STABILITE ELASTIQUE D'UNE PIECE PRISMATIQUE COMPRIMEE AXIALEMENT DANS UN MILIEU RESISTANT ELASTIQUE

par

Ferdinand CAMPUS

Professeur Emérite à l'Université de Liège

N.B. J'ai publié récemment, sous un titre analogue [1], une contribution au Volume d'Hommage au Professeur Zbigniew WASIUTYNSKI, édité par l'Académie Polonaise des Sciences à l'occasion de son 70e anniversaire.

La présente contribution au Volume d'Hommage au Professeur René SPRONCK, offert également pour son soixante-dixième anniversaire et son admission à l'éméritat, ne fait pas double emploi avec la précédente. Rédigée postérieurement, elle est plus générale et aussi plus complète.

CHAPITRE I

SOLUTION MATHEMATIQUE

1. EQUATION DIFFERENTIELLE

En cas de flexion de la pièce, le milieu exerce une réaction normale élastique sur l'élément qui produit le refoulement. Elle consiste en une pression P qui est liée au déplacement normal Y correspondant par la relation $P = kY$. Le coefficient de réaction k du milieu en est une caractéristique et est supposé constant.

Dans ces conditions, la flexion éventuelle de la pièce comprimée est régie par l'équation

$$EI\, d^4 Y/dZ^4 + N\, d^2Y/dZ^2 + k\,B\,Y = 0 \tag{1}$$

dans laquelle N désigne l'action de compression axiale et B la largeur de la face de la pièce pressée contre le milieu par la flexion.

Un changement de variables défini par les relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} y = Y/K\ , \quad z = Z/K\ , \quad K = \sqrt[4]{EI/kB} \\ n = NK^2/EI = N/\sqrt{k\,B\,EI}\ , \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

conduit à l'équation sans dimensions

$$d^4y/dz^4 + n\, d^2y/dz^2 + y = 0 \,. \qquad (3)$$

2. SOLUTIONS DE L'EQUATION (3)

Elles diffèrent suivant que n est inférieur, égal ou supérieur à 2.

a) $n < 2$.

En posant $a = \sqrt{2-n}\,/\,2$ et $b = \sqrt{2+n}\,/\,2$, la solution est :

$$y = \exp az\,(c_1 \cos bz + c_2 \sin bz) + \exp(-az)\,(c_3 \cos bz + c_4 \sin bz) \qquad (4)$$

Les dérivées première, deuxième et troisième ont les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} dy/dz = {} & \exp az\,[c_1\,(a \cos bz - b \sin bz) + c_3\,(b \cos bz + a \sin bz)] \\ & - \exp(-az)\,[c_3\,(a \cos bz + b \sin bz) - c_4\,(b \cos bz - a \sin bz)] \end{aligned} \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} d^2y/dz^2 = {} & \exp az\,\{c_1\,[(a^2 - b^2) \cos bz\,) - 2ab \sin bz] \\ & + c_2\,[2\,ab \cos bz + (a^2 - b^2) \sin bz]\} \\ & + \exp(-az)\,\{c_3\,[(a^2 - b^2) \cos bz + 2\,ab \sin bz] \\ & - c_4\,[2\,ab \cos bz - (a^2 - b^2) \sin bz]\} \end{aligned} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} d^3y/dz^3 = {} & \exp az\,\{c_1\,[a\,(a^2 - 3\,b^2) \cos bz + b\,(b^2 - 3\,a^2) \sin bz] \\ & - c_2\,[b\,(b^2 - 3\,a^2) \cos bz - a\,(a^2 - 3\,b^2) \sin bz]\} \\ & - \exp(-az)\,\{c_3[a\,(a^2 - 3\,b^2) \cos bz - b\,(b^2 - 3\,a^2) \sin bz] \\ & + c_4\,[b\,(b^2 - 3\,a^2) \cos bz + a\,(a^2 - 3\,b^2) \sin bz]\} \,. \end{aligned} \qquad (7)$$

Si $N = 0$, $n = 0$, $a = b = 1/\sqrt{2}$ et on retrouve les équations de la poutre fléchie sur fondation élastique.

b) $n = 2$

Dans ce cas $a = 0$, $b = 1$ et

$$y = c_1 \cos z + c_2 \sin z \,. \qquad (8)$$

c) $n > 2$

En posant $\sqrt{(n + \sqrt{n^2 - 4})\,/\,2} = a$ et $\sqrt{(n - \sqrt{n^2 - 4})\,/\,2} = b$,

la solution est :

$$y = c_1 \cos az + c_2 \sin az + c_3 \cos bz + c_4 \sin bz \,. \qquad (9)$$

Si $n = 2$, $a = b = 1$, on obtient la solution (8).

3. CONDITIONS D'EXTREMITES

Elles déterminent les solutions des problèmes concrets. Si l'on considère une pièce OL de longueur L , on prend O comme origine des abscisses Z mesurées suivant OL . On pose $\ell = L/K$, donc $Z_0 = 0$, $Z_\ell = \ell$.

Les conditions aux limites sont exprimées de la manière la plus générale par les relations :

$$y_0 = t_0 y_0''' \ , \quad y_0' = m_0 y_0'' \ , \quad y_\ell' = t_\ell y_\ell''' \ , \quad y_\ell' = m_\ell y_\ell'' \ . \tag{10}$$

Il y correspond :

$$Y_0 = t_0 K^2 \, (d^3Y/dZ^3)_0 \ , \qquad (dY/dZ)_0 = m_0 K \, (d^2Y/dZ^2)_0 \ ,$$

$$Y_\ell = t_\ell K^2 \, (d^3Y/dZ^3)_\ell \ , \qquad (dY/dZ)_\ell = m_\ell K \, (d^2Y/dZ^2)_\ell \ .$$

ou encore :

$$Y_0 = (t_0 / \sqrt[4]{k^3B^3EI}) \, T_0 \ , \qquad (dY/dZ)_0 = (m_0 / \sqrt[4]{kBE^3I^3}) \, M_0 \ ,$$

$$Y_\ell = (t_\ell / \sqrt[4]{k^3B^3EI}) \, T_\ell \ , \qquad (dY/dZ)_\ell = (m_\ell / \sqrt[4]{kBE^3I^3}) \, M_\ell \ .$$

Une remarque importante pour l'expression correcte des conditions aux limites est que l'axe des abscisses est l'alignement de l'action de compression N , par rapport auquel l'axe de la pièce peut subir une translation en cas de flexion. L'exemple le plus simple et caractéristique est celui de la pièce encastrée en O et libre en L . En cas de flexion, l'alignement de la force N passe toujours par L , ce qui s'exprime par $Y_\ell = 0$, $M_\ell = 0$ ou $y_\ell = 0$, $y_\ell'' = 0$. Mais cet alignement ne passe plus pas O , de telle sorte que, malgré l'encastrement, on n'a pas $Y_0 = 0$ et $(dY/dZ)_0 = 0$ mais $Y_0 \neq 0$ et $(dY/dZ)_0 = 0$, c'est-à-dire non $y_0 = 0$ et $y_0' = 0$, mais $y_0 \neq 0$ et $y_0' = 0$; plus concrètement $T_0 = 0$ ou $y_0''' = 0$, c'est-à-dire $t_0 \equiv \infty$ et $m_0 = 0$.

CHAPITRE II

CONDITIONS D'INSTABILITE LORSQUE LE NOMBRE n EST $\geqslant 2$

1. ETUDE GENERALE

L'équation de l'élastique éventuelle de flexion est celle de la formule (9). Les conditions aux limites sont d'une manière générale :

pour $z = 0$, $\quad y_0 = t_0 y_0'''$, $\quad y_0' = m_0 y_0''$,

pour $z = \ell$, $\quad y_\ell = t_\ell y_\ell'''$, $\quad y_\ell' = m_\ell y_\ell''$.

