

MODELISATION DE L'EXPANSION GAZEUSE PROVOQUEE PAR LA PRESENCE
DE SOURCES DE CHALEUR LOCALISEES DANS UNE ENCEINTE FERMEE

J.M. Defise - J.P. Lange

Université de Liège
Institut Montefiore
Sart Tilman Bât.B28
B-4000 Liège (Belgique)

Abstract.

Une injection locale d'énergie dans un gaz provoque un échauffement qui, lui-même, induit progressivement l'expansion du fluide environnant. Cet article a pour objet la description d'une méthode efficace et performante pour le calcul de l'écoulement résultant, lorsque le gaz est confiné dans une enceinte fermée. Le calcul envisagé consiste à résoudre les équations de la mécanique des fluides en tenant compte de la compressibilité du gaz, des régimes instationnaires et de la présence de sources locales. Dans cet article sont présentés les résultats d'un écoulement induit dans une géométrie bidimensionnelle plane.

Mots clés.

Equations d'Euler - Ecoulements compressibles - Sources de chaleur.

1. Introduction.

Le problème envisagé dans cet article consiste à calculer numériquement l'écoulement gazeux induit par un échauffement local du fluide considéré. Nous nous proposons donc de résoudre les équations d'Euler auxquelles sont adjoints des termes "sources".

Parmi l'éventail de méthodes numériques proposées à l'heure actuelle pour le calcul des écoulements compressibles instationnaires multidimensionnels, il s'agissait de retenir un algorithme caractérisé par sa facilité de mise en oeuvre, des conditions de stabilité numérique peu contraignantes et un temps de calcul performant. Après avoir passé en revue les principaux algorithmes (Réf.1), il s'avère que seule une méthode implicite basée sur une discrétisation de type "différences finies" permet de rassembler les deux premiers critères. Pour obtenir une bonne rapidité de calcul, nous avons opté pour un schéma utilisant une factorisation spatiale approchée.

Nous développons donc ici un algorithme basé sur les travaux de BEAM et WARMING (Réf.2), adapté pour tenir compte de la présence de termes sources additionnels. La méthode proposée est assez générale car un choix approprié de certains paramètres permet d'utiliser des schémas temporels à deux ou trois niveaux, implicites ou explicites. Il s'agit d'un algorithme non itératif basé sur la forme conservative des équations, dans lequel on utilise la forme dite "delta" qui est très intéressante dans le cas des applications multidimensionnelles : les inconnues à déterminer sont les incréments temporels du vecteur d'état en tout point du domaine spatial. L'efficacité de la méthode repose principalement sur l'adoption d'une factorisation spatiale, cette technique permet une réduction considérable du volume de calcul ainsi qu'une approche relativement simple des problèmes multidimensionnels. La viscosité et la conduction

thermique ne sont pas prises en compte ici mais la généralisation de la méthode pour la résolution des équations de Navier-Stokes complètes est relativement aisée.

Il est intéressant de remarquer que, lorsque l'on échauffe localement un gaz, comme par exemple l'air, les effets diffusifs sont très limités spatialement et ont une faible importance vis-à-vis des termes convectifs. Ce fait est principalement dû aux propriétés physiques du gaz, qui est en général peu visqueux et mauvais conducteur de la chaleur. Ceci nous permet de nous limiter, en première approximation, aux équations d'Euler. Si l'on se place dans le cadre de cette approximation du fluide idéal, et si l'on considère un fluide initialement au repos, l'écoulement induit par un chauffage ponctuel est provoqué par une élévation de pression au niveau de la source thermique. En effet, cette hausse de pression crée un gradient de pression dans la direction radiale, et induit une mise en vitesse du gaz. On a alors une propagation radiale des particules de gaz qui vont "se heurter" au fluide environnant au repos, la pression au niveau de ces particules à l'arrêt va augmenter, le gradient de pression s'est donc déplacé; et on assiste alors à une mise en vitesse progressive. Si le fluide était conducteur de la chaleur, l'expansion du gaz serait en outre provoquée par la transmission par diffusion de l'énergie thermique injectée par la source. Dans le cas d'un fluide visqueux, en plus des effets de couche limite aux parois, la viscosité est la cause d'une diffusion de quantité de mouvement, qui a pour effet de "lisser" le saut de vitesse qui se propage dans le gaz.

