Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Dissertation présentée par

NGUYEN Ngan Giang

en vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences

Ecologie du formalisme "bipoint" dans l'enseignement de la géométrie au niveau secondaire

Jury

Madame Maggy Gilot-Schneider, ULg, Promoteur
Monsieur Pierre Lecomte, ULg, Président
Monsieur Yves Matheron, Institut de Mathématiques de Marseille
Monsieur Pierre Mathonet, ULg, Co-promoteur
Monsieur Chi Thanh Nguyen, Vietnam National University
Monsieur Michel Rigo, ULg, Secrétaire

Année académique 2017 - 2018

Unité de Recherche :
Ladimath

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon promoteur le Professeur Maggy Schneider. Elle a accepté de me suivre quand j'étais encore très inexpérimentée en didactique et à mes débuts de l'apprentissage de la langue française. Pendant toute la durée de mon doctorat, ses conseils avisés, sa parfaite connaissance de la didactique et les nombreux ouvrages qu'elle a publiés ont été essentiels et déterminants dans l'élaboration de ma thèse.

Je voudrais également remercier :

- *Le Professeur Pierre Mathonet qui a accepté d'être mon co-promoteur et m'a beaucoup aidée en toutes circonstances.*
- *Le Professeur Pierre Lecomte dont le cours de géométrie élémentaire a été une base pour ma thèse et m'a apporté son soutien dans ce domaine. Son assistante Marie Kreusch a également participé à l'amélioration de mes connaissances en géométrie.*
- *Le Professeur Michel Rigo pour ses conseils et son soutien constant.*
- *Le Professeur Yves Matheron pour son acceptation à faire partie dans mon jury et pour ses précieux conseils lors de ses relectures.*
- *Le Professeur Nguyen Chi Thanh, également membre de mon jury, grâce à qui j'ai pu venir en Belgique.*
- *Kevin Balhan, pour sa participation dans l'expérimentation liée à ma thèse et son aide dans cette partie de ma thèse.*
- *Eveline Moitroux, pour m'avoir toujours très gentillement accueillie dans ses classes et pour ses conseils utiles dans la partie expérimentale de ma thèse.*
- *Pierre Henrotay, pour sa bienveillance, sa disponibilité et sa gentillesse.*
- *Pierre Job, pour son aide et sa gentillesse à mes débuts en Belgique.*

Je remercie également Danielle Bartholoméus, qui a toujours été à mes côtés pour m'aider au quotidien et qui m'a motivé à poursuivre mon travail sans relâche. Je remercie aussi Vinciane Godfrind et Nicole Massin pour leur aide pendant toute la durée de mon séjour au département.

Je remercie aussi ma famille, mon mari, ma fille et mes autres amis qui m'ont encouragée pour que je puisse atteindre mon but.

Giang

INTRODUCTION

L'objet de cette thèse est d'étudier les problèmes épistémologiques et didactiques liés à l'enseignement de la géométrie, notamment la géométrie vectorielle au cycle secondaire en Belgique comme en France et au Vietnam. En fait, cette question a eu pour origine ma propre expérience. Quand j'étais au secondaire supérieur au Vietnam, j'ai connu le vecteur comme une *"flèche"*, ce qui peut être performant pour traiter des problèmes concernant les forces en physique et les exercices du calcul vectoriel. Je l'utilisais par habitude jusqu'au moment où je l'ai revu dans le cours de la géométrie à l'université où mon professeur a dit que *"un polynôme"* peut être aussi considéré comme *"un vecteur"* dans un espace vectoriel dont les éléments sont les polynômes et j'éprouvais des difficultés à faire le lien entre les deux points de vue. Après je suis devenue professeur d'algèbre linéaire à L'Université d'hydraulique de Hanoi donc j'ai pris plus de temps d'étudier en détail la structure de l'espace vectoriel et ses propriétés avec mes étudiants et j'ai réalisé qu'il y a un vrai *"trou"* entre l'enseignement de la géométrie vectorielle au secondaire et celui à l'université. De plus, je me suis étonnée car il y a le même problème en Belgique, ce qui m'a poussée à approfondir sur cette question. La bourse du gouvernement vietnamien et l'orientation de Madame Schneider me permettent de réaliser cette thèse.

Nos cadres théoriques principaux sont la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau (1998) et la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) de Chevallard (1991 et 1992) que nous considérons dans leur solidarité et leur complémentarité.

Nous avons construit un Modèle Epistémologique de Référence (un MER au sens de Gascon, 1993) qui donne une clé de lecture non seulement des dysfonctionnements des curricula actuels mais aussi de leurs potentialités a priori d'ingénieries didactiques, en termes d'écologie.

D'abord, pour comprendre un problème concernant un savoir d'enseignement, il faut le mettre dans un contexte d'un phénomène appelé *"transposition didactique"*

(Chevallard, 1985) car Rajoson (1988) montre qu'un objet d'enseignement doit se trouver l'équivalent d'une niche écologique, autrement dit, le choix des objets à enseigner parmi les objets de savoir obéit à certaines lois de nature écologique. C'est la raison pour laquelle, dans notre thèse, afin de construire ce MER, nous sommes remontés assez haut dans l'échelle de co-détermination didactique de Chevallard, jusqu'au structuralisme qui fut le mode de pensée dominant dans la société du milieu du XXe siècle et nous l'avons fait en plusieurs étapes :

Nous avons établi, tout d'abord, un panorama de la géométrie dans l'histoire des mathématiques de l'époque d'Euclide jusqu'à l'époque des mathématiques d'aujourd'hui pour situer principalement, dans ce panorama, la subordination de la géométrie à l'algèbre linéaire.

Ensuite, nous avons retracé les vicissitudes de la réforme dite des mathématiques modernes, ses tenants et aboutissants, ainsi que les contre-réformes subséquentes afin de comprendre les déterminants de la place octroyée à la géométrie vectorielle, en Belgique francophone, en France et au Vietnam, dans les programmes des années 70 et ceux d'aujourd'hui.

Enfin, en tenant compte de recherches existantes sur les difficultés d'apprentissage des élèves en géométrie et dans le calcul vectoriel en particulier, nous avons formulé un MER et construit une ingénierie qui le concrétise. Il s'agit de fonder un formalisme *"bipoint"*, inspiré de celui de Burali-Forti et Marcolongo, piloté par les résultats de la géométrie euclidienne connus des élèves, et constituant un système de preuves calculatoires performant des propriétés de figures géométriques. Cette ingénierie, construite sur les bases théoriques de la TSD - en particulier concernant le caractère fondamental des questions dévolues aux élèves - s'inscrit dans ce que Schneider(2008) appelle les praxéologies *"modélisation"* et nous l'avons située par rapport à des niches écologiques a priori du calcul vectoriel. Nous avons également étudié les valences sémiotique et instrumentale de ses principaux concepts et ostensifs associés relativement à la dialectique ostensifs-non ostensifs de la TAD.

En détail, en dehors de la présente introduction et la conclusion, notre thèse est subdivisée en cinq chapitres :

Au chapitre 1, nous traçons le panorama de la géométrie dans l'histoire des mathématiques de l'époque d'Euclide jusqu'à l'époque des mathématiques modernes pour bien comprendre ce qui se passe chez les mathématiciens. Nous analysons également le lien entre la géométrie et l'algèbre linéaire pour mettre en évidence la subordination de la géométrie à l'algèbre linéaire et réciproquement.

Nous mettrons en évidence au chapitre 2 ce qui se passe dans l'enseignement de la géométrie au secondaire en expliquant la difficulté des élèves concernant l'apprentissage aussi bien de la géométrie en général que du calcul vectoriel en particulier.

Au chapitre 3, nous décrivons notre MER à la lumière des analyses précédentes en ayant soin de mettre à plat nos choix de valeurs à l'échelle curriculaire.

Nous y expliquons aussi notre choix du formalisme bipoint pour faire de la géométrie et les principes de sa construction, dans une visée heuristique, sur base de la géométrie euclidienne et comme marchepied vers la géométrie vectorielle.

Au chapitre 4, nous étudions les valences sémiotique et instrumentale du formalisme bipoint. La première de ces deux valences est étudiée ici au sein d'une ingénierie didactique qui concrétise le MER construit. La valence instrumentale, elle, est examinée à la lumière des preuves qu'autorise le formalisme bipoint, en comparaison avec le formalisme vectoriel. On mène ces analyses d'abord en géométrie affine, puis en géométrie métrique.

Au chapitre 5, nous étudions les contraintes qui pèsent sur la viabilité de l'ingénierie didactique construite ici mais aussi les opportunités qui en favoriseraient la place dans un cursus scolaire. Et ce, auprès d'élèves du secondaire et d'enseignants en formation.

C'est l'ensemble de ces analyses qui nous permettra de tirer des conclusions sur l'écologie du MER construit ici et de l'ingénierie didactique qu'il sous-tend. Ce terme d'écologie est pris en son sens commun dans les quatre premiers chapitres. A vrai dire, nous devrions plutôt parler de *"niche écologique"*, concept majeur de cette science qu'est l'écologie, pour désigner le rôle d'une espèce qui en fait une candidate privilégiée pour occuper un *"habitat"* donné. Au chapitre 5, nous reviendrons sur la métaphore de l'écologie telle qu'utilisée en didactique.

