

**Plastification de l'acier doux en flexion plane simple,**

par FERDINAND CAMPUS,  
Membre de la Classe.

Dans une note que j'ai présentée à l'Académie lors de sa séance du 3 mars 1962, Monsieur N. M. DEHOUSSE, agrégé à la Faculté des Sciences appliquées de l'Université de Liège [1], a signalé un phénomène de surélasticité en flexion de barreaux d'acier doux, constituant une anomalie par rapport à la théorie généralement admise du comportement élasto-plastique de tels barreaux en flexion plane simple.

Il rappelle à ce propos cette théorie classique, que l'on peut schématiser par trois diagrammes de tensions et de déformations :

a) Au stade initial, la tension maximum aux fibres extrêmes atteint la tension d'étirage  $\sigma_e$  (ou limite apparente d'élasticité), figure 1a.

Le moment de flexion correspondant est  $M_e = \frac{I}{\nu} \sigma_e$ .

b) Pendant la phase élasto-plastique, les tensions maxima aux fibres extrêmes restent égales à  $\sigma_e$  et règnent sur une hauteur de plus en plus grande vers l'intérieur de la section à mesure que le moment de flexion devient plus grand, figure 1b. Ce moment est supérieur à  $M_e$  ; on désigne par  $M_\epsilon$  sa valeur correspondant à une dilatation proportionnelle  $\epsilon > \frac{\sigma_e}{E}$ .

c) La valeur limite du moment  $M_\epsilon$  est le moment de plastification totale  $M_p$ , vers laquelle  $M_\epsilon$  tend asymptotiquement lorsque  $\epsilon$  croît vers l'infini ; elle correspond au diagramme des tensions en double rectangle de la figure 1c.

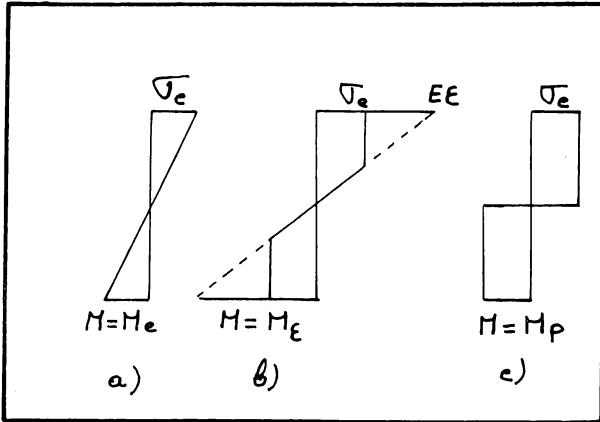


FIG. 1.

La valeur de  $M_p$  est  $\frac{\Omega d}{2} \sigma_e$ ,  $\Omega$  étant l'aire de la section transversale et  $d$  la distance dans le plan de flexion plane simple des deux moitiés en surface de cette section, séparées par une droite normale au plan de flexion.

Cette théorie étant classique, M. N. M. DEHOUSSE n'a trouvé dans ses expériences aucune raison de la mettre généralement en doute, opinion que je partageais en présentant sa note. Les anomalies signalées étaient cependant inexplicables.

Elles ont été expliquées inintentionnellement à la suite d'expériences que j'ai entreprises récemment dans un but tout à fait différent et qui ont donné sous ce rapport des résultats entièrement négatifs.

Dans deux notes présentées à l'Académie des Sciences de Paris, le 28 novembre 1955 et le 13 février 1956 [2] M. K. GAMSKI et moi-même avons établi l'existence d'un phénomène d'abaissement de la limite apparente d'élasticité des aciers à la température ordinaire sous l'effet de sollicitations de traction de longue

durée, soit à tension constante (fluage), soit à déformation constante (relaxation).

Ce phénomène, qui se prolongeait éventuellement pendant des durées de plus de 500 heures, pouvait être répété jusqu'à épuisement complet du palier d'étrépage. La proportion d'abaissement de la limite apparente d'élasticité était, selon la nature des aciers, de l'ordre de 10 à 20 %.

Dans une communication au Symposium sur la plasticité organisé en 1956 à Varenna en l'honneur du Professeur Arturo DANUSSO [3] Membre de l'Institut Lombard des Sciences et des Lettres et de l'Académie des Sciences de Turin, j'ai, d'après ce qui précède, été conduit à considérer la possibilité d'effets de la durée d'application des charges sur les phénomènes plastiques.

