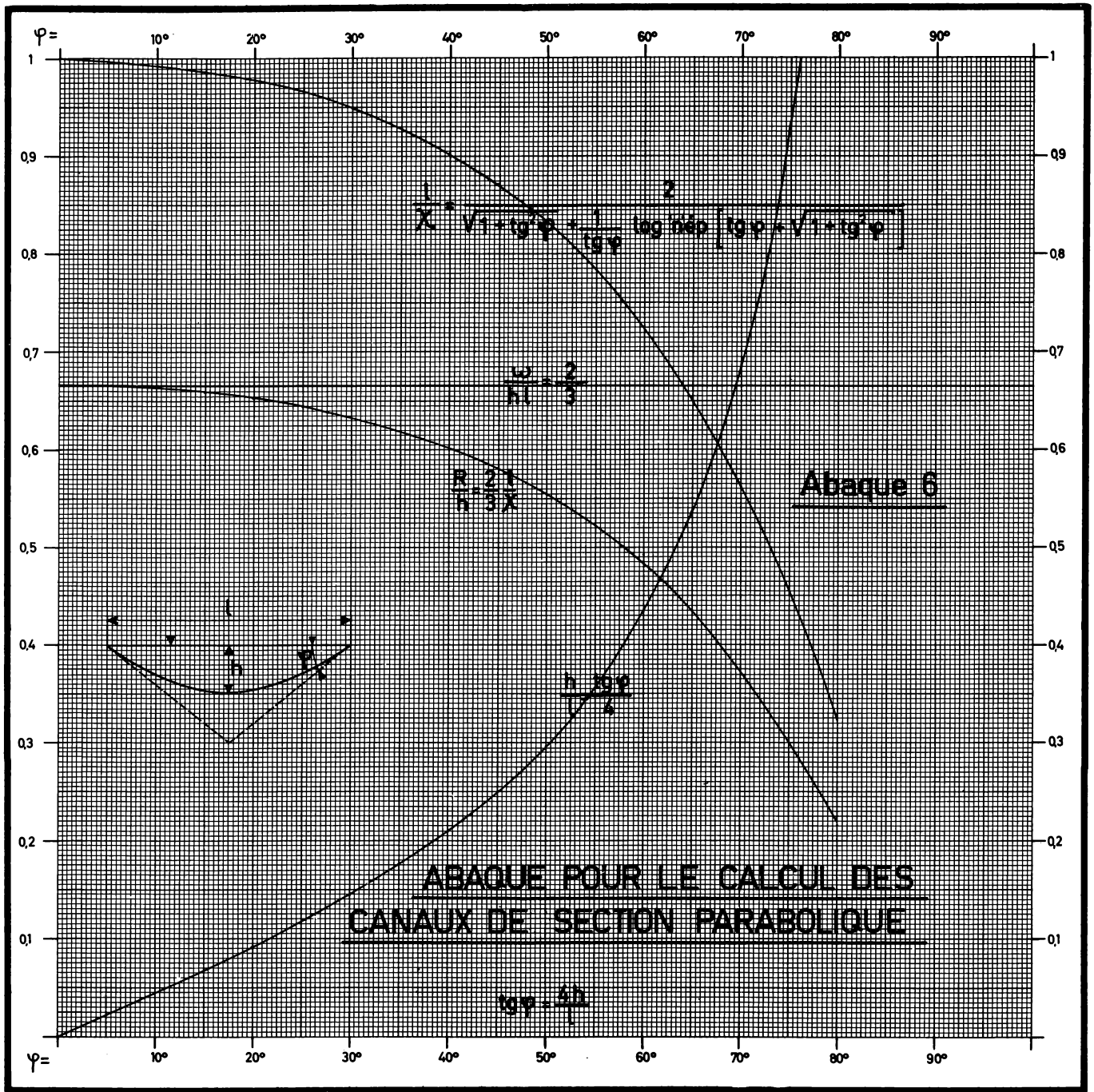
ABAQUE DE LA FONCTION

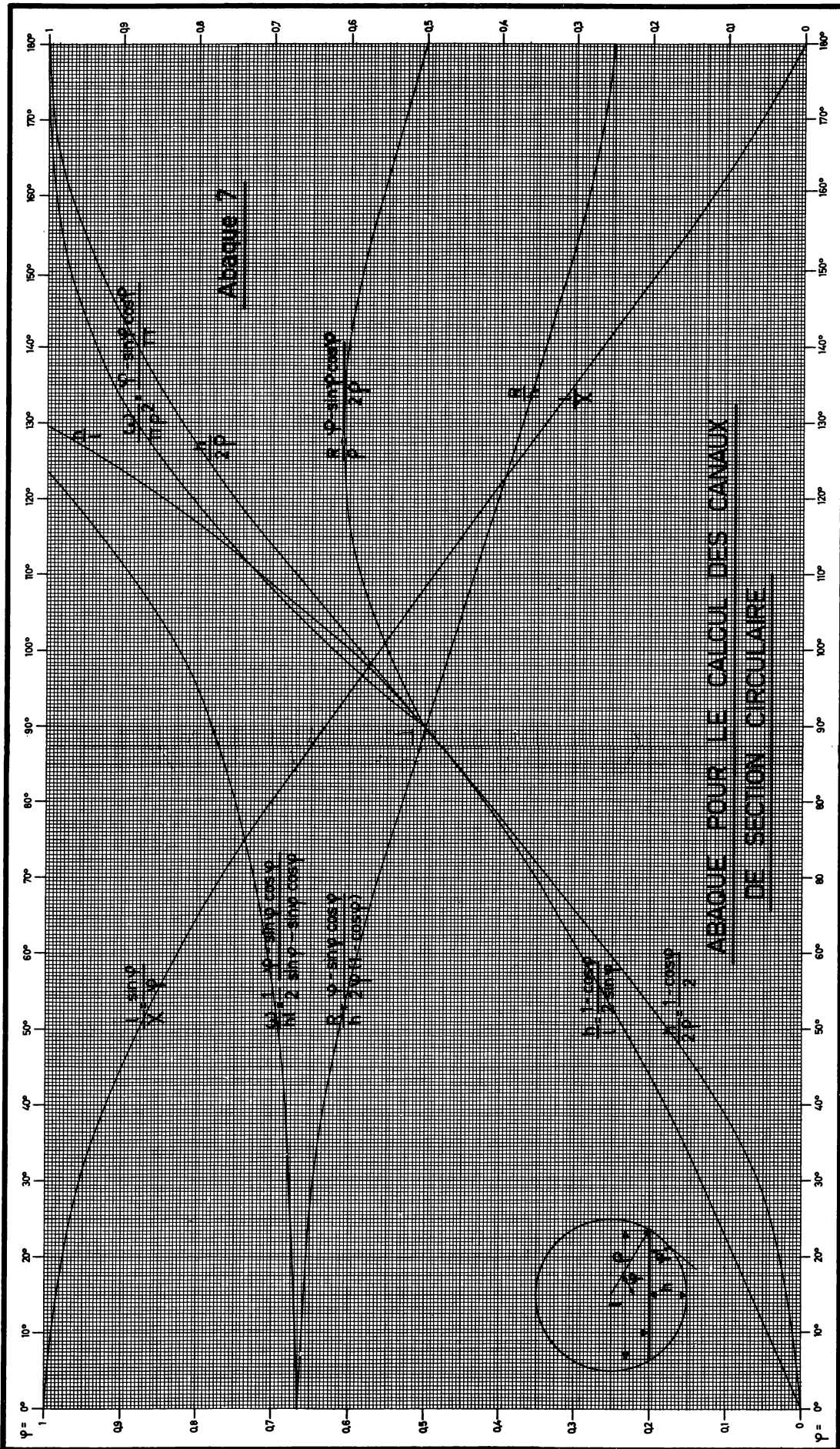
$$f(h) = \frac{h^5}{\left(1 + \frac{h}{\sqrt{0.5h}}\right)^2}$$