Les termes sources pris en compte dans cet article peuvent être de trois natures différentes : sources de chaleur, sources de masse ou forces internes telles que les forces de gravité, les forces de Coriolis. La construction de l'algorithme est discutée au point 2, des applications sont proposées en 3, et nous présentons les conclusions en 4.

2. Construction de l'algorithme.

Les équations d'Euler bidimensionnelles (fluide compressible, non visqueux et non conducteur de la chaleur) sous leur forme conservative peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = X(U) + Y \quad (1)$$

où $U(x,y,t)$ est le vecteur des variables caractérisant l'état du gaz à l'instant t au point (x,y) , $F(U)$ et $G(U)$ sont les vecteurs de flux, et $X(U)$ et Y les vecteurs "termes sources" (détaillés dans l'annexe).

La généralisation de ce qui suit pour les équations de Navier-Stokes complètes est possible en ajoutant des termes de diffusion au second membre de (1) (Réf.3). Les développements ultérieurs se basent sur le schéma

factorisé de BEAM et WARMING, en tenant compte des termes $X(U)$ et Y .

a) Discrétisation temporelle.

Si $U^n = U(n\Delta t)$ et $\Delta U^n = U^{n+1} - U^n$, un développement de Taylor donne :

$$\Delta U^n = \frac{\partial U^n}{\partial t} \Delta t + o(\Delta t^2) \quad (2)$$

Introduisons θ et ξ pour prendre en compte respectivement des schémas temporels explicites/implicites et à 2 ou 3 niveaux, (2) devient :

$$(1+\xi) \Delta U^n - \xi \Delta U^{n-1} = \Delta t \left[\theta \frac{\partial U^{n+1}}{\partial t} + (1-\theta) \frac{\partial U^n}{\partial t} \right] \quad (3)$$

Ce qui donne :

$$\Delta U^n = \frac{\theta \Delta t}{1+\xi} \frac{\partial}{\partial t} \Delta U^n + \frac{\Delta t}{1+\xi} \frac{\partial U^n}{\partial t} + \frac{\xi}{1+\xi} \Delta U^{n-1} \quad (4)$$

On peut dès lors envisager différents schémas selon les valeurs de (θ, ξ) . Avec $(0,0)$, on retrouve le schéma d'Euler explicite; avec $(0, -\frac{1}{2})$, celui du Leapfrog explicite; avec $(\frac{1}{2}, 0)$, le schéma trapézoïdal implicite; avec $(1,0)$, celui d'Euler implicite; et avec $(1, \frac{1}{2})$, le schéma "3-point-backward" implicite.

En résolvant l'équation (1) pour $\frac{\partial U^n}{\partial t}$ et $\frac{\partial U^{n+1}}{\partial t}$, (3) devient :

$$\Delta U^n = \frac{\theta \Delta t}{1+\xi} (\Delta X^n + \Delta Y^n - \frac{\partial}{\partial X} \Delta F^n - \frac{\partial}{\partial Y} \Delta G^n) + \frac{\Delta t}{1+\xi} (X^n + Y^n - \frac{\partial F^n}{\partial X} - \frac{\partial G^n}{\partial Y}) + \frac{\xi}{1+\xi} \Delta U^{n-1} \quad (5)$$

avec : $\Delta F^n = F^{n+1} - F^n = F(U^{n+1}) - F(U^n)$

b) Linéarisation des vecteurs F, G et X.