D'où

$$c_1 + c_3 = t_0 \, (- a^3 c_2 - b^3 c_4)$$

$$a c_2 + b c_4 = m_0 \, (- a^2 c_1 - b^2 c_3)$$

$$c_1 \cos a\ell + c_2 \sin b\ell + c_3 \cos b\ell + c_4 \sin b\ell$$

$$= t_\ell \, (a^3 c_1 \sin a\ell - a^3 c_2 \cos a\ell + b^3 c_3 \sin b\ell - b^3 c_4 \cos b\ell)$$

$$- a\, c_1 \sin a\ell + a\, c_2 \cos a\ell - b c_3 \sin b\ell + b c_4 \cos b\ell =$$

$$= m_\ell \, (- a^2\, c_1 \cos a\ell - a^2\, c_2 \sin a\ell - b^2\, c_3 \cos b\ell - b^2 c_4 \sin b\ell)$$

Il en résulte les quatre équations linéaires suivantes, dont les inconnues sont c_1 , c_2 , c_3 et c_4 .

$$\left.\begin{aligned}
&c_1 + t_0\, a^3\, c_2 + c_3 + t_0 b^3 c_4 = 0 \\
&m_0 a^2 c_1 + a\, c_2 + m_0 b^2 c_3 + b c_4 = 0 \\
&c_1\, (\cos a\ell - t_\ell\, a^3 \sin a\ell) + c_2\, (\sin a\ell + t_\ell\, a^3 \cos a\ell) \\
&\qquad + c_3\, (\cos b\ell - t_\ell\, b^3 \sin b\ell) + c_4\, (\sin b\ell + t_\ell b^3 \cos b\ell) = 0 \\
&a c_1\, (m_\ell a \cos a\ell - \sin a\ell) + a c_2\, (m_\ell a \sin a\ell + \cos a\ell) \\
&\qquad + b c_3\, (m_\ell\, b \cos b\ell - \sin b\ell) + b c_4\, (m_\ell b \sin b\ell + \cos b\ell) = 0
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Ce groupe d'équations homogènes (11) a comme solution triviale

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0 \; .$$

Ces valeurs peuvent n'être pas nulles si le déterminant des coefficients de c_1 , c_2 , c_3 et c_4 est nul

$$\begin{vmatrix}
1 & t_0\, a^3 & 1 & t_0\, b^3 \\
m_0 a^2 & a & m_0 b^2 & b \\
\cos a\ell - t_\ell a^3 \sin a\ell & \sin a\ell + t_\ell a^3 \cos a\ell & \cos b\ell - t_\ell b^3 \sin b\ell & \sin b\ell + t_\ell b^3 \cos b\ell \\
a(m_\ell a \cos a\ell - \sin a\ell) & a(m_\ell a \sin a\ell + \cos a\ell) & b(m_\ell b \cos b\ell - \sin b\ell) & b(m_\ell b \sin b\ell + \cos b\ell)
\end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

Après développement et réduction, cette relation (12) devient :

$$2\,ab - ab\,(a^4 + b^4)(m_0 t_0 + m_\ell t_\ell) + 2\,a^5 b^5 m_0 m_\ell t_0 t_\ell$$
$$+ [a^2 b^2\,(a^2 + b^2)(m_0 t_0 + m_\ell t_\ell) - m_0 m_\ell\,(a^2 - b^2)^2 - t_0 t_\ell a^2 b^2\,(a^2 - b^2)^2$$
$$- a^4 b^4\,(a^2 + b^2)\,m_0 m_\ell t_0 t_\ell - a^2 - b^2]\,\sin a\ell\,\sin b\ell$$
$$+ [b\,(a^2 - b^2)(m_0 - m_\ell) - a^2 b\,(a^2 - b^2)(t_0 - t_\ell) + a^2 b^3\,(a^2 - b^2)\,m_0 m_\ell\,(t_0 - t_\ell)$$
$$- a^4 b^3\,(a^2 - b^2)\,t_0 t_\ell\,(m_0 - m_\ell)]\,\sin a\ell\,\cos b\ell$$
$$+ [a^3 b^4\,(a^2 - b^2)\,t_0 t_\ell\,(m_0 - m_\ell) - a^3 b^2\,(a^2 - b^2)\,m_0 m_\ell\,(t_0 - t_\ell)$$
$$- ab^2\,(a^2 - b^2)(t_0 - t_\ell) - a\,(a^2 - b^2)(m_0 - m_\ell)]\,\cos a\ell\,\sin b\ell$$
$$+ [2\,a^3 b^3\,(m_0 t_0 + m_\ell t_\ell) + ab\,(a^2 - b^2)(m_0 t_\ell + m_\ell t_0) - 2\,a^5 b^5 m_0 m_\ell t_0 t_\ell - 2\,ab]$$
$$\times \cos a\ell\,\cos b\ell = 0 \qquad (13-$$

Comme $a = \sqrt{(n + \sqrt{n^2 - 4})/2}$ et $b = \sqrt{(n - \sqrt{n^2 - 4})/2}$, la relation (13) est l'équation aux valeurs critiques associées de n et de ℓ .

En cas de symétrie, $m_0 = m_\ell$ et $t_0 = t_\ell$, l'équation (13) est considérablement simplifiée, les termes en $\sin a\ell \cos b\ell$ et $\cos a\ell \sin b\ell$ s'annulent. Même dans ce cas et en général, cette équation ne se prête pas à une discussion algébrique. Il faut donc la résoudre numériquement. On obtiendra une solution telle que

$$a\ell = C \quad \text{ou} \quad b\ell = C \qquad (14a)$$

d'où $$\sqrt{(n + \sqrt{n^2 - 4})/2} = C/\ell \quad \text{ou} \quad \sqrt{(n - \sqrt{n^2 - 4})/2} = C/\ell \qquad .(14b)$$

Les deux conditions conduisent à la même formule

$$n^2 - 4 = (2\,C^2/\ell^2 - n)^2$$

d'où $$n_{cr} = C^2/\ell^2 + \ell^2/C^2 \,. \qquad (14c)$$

Or, $n = NK^2/EI$ et $\ell = L/K$.

Donc
$$N_{cr} = C^2\,EI/L^2 + EI/K^2C^2 = C^2 EI/L^2 + L^2 kB/C^2 \qquad (15)$$

comme $N = n\sqrt{kBEI}$, on a

$$n_{cr} = (C^2/L^2)\sqrt{EI/kB} + (L^2/C^2)\sqrt{kB/EI} \,. \qquad (15bis)$$

Ce sont les expressions générales des valeurs de n_{cr} et de N_{cr} . Il faut que $n_{cr} > 2$ et $N_{cr} > 2\sqrt{kBEI}$.

Si $k = 0$,
$$N_{cr\,o} = C^2\,EI/L^2 \qquad (15ter)$$

c'est la valeur critique d'Euler en milieu non résistant.

Donc $$N_{cr} = N_{cr\,o} + kBL^2/C^2 .$$

La valeur critique en milieu résistant est égale à la valeur critique en milieu non résistant majorée d'un terme proportionnel à k .

D'après les formules (15) et (15bis), N_{cr} et n_{cr} sont les sommes de deux termes dont les produits sont constants. Leurs valeurs sont des minimums lorsque les deux termes sont égaux. Ceci correspond à $L = CK$ où $\ell = C$, d'où $n = 2$. On a alors

$$N_{cr\,2} = 2\,C\,EI\,/\,L^2 = 2\,\sqrt{k\,B\,EI} . \qquad (15quater)$$

On déduit la longueur crituque de la relation (14)

$$\ell = L/K = C\,/\sqrt{(n + \sqrt{n^2 - 4})\,/\,2}$$

d'où : $$4\,(K^4C^4\,/\,L^4) - 4\,(n\,K^2\,C^2\,/\,L^2) + 4 = 0 .$$

Finalement :

$$L^4 - NC^2L^2\,/\,kB + EI\,C^4\,/\,kB = 0 ,$$

$$L^2 = NC^2\,/\,2\,k\,B - \sqrt{(NC^2\,/\,kB)^2 - 4\,EI\,C^4\,/\,k\,B}\,/\,2$$

et $$L_{cr} = C\,\sqrt{(N - \sqrt{N^2 - 4\,k\,BEI})\,/\,2\,k\,B} . \qquad (16)$$

C'est la longueur critique minimum. Il en existe une deuxième plus grande, correspondant au signe $+$ devant le radical sous le radical.