La question était de savoir si un abaissement du seuil de plasticité, analogue à celui établi pour la sollicitation homogène de traction, pouvait se produire dans d'autres cas de sollicitation non homogènes, par exemple en flexion. C'est le cas apparemment le plus simple et on peut le concevoir de la manière suivante, en admettant la validité de la théorie classique rappelée plus haut.

Sous l'action d'un moment constant  $M_e$ , la section subirait initialement des tensions maxima  $\sigma_e$  et des dilatations maxima correspondantes  $\epsilon$ . Un abaissement de  $\sigma_e$  à  $\sigma'_e$  exigerait une modification du diagramme des tensions entraînant une augmentation des déformations à  $\epsilon' > \epsilon$ , figure 2a.

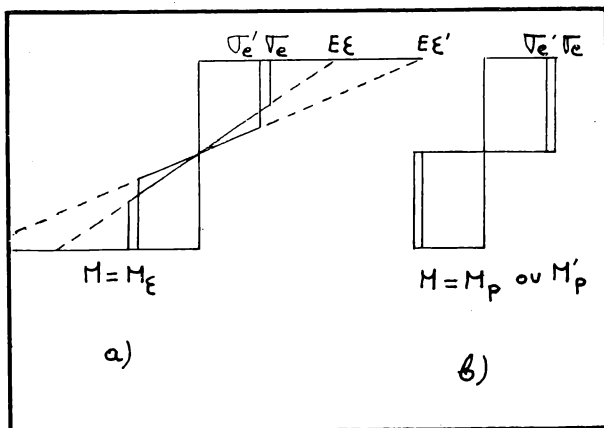


FIG. 2.

Le passage à la limite conduirait à un moment de plastification  $M'_p < M_p$ , figure 2b, ce qui pourrait entraîner une diminution de la réserve de sécurité permanente des constructions en acier.

Un programme d'expériences systématiques a été établi sur cette base en recourant, pour la simplicité, à des barreaux de section rectangulaire.

Ci-après le rappel des formules élémentaires pour ce cas :

$$M_e = \frac{bh^2}{6} \sigma_e ;$$

$$M\epsilon = \frac{bh^2}{4} \sigma_e \left( 1 - \frac{\sigma_e^2}{3E^2\epsilon^2} \right) ;$$

$$M_p = \frac{bh^2}{4} \sigma_e = 1,5 M_e$$

Si, le moment  $M\epsilon$  restant constant, la limite de plastification  $\sigma_e$  diminuait à  $\sigma'_e$  dans le temps, la dilatation deviendrait  $\epsilon'$  telle que

$$\left( \frac{\epsilon}{\epsilon'} \right)^2 = \left( \frac{\sigma_e}{\sigma'_e} \right)^3 - \frac{3E^2\epsilon^2(\sigma_e - \sigma'_e)}{\sigma'_e{}^3}$$

Or, en aucun cas les expériences n'ont montré de déformations croissantes avec le temps sous l'effet d'un moment constant compris entre  $M_e$  et  $M_p$ . Dans une expérience, après avoir atteint le moment de plastification, on a abaissé le moment d'environ 5 % en permanence. Il s'est produit dans le temps quelques fluctuations très faibles, d'ailleurs rapidement amorties et contradictoires, ne permettant pas de conclure à autre chose que des ajustements internes.

Les phénomènes constatés ont conduit à penser que les observations de la note de M. DEHOUSSE ne correspondaient pas nécessairement à des anomalies. Des expériences de mise en charge répétées ont alors été faites systématiquement dans l'intervalle  $M_e, M_p$ . Il est apparu sans exceptions que les barreaux restaient élastiques jusqu'à la valeur  $M_p$ , puis se plastifiaient sous moment constant en subissant des déformations rapidement croissantes. Il sera rendu compte en détail de ces expériences dans une autre publication plus développée. Mais il est donc établi que les fibres extrêmes supportent sans plastification des tensions supérieures à  $\sigma_e$  et qui, dans le cas de la section rectangulaire, atteignent  $1,5\sigma_e$ .

Dans ces expériences, comme dans celles de M. DEHOUSSE, les barreaux d'acier, façonnés avec précision et normalisés, répondaient d'une manière aussi exacte que possible aux conditions théoriques. Les barreaux de M. DEHOUSSE, de section rectangulaire peu oblongue, étaient fléchis dans le plan de la plus petite dimension ; les miens étaient carrés.