Si nous utilisons à nouveau un développement de Taylor, on peut écrire :

$$F^{n+1} = F^n + \frac{\partial F^n}{\partial U} (U^{n+1} - U^n) + o(\Delta t^2)$$

ou

$$\Delta F^n = \frac{\partial F^n}{\partial U} \Delta U^n + o(\Delta t^2)$$

En définissant les matrices jacobiniennes :

$$A = \frac{\partial F}{\partial U},$$

$$B = \frac{\partial G}{\partial U},$$

et $T = \frac{\partial X}{\partial U},$

avec : $A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial U_j},$

on obtient :

$$\Delta F^n = A^n \Delta U^n \quad (6a)$$

$$\Delta G^n = B^n \Delta U^n \quad (6b)$$

$$\Delta X^n = T^n \Delta U^n \quad (6c)$$

Avec les relations (6), l'équation (5) devient alors:

$$\left[I + \frac{\theta \Delta t}{1+\xi} (-T^n + \frac{\partial}{\partial X} (A^n) + \frac{\partial}{\partial Y} (B^n)) \right] \Delta U^n = \frac{\theta \Delta t}{1+\xi} Y^{n+1} + \frac{(1-\theta) \Delta t}{1+\xi} Y^n + \frac{\Delta t}{1+\xi} (X^n - \frac{\partial F^n}{\partial X} - \frac{\partial G^n}{\partial Y}) + \frac{\xi}{1+\xi} \Delta U^{n-1} \quad (7)$$

où I est la matrice identité et les notations de la forme :

$$\left[\frac{\partial}{\partial X} (A^n) \right] \Delta U^n = \frac{\partial}{\partial X} (A^n \Delta U^n)$$

c) Factorisation spatiale.

Dénommons $Z = I - \frac{\theta \Delta t}{1+\xi} T$, nous pouvons écrire le membre de gauche de (7) de la façon suivante :

$$\left[Z^n - \frac{\theta \Delta t}{1+\xi} \left(\frac{\partial}{\partial X} (A^n) + \frac{\partial}{\partial Y} (B^n) \right) \right] \Delta U^n = \left[Z^n + \frac{\theta \Delta t}{1+\xi} \frac{\partial}{\partial X} (A^n) \right] \Delta U^* = \text{RHS}(7) \quad (8a)$$

et

$$Z^n \Delta U^* = \left[Z^n + \frac{\theta \Delta t}{1+\xi} \frac{\partial}{\partial Y} (B^n) \right] \Delta U^n \quad (8b)$$

où $\text{RHS}(7)$ représente le membre de droite de l'équation (7).

Cette factorisation spatiale ne réduit en rien l'ordre de précision de la méthode, le terme négligé reste d'ordre Δt^2 (Réf.2).

L'algorithme général s'écrit alors :

$$(Z^n + \Lambda_x) \Delta U^* = \text{RHS}^n \quad (9a)$$

$$(Z^n + \Lambda_y) \Delta U^n = Z^n \Delta U^* \quad (9b)$$

où Λ_x et Λ_y sont respectivement les opérateurs :

$$\frac{\theta \Delta t}{1+\xi} \frac{\partial}{\partial X} (A^n)$$

et

$$\frac{\theta \Delta t}{1+\xi} \frac{\partial}{\partial Y} (B^n)$$

Il reste à évaluer les dérivées spatiales par des quotients différentiels adéquats. Le schéma temporel est précis au moins à l'ordre Δt^2 , il est donc intéressant de choisir des approximations d'ordre Δx^2 .

Si nous utilisons les différences centrales comme suit,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + o(\Delta x^2)$$

la première étape de l'algorithme (9a) peut s'écrire sous la forme discrétisée suivante :

$$\alpha A_{i-1}^n \Delta U_{i-1}^* + Z_i^n \Delta U_i^* + \beta A_{i+1}^n \Delta U_{i+1}^* = \text{RHS}_i^n$$

La deuxième étape (9b) prenant une forme similaire, le schéma implicite aboutit ainsi à la résolution de systèmes bloc-tridiagonaux, pour lesquels il existe des méthodes d'inversion très performantes et peu exigeantes en temps CPU.

