III

Théorie du flambage par compression des pièces droites élasto-plastiques à plan moyen,

par FERDINAND CAMPUS,
Membre de la Classe.

Dans deux autres notes présentées à la Classe au cours de cette séance, j'ai établi la notion d'un seuil discontinu de plasticité pour les pièces élasto-plastiques soumises à la flexion plane simple ou composée. Ces pièces restent élastiques jusqu'à ce que le seuil de plasticité soit atteint.

Cette hypothèse a été vérifiée par des expériences de flexion simple et de traction excentrique.

Si on l'applique à la compression plus ou moins excentrique des pièces droites, on se rend compte que, pour les pièces de dimensions usuelles, le flambage se produit par une rupture d'équilibre au seuil de plasticité, car le moment tend à croître au delà de M_{cr} si N_{cr} est maintenu constant, à cause de la croissance rapide de l'excentricité due aux déformations plastiques.

La ruine est donc rapide.

Je n'ai pas procédé à des expériences particulières de vérification, délicates et longues. Je n'ai pas non plus confronté la nouvelle théorie avec les résultats connus des nombreuses expériences déjà effectuées et dignes de confiance. C'est là un très long travail qui reste à faire éventuellement.

Je crois cependant pouvoir invoquer les arguments qualitatifs suivants. A propos de ses essais de flambage effectués à l'École Polytechnique Fédérale de Zurich, feu le Professeur L. KARNER m'avait fait part verbalement du processus de plastification localisée. Tous ses barreaux d'essai avaient d'ailleurs subi élastiquement plusieurs cycles de charge et de décharge sous des valeurs atteignant les 3/4 de la charge critique. D'autre part, dans ses considérations sur le flambage inélastique, le Professeur F. R. SHANLEY considère également une sorte de rotule fictive analogue à une zone plastifiée limitée.

La théorie générale suivante est basée sur la rupture d'équilibre de la pièce comprimée au seuil de plastification.

Soit la pièce idéalement droite de longueur $OL = l$.

Les abscisses x sont comptées de 0 vers L $(0 < x < l)$.

Les ordonnées y représentent les flèches de flexion normales à l'axe de la pièce. L'effort normal axial est N ; la pièce est en outre soumise à des moments fléchissants variant suivant la loi $M(x)$.

L'équation différentielle générale de la déformée est :

$$y'' = -\frac{N}{EI} y + \frac{M(x)}{EI}$$

Elle suppose que les déformations restent assez petites, ce qui est valables pour les pièces de dimensions courantes, puisqu'on admet qu'elles restent élastiques jusqu'au seuil de plasticité, c'est-à-dire jusqu'au flambage.

La solution générale de cette équation est connue, elle est :

$$y = \sqrt{\frac{EI}{N}} \left[\left(\int \frac{M(x)}{EI} \cos \sqrt{\frac{N}{EI}} x \, dx \right) \sin \sqrt{\frac{N}{EI}} x - \left(\int M(x) \right. \right.$$

$$\left. \left. \sin \sqrt{\frac{N}{EI}} x \, dx \right) \cos \sqrt{\frac{N}{EI}} x \right] + C_1 \sin \sqrt{\frac{N}{EI}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{N}{EI}} x$$

Les conditions aux limites sont déterminées par les conditions imposées aux déplacements des extrémités 0 et L, qui résultent des liaisons existant en ces points.

Le maximum du moment est défini par

$$y''' = 0 \qquad \text{ou} \qquad y' = \frac{M'(x)}{N}$$

équation qui s'écrit :

$$\left(\int \frac{M(x)}{EI} \cos \sqrt{\frac{N}{EI}} x \, dx \right) \cos \sqrt{\frac{N}{EI}} x + \left(\int \frac{M(x)}{EI} \sin \sqrt{\frac{N}{EI}} x \, dx \right)$$

$$\sin \sqrt{\frac{N}{EI}} x + \sqrt{\frac{N}{EI}} \left(C_1 \cos \sqrt{\frac{N}{EI}} x - C_2 \sin \sqrt{\frac{N}{EI}} x \right) = \frac{M'(x)}{N}$$

Cette équation se simplifie si le maximum de $M(x)$ correspond à celui de y'', c'est-à-dire lorsque $M'(x) = 0$.

