Calcul numérique des élastiques de flexion

Partant de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

on établit facilement les relations :

$$y'_n = y'_{n-1} + \left(\frac{M_{n-1}}{I_{n-1}} + \frac{M_n}{I_n}\right)\frac{dx}{2E}$$

$$y_n = y_{n-1} + y'_{n-1}\,dx + \left(\frac{M_{n-1}}{I_{n-1}} + \frac{M_n}{I_n}\right)\frac{dx^2}{4E}$$

Elles permettent de calculer de proche en proche les ordonnées de l'élastique à partir d'un point origine 0, si l'on y connaît les valeurs de y_0 et y'_0, par exemple nulles toutes deux en cas d'encastrement parfait. En cas d'appui simple en 0, si y_0 est connu, par exemple $y_0 = 0$, mais que y'_0 ne l'est pas, ce paramètre est entraîné dans les calculs et il est déterminé par une équation linéaire résultant de la condition d'appui à l'autre extrémité d'abscisse x_n, par exemple $y_n = 0$, dans le cas d'un deuxième appui simple d'extrémité.

En principe, le calcul d'une élastique, par n'importe quelle méthode, implique que la distribution des moments soit connue, compte tenu des liaisons. Si celles-ci sont hyperstatiques, les calculs des actions de liaison doivent donc précéder le calcul de l'élastique.

Cela n'est pas indispensable pour l'application des formules précédentes, les M_{n-1} et les M_n pouvant être des fonctions linéaires des actions de liaisons hyperstatiques. Les valeurs de y et de y' imposées par les liaisons donneront un nombre d'équations linéaires égal à celui des inconnues hyperstatiques.

Le but de la présente note n'est cependant pas de proposer une méthode de plus pour le calcul des systèmes hyperstatiques. La remarque précédente n'a d'autre objet que de montrer les possibilités de la méthode. Mais on se bornera ici à l'examen critique de son application au calcul proprement dit des élastiques.

Si on la compare à la méthode classique de Mohr, semi-graphique, on reconnaît que celle-ci est rigoureuse théoriquement, mais que son application entraîne naturellement des erreurs accidentelles.

L'application des formules proposées entraîne une erreur systématique liée à la valeur finie de dx et décroissant avec elle. Elle permet ainsi de calculer facilement et très rapidement des valeurs peu approchées, cependant qu'un calcul plus détaillé et plus long permet d'obtenir des résultats d'une assez grande exactitude. Les comparaisons ci-après à des élastiques calculées par des intégrations exactes sont convaincantes à ce sujet.

On considère en premier lieu le cas d'une pièce prismatique encastrée en 0 et libre à son extrémité N, de portée $x_n = l$ et chargée en N d'une force F normale à la pièce. Dans ce cas

$$M = F(l - x),\; y_n = \frac{Fl^3}{3EI},\; y'_n = \frac{Fl^2}{2EI}$$

Si l'on considère un seul point, $n = 1$, $dx = l$, on obtient $y_n = Fl^3/4$. L'écart relatif est — 0,25. Pour y'_n, on trouve la valeur exacte.

Si l'on prend deux points, $dx = l/2$, on obtient $y_n = Fl^3/3{,}2$; l'écart relatif est — 0,2/9,6 = — 0,021.

La valeur de y'_n est exacte.

Par quatre points, $dx = l/4$, on obtient $y_n = 84\,Fl^3/256$. L'écart relatif est — 4/768 = — 0,0052. La valeur de y'_n est exacte.

Le calcul effectué avec $n = 10$, $dx = l/10$, donne les résultats suivants, qui sont comparés aux valeurs exactes de y et de y' aux dix points considérés. On se rend compte que l'exactitude est très satisfaisante et qu'elle ne pourrait certes être meilleure par la méthode semi-graphique de Mohr.