Dans le cas où le domaine spatial est un rectangle de n_x sur n_y points, la résolution pour chaque itération temporelle comporte un balayage horizontal de l'espace considéré et n_y inversions d'un système bloc-tridiagonal de n_x blocs de dimension 4 puis un balayage vertical avec n_x résolutions de systèmes de n_y blocs.

d) Conditions limites et initiale.

Dans les applications présentées en 3, seules les conditions limites de type "parois" sont envisagées. Pour les écoulements d'Euler, la présence d'une paroi signifie que la vitesse du gaz normale à la frontière est nulle. Cette condition se traduit dans les équations par $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$ et $\text{grad } \vec{p} \cdot \vec{n} = 0$. L'algorithme (9) ne nécessite pas la connaissance de U aux frontières mais celle du produit B_F

ΔU_F que les conditions "parois" permettent d'exprimer en fonction de BDU au voisinage des frontières (voir Réf.2). D'autres types de conditions limites peuvent être envisagées (voir Réf. 2 et 3).

En $t=0$, l'écoulement initial doit être connu en tout point du maillage spatial en vue de l'évaluation des matrices A et B et de la partie explicite RHS qui apparaît au second membre de (9a).

3. Applications.

En guise d'application du schéma, nous présentons ici deux exemples qui ont l'avantage d'utiliser dans un cas des sources du type Y (voir équation(1)) et dans l'autre des sources des types X(U) et Y tout en permettant une comparaison qualitative des résultats.

Le premier exemple est le cas d'un gaz confiné dans une enceinte carrée discrétisée par un maillage spatial de 26×26 noeuds équidistants ($1 \leq i \leq 26$ et $1 \leq j \leq 26$), $\Delta x = \Delta y = 0.1$ m. Le gaz considéré est de l'air initialement au repos, à une pression de 1 bar et une température uniforme de 300 K. Des sources de chaleur (de type Y_n) sont placées dans l'espace compris entre $23 \leq i \leq 24$ et $3 \leq j \leq 4$, elles débitent 100 kW/m^3 à partir de l'instant initial. Nous n'avons utilisé dans ces applications que le schéma temporel $\theta = 1$, $\xi = \frac{1}{2}$.

Les figures 1 à 3 représentent la situation aux premiers instants du chauffage par les sources. On y observe les premières réflexions du fluide sur les parois, pour obtenir ultérieurement (figure 4) une circulation établie comportant deux cellules de convection symétriques. Les figures 1 à 4 sont respectivement les champs de vitesse aux instants $t = 0.02$ s, $t = 0.1$ s, $t = 0.2$ s et $t = 1.25$ s.