On obtient alors l'équation :

$$tg\sqrt{\frac{N}{EI}}x = \frac{C_1\sqrt{\frac{N}{EI}} + \int\frac{M(x)}{EI}\cos\sqrt{\frac{N}{EI}}x\,dx}{C_2\sqrt{\frac{N}{EI}} - \int\frac{M(x)}{EI}\sin\sqrt{\frac{N}{EI}}dx}$$

On déduit de cette équation la valeur x_m de x pour laquelle le moment est maximum, d'où

$$M_{\text{max}} = EI\,y''_{\text{max}} = -Ny_m + M(x_m)$$

Pour établir la valeur critique de N, il faut écrire :

$$M_{\text{max}} = M_{cr} = M_p\,f\left(\frac{N_{cr}}{N_p}\right)$$

d'où l'on déduit la charge critique N_{cr}.

Ces équations générales sont simples à résoudre si la fonction $M(x)$ est une constante, ou une fonction linéaire, ou bien encore si elle peut être développée en une série limitée de Fourier :

$$M(x) = \sum_{n=1}^{n=m} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x + \sum_{n=1}^{n=m} b_n\cos\frac{n\pi}{l}x$$

On trouve :

$$\sqrt{\frac{N}{EI}}y = \sum_1^m\int\frac{a_n}{EI}\sin\frac{n\pi}{l}x\cos\sqrt{\frac{N}{EI}}x\,dx$$

$$+\sum_1^m\int\frac{b_n}{EI}\cos\frac{n\pi}{l}x\cos\sqrt{\frac{N}{EI}}x\,dx - \sum_1^m\frac{a_n}{EI}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\sqrt{\frac{N}{EI}}x\,dx$$

$$-\sum_1^m\int\frac{b_n}{EI}\cos\frac{n\pi}{l}x\sin\sqrt{\frac{N}{EI}}x\,dx$$

$$+\sqrt{\frac{N}{EI}}\left(C_1\sin\sqrt{\frac{N}{EI}}x + C_2\cos\sqrt{\frac{N}{EI}}x\right)$$

L'intégration donne :

$$\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\,y = -\sum_1^m \frac{a_n}{\mathrm{EI}}\left(\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{l}+\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\right)x}{2\left(\frac{n\pi}{l}+\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\right)} + \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{l}-\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\right)x}{2\left(\frac{n\pi}{l}-\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\right)}\right)$$

$$+\sum_1^m \frac{b_n}{\mathrm{EI}}\left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{l}+\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\right)x}{2\left(\frac{n\pi}{l}-\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{l}-\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\right)x}{2\left(\frac{n\pi}{l}+\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\right)}\right)$$

$$-\sum_1^m \frac{a_n}{\mathrm{EI}}\left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{l}-\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\right)x}{2\left(\frac{n\pi}{l}-\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{l}+\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\right)x}{2\left(\frac{n\pi}{l}+\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\right)}\right)$$

$$-\sum_1^m \frac{b_n}{\mathrm{EI}}\left(\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{l}-\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\right)x}{2\left(\frac{n\pi}{l}-\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{l}+\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\right)x}{2\left(\frac{n\pi}{l}+\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\right)}\right)$$

$$+\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\left(\mathrm{C}_1 \sin\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\,x + \mathrm{C}_2 \cos\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\,x\right)$$

La condition qui détermine x_m s'écrit comme suit, après toutes réductions :

$$\left(\sin\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\,x + \cos\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\,x\right)\left(\sum_1^m a_n \sin n\frac{\pi x}{l} + \sum_1^m b_n \cos n\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$+\mathrm{N}\left(\mathrm{C}_1 \cos\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\,x - \mathrm{C}_2 \sin\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EI}}}\,x\right)$$

$$=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{N}}}\left(\sum_1^m a_n \cos n\frac{\pi x}{l} - \sum_1^m b_n \sin n\frac{\pi x}{l}\right)$$

Si $\mathrm{M}(x)$ est maximum en même temps que y, le second membre est nul. Si l'on peut déterminer x_m par cette équation, on peut déterminer

$$\mathrm{M}_{\max} = \mathrm{EI}\,y''_{\max}$$

Il est sans intérêt de pousser plus loin ces développements ; ces équations pourront être résolues numériquement dans des cas complexes.

Pour rendre la théorie plus concrète, nous l'appliquerons à quelques cas simples usuels.