	Valeurs de $\frac{EIy}{Fl^3}$		Valeurs de $\frac{EIy'}{Fl^2}$
	Calculées	Exactes	Calculées = Exactes
x_1	$\frac{19}{4000} = 0{,}00475$	0,004833	$\frac{19}{200} = 0{,}095$
x_2	$\frac{74}{4000} = 0{,}0185$	0,018667	$\frac{36}{200} = 0{,}18$
x_3	$\frac{161}{4000} = 0{,}04025$	0,0405	$\frac{51}{200} = 0{,}255$
x_4	$\frac{276}{4000} = 0{,}069$	0,06933	$\frac{64}{200} = 0{,}32$
x_5	$\frac{415}{4000} = 0{,}10375$	0,10417	$\frac{75}{200} = 0{,}375$
x_6	$\frac{574}{4000} = 0{,}1435$	0,144	$\frac{84}{200} = 0{,}42$
x_7	$\frac{749}{4000} = 0{,}18725$	0,18783	$\frac{91}{200} = 0{,}455$
x_8	$\frac{936}{4000} = 0{,}234$	0,2347	$\frac{96}{200} = 0{,}48$
x_9	$\frac{1131}{4000} = 0{,}28275$	0,2835	$\frac{99}{200} = 0{,}495$
$x_{10} = 1$	$\frac{1330}{4000} = 0{,}3325$	0,3333	$\frac{100}{200} = 0{,}5$

On remarquera que certaines des valeurs dites exactes sont incommensurables. Tous les écarts relatifs sont par défaut et très faibles. Pour x_{10}, c'est 10/12000 = — 0,000833. Les valeurs de y' sont toutes exactes. La précision obtenue est supérieure à celle demandée en pratique.

Le cas examiné peut paraître particulier parce que le diagramme des moments est rectiligne. On examinera aussi pour cette raison deux cas de diagrammes courbes des moments fléchissants, dont les courbures sont de sens contraires.

La pièce prismatique encastrée à son extrémité 0 (prise comme origine) et chargée sur toute sa longueur $l = n\,dx$ d'une charge uniformément répartie p par unité de longueur a un diagramme de moments fléchissants d'équation

$$M = \frac{p(l-x)^2}{2}$$

A l'extrémité libre N :

$$y_n = \frac{pl^4}{8EI} \qquad y'_n = \frac{pl^3}{6EI}$$

Le calcul par les formules proposées donne :

	$n = 1$	2	5	exact
$\frac{EIy_n}{pl^4} =$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{EIy'_n}{pl^3} =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{17}{100} = 0{,}17$	0,1667

Enfin, le cas de la poutre sur deux appuis simples, chargée sur toute sa longueur $l = 2\,n\,dx$ d'une charge uniformément répartie p par unité de longueur, donne les résultats suivants. On dispose l'origine 0 au sommet de l'élastique, où $y_0 = 0$ et $y'_0 = 0$. L'équation de la courbe des moments est

$$M = \frac{p}{2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)$$

En prenant $n = 5$, on trouve pour la flèche :

$$y_5 = \frac{1025}{80000}\,pl^4$$

et pour y'_5 la valeur :

$$\frac{165\,pl^3}{4000}$$

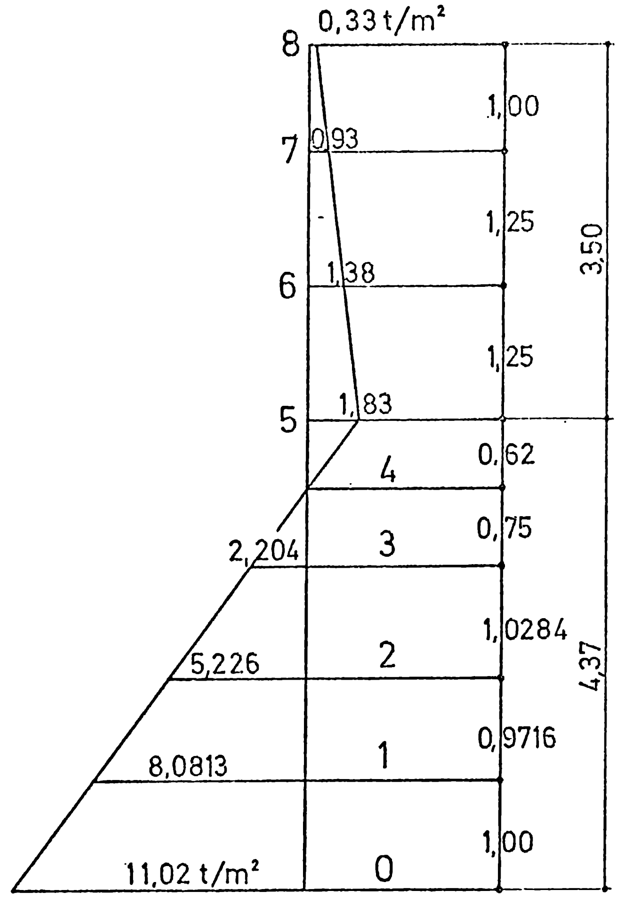
Les valeurs exactes sont :

$$f = \frac{5}{384}\,pl^4 \quad \text{et} \quad y'_n = \frac{pl^3}{24EI}$$

Les écarts relatifs sont de — 0,016 pour la flèche et de — 0,01 pour y'_N.