Lorsque $n = 2$, $N^2 = 4\,k\,BEI$ et $L_{cr\,2} = C\,\sqrt{N\,/\,2\,k\,B} = CK$; cette valeur de L est unique.

Lorsque $k = 0$, on déduit de (15ter)

$$L_{cr\,o} = C\,\sqrt{EI\,/\,N} . \qquad (17)$$

Pour déterminer l'équation paramétrique de l'élastique virtuelle des toutes premières petites déformations de flambage, on se sert des trois équations les plus simples du groupe (11) pour établir l'expression de trois des coefficients c_1 , c_2 , c_3 et c_4 en fonction du quatrième, généralement c_1 ou c_2 . On obtient ainsi une équation :

$$y = c\,f\,(a\,,b\,,\quad,z)$$

dans laquelle c est un paramètre arbitraire voisin de zéro.

L'introduction des expressions des coefficients dans la quatrième équation reproduirait la condition (13).

2. VALEUR DE n EGALE A 2

C'est la plus faible valeur de n pour laquelle les formules du paragraphe précédent sont valables. Il y correspond une simplification des formules, car $a = b = 1$. La formule (13) devient une identité :

$$2\,(1 - m_0 t_0 - m_\ell t_\ell + m_0 m_\ell t_0 t_\ell)(1 - \sin^2 \ell - \cos^2 \ell) = 0 .$$

Le flambage est donc possible, mais la valeur de ℓ n'est pas déterminée. Il faut l'établir pour une valeur de $n > 2$. D'après (14a), $C = \ell$ et $N_{cr\ 2} = 2\ C^2 EI / L^2$ (15quater).

C'est le double de la valeur (15ter) d'Euler de la pièce située dans un milieu non résistant. On a montré au paragraphe précédent que c'est la valeur minimale de N_{cr} pour une pièce de caractéristiques E,I,C,L,B, dans un milieu résistant dont le coefficient de réaction est k. Cette valeur n'est pas indépendante de kB, car elle vaut aussi (15quater) $2\sqrt{kBEI}$. La longueur critique correspondante

$$L_{cr\ 2} = C\sqrt{2\ EI / N} = C\sqrt{N / 2kB} \qquad (18)$$

n'est pas quelconque, elle est égale à

$$CK = C\sqrt[4]{EI / kB} . \qquad (18bis)$$

3. CAS PARTICULIERS CLASSIQUES

A. Pièce articulée aux deux extrémités :

$$m_0 = m_\ell \equiv \infty \quad , \qquad t_0 = t_\ell = 0 .$$

La condition (13) devient :

$$-\,(a^2 - b^2)\sin a\ell \sin b\ell = 0 \qquad (19)$$

d'où $\sin a\ell = 0$ ou $\sin b\ell = 0$.

La solution est $a\ell = \Pi$ ou $b\ell = \Pi$.

Donc, d'après la formule (14a), $C = \Pi$ et d'après la formule (15)

$$N_{cr} = \Pi^2 EI / L^2 + kBL^2 / \Pi^2 . \qquad (20)$$

L'équation paramétrique de l'élastique est $y = c_2 \sin az$; c'est celle d'une sinusoïde passant par les deux extrémités et formant une demi-onde.

B. Pièce encastrée à l'extrémité 0, libre à l'extrémité L :

$$m_0 = 0 \ , \quad t_0 \equiv \infty \ , \quad m_\ell \equiv \infty \ , \quad t_\ell = 0 .$$

La condition (13) devient :

$$\left.\begin{array}{lll} & ab\,(a^2 - b^2)\cos a\ell \cos b\ell = 0 & \\ \text{Donc} & \cos a\ell = 0 \quad \text{ou} \quad \cos b\ell = 0 & \\ \text{d'où} & a\ell = \Pi/2 \quad \text{ou} \quad b\ell = \Pi/2 & \end{array}\right\} \qquad (21)$$

D'après les formules (14) et (15) : $C = \Pi/2$

et

$$N_{cr} = \Pi^2 EI / 4 L^2 + 4 L^2 k B / \Pi^2 . \tag{22}$$

L'équation paramétrique de l'élastique est

$$y = c_1 \cos az ,$$

c'est un quart d'onde de cosinusoïde dont le sommet est à l'encastrement en 0 et la point d'inflexion à l'extrémité libre L .

N.B. Si par suite des liaisons, l'action N était astreinte de passer par L et par 0 , le cas B serait identique au cas A et le flambage se produirait en demi-onde.

C. Pièce encastrée aux deux extrémités.

Il y a une diversité de conditions aux limites et donc diverses solutions.

C.1. Les conditions les plus naturelles semblent être $m_0 = m_\ell = 0$ et $t_0 = t_\ell = 0$. La condition (13) devient alors :

$$\left.\begin{aligned} & 2\,ab - (a^2 + b^2) \sin a\ell \sin b\ell - 2\,ab \cos a\ell \cos b\ell = 0 \\ \text{ou} \quad & 2 - n \sin a\ell \sin b\ell - 2 \cos a\ell \cos b\ell = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Par des transformations trigonométriques appropriées, ces équations deviennent :

$$\frac{\operatorname{tg} \sqrt{\dfrac{n + \sqrt{n^2 - 4}}{2}}\ \dfrac{\ell}{2}}{\sqrt{n^2 - 4} + n - 2} = \frac{\operatorname{tg} \sqrt{\dfrac{n - \sqrt{n^2 - 4}}{2}}\ \dfrac{\ell}{2}}{\sqrt{n^2 - 4} - (n - 2)} \tag{24}$$

Cette relation ne permet pas d'écrire une expression algébrique et trigonométrique de la solution; celle-ci ne peut être établie que numériquement, d'après la valeur numérique de n .

Lorsque $n = 2$, la formule (24) devient une identité, mais par un calcul à la limite, on peut établir que la condition devient dans ce cas

$$\operatorname{tg} \ell/2 = \ell/2 . \tag{25}$$

S. TIMOSHENKO [2] a établi la même équation pour déterminer la valeur critique de N pour une pièce doublement encastrée dans un milieu non réactif. La solution est $\ell/2 = 4{,}493$, donc $\ell = 8{,}986$.

La valeur critique est donc dans ce cas, d'après Timoshenko

$$N_{cr\ o} = \overline{8{,}986}^2\ EI / L^2 \tag{26}$$

(ce qui correspond à $k = 0$, $n \equiv \infty$).

Pour $n = 2$, on trouve d'après les formules du paragraphe 2 :

$$N_{cr\ 2} = 2 \times \overline{8,986^2}\ EI / L^2 \ . \tag{27}$$

D'après cela, pour les valeurs de n comprises entre 2 et ∞ , on peut croire que ℓ sera assez voisin de 8,986 .

L'équation de l'élastique est :

$$y = C_1 \frac{[(b \sin a\ell - a \sin b\ell)(\cos az - \cos bz) - (\cos a\ell - \cos b\ell)(b \sin az - a \sin bz)]}{b \sin a\ell - a \sin b\ell} \tag{28}$$

C.2. D'autres conditions aux limites $m_0 = m_\ell = 0$ et $t_0 = t_\ell \equiv \infty$ donnent par la condition (13) :

$$- a^2b^2 (a^2 - b^2)^2 \sin a\ell \sin b\ell = 0 \tag{29}$$

qui paraît identique à la condition (19), mais qui ne l'est pas en fait. En effet, l'équation de l'élastique est

$$y = C_1 \cos az \tag{30}$$

qui doit donner la même valeur C_1 pour $z = 0$ et $z = \ell$, d'où $\cos a\ell = 1$. La solution est donc

$$a\ell = 2\,\Pi \quad (\text{ou } b\ell = 2\,\Pi) \tag{32}$$

ce qui donne

$$N_{cr} = 4\,\Pi^2 EI / L^2 + L^2\, kB / 4\,\Pi^2 \tag{32}$$

Pour $n = 2$,

$$N_{cr\ 2} = 8\,\Pi^2 EI / L^2 \ ; \tag{33}$$

pour $kB = 0$, $n \equiv \infty$,

$$N_{cr\ o} = 4\,\Pi^2\, EI / L^2 \ . \tag{34}$$

Ces deux dernières valeurs sont nettement inférieures à celles des formules (27) et (26). On peut en déduire que c'est la valeur la plus faible de la charge critique de la formule (32) qui doit être prise en considération et que le flambement se produira suivant le mode C.2

C.3. La distinction entre les cas C.1. et C.2. suggère la possibilité de cas intermédiaires caractérisés par $m_0 = m_\ell = 0$, $t_0 = t_\ell \neq 0$.