CHAPITRE 1

LA GÉOMÉTRIE DANS L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Dans ce chapitre, nous avons réalisé une étude historique et épistémologique de la géométrie, de l'époque d'Euclide à l'époque des mathématiques modernes. Cette étude nous permet de retrouver les raisons d'être de savoirs mathématiques qui ont pu évoluer au cours des siècles. Comme le dénonce Chevallard (2000) avec courage le caractère *"monumentaliste"* actuel de l'enseignement des mathématiques doit être corrigé par un enseignement *"raisonné"* où les savoirs sont *"motivés"* :

> *Les objets mathématiques scolaires sont aujourd'hui largement immotivés parce qu'ils apparaissent désormais comme de simples "choses" qui sont là, réalité incréées qu'il conviendrait de visiter docilement, sans demander pourquoi elles sont là. [...] le vieillissement du curriculum tend à "pétrifier" les objets mathématiques : on conserve l'organe mais on a perdu les fonctions pour lesquelles ces organes furent un jour créés, ou pour lesquelles ils sont toujours là. Volens nolens on impose ainsi aux jeunes générations un monde apparemment immotivé, dénué de sens - insensé -, où l'on donne à croire par exemple qu'il serait "naturel", "normal" de s'intéresser aux triangles ! Monde d'organes sans fonctions, sans raisons d'être, sans raisons. Tout à l'inverse, un renseignement raisonné doit rendre sensible les raisons d'être des objets enseignés...* [1]

C'est la raison pour laquelle nous donnons ici une vision historico-épistémologique qui permet de questionner la transposition didactique et de repenser ensuite l'enseignement en termes de situations fondamentales. Nous commençons ce chapitre avec les problèmes soulevés par la géométrie d'Euclide, puis la reprise de la

1. Cité par SCHNEIDER 2008, p. 76–77.

géométrie d'Euclide par Hilbert. Nous continuons avec l'idée du structuralisme initiée par Klein et Nicolas Bourbaki à l'époque des mathématiques modernes.

1.1 Les critiques portées sur la géométrie d'Euclide

Pour comprendre la géométrie sous la forme déductive telle que nous la connaissons aujourd'hui, il faut remonter aux Eléments d'Euclide.

Ces Eléments sont à mettre en résonance avec une idéologie de type démocratique qui prévaut à l'époque d'Euclide, idéologie selon laquelle les vérités, loin d'être révélées ou fondées uniquement sur des récits personnels doivent être démontrées selon des règles explicites de déduction à partir d'axiomes et de postulats affichés. Cependant, malgré cette intention qui reste d'actualité encore aujourd'hui, l'œuvre d'Euclide a fait l'objet de plusieurs critiques dans la suite de l'histoire. Ces critiques portent sur un manque de netteté entre le discours déductif proprement dit et ce que l'on connaît ou perçoit, grâce à nos sens, des objets géométriques impliqués. Cette faiblesse se traduit par plusieurs caractéristiques illustrées ci-dessous :

1.1.1 Certaines définitions ne jouent pas de rôle opératoire dans le raisonnement déductif

Euclide introduit dès le début dans les raisonnements des expressions telles que longueur, largeur, profondeur, ligne, etc., comme si l'on savait déjà ce qu'elles signifient géométriquement :

> *Les Eléments d'Euclide sont d'abord une théorie des grandeurs géométriques, grandeurs définies à partir de données empiriques, et la lecture des Eléments présente bien des aspects incompréhensibles si l'on méconnait ce point de vue. La problématique euclidienne n'est pas de construire la géométrie a priori, mais à partir de données initiales, de mettre en place la machine déductive qui lui permettra de découvrir les vérités géométriques de ce monde empirique. Ces données initiales sont les définitions, les postulats, les axiomes. Les définitions se réfèrent à des objets et leur rôle, pour certaines d'entre elles (et en particulier les premières) est bien plus de donner une description même vague, que d'expliciter un statut existentiel ou opératoire.* [2]

Lorsqu'Euclide énonce des assertions telle que

- *"Un point est ce qui n'a pas de parties."*
- *"Une ligne est une longueur sans largeur."*

2. LE GROUPE INTER-I.R.E.M. ÉPISTÉMOLOGIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES 1982, p. 14.

- *"La ligne droite est celle qui est située semblablement par rapport à tous ses points."*

Il s'agit essentiellement de définitions *"descriptives"* qui sont supposées être une référence pour préciser à autrui ce dont on parle. Elles n'ont évidemment aucun caractère opératoire en ce sens qu'elles ne peuvent donner prise au raisonnement déductif.

En fait, à côté de ces définitions descriptives, comme explique le groupe INTER-I.R.E.M., Euclide utilise aussi un autre type de définitions qui consistent à donner un nom à un objet défini par une construction ou une propriété caractéristique. Ce sont ces définitions, comme celle du cercle, qui vont permettre d'enclencher les déductions :

- *"Un cercle est une figure plane, entournée par une seule ligne, appelée circonférence, et telle que toutes les droites, appelées rayons, menées à cette circonférence, d'un certain point situé à l'intérieur de la figure, sont égales entre elles."*
- *"Ce point se nomme le centre du cercle."*

C'est le cas aussi des définitions des divers types de triangles ou de quadrilatères, et également le cas de la définition des droites parallèles. Ce type de définition correspond à ce que plus tard Pascal appellera des définitions de nom : les définitions nominales ne sont *"que les seules impositions de noms aux choses qu'on a clairement désignées en termes parfaitement connus"* et, comme l'a dit Pascal [3], cette essence est connue mais ineffable, parce qu'elle est connaissance du cœur et non de la raison.

Cependant, ainsi que développé par des épistémologues des mathématiques, ces définitions opératoires tout comme les définitions descriptives sont à considérer d'une manière qui nous éloigne du point de vue actuel :

> *Mais dans les deux cas, et c'est la différence avec les définitions qu'on trouve dans les textes mathématiques d'aujourd'hui, les choses sont antérieures au nom, il s'agit de nommer ce qui existe, non de faire exister en nommant. En ce sens la géométrie d'Euclide est aussi une science naturelle.* [4]

Non seulement les définitions chez Euclide sont différentes de celles en vigueur dans les mathématiques contemporaines, mais les postulats et axiomes ont des rôles différentes aussi. Nous l'analysons dans la section suivante.

3. PASCAL 1962.
4. LE GROUPE INTER-I.R.E.M. ÉPISTÉMOLOGIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES 1982, p. 15.

1.1.2 Les postulats et axiomes chez Euclide

Toujours selons les travaux du groupe INTER-IREM, postulats et axiomes chez Euclide sont des assertions non démontrées. C'est à partir de ces propositions primitives que se met en place le processus déductif, et c'est en examinant leur rôle et leur fonctionnement dans ce processus qu'on peut essayer de comprendre leur signification, tout autant, sinon mieux, qu'à travers les références platoniciennes ou aristotéliciennes habituelles.

Contrairement à ce qu'on pourrait imaginer, l'axiome n'est pas la même chose que le postulat. Voyons comment Jean Dieudonné (1962) commente cette distinction chez Euclide :

> *"Les axiomes sont essentiellement des propositions concernant les notions générales qui gravitent autour de celle de "grandeur" : "plus grand", "égal", "tout", "partie" ; elles sont apparemment considérées comme évidentes, parce que nécessairement impliquées dans la représentation mentale que nous pouvons avoir de ces notions. Les postulats concernent les êtres mathématiques proprement dits : leur vérité semble plutôt provenir d'extrapolation de vérité d'expérience, comme, par exemple, le postulat énonçant que tout droite peut être prolongée indéfiniment, ou celui admettant l'égalité de tous les angles droits"* [5].

Contrairement à ce qui se passe dans l'axiomatique moderne et sur laquelle nous reviendrons, postulats et axiomes ont donc des rôles différents.