Ces exemples permettent de croire que lorsque le calcul analytique n'est pas possible, le calcul numérique d'une élastique par la méthode proposée donne des résultats d'une approximation très suffisante lorsque l'on adopte des pas dx de l'ordre de $l/5$ à $l/10$. Dans les cas pratiques, la courbe de M possède généralement des discontinuités (ligne polygonale). Les variations de I sont aussi souvent discontinues. Les points de discontinuité de la courbe de M/EI donnent lieu au choix de valeurs différentes de dx dans les divers intervalles. De toutes les opérations, le calcul proprement dit de l'élastique par la méthode proposée, c'est-à-dire des valeurs de y et de y', est certes la plus facile, beaucoup plus, en général, que le calcul des M/EI.

A titre d'application démonstrative et pour comparer les résultats avec ceux obtenus par la méthode usuelle semi-graphique de Mohr, la méthode sera appliquée au cas d'une paroi de palplanches n'ayant d'autre appui que l'encastrement dans le sol. L'exemple est emprunté au « Calcul pratique de rideaux de palplanches » édité en 1962 par Arbed-Belval (Luxembourg). Il figure dans cet ouvrage aux pages 35, 36 et 37. La figure reproduit le diagramme des pressions effectives par unité de largeur sur le rideau de palplanches.



Dans la référence citée, le diagramme des moments fléchissants est établi à partir de ce diagramme des pressions par la méthode semi-graphique de Mohr. A cet effet, le diagramme des pressions est divisé en seize trapèzes et triangles partiels, dont les aires sont calculées et représentées par des segments successifs alignés sur une droite formant polygone des forces fictives. Le funiculaire de ces forces est ensuite tracé sur des normales à l'axe du diagramme des pressions passant par les centres de gravité respectifs des aires partielles.

Pour les besoins du présent travail, les moments fléchissants ont été calculés numériquement à partir du diagramme des pressions effectives. Les opérations ont été effectuées avec la grande précision permise par une petite calculatrice électronique de table à douze chiffres. Les résultats obtenus rapidement sont les suivants, en tonnes poids × mètres

$$M_8 = 0, \quad M_7 = 0{,}265, \quad M_6 = 1{,}89625,$$
$$M_5 = 5{,}68375, \quad M_4 = 8{,}44783, \quad M_3 = 11{,}72668,$$
$$M_{max} = M_2 = 13{,}94268$$
$$M_1 = 11{,}0397 \qquad M_0 = 0{,}04475$$

La valeur du moment maximal citée dans la référence est 13,85. L'écart relatif en moins par rapport à la valeur calculée ci-dessus est — 0,664 %. Ce faible écart est tout à l'honneur du soin de l'application de la méthode semi-graphique de Mohr dans la référence.

Au moyen des valeurs des moments fléchissants en neuf points, il est possible de calculer simplement l'élastique par la méthode proposée. On part du point 0 comme dans la référence citée, en y admettant les mêmes conditions initiales, à savoir $y_0 = 0$ et $y'_0 = 0$, car il s'agit simplement de comparer les résultats de calculs effectués suivant les mêmes conditions, sans discuter celles-ci. La liste des calculs effectués à la machine digitale de table est reproduite ci-après à la seule fin de montrer le mécanisme systématique de ces calculs, correspondant au but pratique de cet article.

Dans la référence citée, on considère des palplanches métalliques dont la valeur de I par mètre de largeur est $7{,}1 \times 10^{-5}$ m⁴. Comme E = 2,1 × 10⁷ tonnes-poids par m², EI = 1491 tonnes-poids × m² et

$$y_8 = \frac{256{,}75476}{1491} = 0{,}1722 \text{ m}$$

$$EIy'_0 = 0 \qquad EIy_0 = 0$$

$$EIy'_1 \quad \frac{0{,}04475 + 11{,}0397}{2} = 5{,}54223$$

$$EIy_1 \quad \frac{0{,}04475 + 11{,}0397}{4} = 2{,}71112$$

$$EIy'_2 = 5{,}54223 + \frac{11{,}0397 + 13{,}94268}{2} \times 0{,}9716 = 17{,}67867$$

$$EIy_2 = 2{,}71112 + 5{,}54223 \times 0{,}9716 + \frac{11{,}0397 + 13{,}94268}{4} \times \overline{0{,}9716}^2 = 13{,}99183$$