Les développements qui suivent sont uniquement applicables à de tels barreaux prismatiques homogènes et isotropes, sans tensions initiales, de formes géométriques exactes et dont la section transversale est telle que, en raison de leurs connections géométriques, toutes leurs parties résistent où cèdent ensemble et non localement et isolément. De telles sections pourraient être appelées cohérentes. Ce sont par exemple le carré, le cercle plein ou peu évidé, le rectangle, le losange et l'ellipse peu oblongs, etc...

Des expériences sont en cours sur d'autres formes de profils ne satisfaisant à aucune des conditions précédentes, telles que les poutrelles laminées. Il en sera rendu compte ultérieurement. D'ores et déjà il est permis de croire que la plastification ne se produit pas selon l'hypothèse de la théorie classique et que, pour les sections très évidées, telles que celles en double té, elle est perturbée par des phénomènes secondaires de déformations locales par flambage, déversement ou torsion.

D'après cela, le processus de plastification représenté par les diagrammes de la figure 1 n'est pas réel et doit être remplacé par celui qui correspond aux diagrammes de la figure 3.

a) Dans la phase initiale, le moment croît de la valeur  $M_e$  à la valeur  $M_p$  sans plastification ; les déformations restent réversibles, figure 3a.

b) Lorsque la valeur limite  $M_p$  est atteinte, les déformations  $\epsilon$  croissent rapidement sous moment constant. L'équilibre exige que les tensions maxima deviennent  $\sigma'_e$ , telles que

$$\sigma_e < \sigma'_e < \frac{M_p v}{I}$$

figure 3b.

c) L'état limite de déformation est celui de la figure 3c, iden-

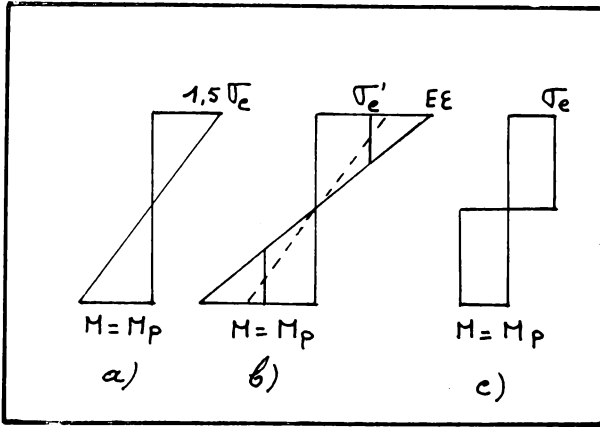


FIG. 3.

tique à celui de la figure 1c et qui implique comme lui des déformations infinies, c'est-à-dire qu'il ne peut être atteint.

Il est curieux d'observer en passant les voies imprévues de la recherche. La présomption d'un abaissement de la tension limite de plasticité, sur la base d'une théorie qui n'était après tout qu'une hypothèse généralement admise, aboutit au résultat inverse d'une augmentation considérable de la tension limite de plasticité et invalide du même coup la théorie de départ.

Les conséquences et les explications du phénomène relèvent de la théorie modifiée suivante, en considérant pour la simplicité une section rectangulaire.

Lorsque  $M$  est compris entre  $M_e$  et  $M_p$ ,

$$\sigma_{\max} = \frac{6M}{bh^2}, \quad \epsilon_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{E} > \frac{\sigma_e}{E}$$

Lorsque  $M$  atteint la valeur limite  $M_p$ ,  $\epsilon$  atteint et peut dépasser  $1,5 \frac{\sigma_e}{E}$ . Pour une telle valeur de  $\epsilon$ , la tension maximum devient  $\sigma'_e$  (figure 3b) telle que

$$\epsilon = \frac{\sigma'_e}{E \sqrt{3 \left(1 - \frac{\sigma_e}{\sigma'_e}\right)}}$$

de telle sorte que  $\sigma'_e \equiv \sigma_e$  lorsque  $\epsilon \equiv \infty$ .

La figure 4 représente la variation de  $\frac{\sigma'_e}{\sigma_e}$  en fonction de  $\frac{E\epsilon}{\sigma_e}$ .