La condition (13) devient :

$$\left.\begin{array}{l} 2\,ab - [t^2a^2b^2(a^2-b^2)^2 + a^2 + b^2)]\sin a\ell \sin b\ell - 2\,ab\cos a\ell \cos b\ell \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \\ \text{ou}\quad 2 - [n + t^2\,(n^2-4)]\sin a\ell \sin b\ell - 2\cos a\ell \cos b\ell = 0 \end{array}\right\} \quad (35)$$

Il en résulte que

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{\dfrac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}}\;\dfrac{\ell}{2}}{\sqrt{[n+t^2(n^2-4)]^2-4}+n^2+(n^2-4)\;t^2-2} \\ \qquad = \dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{\dfrac{n-\sqrt{n^2-4}}{2}}\;\dfrac{\ell}{2}}{\sqrt{[n+t^2(n^2-4)]^2-4}-n-(n^2-4)\;t^2+2} \end{array}\right\} \quad (36)$$

Si $t = 0$, on retrouve le cas C.1.; si $t \equiv \infty$, on retrouve le cas C.2. Quelle que soit la valeur de t, il s'agit d'un encastrement parfait : $y'_0 = y'_\ell = 0$.

C.4. On peut aussi considérer des encastrements partiels symétriques : $t_0 = t_\ell = 0$, $m_0 = m_\ell \neq 0$.

La condition (13) devient :

$$\left.\begin{array}{l} 2\,ab - [(a^2-b^2)^2m^2 + a^2 + b^2]\sin a\ell \sin b\ell - 2\,ab\cos a\ell \cos b\ell = 0 \\ \text{ou}\quad 2 - [n + m^2(n^2-4)]\sin a\ell \sin b\ell - 2\cos a\ell \cos b\ell = 0 \end{array}\right\} \quad (37)$$

La solution est donnée par :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{\dfrac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}}\;\dfrac{\ell}{2}}{\sqrt{[n+(n^2-4)\;m^2]^2-4}+n+(n^2-4)\;m^2-2} \\ \qquad = \dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{\dfrac{n-\sqrt{n^2-4}}{2}}\;\dfrac{\ell}{2}}{\sqrt{[n+(n^2-4)\;m^2]^2-4}-n-(n^2-4)\;m^2+2} \end{array}\right\} \quad (38)$$

Si $m = 0$, on retrouve le cas C.1.; si $m \equiv \infty$, on retrouve le cas A de la double articulation.

D. Pièce encastrée en 0 et articulée en L

Dans ce cas également, il existe diverses solutions en raison de diverses conditions aux limites possibles en 0 .

D.1. Les conditions les plus rationnelles paraissent être $m_0 = 0$,

$t_0 = 0$, $m_\ell \equiv \infty$, $t_\ell = 0$.

La condition (13) devient alors :

$$\left.\begin{aligned} b\,(a^2 - b^2) \sin a\ell \cos b\ell - a\,(a^2 - b^2) \cos a\ell \sin b\ell &= 0 \\ (\mathrm{tg}\; a\ell) / a\ell &= (\mathrm{tg}\; b\ell) / b\ell \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

Si $n = 2$, cette équation devient

$$(\mathrm{tg}\ell) / \ell = 1 \qquad (25bis)$$

d'où

$$\ell = 4{,}493 \quad \text{et} \quad N_{cr\;2} = 2 \times \overline{4{,}493}^2\, EI / L^2 . \qquad (39)$$

Pour $k = 0$, $n \equiv \infty$, $N_{cr\;0} = \overline{4{,}493}^2\, EI / L^2$ (40)

selon Timoshenko [2] .

D.2. Conservant $m_\ell \equiv \infty$, $t_\ell = 0$ pour l'articulation, on peut à l'encastrement considérer $m_0 = 0$, $t_0 \equiv \infty$. La condition (13) devient :

$$\left.\begin{aligned} ab\,(a^2 - b^2) \cos a\ell \cos b\ell &= 0 \\ \text{Donc} \quad \cos a\ell = 0 \quad \text{ou} \quad \cos b\ell &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

L'équation de l'élastique est

$$y = C_1 \cos az . \qquad (42)$$

Pour $z = 0$, $y = C_1$; pour $z = \ell$, $y = C_1 \cos a\ell = 0$ (à cause de l'articulation). Donc

$$a\ell = 3\,\Pi/2 \quad \text{et} \quad N_{cr} = 9\,\Pi^2\, EI / 4\, L^2 + 4\, L^2\, kB / 9\, \Pi^2 \qquad (43)$$

Si $n = 2$,

$$N_{cr\;2} = 2 \times 9\,\Pi^2\, EI / 4\, L^2 . \qquad (44)$$

Si $k = 0$, $n \equiv \infty$,

$$N_{cr\;0} = 9\,\Pi^2\, EI / 4\, L^2 , \qquad (45)$$

Ces valeurs sont très inférieures à celles des formules (39) et (40). Il semble donc qu'il faut considérer ces valeurs comme valeurs critiques de sécurité et que le flambement s'effectuera de préférence selon le mode D.2.

D.3. Par analogie avec le cas C.3, on considère les conditions : $m_\ell = 0$, $t_0 \neq 0$, $m_\ell \equiv \infty$, $t_\ell = 0$.

La condition (13) devient :

$$\left.\begin{aligned} & - b\,(a^2 - b^2)\sin a\ell \cos b\ell + a\,(a^2 - b^2)\cos a\ell \sin b\ell \\ & \quad + ab\,(a^2 - b^2)\,t_0 \cos a\ell \cos b\ell = 0 \\ \text{ou} \quad & (\operatorname{tg} a\ell)/a\ell = (\operatorname{tg} b\ell)\, b\ell + t_0/\ell \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

Si $t = 0$, on retrouve les conditions (38) du cas D.1 ;
si $t_0 \equiv \infty$, on retrouve les conditions (41) du cas D.2.

D.4. Par analogie avec le cas C.4, on envisage le cas de l'encastrement partiel en O avec $m_0 \neq 0$, $t_0 = 0$, $t_\ell = 0$ et $m_\ell \equiv \infty$.

La condition (13) donne :

$$(a^2 - b^2)\,[-\,m_0\,(a^2 - b^2)\sin a\ell \sin b\ell - b \sin a\ell \cos b\ell + a \cos a\ell \sin b\ell] = 0 \qquad (47)$$

ou $$(\operatorname{tg} a\ell)/a\ell = (\operatorname{tg} b\ell)/b\ell - m_0\,(a^2 - b^2)(\operatorname{tg} a\ell \operatorname{tg} b\ell)/\ell$$

Si $m_0 = 0$, on retrouve le cas D.1 de l'encastrement parfait. Si $m_0 \equiv \infty$, on retrouve le cas A de la double articulation.