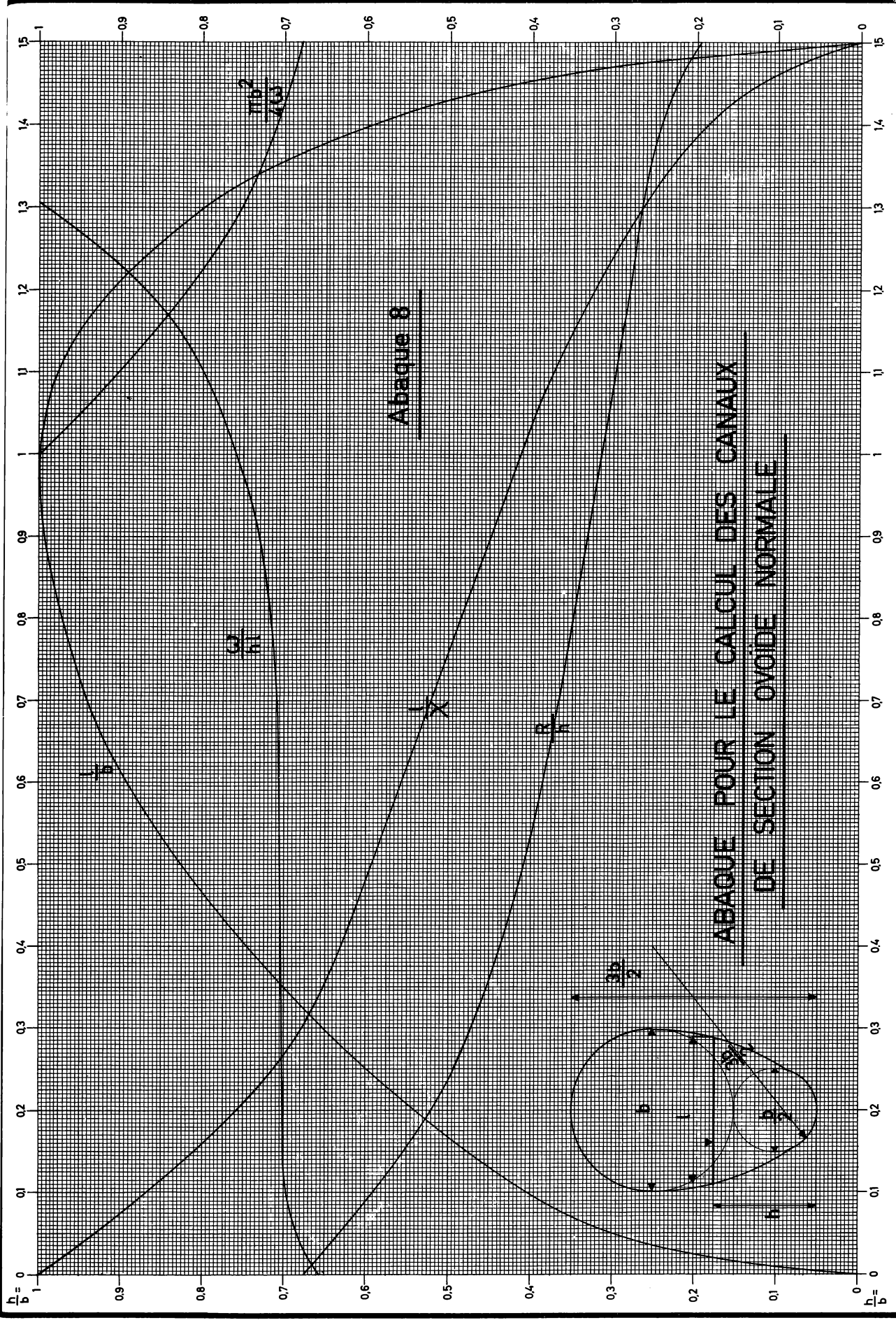
reliée au débit maximum par l'équation

$$f(h) = \frac{Q^2}{A872}$$

h = 0,1 0,14 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1 1,4 2 2,5 3 3,5 4 5 6 7 8 9 10







Abaque 8

**ABACQUE POUR LE CALCUL DES CANAUX
DE SECTION OVOÏDE NORMALE**

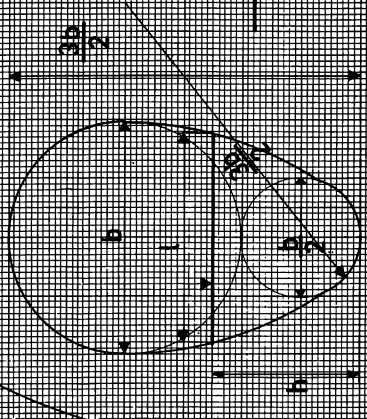


TABLE DES MATIERES

CHAPITRE IX.- MOUVEMENT PERMANENT UNIFORME DANS LES CANAUX PRISMATIQUES

1.- Généralités et définitions.	3
2.- Répartition théorique des vitesses dans un cours d'eau en mouvement uniforme en régime laminaire dans un canal prismatique	5
3.- Répartition théorique des vitesses en mouvement turbulent	8
4.- Répartition réelle des vitesses dans un cours d'eau à lit prismatique en mouvement permanent uniforme	10
5.- Formule du mouvement uniforme dans un lit prismatique - Etablissement théorique	15
6.- Formules pratiques du mouvement uniforme.	19
7.- Formule monôme et abaques	24
8.- Remarques sur les formules du mouvement uniforme.	24
9.- Formules simplifiées du mouvement uniforme.	27
10.- Répartition de l'énergie entre le frottement sur les parois et la turbulence	28
11.- Effets de la variation des vitesses sur les caractéristiques du courant . .	29
12.- Relations entre C ou β , η , α et θ	31