A. La force normale N a une excentricité constante a par rapport à l'axe, $M_x = -Na$, la pièce est articulée aux deux extrémités. Le moment maximum se produit pour

$$x = \frac{l}{2} \text{ et vaut } M_{\max} = -\frac{Na}{\cos\sqrt{\dfrac{N}{EI}}\dfrac{l}{2}}$$

La charge critique est donc donnée par

$$\frac{N_{cr}\,a}{\cos\sqrt{\dfrac{N_{cr}}{EI}}\dfrac{l}{2}} = M_p\, f\left(\frac{N_{cr}}{N_p}\right)$$

ou

$$\frac{N_{cr}}{N_p} = \frac{M_p}{N_p a}\, f\left(\frac{N_{cr}}{N_p}\right) \cos\sqrt{\frac{N_{cr}}{N_p}}\sqrt{\frac{N_p\, l^2}{4\ EI}}$$

Pour des sections de forme donnée, $\dfrac{M_p}{N_p} = \dfrac{I}{v\,\Omega\,a}$ et $f\left(\dfrac{N_{cr}}{N_p}\right)$ sont connues pour toutes valeurs de $\dfrac{N_{cr}}{N_p}$. On peut dès lors dresser des tables numériques ou des diagrammes à partir de valeurs données de $\dfrac{N_{cr}}{N_p}$; on détermine

$$\frac{N_p\, l^2}{4\ EI} = \frac{\sigma_e}{E}\,\frac{l^2}{4r^2}$$

r désignant le rayon d'inertie central $r = \dfrac{I}{\Omega}$.

Pour une section rectangulaire bh, on a

$$\frac{N_{cr}}{N_p} = \frac{h}{4a}\left(1 - \frac{N_{cr}^2}{N_p^2}\right) \cos\sqrt{\frac{N_{cr}}{N_p}}\sqrt{\frac{\sigma_e}{E}}\,\frac{l}{2r}$$

Les conditions de similitude sont en général la similitude géométrique, l'égalité de $\frac{I}{v\Omega a}$ ou $\frac{r^2}{av}$, de $\frac{\sigma_e}{E}$ et de $\frac{l}{2r}$

On remarque que $\frac{N_{cr}}{N_p}$ ne peut, pour un élancement donné $\frac{l}{r}$, atteindre une limite supérieure

$$\frac{N_{cr}}{N_p} = \frac{\pi^2 EI}{l^2 N_p} = \frac{N_E}{N_p} = \frac{\pi^2 E r^2}{l^2 \sigma_e}$$

que lorsque l'excentricité a est nulle.

N_E est la charge critique d'Euler des pièces idéalement droites et chargées d'une manière idéalement axiale.

Lorsque a n'est pas nul, le flambage se produit lorsque $\frac{N_{cr}}{N_p}$ atteint la valeur correspondant à cette valeur de a.

Si le seuil de plastification $\frac{N_{cr}}{N_p}$ est atteint, les déformations rapidement croissantes produisent, si l'effort normal est constant, une rupture d'équilibre et l'effondrement de la pièce.

L'autre valeur limite de $\frac{N_{cr}}{N_p}$ est 1, lorsque $M_{cr} = 0$, ce qui correspond à la compression simple des pièces courtes. On peut ainsi constater un passage continu par plastification entre deux limites correspondant à un élancement maximum et un élancement nul.

Pour la pièce idéalement droite et chargée d'une manière idéale suivant l'axe, la courbe de $\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_e}$ en fonction de $\frac{l}{r}$

a la forme classique de la courbe d'Euler suivie de la parallèle à l'axe des abscisses d'ordonnée 1 dès que

$$l < \pi r \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}}$$

Pour toute excentricité non nulle, la courbe de $\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_e}$ en fonction de $\frac{l}{r}$ est inférieure à la courbe limite relative à l'excentricité nulle et d'autant plus basse que l'excentricité est plus grande. Cette courbe est continue et son ordonnée pour $l = 0$ est plus petite que 1. L'écart par rapport à l'unité est très rapidement croissant dans le domaine des faibles excentricités relatives, ainsi qu'il résulte de ma note sur la plastification de l'acier doux en flexion plane composée.

B. La force $\frac{N}{\cos\theta}$ est oblique et

$$M(x) = -N(a - x\operatorname{tg}\theta)$$

L'excentricité au droit de 0 est a, au droit de L elle est

$$b = a - l\operatorname{tg}\theta$$

La pièce est libre de tourner aux deux extrémités.