CHAPITRE III

STABILITE LORSQUE LE NOMBRE n EST < 2

1. ETUDE GENERALE

L'équation de l'élastique éventuelle de flexion est celle de la formule (4), à laquelle sont associées les formules (5), (6) et (7) de dy/dz , d^2y/dz^2 et d^3y/dz^3 . Les conditions aux limites O et L sont exprimées comme au paragraphe 3 du chapitre I et au paragraphe 1 du chapitre II :

$$y_0 = t_0 y_0''' \ , \quad y_0' = m_0 y_0'' \ , \quad y_\ell = t_\ell y_\ell''' \ , \quad y_\ell' = m_\ell y_\ell'' \ .$$

Ces conditions s'écrivent comme suit :

$$c_1 + c_3 = t_0\,[c_1 a(a^2 - 3\,b^2) - c_2 b(b^2 - 3\,a^2) - c_3 a(a^2 - 3\,b^2) - c_4 b(b^2 - 3\,a^2)]$$

$$ac_1 + bc_2 - ac_3 + bc_4 = m_0\,[c_1(a^2 - b^2) - 2\,abc_2 + c_3(a^2 - b^2) - 2\,abc_4]$$

$$\exp a\ell\,(c_1 \cos b\ell + c_2 \sin b\ell) + \exp(-a\ell)(c_3 \cos b\ell + c_4 \sin b\ell) =$$

$$\begin{aligned} t_\ell \Big[&\exp a\ell\,\{c_1[a(a^2-3\,b^2) \cos b\ell + b(b^2-3\,a^2) \sin b\ell] \\ &\qquad - c_2\,[b(b^2-3\,a^2) \cos b\ell) - a(a^2-3\,b^2) \sin b\ell]\} \\ &- \exp(-a\ell)\,\{c_3\,[a(a^2-3\,b^2) \cos b\ell - b(b^2-3\,a^2) \sin b\ell] \\ &\qquad + c_4\,[b(b^2-3\,a^2) \cos b\ell + a(a^2-3\,b^2) \sin b\ell]\}\Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\exp a\ell\,[c_1(a \cos b\ell - b \sin b\ell) + c_2(b \cos b\ell + a \sin b\ell)] \\ &\quad - \exp(-a\ell)\,[c_3\,(a \cos b\ell + b \sin b\ell) - c_4\,(b \cos b\ell - a \sin b\ell)] = \\ m_\ell \Big[&\exp a\ell\,\{c_1[(a^2-b^2) \cos b\ell - 2\,ab \sin b\ell] + c_2\,[2\,ab \cos b + (a^2-b^2) \sin b\ell]\} \\ &\quad + \exp(-a\ell)\,\{c_3\,[(a^2-b^2) \cos b\ell + 2\,ab \sin b\ell] - c_4\,[2\,ab \cos b\ell - (a^2-b^2) \sin b\ell]\}\Big] \end{aligned}$$

Il en résulte le système suivant de quatre équations :

$$\left.\begin{aligned} &[t_0 a(a^2-3\,b^2-1)]\,c_1 - t_0 b(b^2-3\,a^2)\,c_2 - [t_0 a(a^2-3\,b^2)+1]\,c_3 \\ &\qquad\qquad - t_0 b(b^2-3\,a^2)\,c_4 = 0 \\ &[m_0(a^2-b^2)-a]\,c_1 + (2m_0 a-1)\,bc_2 + [m_0(a^2-b^2)+a]\,c_3 - (2m_0 a+1)\,bc_4 = 0 \\ &\exp a\ell\,\{[t_\ell\,a(a^2-3\,b^2)-1] \cos b\ell + t_\ell b(b^2-3\,a^2) \sin b\ell\}\,c_1 \\ &- \exp a\ell\,\{t_\ell\,b(b^2-3\,a^2) \cos b\ell - [t_\ell\,a(a^2-3\,b^2)-1] \sin b\ell\}\,c_2 \\ &- \exp(-a\ell)\,\{[t_\ell\,a(a^2-3\,b^2)+1] \cos b\ell - t_\ell b(b^2-3\,a^2) \sin b\ell\}\,c_3 \\ &- \exp(-a\ell)\,\{t_\ell\,b(b^2-3\,a^2) \cos b\ell + [t_\ell\,a(a^2-3\,b^2)+1] \sin b\ell\}\,c_4 = 0 \\ &\exp a\ell\,\{[m_\ell(a^2-b^2)-a] \cos b\ell - b\,(2\,m_\ell a-1) \sin b\ell\quad c_1 \\ &+ \exp a\ell\quad(2\,m_\ell a-1)\,b \cos b\ell + [m_\ell\,(a^2-b^2)-a] \sin b\ell\}\,c_2 \\ &+ \exp(-a\ell)\,\{[m_\ell\,(a^2-b^2)+a] \cos b\ell + (2\,m_\ell a+1)\,b \sin b\ell\}\,c_3 \\ &- \exp(-a\ell)\,\{(2\,m_\ell\,a+1)\,b \cos b\ell - [m_\ell(a^2-b^2)+a] \sin b\ell\}\,c_4 = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

La solution triviale est $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$, sauf si le déterminant des coefficients de ces quatre paramètres est nul. Posons :

$$m_0(a^2-b^2)-a = M_{01}\;,\;(2m_0 a-1)\,b = M_{02}\;,\;m_0(a^2-b^2)+a = M_{03}\;,\;-(2m_0 a+1)\,b = M_{04}$$

$$m_\ell(a^2-b^2)-a = M_{\ell 1}\;,\;(2m\,a-1)\,b = M_{\ell 2}\;,\;m_\ell(a^2-b^2)+a = M_{\ell 3}\;,\;-(2m_\ell a+1)\,b = M_{\ell 4}$$

$$t_0 a\,(a^2-3\,b^2) = T_{0a}\quad,\qquad t_0 b\,(b^2-3\,a^2) = T_{0b}$$

$$t_\ell a\,(a^2-3\,b^2) = T_{\ell a}\quad,\qquad t_\ell b\,(b^2-3\,a^2) = T_{\ell b}\,.$$

Le déterminant devient alors :

$$\begin{vmatrix} T_{0a} - 1 & - T_{0b} & - (T_{0a} + 1) & - T_{0b} \\ M_{01} & M_{02} & M_{03} & M_{04} \\ \exp a\ell[(T_{\ell a} - 1)\cos b\ell & -\exp a\ell[T_{\ell b} \cos b\ell & -\exp(-a\ell)[(T_{\ell a} + 1) \cos b\ell & -\exp(-a\ell)[T_{\ell b} \cos b\ell \\ + T_{\ell b} \sin b\ell] & - (T_{\ell a} - 1) \sin b\ell] & -T_{\ell b} \sin b\ell] & -(T_{\ell a} + 1) \sin b\ell] \\ \exp a\ell\ (M_{\ell 1} \cos b\ell & \exp a\ell\ (M_{\ell 2} \cos b\ell & \exp(-a\ell)(M_{\ell 3} \cos b\ell & \exp(-a\ell)(M_{\ell 4} \cos b\ell \\ -M_{\ell 2} \sin b\ell) & + M_{\ell 1} \sin b\ell) & -M_{\ell 4} \sin b\ell) & -M_{\ell 3} \sin b\ell) \end{vmatrix}$$

$$= 0 \qquad (49)$$

Après développement et réduction, on obtient la condition suivante :

$$\begin{aligned}
&\exp(2\, a\ell)\ [(2+n)/4]\ \{1 + m_0 m_\ell t_0 t_\ell + \sqrt{2-n}\ [m_0 m_\ell (t\ \ - t_\ell) - t_0 t_\ell (m_0 - m_\ell)] \\
&\qquad - (2-n)(m_0 - t_0)(m_\ell - t_\ell) - (m_0 t_0 + m_\ell t_\ell) + \sqrt{2-n}\ (m_0 - m_\ell - t_0 + t_\ell)\} \\
&+\exp(-2\, a\ell)\ [(2+n)/4]\ \{1 + m_0 m_\ell t_0 t_\ell - \sqrt{2-n}\ [m_0 m\ (t_0 - t_\ell) - t_0 t_\ell (m_0 - m_\ell)] \\
&\qquad - (2-n)\ \ (m_0 - t_0)(m_\ell - t_\ell) - (m_0 t_0 + m_\ell t_\ell) \\
&\qquad - \sqrt{2-n}\ (m_0 - m_\ell - t_0 + t_\ell)\} \\
&- (2-n)\ \sqrt{2+n)}\ [(m_0 - m_\ell)(1 + t_0 t_\ell) + (t_0 - t_\ell)(1 + m_0 m_\ell)] \sin b\ell \cos b\ell \\
&+ \{2\ t_0 t_\ell (2+n)(2 - n - m_0 m_\ell) - (4 - n^2)(1+n)(t_0 - t_\ell)(m_0 - m_\ell) \\
&\quad + (2+n)(n-1)\ [(4-n)(m_0 t_0 + m_\ell t_\ell) - (2-n)(m_0 t_\ell + m_\ell t_0)] \\
&\quad + 2\ [(4 - n^2)\ m_0 m_\ell - 2 - n]\}\ (\cos^2 b\ell)/4 \\
&- \{t_0 t_\ell\ [2\ (4 - n^2) - 2\ m_0 m_\ell\ (n-6)] \\
&\quad + (2-n)(n+1)(t_0 - t_\ell)\ [(2-n)\ m_0 + (2+n)\ m_\ell] \\
&\quad - (2+n)(n-1)\ [(2-n)(m_0 t_\ell + m_\ell t_0) + n\ (m_0 t_0 + m_\ell t_\ell)] \\
&\quad + 2\ [(4 - n^2)\ m_0 m_\ell + 6 - n]\}\ (\sin^2 b\ell)/4\ . \qquad (50)
\end{aligned}$$