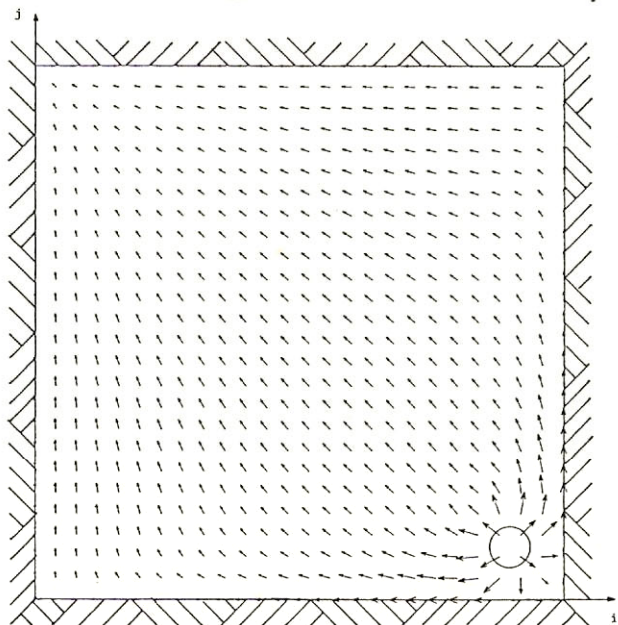


Figure 1

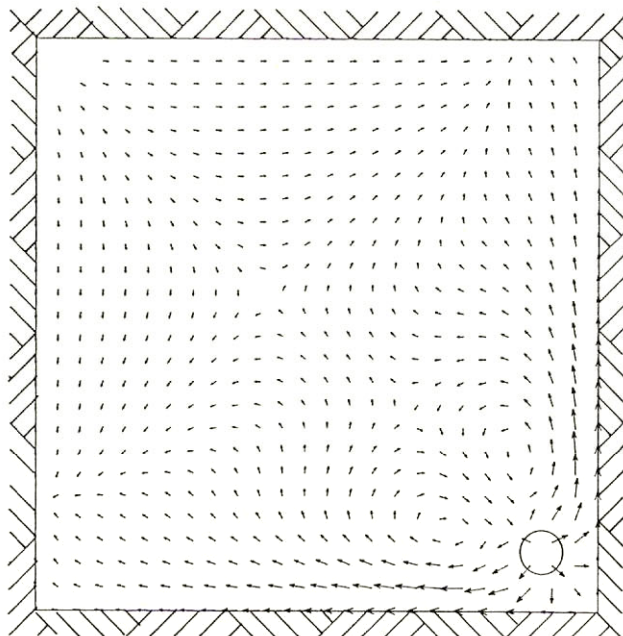


Figure 2

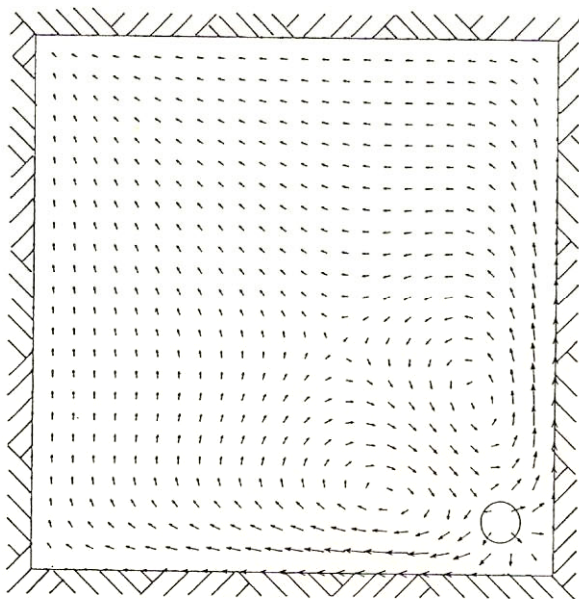


Figure 3

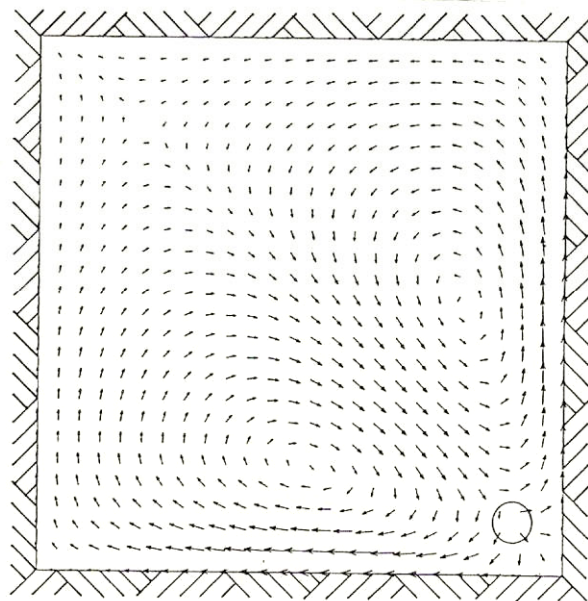


Figure 4

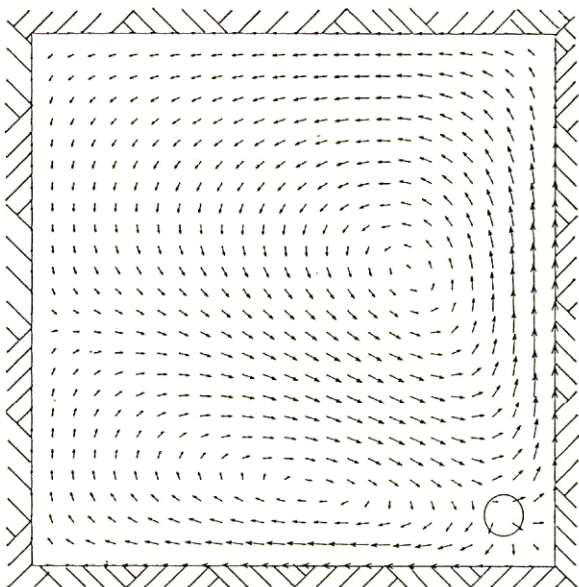


Figure 5

Dans la deuxième application, nous utilisons la même géométrie et les mêmes sources que dans l'exemple précédent, mais en plus des sources de chaleur Y_4 , l'enceinte est placée dans un champ de gravité parallèle à l'axe y . Il s'agit d'un terme supplémentaire de type $X_3 = \rho g$, pour lequel le jacobien T est nul. Dans ce cas, pour initialiser le calcul à partir d'une distribution de température uniforme de 300 K et d'un champ de vitesse nul, il faut imposer une distribution de pression :

$$p(y) = p(0) \exp\left(-\frac{gy}{RT}\right)$$

où R est la constante du gaz parfait considéré,

afin d'avoir un état initial stationnaire solution des équations d'Euler. La gravité g est choisie égale à 10 m/s^2 . La figure 5 représente la situation en $t = 4.5 \text{ s}$, on y remarque une dissymétrie des cellules de convection, due à l'effet de la gravité, ce qui n'apparaît pas dans l'exemple précédent. Les vitesses obtenues dans ces deux applications sont de l'ordre de 0.1 m/s .

4. Conclusions.