1.1.3 Le rôle joué par figures

Dans son discours déductif, Euclide ne prouve pas certaines propriétés des figures dont seul un dessin bien fait atteste. Par exemple, l'existence même de certains points mais aussi les positions respectives de points alignés ou de celles de droites et de courbes. A titre d'exemple, voici la proposition première des Eléments qui démontre un procédé de construction d'un triangle équilatéral sur un segment AB, le sommet C étant une intersection de deux cercles ayant chacun une des extrémités du segment comme centre et passant par l'autre :

> **PROPOSITION PREMIERE**
>
> **Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.**
>
> *Soit AB la droite donnée et finie : il faut construire sur la droite AB un triangle équilatéral.*
>
> *Du centre A et avec un intervalle AB, décrivez la circonférence BCD ; ensuite du centre B et avec l'intervalle BA décrivez la circonférence ACE ; et du point C, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisez aux points A, B, les droites CA, CB.*

5. Dieudonné 1962, p. 543–545.

> *Car puisque le point A est le centre du cercle CDB, la droite AC sera égale à la droite AB ; de plus, puisque le point B est le centre du cercle CAE, la droite BC sera égale à la droite BA; mais il a été démontré que la droite CA était égale à la droite AB : donc chacune des droites CA, CB est égale à la droite AB ; or les quantités qui sont égales à une même quantité sont égales entr'elles ; donc la droite CA est égale à la droite CB : donc les trois droites CA, AB, BC sont égales entr'elles.*
>
> *Donc le triangle ABC est équilatéral, et de plus il est construit sur la ligne donnée et finie AB, ce qu'il fallait faire.*

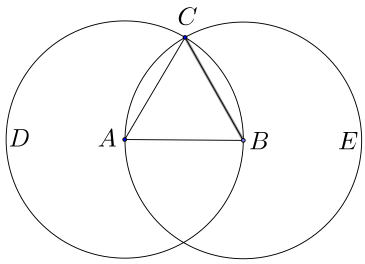


FIGURE *1.1*

Dans sa preuve, Euclide ne démontre pas l'existence d'un point C à l'intersection des deux cercles de centres respectifs A et B de rayon AB se contentant de l'évoquer à partir d'un dessin pour terminer la construction : *"du point C, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisez aux points A, B, les droites CA, CB"*. Or, par ailleurs, Euclide parle des positions respectives de deux cercles qui peuvent être extérieurs l'un à l'autre, tangents en un point ou sécants en deux points. On voit ici que c'est le dessin qui atteste de la position des cercles construits et donc de l'existence du point C. Même si, dans le livre III, il y a une proposition concernant l'intersection de deux cercles [6], ici dans cette démonstration, Euclide ne considère pas la position relative de deux cerles, il donne tout de suite l'existence du point C en basant sur la figure. Il en va de même pour l'ordre de points situés sur une même droite et nous y reviendrons.

En résumé, l'existence du point est vague chez Euclide, comme dit Adrien Dunia Mwati dans sa thèse [7] :

> *En définitive la validité de la preuve repose chez Euclide sur une certaine intuition géométrique et sur des propriétés que suggère la figure et non sur des propriétés géométriques précises découlant du système d'axiomes qu'il a adopté.*

6. C'est la proposition X : "Un cercle ne coupe pas un cercle en plus de deux points."
7. DUNIA MWATI 2013, p. 152.

De plus, la question de savoir quand un point est entre les deux autres points sur une ligne, ou quand une ligne est *"à l'intérieur"* d'un angle est important dans le livre d'Euclide. Considérons la proposition 7 dans le livre I, [8] Euclide a utilisé l'idée que l'angle ACD est plus grand que l'angle DCB en exploitant uniquement la figure. Comment connait-on la relation entre deux angles ACD et DCB ? Parce que la ligne CB est *"à l'intérieur* de l'angle ACD ? Mais pourquoi il est *"à l'intérieur"* ? A quelle condition l'est-il ? Que passe t-il quand BC est à extérieur (comme la ligne pointillée dans la figure) ?

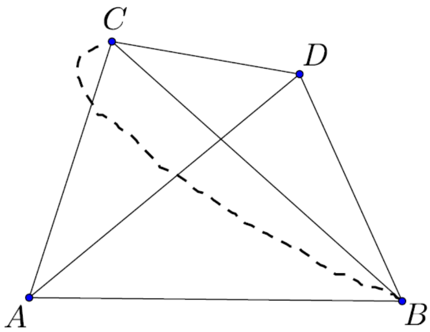


FIGURE *1.2*

En conséquence, on peut constater que Euclide ne donne pas la définition de l'ordre et tout est à lire sur les figures, autrement dit, c'est impossible de prouver les propositions concernant la position des points, des droites sauf à se fier... aux figures. Sur base de telles situations propres à la géométrie d'Euclide, Kline(1972) [9] dira :

> *La géométrie euclidienne était supposée offrir des démonstrations exactes des théorèmes suggérés intuitivement par les figures, mais elle offrait effectivement des démonstrations intuitives sur des figures dessinées exactement.* [10]

1.1.4 Une géométrie de grandeurs basée sur la superposabilité et la construction de figures

Nous allons analyser dans cette section ce que fait Euclide concernant les nombres, les grandeurs et les liens entre eux.

8. Ayant conduit par les extrémités d'une droite deux droites qui se rencontrent, il est impossible de mener des mêmes extrémités deux autres droites qui leur soient égales chacune à chacune, si le point où se rencontrent les deux dernières droites est placé du même côté et n'est pas le même que celui où se rencontrent les deux premières.

9. KLINE 1972, p. 1007.

10. "Euclidean geometry was supposed to have offered accurate proofs of theorems suggested intuitively by figures, but actually it offered intuitive proofs of accurately drawn figures."

D'abord, dans la géométrie grecque classique, seuls les naturels sont considérés comme des nombres, même les fractions ne sont pas perçues comme telles. C'est la raison pour laquelle Euclide utilise l'expression *"A est à B comme m est à n"* pour les grandeurs ayant une commune mesure, l'écriture $\frac{m}{n}$ étant absente à son époque. Pour ce qui est des grandeurs incommensurables, Euclide les traite à partir de la théorie des proportions d'Eudoxe qui permet de donner sens à l'expression *"A est à B comme C est à D"*, à partir de plusieurs cas détaillés ci-dessous :

1.1.4.1 Les Proportions chez Euclide

En concernant des grandeurs, à côté des problèmes de l'égalité, il faut considérer aussi des problèmes de similitude. On va voir dans cette section ce que Euclide a traité avec ce problème, autrement dit, comment est-ce qu'Euclide a traité les proportions.

L'expression A est à B comme m est à n permet de définir des rapports de grandeurs lorsque ces grandeurs ont une commune mesure. Mais qu'est ce qu'une commune mesure ? Considérons deux grandeurs inégales représentées par des segments. Si l'on trouve un naturel n, bien choisi tel que la petite va n fois dans la grande, on dit que les deux grandeurs sont entre elles dans le rapport de 1 à n. Si par ailleurs il n'existe pas de tel n, une bonne idée est de chercher une troisième grandeur qui irait un nombre entier m de fois dans la première et un nombre entier n de fois dans la deuxième. Si l'on trouve une telle troisième grandeur, alors on dit que *la première grandeur est à la deuxième comme m est à n.* La troisième grandeur est appelée commune mesure des deux autres.

Comme le dit ROUCHE 1992 : *"Par le biais de la commune mesure, quand elle existe, nous associons un couple de nombres à un couple de grandeurs, et les deux nombres sont entre eux comme les deux grandeurs (ont le "même" rapport que les deux grandeurs). Cette façon de faire a le grand avantage de substituer des comparaisons de nombres aux comparaisons de grandeurs. Les comparaisons de grandeurs sont des opérations lourdes, puisqu'elles exigent des manipulations d'objets. Les comparaisons de nombres (naturels) sont faciles et se ramènent à des manipulations de symboles (chiffres) dans un système de numération."*

S'il n'y a pas de commune mesure entre deux grandeurs, on parle alors d'incommensurabilité. Par exemple, le côté d'un carré x et sa diagonale y sont incommensurables. En effet, s'il existe deux naturels m et n tels que *"x est à y comme m est à n"* alors on devrait avoir $\frac{n}{m} = \sqrt{2}$, ce qui est évidemment impossible.

Dans un cas d'incommensurabilité, Euclide utilise la théorie des proportions d'Eudoxe (c'est la définition 5 dans le livre V d'Elements) :

"On dit que deux grandeurs sont dans le même rapport la première à la seconde et la troisième à la quatrième, quand, si on prend des équimultiples de la première et de la troisième, et des équimultiples quelconques de la deuxième et de la quatrième,

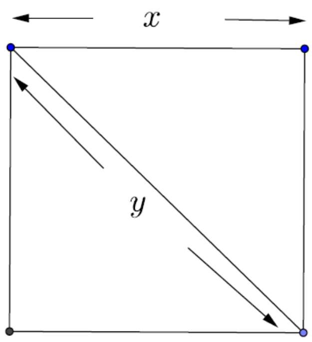


FIGURE *1.3*

les premiers équimultiples sont en même temps soit plus grands, soit égaux, soit plus petits que les autres équimultiples pris respectivement dans le même ordre."

Si on veut réécrire cette définition sous une écriture moderne, on obtient :

"Étant données quatre grandeurs A, B, C, D. On dira A est à B comme C est à D si, pour tout choix possible des nombres naturels m et n, on a toujours :

1. *soit simultanément $mA < nB$ et $mC < nD$*
2. *soit simultanément $mA = nB$ et $mC = nD$*
3. *soit simultanément $mA > nB$ et $mC > nD$."*

Cette définition est liée à l'axiome d'Archimède car il faut implicitement le fondement logique de l'axiome de continuité, c'est-à-dire qu'il faut que les grandeurs soient *"archimédiennes"* : elles doivent être de même nature et, en plus, deux grandeurs G et G' étant données, il faut qu'il existe deux nombres naturels n, m tels que $nG > G'$ et $mG < G'$. Cette axiome est puissant mais comme l'a dit David Berlinski dans son livre [11]

> *"The axiom is satisfied by the rational numbers. The axiom went far in the ancient world, but it did not go far enough. It did not suffice to charaterize the real numbers, and for this, the completess axiom was required."*

Dans cette définition, Euclide a évité d'utiliser la fraction et il a utilisé l'égalité des rapports au lieu du rapport lui-même, et sa définition est en termes des multiplicateurs indéterminés m et n. En fait, comme déjà dit, le concept de $m : n$ comme un seul nombre n'existe pas dans le livre d'Euclide. Évidemment, Euclide ne pouvait le dire ainsi à une époque où seuls les entiers étaient considérés comme des nombres et où l'on manipulait uniquement des proportions entre grandeurs et/ou entiers. Les expressions utilisées étaient alors : *"A est à B comme C est à D"* (A, B, C et D sont des grandeurs) ou *"A est à B comme 3 est à 4"*. En effet, dans la géométrie grecque

11. BERLINSKI 2014, p. 109.

classique, seuls les naturels sont considérés comme nombres. Les fractions en tant que nombres sont absentes. C'est la raison pourquoi, à l'époque, on dit *"A est à B comme 3 est à 4"* et jamais *le rapport de A à B est* $\frac{3}{4}$. Pour répondre à la question : *"Quel est le rôle des nombres dans sa géométrie ?"*, on va regarder en détail en analysant les systèmes des nombres dans les travaux d'Euclide.