Cette équation aux valeurs critiques éventuelles de ℓ se simplifie en cas de symétrie : $m_0 = m_\ell$ et $t_0 = t_\ell$. Le terme en $\sin b\ell \cos b\ell$ s'annule. Cependant, même simplifiée, l'équation (50) ne se prête pas à une discussion algébrique. Dans un cas concret quelconque, il faut opérer numériquement.

2. CAS PARTICULIERS CLASSIQUES

A. Pièce articulée aux deux extrémités

Dans ce cas, $m_0 = m_\ell = \infty$, $t_0 = t_\ell = 0$.

La condition (50) devient :

$$- (4 - n^2)[\exp 2\, a\ell + \exp(-2\, a\ell)] / 4 + (4 - n^2)(\cos^2 b\ell - \sin^2 b\ell) / 2 = 0$$

Comme $n \neq 2$, $\cosh 2\, a\ell = \cos 2\, b\ell$.

Cette condition est impossible, car $\cosh 2\, a\ell$ est plus grand que l'unité et $\cos 2\, b\ell$ y est plus petit.

Le flambage n'est donc pas possible lorsque $n < 2$.

B. Pièce encastrée en 0 , libre en L :

$$m_0 = 0 , \quad t_0 \equiv \infty , \quad m_\ell \equiv \infty , \quad t_\ell = 0 .$$

L'équation (50) devient :

$$(4 - n^2)\, [\exp 2\, a\ell + \exp(-2\, a\ell)] / 4 + (4 - n^2)(n + 1) \cos^2 b\ell / 4$$
$$- (4 - n^2)(n - 1) \cos^2 b\ell / 4 - (4 - n^2)(n + 1) \sin^2 b\ell / 4 + (4 - n^2)(n - 1) \sin^2 b\ell / 4$$
$$= 0 .$$

Comme $n \neq 2$, $\cosh 2\, a\ell + \cos 2\, b\ell = 0$.

Cette relation est impossible, car $\cosh 2\, a\ell$ est toujours > 1 , tandis que la valeur absolue de $\cos 2\, b\ell$ est toujours inférieure à 1 . Le flambage n'est donc pas possible lorsque $n < 2$.

C. Pièce encastrée aux deux extrémités

C.1.

$$m = m = 0 , \quad t = t = 0 .$$

La condition (50) devient :

$$(2 + n)\, [\exp 2\, a\ell + \exp(-2\, a\ell)] / 4 - (2 + n) \cos^2 b\ell / 2 - (6 - n) \sin^2 b\ell / 2 = 0$$

$$(2 + n) \cosh 2\, a\ell / 2 - (2 + n)(\cos^2 b\ell + \sin^2 b\ell) / 2 - (2 - n) \sin^2 b\ell = 0$$

$$(2 + n)(\cosh 2\, a\ell - 1) / 2 - (2 - n) \sin^2 b\ell = 0$$

$$(2 + n) \sinh^2 a\ell = (2 - n) \sin b\ell$$

$$(\sinh^2 a\ell) / a^2 = (\sin b\ell) / b^2$$

ou $$(\sinh a\ell / a\ell)^2 = (\sin b\ell / b\ell)^2$$

Cette relation est impossible, parce que le premier membre est toujours supérieur à 1 , tandis que le second est toujours inférieur à 1 . Le flambage n'est donc pas possible si $n < 2$.

C.2. $m_0 = m_\ell = 0$, $t_0 = t_\ell \equiv \infty$ (cf. Ch. II, par. 3, C.2).

La condition (50) devient :

$$- [(4 - n^2) / 4] [\exp 2a\ell + \exp(-2a\ell)] + [(4 - n^2) / 2] (\cos^2 b\ell - \sin^2 b\ell) = 0$$

$$- [(4 - n^2) / 2] (\cosh 2a\ell - \cos 2b\ell) = 0 .$$

Cette condition est impossible, car $n \neq 2$ et $\cosh 2a\ell$ est plus grand que 1 tandis que $\cos 2b\ell$ est plus petit que 1 . Le flambage n'est donc pas possible lorsque $n < 2$.

D. <u>Pièce encastrée en 0 et articulée en L</u> .

D.1. $m_0 = 0$, $t_0 = 0$, $m_\ell \equiv \infty$, $t_\ell = 0$.

La condition (50) devient :

$$-(2 + n) \sqrt{2 - n} [\exp 2a\ell - \exp(-2a\ell)] / 4 + (2 - n) \sqrt{2 + n} \sin b\ell \cos b\ell = 0$$

$$- \sqrt{4 - n^2} (b \sinh 2a\ell - a \sin 2b\ell) = 0 .$$

Comme $n \neq 2$,

$$(\sinh 2a\ell) / 2a\ell = (\sin 2b\ell) / 2b\ell .$$

Or, le premier membre est > 1 , le second < 1 .

Le flambage est donc impossible lorsque $n < 2$.

D.2. $m_0 = 0$, $t_0 \equiv \infty$, $m_\ell \equiv \infty$, $t_\ell = 0$ (cf. Ch. II, par. 3 ,D.2)

La condition (50) devient :

$$-(4 - n^2) [\exp a\ell + \exp(-2a\ell)] / 4 + (4 - n^2)(1 + n - n + 1)(\cos^2 b\ell) / 4$$

$$-(4 - n^2) (1 + n - n + 1)(\sin^2 b\ell) / 4 = 0$$

$$- [(4 - n^2) / 4] [-2\cosh 2a\ell + 2 (\cos^2 b\ell - \sin^2 b\ell)] = 0 .$$

Comme $n \neq 2$, $\cosh 2a\ell = \cos 2b\ell$.

Cette condition est impossible, car le premier membre est > 1 , le second < 1 . Le flambage est donc impossible lorsque $n < 2$.

E. Dans tous les cas classiques et extrêmes des conditions d'extrémités, articulations et encastrements parfaits, le flambage est impossible lorsque $n < 2$. On peut en inférer que pour les cas intermédiaires d'articulations et d'encastrements imparfaits, le flambage est aussi impossible lorsque $n < 2$.

3. VALEUR PARTICULIERE DE n EGALE A 2

Lorsque l'on introduit cette valeur de n dans la formule (50), on obtient l'identité :

$$[1 + m_0 m_\ell t_0 t_\ell - m_0 t_0 - m_\ell t_\ell]\ [2 - 2\ (\cos^2 \ell + \sin^2 \ell)] \quad = \quad 0\ .$$

On a vu au ch. II, par. 2 qu'il en était de même pour la condition (13).

On a étudié la condition du flambage lorsque $n = 2$ dans le paragraphe 2 du Chapitre II. La valeur $n = 2$ est une véritable limite du domaine de possibilité du flambage. Il peut se produire pour toutes les pièces appuyées aux extrémités à partir de la valeur $n = 2$ et pour toutes les valeurs plus grandes, mais il est exclu lorsque n est inférieure à 2.