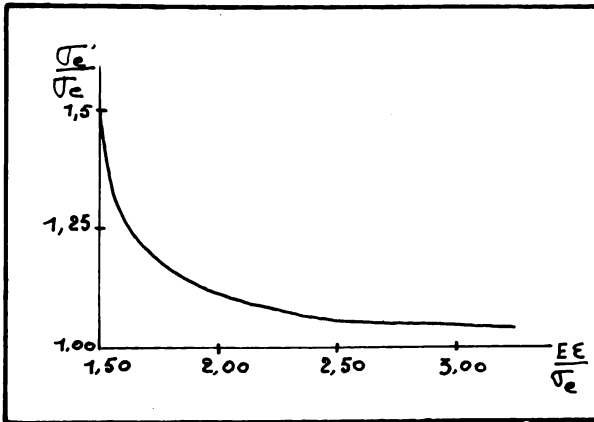


FIG. 4.

Dès que des déformations permanentes se sont produites du fait de la plastification, il subsiste des déformations résiduelles lorsque la sollicitation est supprimée.

La dilatation résiduelle aux fibres extrêmes de la section rectangulaire est, d'après la théorie ancienne classique

$$\epsilon_r = \epsilon - \frac{3}{2} \frac{\sigma_e}{E} \left( 1 - \frac{\sigma_e^2}{3E^2\epsilon^2} \right)$$

D'après la théorie modifiée

$$\epsilon_r = \epsilon - 1,5 \frac{\sigma_e}{E}$$

La figure 5 représente la variation de  $\frac{\epsilon_r}{\epsilon}$  en fonction de  $\frac{E\epsilon}{\sigma_e}$  d'après les deux formules.

La figure 6 montre la variation de  $\frac{6M}{bh^2\sigma_e}$  en fonction de  $\frac{E\epsilon}{\sigma_e}$  suivant les théories classique et modifiée.

La figure 5 est particulièrement probante pour la signification des expériences.

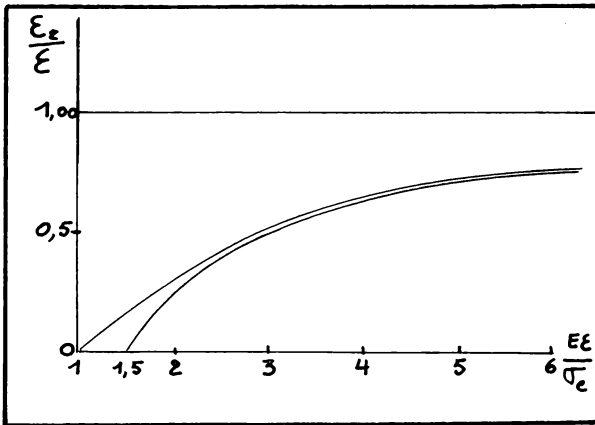


FIG. 5.

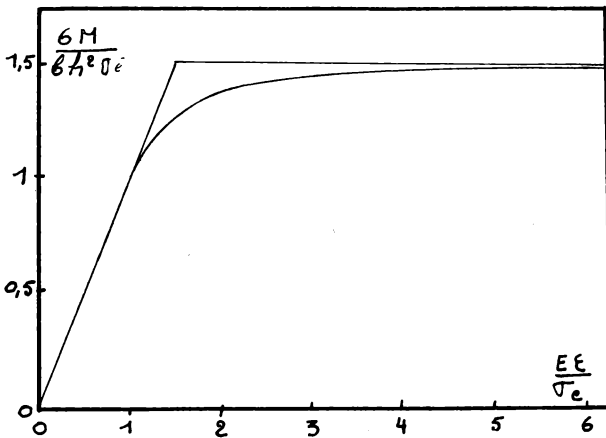


FIG. 6.

Celles-ci établissent en effet qu'il ne se produit pas de déformations résiduelles avant que le moment fléchissant ait atteint la valeur limite  $M_p$ .

Par conséquent, la plastification n'est pas continue comme le suppose la théorie classique ; il n'existe pas de phase élasto-plastique lorsque le moment fléchissant varie de  $M_e$  à  $M_p$ .

La plastification commence d'une manière discontinue lorsque



M atteint la valeur  $M_p$  et elle progresse ensuite sous moment constant  $M_p$ , sans être jamais complète ; il subsiste toujours un noyau élastique.

Cette représentation est plus réaliste que l'ancienne et elle est compatible avec la théorie du calcul plastique des charpentes métalliques à plan moyen, qui est fondée sur l'hypothèse de rotations importantes de zones localement plastifiées sous l'action du moment limite  $M_p$ .