La méthode proposée dans cet article présente l'avantage d'être assez simple à mettre en oeuvre, tout en étant performante en temps de calcul. Les applications présentées en 3 ont été programmées sur MICROVAX II; pour le maillage de 676 points, une itération temporelle ne nécessite qu'une douzaine de secondes de temps CPU. Le caractère implicite de la méthode nous a autorisé à choisir des pas temporels supérieurs au temps mis par le son pour se propager d'un pas spatial, c'est-à-dire que le schéma reste stable pour des nombres de Courant

supérieurs à l'unité. Le schéma factorisé avec les termes sources nous a permis, non seulement d'introduire des sources locales d'énergie, de masse et de quantité de mouvement, mais aussi de développer un code de calcul pour la résolution des équations d'Euler dans des géométries axisymétriques sans devoir appliquer les matrices de transformations de coordonnées au système (1). De même, l'algorithme peut s'étendre aux problèmes en coordonnées sphériques en modifiant le vecteur $X(U)$ de l'équation (1), ou encore aux équations de Navier-Stokes complètes.

Annexe.

Pour les équations d'Euler, les vecteurs à considérer dans (1) sont les suivants :

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{pmatrix}$$

Références.

1. Peyret R., Taylor T., "Computational Methods for Fluid Flow", Springer - Verlag, 1983.
2. Warming R.F., Beam R.M., "On the Construction and Application of Implicit Factored Schemes for Conservation Laws", SIAM - AMS Proceedings, Volume 11, 1978.
3. Warming R.F., Beam R.M., "An Implicit Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations", AIAA Journal, Volume 19, n°4, 1978.