1.1.4.2 Des nombres en lien avec les grandeurs chez Euclide

Dans le livre VII, Euclide présente la théorie des nombres naturels positifs commencés à 2, 1 est l'unité et 0 n'existe pas en tant que nombre. Voici les deux premières définitions :

1. *L'unité est selon quoi chacune des choses existantes est dite une.*
2. *Un nombre est un assemblage composé d'unités*
3. *Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, lorsque le plus petit mesure le plus grand.*

Les nombres peuvent être combinés dans les opérations d'addition, de soustraction *"de la plus faible à la plus grande"* pour faire en sorte que le nombre obtenu soit positif, et de multiplication. Cependant, Euclide ne divise pas des nombres entiers pour produire des nombres rationnels et au lieu de construire, par exemple, $\frac{3}{9}$, $d\frac{3}{7}$, $\frac{6}{14}$, il a dit *"*3 *est une partie de* 9*"*, *"*3 *est une partie de* 7*"* et *"*3 *est à* 7 *comme* 6 *est à* 14*"*. La manière dont Euclide a présenté les égalités entres des nombres est donc similaire avec celle des grandeurs. La différence entre les deux est que, en géométrie, Euclide n'a jamais multiplié la grandeur avec elle-même, par exemple, un segment de longueur b ne peut pas être multiplié avec lui-même pour obtenir le carré b^2. Par contre, les nombres peuvent être multipliés par eux-mêmes. Pour expliquer la raison pour laquelle Euclide a évité de multiplier les grandeurs, Ivor Granttan-Guinness a écrit dans son article [12] :

> *"Once it is recognized that Euclide handles magnitudes on the same kind, the reasons for his avoidance of their multiplication become clear. First, the kind would be changed ; for example, the product of a straight line and a straight line is a rectilinear region. Second, many of the multiplications cannot be defined anyway (angle with angle, line with angle, solid with line, and so on); so for uniformity he omits all of them."*

En résumé, Euclide n'utilise pas la multiplication des grandeurs car, soit ça change de genre, soit ça n'existe pas.

12. GRATTAN-GUINNESS 1996, p. 365.

De plus, Euclide ne précise aucun lien entre les nombres et les grandeurs car pour lui, les grandeurs ne sont pas des nombres et on ne peut leur attribuer aucun nombre-mesure. Comme dit David Fowler dans son livre [13] :

"Greek mathematicians seemed to confront directly the objects with which they were concerned : their geometry dealt with the features of geometrical thought experiments in which figures were drawn and manipulated, and their arithmetike concerned itself ultimately with the evident properties of numbered collections of objects. Unlike the mathematics of today, there was no elaborate conceptual machinery, other than natural language, interposed between the mathematician and his problem. Today we tend to turn our geometry into arithmetic, and our arithmetic into algebra so that, for example, while Elements I.47 :"In right-angled triangles the square on the side subtending the right angle is equal to the squares on the sides containing the right angle" means literally to Euclid, that the square can be cut in two and manipulated into other squares..., the result is now usually interpreted as : "$p^2 + q^2 = r^2$," where we now must explain just what the p, q and r are and how they can be multiplied and added. To us, the literal squares have been replaced by some abstraction from an arthmetical analogy."

En résumé, comme l'explique James J. Madden [14], nous pouvons traduire automatiquement la géométrie en langage numérique et algébrique et traiter avec des faits et idées géométriques en ces termes. Pour nous, presque tout a une mesure numérique attachée : la distance, la masse, le temps, etc. A l'inverse, quand Euclide dit que le rapport de A à B est le même que le rapport de C à D, les lettres A, B, C et D ne font pas référence aux nombres du tout.

1.1.4.3 L'égalité chez Euclide

On sait aujourd'hui que seul l'ensemble des réels, qu'il soit construit à partir des suites de Cauchy ou les coupures de Dedekind ou bien défini de manière axiomatique, est propre à créer ce que Drombres (1978) a appelé une *"symbiose entre la continuité numérique et la continuité géométrique"*. Il ne peut donc être question, à l'époque d'Euclide, de définir la longueur d'un segment ou, de manière générale, la mesure de grandeurs.

Il n'empêche qu'Euclide parvient à traiter ce que nous appellerions aujourd'hui une relation d'équivalence entre segments, soit la relation *"avoir même longueur"*. Il le fait grâce à son principe de superposition de figures au départ de ses fameux cas d'égalité de triangles, eux-mêmes *"prouvés"* à sa manière par la description d'une expérience mentale qui consisterait à déplacer un triangle sur un autre.

Pour commencer, considérons-nous les neuf axiomes relatifs aux grandeurs :

1. *Les quantités qui sont égales à une même quantité sont égales entr'elles.*

13. FOWLER 1999, p. 20.
14. J.MADDEN 2008, p. 3.

2. *Si à des quantités égales on ajoute des quantités égales, les tous seront égaux.*
3. *Si à des quantités égales on retranche des quantités égales, les restes seront égaux.*
4. *Si à des quantités inégales on ajoute des quantités égales, les tous seront inégaux.*
5. *Si à des quantités inégales on retranche des quantités égales, les restes seront inégaux.*
6. *Les quantités qui sont doubles d'une même quantité sont égales entr'elles.*
7. *Les quantités qui sont les moitiés d'une même quantité sont égales entr'elles.*
8. *Les choses qui se conviennent mutuellement sont égales entr'elles.*
9. *Le tout est plus grand que sa partie.*

L'axiome 8 ici joue un rôle fondamental car il relie les propriétés générales des grandeurs et la géométrie, l'égalité géométrique étant liée à la coïncidence, c'est à dire liée à un mouvement. Euclide utilise ce principe de superposition à travers les Elements. Dans le cas de ces lignes droites, il admet une application immédiate. Deux lignes sont égales si elles coïncident. Dans le cas des triangles, voyons la preuve de la proposition 4 dans le livre I :

PROPOSITION IV

Si deux côtés d'un triangle sont égaux à deux côtés d'un triangle chacun à chacun, et si les deux angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles sont aussi égaux, la base de l'un sera égale à la base de l'autre ; ces deux triangles seront égaux, et les autres angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles seront aussi égaux entr'eux.

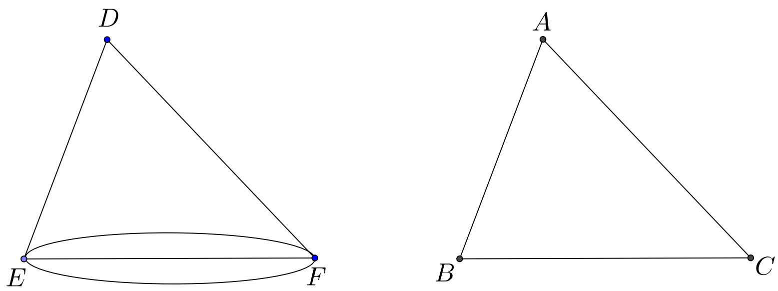


FIGURE *1.4*

[...] Car si le triangle ABC est appliqué sur le triangle DEF, le point A étant posé sur le point D, la droite AB sur la droite DE, le point

> *B tombera sur le point E, parce que la droite AB est égale à la droite DE : mais la droite AB s'appliquant exactement sur la droite DE, la droite AC s'appliquera de même exactement sur la droite DE, parce que l'angle BAC est égal à l'angle EDF, [...]*

La méthode utilisée par Euclide est "d'appliquer" le triangle ABC sur le triangle DEF, c'est-à-dire l'idée des grandeurs superposables. C'est la même idée dans le livre de Antoine Dalle et C. De Waele [15] qu'on retrouve dans les cours de géométrie en Belgique (à l'usage de l'Enseignement moyen et de l'Enseignement normal), la définition de coïncidence des figures est la suivante :