CHAPITRE X.- MOUVEMENT PERMANENT GRADUELLEMENT VARIE

1.- Généralités - Rappel des équations d'Euler.	35
2.- Equations du courant permanent.	36
3.- Les fonctions de courant; hauteur critique.	44
4.- Equation du mouvement permanent graduellement varié	51
5.- Equation du mouvement permanent graduellement varié dans un lit prismatique	53
6.- Analyse de l'équation du mouvement permanent graduellement varié dans les canaux prismatiques	56
7.- Formes d'axes hydrauliques dans les canaux prismatiques	59
8.- Cas du canal rectangulaire infiniment large	64
9.- Circonstances engendrant les axes simples dans un lit prismatique	65
10.- Intégration de l'équation différentielle des axes hydrauliques des canaux prismatique	67
11.- Méthodes sommaires rapides.	91
12.- Intégration de l'équation différentielle des axes hydrauliques des canaux non prismatiques.	92
13.- Sections irrégulières	95
14.- Ligne d'énergie	96
15.- Cas des rivières réelles.	97
16.- Mouvement de l'eau dans les courbes	98
17.- Equation du mouvement permanent graduellement varié à débit varié	100
18.- Cas des sections fermées.	101
19.- Effet de la courbure des filets liquides.	106

CHAPITRE XI.- MOUVEMENT PERMANENT VARIE - AXES COMPLEXES

1.- Généralités	109
2.- Ressaut superficiel dans un lit prismatique	110
3.- Ressaut dans un lit prismatique à section rectangulaire	112

4.- Emplacements des ressauts - Axes complexes	113
5.- Formes réelles des ressauts	116
6.- Ressauts dans les lits à forte inclinaison	118
7.- Ressauts incomplets	119
8.- Variation rapide du niveau du fond	121
9.- Changements brusques de pentes	122
10.- Changements de pente très importants avec formation de ressauts	123
11.- Ressauts créés par une saillie ou une chute brusque du radier	124
12.- Variations brusques de largeur d'un canal prismatique de section rectangulaire	125
13.- Rétrécissement localisé - Remous sous les ponts	128
14.- Elargissement localisé : effets d'un bassin	131
15.- Dispositifs d'alimentation et d'évacuation - Généralités	121
- 16.- Déversoirs	133
- 17.- Débit des déversoirs en mince paroi	134
- 18.- Déversoir à crête épaisse	140
- 19.- Prise d'eau dans un réservoir	143
- 20.- Déversoir à l'extrémité aval d'un canal	145
= 21.- Déversoirs à crêtes profilées et à talus ou coursiers	148
22.- Ressaut au pied des déversoirs	151
23.- Alimentation par orifice de fond	153
24.- Ressaut en aval des orifices de fond	161
25.- Autres dispositifs d'alimentation	162
26.- Axes complexes engendrés par les conditions terminales	163
- 27.- Déversoir latéral entre deux canaux	169
28.- Ecoulement ultra rapide avec entrainement d'air	171

CHAPITRE XII.- CALCUL DES CANAUX ARTIFICIELS A EAU COURANTE

1.- Généralités	175
2.- Forme des cunettes mouillées	175
3.- Section minimum écoulant un débit Q sous une pente donnée en mouvement uniforme	178
4.- Influence de la variation de la largeur au plafond λ	181
5.- Vitesse maximum	182
6.- Canal d'adduction, de dérivation ou de drainage	184
7.- Canal de navigation, lorsqu'on impose $\lambda > \lambda_n$	185
8.- Canal de navigation, lorsque l'on impose $l > l_n$	189
9.- Variation de R en fonction de h et de λ	193
10.- Variation de la vitesse de fond	197
11.- Abaques et tables pour le calcul des sections	198

CHAPITRE XIII.- MOUVEMENT VARIABLE DANS LES CANAUX DECOUVERTS

1.- Equations du mouvement variable	201
2.- Formules générales des ondes de translation	203
3.- Ondes de translation allongées	207
4.- Onde solitaire	209
5.- Déformation des ondes allongées de hauteur modérée ou faible	213
6.- Energie des ondes de translation	214
7.- Onde de choc	215
8.- Ondes dans les eaux courantes	218
9.- Contre courant	220

10.- Ondes de changement de régime.	221
11.- Equations du mouvement variable dans un canal.	221
12.- Etablissement d'un courant dans un canal rectangulaire de grande largeur . .	223
13.- Etablissement et arrêt de courant dans un canal - Déferlement.	225

*