$$EIy'_3 = 17{,}67867 + \frac{13{,}94260 + 11{,}72669}{2} \times 1{,}0284 = 30{,}87785$$

$$EIy_3 = 13{,}99183 + 17{,}67867 \times 1{,}0284 + \frac{13{,}94268 + 11{,}72668}{4} \times \overline{1{,}0284}^2 = 39{,}80056$$

$$EIy'_4 = 30{,}87785 + \frac{11{,}72668 + 8{,}44783}{2} \times 0{,}75 = 38{,}44329$$

$$EIy_4 = 39{,}80056 + 30{,}87785 \times 0{,}75 + \frac{11{,}72668 + 8{,}44783}{4} \times 0{,}\overline{75}^2 = 65{,}79599$$

$$EIy'_5 = 38{,}44329 + \frac{0{,}44783 + 5{,}68375}{2} \times 0{,}62 = 42{,}82408$$

$$EIy_5 = 65{,}79599 + 38{,}44329 \times 0{,}62 + \frac{8{,}44783 + 5{,}68375}{4} \times 0{,}\overline{62}^2 = 90{,}98088$$

$$EIy'_6 = 42{,}82400 + \frac{5{,}68375 + 1{,}89625}{2} \times 1{,}25 = 47{,}56158$$

$$EIy_6 = 90{,}98088 + 42{,}82408 \times 1{,}25 + \frac{5{,}68375 + 1{,}89625}{4} \times \overline{1{,}25}^2 = 147{,}47992$$

$$EIy'_7 = 47{,}56158 + \frac{1{,}89625 + 0{,}265}{2} \times 1{,}25 = 48{,}91237$$

$$EIy_7 = 147{,}47992 + 47{,}56158 \times 1{,}25 + \frac{1{,}89625 + 0{,}265}{4} \times \overline{1{,}25}^2 = 207{,}77614$$

$$EIy'_8 = 48{,}91237 + \frac{0{,}265}{2} = 49{,}04487$$

$$EIy_8 = 207{,}77614 + 48{,}91237 + \frac{0{,}265}{4} = 256{,}75476$$

Dans la référence citée, par une application à seize composantes aussi de la méthode semi-graphique de Mohr au diagramme polygonal des moments fléchissants, la valeur obtenue pour $y_0 = 0{,}175$ m. L'écart relatif est $+ 1{,}63$ % par rapport à la valeur inférieure. Une incertitude de cet ordre est acceptable pour un tel calcul. Il ne semble donc pas qu'un fractionnement plus grand du diagramme des pressions soit nécessaire. On remarquera seulement dans l'application de la méthode numérique la nécessité, pour déterminer à bon escient les subdivisions, de tenir compte des points particuliers tels que moment nul, moment maximal ou minimal; il faut donc les déterminer, ce qui se fait sans difficulté.

Le calcul numérique peut aussi être fait à la règle à calcul, avec une moindre exactitude toutefois. L'expérience a démontré que l'écart n'est pourtant pas très grand. Mais l'inconvénient est celui du grand nombre d'additions à faire. Il peut être pallié par l'emploi d'une additionneuse de poche.

La méthode est passible de la même critique que toutes les méthodes d'intégration numérique ou graphique, donc aussi de la méthode classique de Mohr : l'entraînement et la superposition des erreurs par le calcul de proche en proche. L'emploi d'une petite machine à calculer, que l'on trouve probablement dans les moindres bureaux actuellement, peut réduire beaucoup les risques d'erreurs en facilitant les calculs et en les systématisant. Dans ces conditions, la méthode numérique paraît plus sûre que la méthode semi-graphique. Elle est aussi plus rapide.

Ce qui précède est certes l'application la plus simple de la publication de l'auteur intitulée « Résolution aux différences finies de quelques problèmes de mécanique », parue dans le numéro 23 du 9 juin 1966 de la « Schweizerische Bauzeitung » (Revue Polytechnique Suisse), consacré à la mémoire du regretté Professeur Henry Favre. On y trouvera notamment l'exposé du calcul de la flexion des pièces droites soumises à une action longitudinale, en tenant compte des effets de la flexion. Ceci permet notamment le calcul numérique des charges critiques, par exemple pour les pièces à moment d'inertie variable. Ces valeurs sont aussi obtenues d'une manière plus rapide et plus exacte que par la méthode semi-graphique de Vianello.

Ferdinand Campus,
Professeur émérite à l'Université de Liège.