> *"On appelle glissement d'une figure plane à la surface d'un plan, le déplacement de cette figure lorsqu'elle garde toujours avec ce plan trois points communs.*
>
> *Toute figure plane représente deux faces opposées que l'on peut caractériser par les mots recto et verso.*
>
> *Dans le glissement, c'est toujours la même face qui reste appliquée sur le même plan. Concevons deux figures planes situées sur un même plan. Il peut arriver qu'il soit possible d'amener l'une des figures à coïncider avec l'autre, par un simple glissement à la surface du plan.*
>
> *Tel serait le cas pour les figures ABC et $A'B'C'$, si $A'B'C'$, conservant la même face appliquée sur le plan P, pouvait être déplacée de manière que le point A' vienne en A, B' en B, C' en C.*
>
> *Dans ce cas, les deux figures ABC et $A'B'C'$ sont superposables par glissement.*
>
> *Ou bien, il arrive que la second figure puisse coïncider avec la première, après avoir été préalablement retournée sur le plan de telle sorte que si le verso de cette figure coïncidait d'abord avec le plan, ce soit ensuite le recto qui soit appliqué sur le plan.*
>
> *Si la seconde figure ainsi retournée peut être amenée en coïncidence avec la première au moyen d'un glissement, on dira que les figures sont superposables par un retournement suivi d'un glissement.*
>
> *Par exemple, la figure $A''B''C''$ peut coïncider avec ABC (figure 5) lorqu'ayant été retournée dans le plan P en $A'B'C'$, cette dernière est amenée par glissement à s'appliquer parfaitement sur ABC.*
>
> *Deux figure sont égales, lorsqu'elles peuvent coïncider par superposition. Elles sont directement égales, si elles peuvent se superposer par un simple glissement à la surface du plan qui les contient, ex. ABC et $A'B'C'$; inversement égales, si elles peuvent se superposer par un retournement suivi d'un glissement, ex. ABC et $A''B''C''$ (figure 5)."*

15. DALLE et WAELE 1964, p. 18–19.

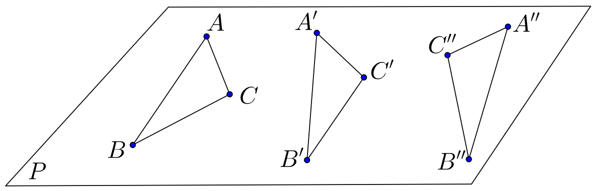


FIGURE *1.5*

Ayant posé une question concernant l'égalité, une question très similaire se pose maintenant à propos de la coïncidence : dans quelles conditions les choses ne coïncident-elles pas ? Comme l'a dit David Berlinski dans son livre *"The King of Infinite Space : Euclid and his Elements"* [16], dire que deux choses coïncident quand elles coïncident n'est pas une amélioration :

> *"To say that two things coincide when they coincide equally is not obviously an improvement. Having fastened on coincidence as crucial, Euclid may well have remembered that in his definitions, he affirms that a line, although it has length, has no width. What investigation might justify the conclusion that two lines without width coincide ? If no investigation, how could we say that two lines coincide even in length if we cannot say whether they coincide at all ?"*

Ayant annoncé la coïncidence comme cruciale, Euclide pourrait bien se souvenir que, dans ses définitions, il affirme qu'une ligne, même si elle a une longueur, n'a pas de largeur. Comment peut-on justifier la conclusion que deux lignes sans largeur coïncident ? De plus, comment peut-on dire que deux lignes coïncident même dans la longueur, si nous ne pouvons pas dire quand est-ce qu'elles coïncident ? Par conséquence, s'agit-il d'une définition de l'égalité géométrique, ou plutôt d'un critère de reconnaissance ? Le mouvement dont il est question ici est bien évidemment celui qui conserve les distances, autrement dit le mouvement du corps solide. La lecture de cet axiome comme définition de l'égalité géométrique à partir de la coïncidence montrerait ainsi un cercle vicieux. En fait, comme l'a dit le groupe Inter-Irem, [17] :

> *"C'est à travers une lecture physiciste qu'on peut comprendre le sens de cet énoncé, les Eléments ne proposent de définir ni l'égalité géométrique, ni le mouvement, ils en prennent acte à travers les processus qui permettent de les reconnaître et de les mesurer, en ce sens ils définissent*

16. BERLINSKI 2014, p. 23.
17. LE GROUPE INTER-I.R.E.M. ÉPISTÉMOLOGIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES 1982, p. 17.

> *(et c'est le rôle de l'axiome en question) un protocole opératoire mêlant à la fois le déductif et l'expérimental ; c'est ce que montre l'intervention explicite de l'axiome 8 dans certaines démonstrations où c'est tantôt la coïncidence qui prouve l'égalité, tantôt l'égalité qui prouve la coïncidence".*

Par exemple, dans la démonstrations de la proposition IV, [18] Euclide a dit que le côté AB est égal au côté DE donc si le point A étant posé sur le point D, la droite AB sur la droite DE, le point B tombera sur le point E, parce que la droite AB est égale à la droite DE. Autrement dit, il a utilisé l'égalité pour démontrer la coïncidence. Par contre, dans la même démonstration, Euclide a annoncé *"la base BC s'applique exactement sur la base EF et lui sera égale"*, c'est-à-dire elles sont égaux puisque elles coïncident. Ce vicieux est répété dans la démonstration de la proposition VIII quand Euclide veut démontrer l'égalité de deux triangles.

De plus, supposons que deux triangles sont séparés dans l'espace. Ils coïncident lorsque l'un d'entre eux est déplacé de sorte qu'il recouvre l'autre d'une manière telle que les deux triangles sont en parfaite coïncidence. Concernant les déplacements dans l'espace, Nicolas Bourbaki analyse dans son livre [19] le problème chez Euclide comme suit :

> *Les déplacements (ou mouvements, la distinction entre les deux notions n'étant pas claire dans l'antiquité - ni même beaucoup plus tard) sont connus d'Euclide ; mais, pour des raisons que nous ignorons, il semble éprouver une nette répugnance à en faire usage (par exemple dans les "cas d'égalité des triangles", où on a l'impression qu'il n'emploie la notion de déplacement que faute d'avoir su formuler un axiome approprié) ; toutefois, c'est à la notion de déplacement (rotation autour d'un axe) qu'il a recours pour la définition des cônes de révolution et des sphères, ainsi qu'Archimède pour celle des quadriques de révolution. Mais l'idée générale de transformation, appliquée à tout l'espace, est à peu près étrangère à la pensée mathématique avant la fin du $XVIII^e$ siècle ; et avant le $XVII^e$ siècle, on ne trouve pas trace non plus de la notion de composition des mouvements, ni à plus forte raison de composition des déplacements. Cela ne veut pas dire, bien entendu, que les Grecs n'aient pas été particulièrement sensibles aux "régularité" et "symétrie" des figures, que nous rattachons maintenant à la notion de groupe des déplacements ; leur théorie des polygones réguliers et plus encore celle des polyèdres réguliers - un des chapitres les plus remarquables de toute leur mathématiques - est là pour prouver le contraire.*

18. Si deux côtés d'un triangle sont égaux à deux côtés d'un autre triangle chacun à chacun, et si les deux angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles sont aussi égaux, la base de l'un sera égale à la base de l'autre ; ces deux triangles seront égaux, et les deux autres angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles seront aussi égaux entr'eux.

19. BOURBAKI 1984, p. 160–161.

De plus, est-ce que l'idée de coïncidence s'applique sur les modèles concrets ou abstraits de la géométrie euclidienne ? Pas les modèles concrets, sûrement, car les triangles physiques ne sont jamais complètement confondus, quelle que soit la façon dont ils sont déplacés. Comment diable deux objets physiques peuvent-ils coïncider parfaitement ? Il est également vrai que les triangles abstraits ne peuvent pas être déplacés car ils sont au-delà de l'espace et le temps. Intéressé par ce problème, Russell [20] a rejeté l'idée que dans la géométrie euclidienne, tout est en mouvement ou déplacé. Écrivant dans le supplément à l'édition de 1902 de l'Encyclopedia Britannica, Russell fait remarquer que ce qui est appelé un mouvement est simplement le transfert de notre attention d'une figure à l'autre. La coïncidence est une condition que les modèles concrets de la géométrie euclidienne ne peuvent pas satisfaire : ils ne sont jamais les mêmes. Et elle est aussi une condition à laquelle les modèles abstraits de la géométrie euclidienne ne répondent pas : ils ne peuvent pas être déplacés.

Voici ce qui a dit, à ce sujet, le groupe Inter-Irem : *"La géométrie euclidienne apparaît ainsi comme une physique théorique, elle s'appuie sur des données empiriques, celles-ci étant reformulées dans le cadre du développement déductif, et sa validité s'appuie sur ce fond expérimental à travers ce qu'on a appelé (avec toutes les ambiguïtés habituelles) l'intuition géométrique."*

C'est aussi ce que commente Bkouche (1988) [21] en ces termes :

> *Axiome fondateur de la géométrie, le principe de l'égalité par superposition s'appuie essentiellement sur la notion de mouvement ; la géométrie est ainsi fondée empiriquement sur le lien entre corps solide et mouvement, et c'est la coïncidence par transport d'un corps sur un autre qui permet de conclure à l'égalité de deux corps [. . .]. Le problème de la géométrie est alors d'énoncer a priori des conditions d'égalité, ce qui permettra d'éliminer le mouvement, remplacé par un raisonnement s'appuyant sur des critères d'égalité ainsi définis.*

En résumé, c'est évidemment cette idée de superposition de segments ou d'angles, d'abord dans les triangles, ensuite dans des configurations géométriques plus complexes dont les triangles sont des sous-figures, qui permet à Euclide de parler de segments égaux ou d'angles égaux et on sait que, quelle que sera plus tard la définition d'un longueur de segment ou d'amplitude d'angles, cette égalité demeurera. Cependant, on demeure insatisfait face à ce traitement de la superposition lié au mouvement. En effet, on ne sait pas s'il s'agit d'une définition de l'égalité géométrique, ou plutôt d'un critère de reconnaissance car les Eléments ne proposent de définir ni l'égalité géométrique, ni le mouvement et on garde l'impression d'un cercle vicieux entre les deux. Pour y voir clair, il faudra attendre non seulement la construction des réels mais aussi le remplacement du mouvement par la notion de

20. Berlinski 2014.
21. Bkouche 1988.

transformation géométrique ponctuelle autour de laquelle s'est organisée une catégorisation des propriétés géométriques en termes de groupes de transformations et d'invariants associés. C'est le programme d'Erlangen et nous y reviendrons.