On trouve pour le moment maximum

$$M_{\max} = -\frac{N\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\sqrt{\frac{N}{EI}}\,l}}{\sin\sqrt{\frac{N}{EI}}\,l}$$

Il en résulte que

$$\frac{N_{cr}}{N_p} = \frac{M_p f\left(\frac{N_{cr}}{N_p}\right)}{N_p\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\sqrt{\frac{N_{cr}}{EI}}\,l}}\sin\sqrt{\frac{N_{cr}}{EI}}\,l$$

Il est déjà compliqué de commenter ce cas pourtant assez simple.

Des cas particuliers sont plus suggestifs.

Si $b = 0,\ \frac{N_{cr}}{N_p} = \frac{M_p}{N_p a} f\left(\frac{N_{cr}}{N_p}\right)\sin\sqrt{\frac{N_{cr}}{N_p}}\sqrt{\frac{\sigma_e}{E}}\frac{l}{r}$

Si $b = -a,\ \frac{N_{cr}}{N_p} = \frac{r^2 f\left(\frac{N_{cr}}{N_p}\right)}{2va\sqrt{2\left(1 + \cos\sqrt{\frac{N_{cr}}{EI}}\,l\right)}}\sin\sqrt{\frac{N_{cr}}{N_p}}\sqrt{\frac{\sigma_e}{E}}\frac{l}{r}$

Si $\dfrac{N_{cr}}{N_p}$ est assez petit

$$\frac{N_{cr}}{N_p} = \sim \frac{r^2 f\left(\dfrac{N_{cr}}{N_p}\right)}{4av} \sin \sqrt{\frac{N_{cr}}{N_p}} \sqrt{\frac{\sigma_e}{E}} \frac{l}{r}$$

Dans tous ces cas, si a atteint 0, on voit reparaître la charge critique d'Euler.

C. La pièce articulée aux deux extrémités et chargée de la force normale N est soumise en outre à des moments fléchissants

$$Mx = - M \sin \frac{\pi x}{l}$$

On trouve

$$M_{\max} = - \frac{\pi^2 EI\, M}{l^2\left(\dfrac{\pi^2 EI}{l^2} - N\right)}$$

Si l'on suppose que $M = N\, e$ résulte d'une excentricité variable de l'axe de la pièce suivant la loi $e \sin \dfrac{\pi x}{l}$, on a

$$\frac{N_{cr}}{N_p} = \frac{r^2}{ve} f\left(\frac{N_{cr}}{N_p}\right)\left(1 - \frac{N_{cr}\, l^2}{\pi^2 EI}\right)$$

Si e tend vers 0, on retrouve pour la pièce idéalement droite la charge critique d'Euler pour les pièces longues et la charge critique de plasticité pour les pièces courtes.

D. On peut regarder les cas A, B et C comme des images trop simples et régulières d'imperfections possibles de l'axe de la pièce droite et de l'alignement de la force de compression.

Cependant, pour cet alignement, les cas A et B peuvent avoir un caractère plausible.

Pour les imperfections de l'axe, on pourrait envisager la loi

$$M(x) = - M \sin \frac{n\pi x}{l} = - Ne \sin \frac{n\pi x}{l}$$

n étant un nombre assez grand.

On trouve alors la solution

$$\frac{N_{cr}}{N_p} = \frac{r^2}{ve}\, f\left(\frac{N_{cr}}{ve}\right)\left(1 - \frac{N_{cr}\, l^2}{n^2\pi^2 EI}\right)$$

Elle n'est toutefois valable que si $N_{cr} < N_E$, car pour la valeur $N = \dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$, il s'ajoute à la flèche

$$y = \frac{Ne \sin n \dfrac{\pi x}{l}}{\dfrac{n^2\pi^2}{EI\ l^2} - N}$$

un terme indéterminé $C \sin \sqrt{\dfrac{N}{EI}}\, x$ qui correspond au flambage d'Euler en demi-onde (première charge critique).

Pour les valeurs non nulles de e, les courbes de $\dfrac{N_{cr}}{N_p}$ en fonction de $\dfrac{l}{r}$ seront situées sous la limite correspondant au cas idéal $e = 0$ et ne seront valables que jusqu'au point où elles coupent la courbe d'Euler.

Elles aboutiront toutes à la valeur 1 pour $l = 0$.

Elles ont donc l'allure des courbes expérimentales relevées sur les pièces droites prismatiques réelles chargées axialement.