On peut trouver à cette limite une signification mathématique du fait que $N_{cr\ 2}$ est un minimum, mais dans le domaine régi par l'équation (9). Il n'est pas établi a priori que ce minimum vaut aussi dans le domaine régi par l'équation (4). Cependant, l'étude de ce domaine a établi que le flambage n'y est pas possible. D'ailleurs, comme $N = n \sqrt{kBEI}$ et que $N_{cr\ 2} = 2 \sqrt{kBEI}$, pour $n < 2$, une charge critique éventuelle devrait être d'autant plus petite que n est plus petit et perdrait toute signification. N_{cr} ne peut absolument pas être inférieur à $2 \sqrt{kBEI}$.

On a montré au paragraphe 1 du chapitre II, par la formule (15) que la valeur critique de N pour une certaine valeur de kB est égale à la valeur critique $N_{cr\ o}$ dans un milieu non résistant augmenté d'un terme proportionnel à kB . L'influence de la résistance élastique du milieu sur la valeur critique est donc linéaire, mais elle finit brusquement lorsque le terme proportionnel à kB est égal à $N_{o\ cr}$, ce qui se produit pour $n = 2$, on a alors $N_{cr\ 2} = 2\ N_{cr\ o}$.

La valeur $n = 2$ correspond d'après la formule (15) à

$$kB_{cr\ 2} \quad = \quad EI\ C^4 / L^4\ . \tag{51}$$

Cette valeur de kB est sa limite supérieure permettant le flambage; c'est en quelque sorte la limite physique supérieure de possibilité de flambement pour une pièce de caractéristique C, EI , L et B . Lorsque $kB > EI\ C^4 / L^4$, le flambement est impossible. Il devient possible dès que $kB = EI\ C^4 / L^4$ et pour les valeurs inférieures, N_{cr} décroît linéairement avec les valeurs de kB , suivant les formules

$$\left.\begin{aligned} N_{cr} &= N_{cr\ 2} - (N_{cr\ o} - L^2 kB / C^2) \\ \text{ou} \qquad N_{cr} &= N_{cr\ o} + L^2 kB / C^2 \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Une telle discontinuité est exceptionnelle dans un phénomène élastique, d'autant plus que l'effet des réactions du milieu est linéaire, bien qu'il s'agisse d'un phénomène pour lequel on tient compte des effets des déformations.

Lorsque $n > 2$, la valeur de kB qui correspond à la valeur critique de N est telle que

$$N = n\sqrt{kBEI} = (C^2EI / L^2) + (kBL^2 / C^2).$$

On en déduit :

$$kB_{cr} = EIC^4 \left(n^2 - 2 - \sqrt{n^4 - 4n^2}\right) / 2L^4 . \qquad (53)$$

On remarque que kB_{cr} diminue très rapidement lorsque n dépasse 2. Ainsi, pour $n = 3$,

$$kB_{cr} = \text{env } 0{,}146\ EIC^4 / L^4 .$$

La notion de kB_{cr} n'est intéressante que par sa limite de la formule (51). Elle permet de vérifier directement si une pièce entièrement caractérisée par L, C, E et I , au point de vue de la tendance à l'instabilité, et située dans un milieu élastique dont le coefficient de réaction est kB . (B étant toutefois une caractéristique de la pièce), est susceptible de flamber.

Ce sera effectivement le cas si $kB \leqslant EIC^4 / L^4$, sinon le flambage est impossible.

CHAPITRE IV

PIECE ENTIEREMENT LIBRE AUX DEUX EXTREMITES

1. STABILITE STATIQUE

On ne peut concevoir l'équilibre statique d'une telle pièce que dans un milieu résistant. Il y a lieu d'examiner sa stabilité statique, ce qui justifie un chapitre spécial.

La pièce étant simplement comprimée suivant son axe, en raison des réactions du milieu elle ne peut subir de déplacement normal à cet axe.

Si la force de compression reste parallèle à sa direction primitive lorsque la pièce subit une rotation virtuelle $d\alpha$ autour de son point milieu, il se produit un couple $NL\, d\alpha$, qui est équilibré par le couple des réactions du milieu $kBL^3\, d\alpha / 12$.

L'équilibre exige donc, dans cette hypothèse, que

$$N \leqslant kBL^2 / 12 , \qquad L \geqslant \sqrt{12\, N / kB} .$$

Il y a donc une limite critique supérieure de l'action N , dépendant de la longueur L de la pièce, mais la longueur critique de la pièce est une limite inférieure. Dans cette hypothèse, pour être stable, la pièce devrait avoir une longueur suffisante; elle serait d'autant plus stable statiquement qu'elle serait plus longue.

Le mode d'application de l'action N , tel que la direction de cette action resterait invariable dans l'espace si la pièce subissait une légère rotation, exigerait aux extrémités de la pièce des dispositifs mécaniques qui pourraient être assimilés aux dispositifs très généraux d'appuis définis au paragraphe 3 du chapitre I. Les extrémités ne seraient pas alors vraiment libres; le cas est donc à écarter.

Il faut donc se borner à l'hypothèse que l'action interne N reste nécessairement agissante suivant l'axe de la pièce. Dans ces conditions, en raison des réactions du milieu, elle ne peut pas subir de rotation et elle est stable, quelle que soit sa longueur.

2. STABILITE ELASTIQUE

Elle est liée à la stabilité statique si la pièce subit une flexion virtuelle, les réactions correspondantes du milieu doivent avoir une résultante strictement nulle, sans couple, Les élastiques virtuelles de flexion doivent donc être analogues à celles du cas C.2 du paragraphe 3 du chapitre II.

2.1. Cas $n \geqslant 2$

2.1.1. On exprime les conditions de liberté des deux extrémités de la pièce par

$$m_0 = m_\ell \equiv \infty \ , \qquad t_0 = t_\ell \equiv \infty$$

La formule (13) devient

$$2\ a^5b^5 - a^4b^4(a^2 + b^2)\ \sin a\ell\ \sin b\ell - 2\ a^5b^5 \cos a\ell\ \cos b\ell\ = 0$$

ce qui revient à la condition trouvée pour ce cas C.1. au paragraphe 3 du chapitre II :

$$2\ ab - (a^2 + b^2)\ \sin a\ell\ \sin b\ell - 2\ ab\ \cos a\ell\ \cos b\ell\ = 0 \qquad (23)$$

qui se ramène à

$$[\mathrm{tg}\ (a\ell\ /\ 2)]\ /\ 2\ (a^2 - 1) = [\mathrm{tg}\ (B\ell\ /\ 2)\ ]\ /\ 2\ (1 - b^2) \qquad (24)$$

Si $n = 2$, $\qquad N_{cr\ 2} = 2 \times \overline{8{,}986}^2\ EI\ /\ L^2 \qquad (27)$

Si $kB = 0$, $\qquad N_{cr\ o} = \overline{8{,}986}^2\ EI\ /\ L^2\ . \qquad (26)$

Ce sont les deux valeurs critiques extrêmes.

L'équation de l'élastique est toutefois différente de (28) parce que y_0 et y_ℓ ne peuvent être nuls pour les raisons indiquées plus haut. On trouve :

$$y = \frac{c_1 [(b^2 \cos az - a^2 \cos bz)(b \sin a\ell - a \sin b\ell) - (\cos a\ell - \cos b\ell)(b^3 \sin az - a^3 \sin bz)]}{b^2 (b \sin a\ell - a \sin b\ell)} \qquad (54)$$

2.1.2. Comme dans le cas C.2 du paragraphe 3 du chapitre II, on écrit $m_0 = m_\ell = 0$, $t_0 = t_\ell \equiv \infty$. On obtient la même condition (29)

$$\sin a\ell \sin b\ell == 0 ,$$

ce qui exige dans ce cas $a\ell = 2\,\Pi$ ou $b\ell = 2\,\Pi$.

Dès lors :

$$N_{cr} = 4\,\Pi^2 EI / L^2 + L^2 kB / 4\,\Pi^2. \qquad (32)$$

Pour $n = 2$,

$$N_{cr\ 2} = 8\,\Pi^2 EI / L^2 . \qquad (34)$$

Pour $kB = 0$, $n \equiv \infty$,

$$N_{cr\ o} = 4\,\Pi^2 EI / L^2 . \qquad (34)$$

L'équation de l'élastique virtuelle est

$$y = c_1 \cos az . \qquad (30)$$

Assez curieusement, les conditions de flambage de la pièce entièrement libre sont les mêmes que celles de la pièce encastrée aux deux extrémités. Suivant l'hypothèse 2.1.1, l'élastique diffère naturellement, mais la valeur critique de N est nettement supérieure à celle du cas 2.1.2, qui est naturellement celui qui se produira puisque les extrêmités sont libres. L'élastique est alors la même que celle de la pièce encastrée aux deux extrémités.