Des configurations qui permettent de traiter de "rapports de longueurs"

Outre l'idée de superposabilité par mouvement, la géométrie des Grecs parvient à rendre compte de ce que appellerions aujourd'hui un rapport de longueurs dans une configuration particulière, celle de droites sécantes à un faisceau de droites parallèles, encore appelée configuration de Thalès.

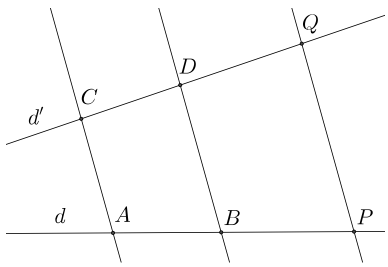


FIGURE *1.6*

Cette configuration est exprimée, dans un manuel (Dalle et De Waele, 1919) s'inspirant fortement des Eléments d'Euclide, en termes de *segments homologues proportionnels découpés par un faisceau de droites parallèles sur deux sécantes quelconques.* Avec la notation de la figure 6, cela conduit à $\frac{AB}{BP} = \frac{CD}{DQ}$ ou encore $\frac{AP}{AB} = \frac{CQ}{CD}$. Cette configuration jouera un rôle important dans l'ingénierie que nous avons construite.

Sans nier le rôle important dans l'histoire des mathématiques de la géométrie d'Euclide - rappelons ici que Cauchy cherchant des fondements rigoureux au calcul dit infinitésimal a déclaré vouloir le "couler dans le moule euclidien" afin de le rendre rigoureux - nous nous sommes polarisés, dans cette section, sur les critiques dont cette géométrie a fait l'objet. Mais ces critiques sont à regarder de près car elles ont donné lieu à une évolution de la géométrie au sein de laquelle la géométrie vectorielle a joué un rôle privilégié. Avant d'y arriver, nous nous penchons sur la réécriture, par Hilbert, de la géométrie d'Euclide.

1.2 Une reprise de la géométrie d'Euclide par Hilbert

Un des projets d'Hilbert est en effet de reprendre la géométrie élémentaire des Grecs pour en pallier tous les *"défauts"*. Il écrit *"Les fondements de la géométrie"* (1899) dans cette perspective. D'Euclide à Hilbert, on est témoin d'un changement total de paradigme : de ce qui est lié à l'intuition du monde sensible, on passe à ce qui est axiomatique et strictement structurel.

Avant d'analyser en détail les travaux d'Hilbert, on revient sur le huitième axiome d'Euclide :

"Les choses qui se conviennent mutuellement sont égales entr'elles."

Jacques Peletier du Mans en 1557 critique justement l'utilisation que fait Euclide de la superposition pour démontrer des théorèmes d'égalité. Schopenhauer en 1844 attaque l'axiome d'Euclide et argumente en remarquant que, soit les figures coïncidant sont automatiquement égales et alors aucun axiome n'est nécessaire, soit que la coïncidence est quelque chose d'entièrement empirique. L'axiome qui présuppose la mobilité des figures, qui sont des êtres matériels, doit rester en dehors de la géométrie.

Nous détaillons ce que fait Hilbert concernant les concepts d'axiomes dans la section suivante.

1.2.1 Axiomes chez Hilbert

Qu'est-ce qu'un axiome ? A cette question, les réponses varient au cours de l'histoire ainsi que l'illustre le groupe Inter-Irem [22] :

> *Pour Aristote, un axiome est "une vérité dont la possession est indispensable à qui veut apprendre n'importe quoi" ... "Il est nécessaire que la science démonstrative parte de prémisses qui soient vraies, premières, immédiates". Legendre donne comme définition dans ses Eléments : "un axiome est une proposition évidente par elle-même", cette conception de l'axiome est générale jusqu'à la fin du 19e siècle. Gauss écrit à Bolyai en 1799, "Si l'on pouvait démontrer l'existence d'un triangle dont la surface est plus grande que toute surface donnée, il me serait possible d'en tirer rigoureusement toute la géométrie. La plupart des géomètres accepteraient cela comme axiome, moi pas, car il serait fort possible que, si éloignés qu'on eut choisis les sommets du triangle, la surface restât tout de même inférieure à une certaine limite". Gauss refuse une proposition pour axiome car elle ne lui semble pas suffisamment évidente par elle-même et qu'il émet des doutes sur sa véracité. L'axiome doit être une vérité, comme la géométrie, c'est-à-dire rendre*

22. LE GROUPE INTER-I.R.E.M. ÉPISTÉMOLOGIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES 1982, p. 149.

> *compte de la structure de l'espace physique. L'axiome des parallèles est vrai ou faux c'est-à-dire que l'espace est euclidien ou non. C'est ainsi que la question se pose, même pour Bolyai quand il écrit à propos de sa "découverte" : "J'en puis dire aujourd'hui que ceci : c'est que, de rien, j'ai créé un nouveau monde", car l'autre est euclidien ? On a pu dire : "il est contraire au bon sens, et à la saine raison - à la morale aussi, comme pour la relativité - d'admettre l'existence de plus d'une parallèle". L'axiome est une vérité qui s'impose à l'esprit (en tout cas, à l'esprit du bon sens).*
>
> *Le changement d'attitude est manifeste chez Pasch et Hilbert. Il n'y a plus de proposition évidente mais des propositions que l'on accepte et d'autres que l'on démontre. Les axiomes ont été choisis parmi d'autres possibilités pour établir un "canevas logique" entre les concepts non définis. Les axiomes ne sont plus l'expression d'une vérité sur le monde sensible et du coup la portée de la géométrie est complètement changée. C'est ce qu'exprime Einstein quand il dit :*
>
> *"Pour autant que les théorèmes mathématiques s'appliquent à la réalité, ils ne sont pas sûrement valables, et pour autant qu'ils sont sûrs, ils ne s'appliquent pas à la réalité. La parfaite clarté sur ce point me semble avoir été mise à la portée de chacun, grâce au courant que les mathématiciens nomment l'axiomatique. Le progrès réalisé par l'axiomatique consiste en une claire et nette séparation de l'intuitif et du logique : d'après l'axiomatique seuls les faits logiques er formels forment l'objet de la science mathématique, mais non l'élément intuitif qui peut s'y rattacher.*
>
> *[...] Cette conception moderne de l'axiome purge la mathématique de ses éléments étrangers et dissipe les obscurités mystérieuses qui autrefois voilaient les fondements des mathématiques. Cette façon de présenter les choses rend aussi évident le fait que les mathématiques ne peuvent rien affirmer ni au sujet de nos représentations intuitives, ni au sujet des réalités matérielles."*

Donc, s'il y a une rupture avec Euclide, c'est bien chez Hilbert qu'elle se manifeste, la géométrie non-euclidienne du début du XIXe siècle transgressait les principes mais la méthode restait celle d'Euclide et c'est à cause de cette transgression et des résultats étranges que l'on obtenait que Gauss l'avait appelé non-euclidienne. En effet, Hilbert reconstruit toute la géométrie euclidienne au départ d'une axiomatique dans un contexte de pensée fondamentalement différent. Chez Hilbert, le critère de *"vérité"* ou d'adéquation d'un modèle mathématique à une supposée réalité est remplacé par le critère de *"non contradiction"*. Les termes primitifs ne renvoient en principe à aucune image antérieure ou réalité quelconque, ils n'ont de sens que celui donné par les axiomes qui les relient, ces axiomes eux-mêmes étant énoncés a priori. Il n'est donc pas question de vérité des théorèmes, mais de validité par rapport aux axiomes. Pour souligner cela, Hilbert précise que les termes primitifs de la géométrie que sont le *"plan"*, la *"droite"* et le *"point"*, pourraient être remplacés par les mots *"table"*, *"chaise"* et *"chope"* sans modifier que ce soit du travail théorique. Aucune intuition n'est donc requise a priori.