A la base de la théorie ancienne, il y a le postulat implicite que la tension maximum dans une sollicitation hétérogène, telle que la flexion, ne peut dépasser la limite de plasticité des contraintes homogènes. La surélasticité constatée par M. N. DEHOUSSE n'est pas cependant une anomalie, mais bien la règle.

La théorie ancienne est une solution possible, mais pas pour autant la vraie.

Elle déroge à un principe général de la plasticité, à savoir qu'à l'état plastique il n'y a pas de relation entre les déformations et les tensions. Or, le processus de plastification selon l'ancienne théorie est constamment sous la dépendance du noyau élastique, ce qui maintient une relation définie entre la déformation et la sollicitation extérieure, et cela pendant tout le progrès de la plastification, qui est illimité.

C'est probablement une conséquence de la difficulté théorique, à la transition de l'élasticité et de la plasticité, de se soustraire à l'empire des équations de compatibilité des déformations élastiques. Il se peut que d'autres théories élasto-plastiques que celles de la flexion soient affectées de la même imperfection.

La théorie modifiée respecte le principe de la déformation indéterminée sous le moment constant de plastification, sans aucun contrôle par le noyau élastique, et cela dès que le moment plastique est atteint, mais pas avant. Il y a donc passage sans transition de la phase élastique à la phase plastique, et ce que l'on peut appeler la phase élasto-plastique se trouve entièrement dans le processus plastique ; elle y est toujours présente.

On peut chercher à cette interprétation une explication énergétique.

La plastification exige en effet un important travail des forces extérieures. Par des calculs simples, on trouve d'après la théorie

classique que le travail nécessaire par unité de longueur depuis le commencement de la plastification de la pièce est

$$\zeta_\epsilon = \frac{bh\sigma_e\epsilon}{2} \left( 1 + \frac{\sigma_e^2}{3E^2\epsilon^2} - \frac{4\sigma_e}{3\epsilon} \right)$$

Par la théorie modifiée, on trouve

$$\zeta_\epsilon = \frac{bh\sigma_e}{2} \left( \epsilon - 1,5 \frac{\sigma_e}{E} \right)$$

La figure 7 représente la variation de  $\frac{E\zeta_\epsilon}{bh\sigma_e^2}$  en fonction de  $\frac{E\epsilon}{\sigma_e}$ .

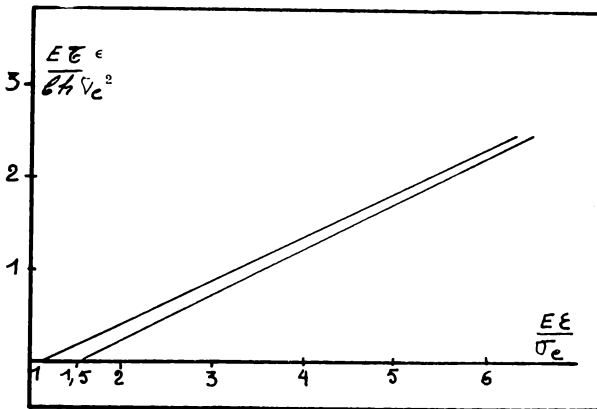


FIG. 7.

On remarque que, pour une même déformation, le travail de plastification selon la théorie modifiée est toujours inférieur à celui qui correspond à la théorie classique.

Le travail élastique avant la plastification est

$$\zeta_p = \frac{3}{8} \frac{bh\sigma_e^2}{E}$$

selon la théorie modifiée ; il est toujours restitué entièrement à la détente élastique, quelle que soit la déformation subie.