2.2. <u>Cas $n < 2$</u>

2.2.1. Si l'on admet $m_0 = m_\ell \equiv \infty$ et $t_0 = t_\ell \equiv \infty$, la condition (50) devient :

$$[(2+n)/4]\,[\exp a\ell + \exp(-a\ell)] - [(2+n)/2] \cos^2 b\ell + [(n-6)/2] \sin^2 b\ell = 0$$

ou $$[(2+n)/2]\,(\cosh 2a\ell - 1) - (2-n) \sin^2 b\ell = 0 .$$

Cette condition est identique à celle du chapitre III, paragraphe 2.C.1 et devient finalement

$$(\sinh^2 a\ell) / a^2\ell^2 = (\sin^2 b\ell) / b^2\ell^2 .$$

La condition étant irréalisable, le flambage de la pièce libre aux deux extrémités est impossible lorsque $n < 2$.

2.2.2. Si l'on admet les conditions d'extrémités correspondant à la plus faible valeur de N_{cr} ,

$$m_0 = m_\ell = 0 \ , \quad t_0 = t_\ell \equiv \infty \ ,$$

la condition (50) prend la même expression qu'au paragraphe 2.C.2. du chapitre III, à savoir

$$\cosh 2\, a\ell \;=\; \cos 2\, b\ell \ .$$

La condition étant irréalisable, le flambage de la pièce libre aux deux extrémités est impossible lorsque $n < 2$.

CHAPITRE V

PIECES DE GRANDE LONGUEUR

1. CONSIDERATIONS GENERALES

La grande longueur des pièces donne lieu à la question du flambage en ondes multiples, observé dans les voies ferrées par exemple, lorsque une élévation considérable de température produit une importante dilatation, dont l'empêchement engendre une action de compression N qui atteint une valeur critique. L'utilisation de longs rails soudés sans joints, d'un kilomètre et plus, favorise ce phénomène.

J'ai traité de cette question dans la référence [1] en comparaison avec des considérations de S. Timoshenko [2]. Mais le moyen le plus rationnel et le plus pratique de considérer le flambage en ondes multiples est finalement de procéder comme au paragraphe 2 ci-après.

Il y a lieu de remarquer que n est indépendant de la longueur, quelle qu'elle soit.

Th. de Karman et M. Biot [3] ont établi la valeur critique de N à partir de l'équation (1) en considérant le cas d'une pièce de longueur infinie. Ils ont trouvé la solution du paragraphe 2.1.2 du chapitre IV, c'est-à-dire d'une pièce à extrémités libres, sous la forme

$$N_{cr} \;=\; 4\,\Pi^2 EI \,/\, L^2 \,+\, kBL^2 \,/\, 4\,\Pi^2 \ . \qquad (32)$$

Il est plausible de considérer qu'une pièce de longueur infinie soit assimilable à une pièce à extrémités libres. Pratiquement, il s'agit d'une pièce de grande longueur et on peut donc postuler qu'elle flambe suivant une simple sinusoïde, de longueur d'onde L_0 . Il est à remarquer qu'il y a d'ailleurs identité des charges critiques rapportées à la longueur d'onde dans tous les cas examinés au chapitre II et au chapitre IV, sauf au chapitre II les cas des paragraphes 3.C.1 et 3.D.1 et au chapitre IV, le cas du paragraphe 2.1.1, qui conrrespondent à des élastiques de flambage plus complexes et à des valeurs critiques plus élevées, qui sont donc à écarter.

Si la longueur d'onde de la sinusoïde est L_0 , la longueur de flambage de la pièce encastrée en 0 et libre en L est $L_0/4$, celle de la pièce articulée aux deux extrémités est $L_0/2$, celle de pièce encastrée en O et articulée en L est $3\ L_0/4$ et celle de la pièce encastrée aux deux extrémités est L_0 . Dans ce conditions, l'expression de la valeur critique de N est pour toutes ces pièces :

$$N_{cr} = 4\ \Pi^2 EI / L_0^2 + kBL_0^2 / 4\ \Pi^2 . \tag{55}$$

2. FLAMBAGE EN ONDES MULTIPLES D'UNE PIECE DE GRANDE LONGUEUR

On doit considérer physiquement que le développement de l'action de compression N se fera à partir d'une valeur modérée, sinon nulle, par l'effet de certaines circonstances. Au cours de sa croissance, N atteindra éventuellement la valeur minimale critique

$$N_{cr\ 2} = 2\sqrt{kBEI} = 8\ \Pi^2 EI/L_0^2 \tag{56}$$

d'où

$$L_{o2} = 2\ \Pi\ \sqrt[4]{EI / kB} = 2\ \Pi K . \tag{57}$$

Telle est la longueur d'onde la plus probable et le nombre d'ondes sera égal à L/L_0 . Comme le flambage tend à limiter la croissance de N , le plus souvent L_0 ne changera pas. Si cependant les circonstances étaient telles que N dépasse $N_{cr\ 2}$, la longueur d'onde augmenterait d'après la formule

$$L_0 = 2\ \Pi \sqrt{(N + \sqrt{N - 4\ kBEI}) / 2\ kB} . \tag{58}$$

D'après la formule (16), il existe une valeur de L_0 plus petite que L_{02} , mais il semble qu'il faille adopter plutôt la valeur plus grande. En effet, si N atteignait sa plus grande valeur possible

$$N_{cr} = 4\ \Pi^2 EI / L^2 + kBL^2 / 4\ \Pi^2 , \tag{58}$$

il est certain que la pièce flamberait en une seule onde $L_0 = L$.

Le produit des deux racines de l'équation aux longueurs critiques est égal à $4\ \Pi^2\ \sqrt{EI / kB} = 4\ \Pi^2 K^2$.

L'autre longueur d'onde pour la valeur critique (58) serait donc $4\ \Pi^2 K^2 / L < L$, ce qui impliquerait le flambage en un très grand nombre d'ondes assez petites et est tout à fait improbable.

Donc, le flambement aura lieu probablement avec les longueurs d'ondes de la formule (57) ou éventuellement de la formule (58) si N dépasse $N_{cr\ 2}$.

3. REMARQUE FINALE

L'équation sans dimension (3) du phénomène étudié ne se rapporte pas seulement aux pièces prismatiques placées dans un milieu résistant élastique à coefficient de réaction constant. Elle est valable pourvu que

$$n = N / \sqrt{k\,B\,EI} \tag{2}$$

soit constant. N , B , I et éventuellement E et k peuvent donc varier pourvu que la relation (2) soit constante.

Les résultats trouvés pour la pièce prismatique dans un milieu résistant uniforme restent donc valables, mais il faut tenir compte de ce que

$$K = \sqrt[4]{\frac{EI}{kB}}$$

peut varier et en tenir compte pour les variables sans dimensions $y = Y/K$ et $z = Z/K$.

Les variations peuvent être continues ou discontinues, comme par exemple dans une pièce formée de tronçons prismatiques différents, tels que $N / \sqrt{BI}$ ou $N / \sqrt{kBI}$ serait constant. Ceci pourrait s'appliquer à des membrures comprimées non contreventées.

Menton, 15 avril 1973.

VI. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] F. CAMPUS.- Pièce prismatique comprimée dans un milieu élastique. Archiwum Inzynierii Ladowey, Tom XVIII, zeszyt 3-4. Varsovie 1972.

[2] S. TIMOSHENKO.- Theory of elastic stability. 1st edition, 1936, chapter II, par.21 : "Buckling of a bar on elastic foundation", p. 108-112.

[3] Th. de KARMAN et M. BIOT.- Mathematical Methods in Engineering. 1st edition, 6th impression, 1940. Chapter VII, par. 13, p. 304-306 : "Buckling of an elastically supported bar".

*   *

*