Chez Hilbert, les relations entre les objets géométriques sont précisées par les axiomes de congruence, d'incidence, d'ordre et de continuité qui remédient aux défauts de la géométrie d'Euclide. Comme l'a dit Dieudonné [23] :

> "*(...) Hilbert part d'axiomes entièrement explicités, à partir desquels tous les théorèmes d'Euclide peuvent être prouvés sans figures. Comme Euclide, Hilbert part d'objets non définis mais il les énumère de façon exhaustive : il utilise trois "objets primitifs" qui sont les points, les droites et les plans et trois relations primitives qui sont "appartenir à" (pour un point, à une droite ou à un plan), "être situé entre" (par exemple pour un point par rapport à deux autres, tous situés sur une même droite) et "être congrus" (par exemple pour deux segments). On se demande aussitôt comment on peut raisonner correctement en évitant de définir les choses dont on parle ; et en échappant ainsi à une régression indéfinie dans les définitions ? La réponse est simple : il suffit de s'astreindre à ne jamais énoncer sur les objets de la géométrie et leurs relations aucune proposition qui ne soit conséquence logique du système d'axiomes qui les régit (eux aussi énumérés exhaustivement). Comme l'a écrit Poincaré, on peut dire que ces axiomes constituent des définitions déguisées des objets et relations qui y figurent ; ces derniers se sont en quelque sorte évanouis, remplacés par le faisceau de leurs propriétés "axiomatiques". Hilbert a indiqué un moyen d'éviter des conclusions que pourrait suggérer l'intuition géométrique, mais qui ne dérivent pas des axiomes : ce serait de changer les noms usuels des objets de la géométrie et de leurs relations. Hilbert proposait de dire "table", "chaise" et "chope" pour "plan", "droite" et "point".*"

Le travail axiomatique engagé par Hilbert relève d'une posture que les philosophes qualifient de *"platonisme mathématique"*.

1.2.2 Le "platonisme mathématique" dans l'œuvre de Hilbert

Jacques Bouveresse (1998) [24] définit l'expression *"platonisme mathématique"* comme *"une conception philosophique qui attribue aux objets mathématiques une existence indépendante de nos activités de pensée et de connaissance."*

Dans son article *Sur le platonisme dans les mathématiques* paru en 1935 dans la revue *L'enseignement mathématique*, Bernays prend précisément l'exemple du travail d'axiomatisation de la géométrie d'Euclide par Hilbert :

23. DIEUDONNÉ 1986, p. 127.
24. BOUVERESSE 1998, p. 1.

> *On trouve, dans l'axiomatique de la géométrie, sous la forme que M. Hilbert lui a donnée, un exemple de cette façon de fonder une théorie. Si nous comparons l'axiomatique de M. Hilbert à celle d'Euclide, en faisant abstraction de ce qu'il manque encore plusieurs postulats chez le géomètre grec, nous remarquons qu'Euclide parle des figures à construire, alors que pour M. Hilbert les systèmes des points, des droites et des plans existent dès le commencement. Euclide postule : on peut relier deux points par une droite ; tandis que M. Hilbert énonce l'axiome : deux points quelconques étant donnés, il existe une droite sur laquelle ils sont tous les deux situés. "Existe" vise ici le système des droites.*
>
> *Cet exemple montre déjà que la tendance dont nous parlons consiste à envisager les objets comme détachés de tout lien avec le sujet réfléchissant. Cette tendance s'étant fait valoir surtout dans la philosophie de Platon, qu'il me soit permis de la qualifier du nom de "platonisme" (p. 53).*

Comme l'explique Job (2011) dans sa thèse [25], le *"platonisme mathématique"* s'inscrit dans la problématique ontologique où les objets mathématiques existent indépendamment des opérations mentales permettant de les atteindre. Deux visions au moins s'affrontent en ce domaine : l'idéalisme et le réalisme.

- *L'idéaliste considère que les objets mathématiques sont des idéalisations du monde sensible, obtenus par abstraction. Il n'y a pas de "réalité" si ce n'est les idées qu'on se donne.*
- *Le réaliste considère que les objets mathématiques mènent une existence propre dans un monde séparé du monde sensible mais qui n'en est pas moins réel (d'où le qualificatif réel et l'opposition à l'idéalisme). On peut y accéder grâce à une "intuition" non sensible, l'"intuition mathématique". C'est pour marquer l'opposition à l'idéalisme que la position réaliste est qualifiée de "platonisme mathématique" (même si en un autre sens, la position platonicienne, elle aussi, être qualifiée d'"idéaliste".*

Ce qui lie l'axiomatisation basée sur le critère de non-contradiction au platonisme est longuement analysé par Bouveresse :

> *Si la méthode axiomatique peut être qualifiée de "platonicienne", c'est parce qu'elle considère que la formulation d'un système d'axiomes appropriés suffit à garantir l'existence d'objets mathématiques d'une certaine sorte, la seule condition nécessaire pour cela étant celle de la non-contradiction. Pour un intuitionniste, bien entendu, l'existence mathématique ne peut en aucun cas être réduite à la simple non-contradiction. Mais il faut remarquer que Frege, qu'on a l'habitude de considérer*

25. Job 2011, p. 172–173.

> *comme un platonicien typique, refuse tout autant d'assimiler l'existence mathématique à la non-contradiction, qui en est une condition nécessaire, mais certainement pas suffisante. Dans sa polémique contre Hilbert, Frege ironise justement sur la tendance qu'ont les mathématiciens à croire qu'il est possible de faire exister des objets simplement par la formulation d'axiomes. Pour lui, les mathématiciens n'ont pas le pouvoir de créer quoi que ce soit, mais seulement de reconnaître des objets qui préexistent à leur activité. Et il est particulièrement absurde de s'imaginer que l'on peut créer des objets par la procédure de la définition, en particulier de la définition axiomatique. C'est ce que l'on peut appeler une conception magique des pouvoirs de la définition. De toute façon, il est clair que la méthode axiomatique peut être appelée platonicienne, si elle constitue un moyen approprié pour appréhender une réalité qui existait déjà indépendamment d'elle et c'est de cette façon que Gödel la considère, mais sûrement pas si, comme on le fait souvent, on la croit capable de créer d'une manière ou d'une autre, en quelque sorte par décret, des objets qui n'existaient pas encore. Ce qui est antiplatonicien est le fait de considérer que les objets mathématiques n'ont d'existence que pour autant qu'ils sont conçus comme constituant essentiellement le résultat d'une activité mathématique qui les engendre.*

Le *"platonisme mathématique"* est souvent présent d'une certain façon chez les mathématiciens, comme le soulignent Davis Phillip et Hersh Reuben (1981) [26]

> *Most writers on the subject seem to agree that the typical working mathematician is a Platonist on weekdays and a formalist on Sundays. That is, when he is doing mathematics he is convinced that he is dealing with an objective reality whose properties he is attemping to determine. But when challenged to give a philosophical account of the reality, he finds it easiest to pretend that he does not believe in it after all.*

Ou, comme l'explique Job (2011), le mathématicien professionnel est souvent *"platonicien"* et donc *"enclin à terme à "naturaliser" toute notion dont la définition est stabilisée. Une manifestation de cette "naturalisation" est la "transparence" des définitions qui en sont proposées. Notion et définition ne sont plus distinguées et les choix qui ont présidé à l'émergence d'une définition parmi d'autres sont passés sous silence."*

Cependant, comme l'analyse Job (2011), le *"platonisme mathématique"* n'est rien d'autre qu'une modélisation du savoir parmi d'autres. Et cette modélisation n'est pas sans conséquences sur la manière d'envisager l'activité mathématique : à l'image d'un archéologue découvrant le tombeau d'un pharaon, les savoirs mathématiques ne sont pas créés mais découverts.

26. PHILLIP et REUBEN 1981, p. 359.

> *Une telle vision s'oppose à la modélisation du savoir et de l'activité mathématique, proposée par la TSD/TAD* [27] *[...]. Le platonicien, dans sa version la plus dure, ne manquerait pas de nier le caractère institutionnel des savoirs. Un savoir est le même au travers des institutions où il intervient. Seuls les usages peuvent différer. La transposition n'existe pas. Il s'agit d'une fiction. Les savoirs sont donc parés d'une certaine "naturalité".*

Cette vision des mathématiques déteint sur la manière de les enseigner, selon un style *"déductiviste"*. A la section 3.4.1, nous contrasterons ce style ainsi nommé par Lakatos avec son style heuristique inspiré par une vision plus constructiviste des mathématiques.

1.2.3 L'égalité chez Hilbert

Concernant l'égalité des segments et des angles, Hilbert a donné un groupe d'axiomes nommé les *axiomes de congruence* (Le groupe III). D'abord, pour la congruence des segments, on a les trois axiomes suivants :

Definition. *"Segments stand in a certain relation to each other and for its description the words "congruent" or "equal" will be used."*

III.1. "If A, B are two points on a line a, and A' is a point on the same or on another line a' then it is always possible to find a point B' on a given side of the line a' through A' such that the segment AB is congruent or equal to the segment $A'B'$. In symbols $AB \equiv A'B'$.

"This axiom requires the possibility of constructing segments. Its uniqueness will be proved later. A segment was simply defined as a set of two points A, B and was denoted by AB or BA. In the definition the order of the two points was not specified."

III.2. "If a segment $A'B'$ and a segment $A''B''$ are congruent to the same segment AB, then the segment $A'B'$ is also congruent to the segment $A''B''$, or briefly, if two segments are congruent to the third one they are congruent to each other."