Selon la théorie classique il est

$$\zeta_e = \frac{bh\sigma_e^2}{6E}$$

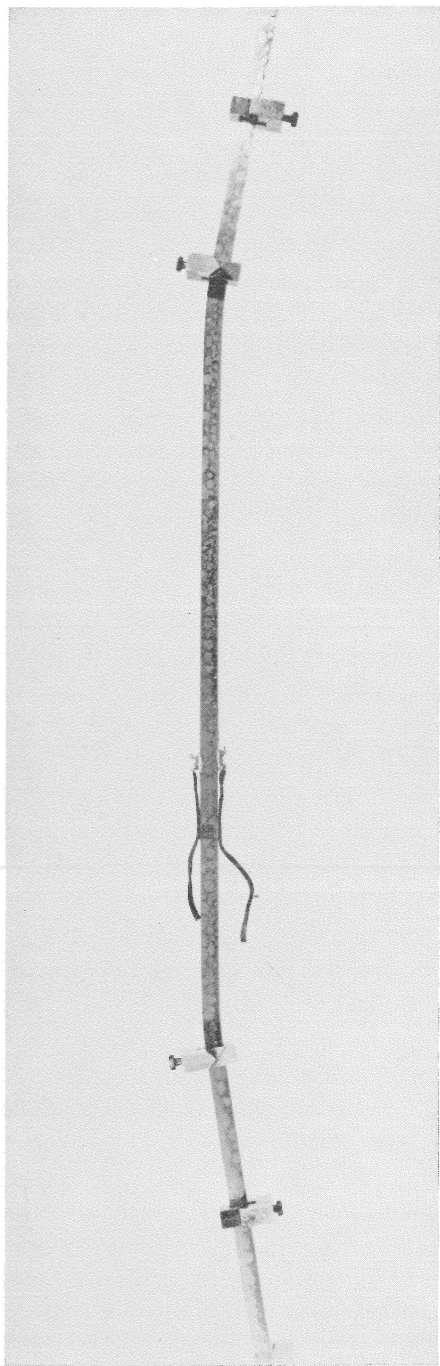


FIG. 8.

et le travail élastique de la détente lui est supérieur et égal à

$$\frac{3}{8} \frac{bh\sigma_e^2}{E} \left( 1 - \frac{\sigma_e^2}{3E^2\epsilon^2} \right)^2$$

Le travail de plastification selon cette théorie comporte donc une partie élastique, c'est-à-dire qu'il n'y aurait pas de seuil énergétique de plasticité. Suivant la théorie modifiée, il n'y a plus de travail élastique dès que le seuil de plasticité est franchi.

Dans ce qui précède, il s'agit du travail de plastification par unité de longueur.

La règle du travail minimum s'observe d'une manière encore plus frappante dans l'extrême localisation des régions plastifiées en flexion. Toutes les expériences ont été faites de manière que des portions plus ou moins étendues des barreaux soient soumises à un moment uniforme. Je m'attendais à une plastification uniforme et j'avais effectué des calculs des courbures et des flèches correspondantes.

Or, il ne s'est jamais produit que des zones plastiques très limitées et localisées aux points correspondant au moindre travail des forces extérieures, c'est-à-dire aux appuis ou aux points d'application des charges. Souvent il n'y a eu qu'une zone fortement plastifiée. Parfois deux, mais alors une d'elles s'est assez rapidement stabilisée, l'autre continuant seule à se développer.

La figure 8 montre la photographie d'un barreau déformé d'une manière permanente par flexion. On y remarque les deux zones fortement courbées par plastification, dont une plus que l'autre, mais il est remarquable de constater que la partie intermédiaire, soumise au même moment de plastification, est restée pratiquement droite, c'est-à-dire élastique.

La théorie modifiée établit aussi que pendant la plastification, la tension maximum est toujours supérieure à  $\sigma_e$  et ne pourrait lui devenir inférieure qu'après une déformation infinie, c'est-à-dire jamais.

Ceci est important au point de vue du calcul plastique des charpentes ; le moment reste effectivement constant et égal à  $M_p$  pendant la déformation plastique.

### CONCLUSIONS ET RÉSUMÉ.

Pour des barreaux prismatiques de section rectangulaire, la théorie classique de la flexion élasto-plastique n'est pas conforme aux faits observés.

Le passage de l'élasticité à la plasticité est discontinu.

Des principes et formules nouveaux sont établis suivant ce processus, qui correspond au moindre travail de plastification.

La déformation d'ensemble des pièces fléchies est déterminée par la plastification de zones assez limitées et localisées en des points tels que le travail des forces extérieures soit le moindre possible.

---

### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] N. M. DEHOUSSE. Note relative à un phénomène de surélasticité en flexion constaté lors d'un essai de barreau en acier doux. (Bulletin de la Classe des Sciences, séance du 3 mars 1962, pp. 329-334.)
- [2] F. CAMPUS et K. GAMSKI. Abaissement de la limite apparente d'élasticité des aciers par fluage après une amorce d'érouissage à la température ordinaire. (C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, 28 novembre 1955.)  
Effet sur la relaxation  
(C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, 13 février 1956)
- [3] F. CAMPUS. Effets de la durée sur les phénomènes plastiques (d'après le fluage et la relaxation des aciers à la température ordinaire). (Memorie presentate al Symposium su la plasticita nella scienza delle costruzioni in onore di Arturo DANUSSO, 1956, pp. 83-92.)