III.3. "On the line a let AB et BC be two segments which except for B have no point in common. Furthermore, on the same or on another line a' let $A'B'$ and $B'C'$ be two segments which except for B' also have no point in common. In that case, if

$$AB \equiv A'B' \quad and \quad BC \equiv B'C'$$

then

$$AC \equiv A'C'.$$

27. TSD : Théorie des situations didactiques de Guy Brousseau
TAD : Théorie anthropologique du didactique de Yves Chevallard

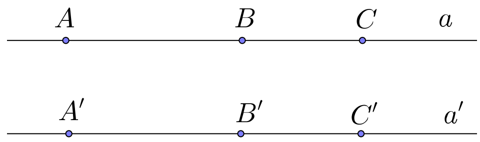


FIGURE *1.7*

En résumé, l'axiome 1 montre la possibilité de construire un segment avec un *"endpoint"* fixé et congruent avec un segment donné, l'axiome 2 montre la transitivité de la congruence des segments et l'axiome 3 supplée l'absence de mesures et donne celle de la somme des segments en disant que, si les deux segments sont congruents leurs sommes le sont.

Analysons ici les différences entre les travaux d'Eulide et d'Hilbert. Selon Robin Hartshorne [28], tandis que Euclide exprime certains de ses postulats en termes de construction, les axiomes de Hilbert sont existentiels.

Par exemple, pour l'axiome III.1 d'Hilbert, l'existence du point B' (figure 7) est considéré comme un axiome et Hilbert n'utilise pas la règle et le compas pour construire les choses. Par contre, Euclide a essayé de construire ce point B' mentionné dans l'axiome III.1 dans sa proposition 3, livre I. Voyons le détail :

PROPOSITION III

Deux droites inégales étant données, retrancher de la plus grande une droite égale à la plus petite.

Soient AB et C (fig. 8) les deux droites inégales données dont la plus grande soit AB : il faut de la plus grande AB retrancher une droite qui soit égale à la plus petite C.

Du point A conduisez une droite AD égale à la droite C (prop. 2) [29]*, et du centre A et avec un intervalle AD décrivez la circonférence DEF (dem. 3)* [30].

Puisque le point A est le centre du cercle DEF, la droite AE sera égale à la droite AD ; mais la droite C est égale à la droite AD : donc les deux droites AE, C sont égales chacune à la droite AD : donc la droite AE est égale à la droite C.

28. HARTSHORNE 2000.
29. D'un point donné conduire une droite égale à une droite donnée.
30. D'un point quelconque et avec un intervalle quelconque décrire une circonférence de cercle.

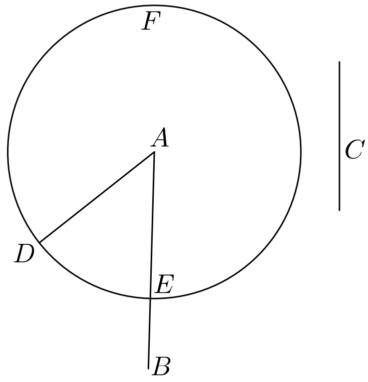


FIGURE *1.8*

> *Donc les deux droites inégales AB, C ayant été données, il a été retranché de la plus grande AB une droite AE égale à la plus petite C ; ce qu'il fallait faire.*

En résumé, Euclide utilise la construction pour démontrer les axiomes de congruence d'Hilbert tandis que chez Hilbert, on peut considérer les axiomes comme des donnés et aussi comme des outils pour établir d'autres propriétés, ses théorèmes devenant des constructions produites avec ces outils.

Ensuite, pour la congruence des angles, on a les deux axiomes suivants :

Definition. *"Angles stand in a certain relation to each other, and for the description of which the word "congruent" or "equal" will be used."*

III.4. Let $\angle(h,k)$ be an angle in a plane α and a' a line in a plane α' and let a definite side of a' in α' be given. Let h' be a ray on the line a' that emanates from the point O'. Then there exists in the plane α' one and only one ray k' such that the angle $\angle(h,k)$ is congruent or equal to the angle $\angle(h',k')$ and at the same time all interior points of the angle $\angle(h',k')$ lie on the given side of a'. Symbolically

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$$

. Every angle is congruent to itself, i.e.,

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h,k)$$

is always true.

Definition. *"An angle with a vertex B on one of whose sides lies a point A and on whose other side lies a point C will also be denoted by $\angle ABC$ or briefly $\angle B$."*

III.5. If for two triangles ABC and $A'B'C'$ the congruences

$$AB \equiv A'B' \quad , \quad AC \equiv A'C' \quad , \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

hold, then the congruence

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$$

is also satisfied.

On voit bien que, Hilbert a distingué clairement la congruence des segments et la congruence des angles car, en fait, il y a certaines relations équivalentes différentes parmi les grandeurs, par exemples la congruence des segments, la congruence des angles, la similarité des triangles.... Par contre, Euclide a donné toujours le mot *"égal"* pour tous les cas et donc, l'axiome 2 d'Euclide [31] devient problématique dans le cas d'angles puisque, en général, on ne peut pas définir la somme de deux angles. Voyons ici un exemple [32] :

> *If $\angle BAC$ is an angle, and if a ray $\overrightarrow{AD}$ lies in the interior of the angle $\angle BAC$, then we will say that the angle $\angle BAC$ is the sum of the angles $\angle DAC$ and $\angle BAD$*

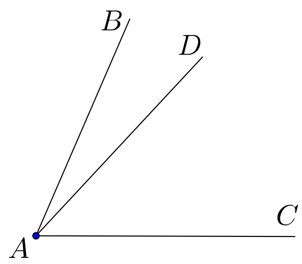


FIGURE *1.9*

> *However, if we start with the two given angles, there may not be an angle that is their sum in this sense. For one thing, they may add up to a straight line, or "two right angles" as Euclid says, but this is not an angle. Or their sum may be greater than* 180 deg, *in which case we get an angle, but the two original angles will not be the interior of the new angle.*

1.2.4 La position ou la question de l'ordre chez Hilbert

Les axiomes de l'ordre d'Hilbert sont une innovation frappante basée sur les travaux de Pasche en 1880. Ils ont été totalement omis dans Les Eléments d'Euclide.

31. Si à des quantités égales on ajoute des quantités égales, les tous seront égaux
32. HARTSHORNE 2000, p. 91.

Voyons maintenant ces axiomes suivants :

Definition. *"The points of a line stand in a certain relation to each other and for its description the word "between" will be specifically used."*

II.1. If a point B lies between a point A and a point C then the points A, B, C

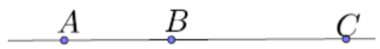


FIGURE *1.10*

are three distinct points of a line, and B then also lies between C and A.

II.2. For two points A and C, there always exist at least one point B on the line AC such that C lies between A and B

FIGURE *1.11*

II.3. Of any three points on a line there exists no more than one that lies between the other one.

Avec trois points étaient donnés, les axiomes II.2 et II.3 montrent l'existence et l'unicité d'un point qui est *"entre"* les deux autres.

Definition. *"Consider two points, A and B, on a line a. The set of the two points A and B is called a segment, and will be denoted by AB or by BA. The points between A and B are called the points of the segment AB, or are also said to lie inside the segment AB. The points A, B are called the end points of the segment AB. All others points of the line a are said to lie outside the segment AB."*

II.4. Let A, B, C be three points that do not lie on a line and let a be a line in the plane ABC which does not meet any of the points A, B, C. If the line a passes through a point of the segment AB, it also passes through a point of the segment AC, or through a point of the segment BC.

En résumé, quand Euclide ne voit que les figures qu'il dessine pour démontrer la position d'un point sur une droite, l'intersection des cercles..., avec les axiomes de l'ordre d'Hilbert, on a un fondement structuré pour examiner les problèmes concernant l'ordre des grandeurs ou leurs positions respectives qui est totalement absent dans les travaux d'Euclide.

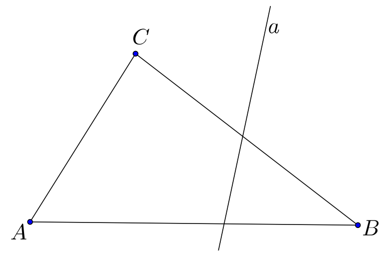


FIGURE *1.12*

Chez Hilbert, les relations sont précisées par les axiomes de congruence, d'incidence, d'ordre et de continuité qui remédient aux défauts de la géométrie d'Euclide. Effectivement, ils précisent, respectivement, l'idée de superposabilité de figures, les conditions d'existence des objets, leurs positions respectives et la relation "géométrique-numérique".

Une autre caractéristique principale d'Hilbert est le développement de la géométrie indépendamment de l'axiome d'Archimède. En fait, Hilbert a construit le calcul segmentaire de deux manières qu'on va analyser en détail dans la section suivante.

1.2.5 Le calcul segmentaire chez Hilbert et l'indépendance par rapport à l'axiome d'Archimède

Voyons d'abord les deux axiomes de la continuité chez Hilbert :

V.1. **Axiom of mesure or Archimedes'Axiom** *If AB and CD are any segments then there exists a number n such that n segments CD constructed contiguously from A, along the ray from A through B, will pass beyond the point B.*

V.2. **Axiom of line completeness** *An extension of a set of points on a line with its order and congruence relations that would preserve the relations existing among the original elements as well as the fundamental properties of line order and congruence that follows from Axioms I-III*[33] *is impossible.*

Concernant l'axiome d'Archimède, on a plusieurs versions. En voici une autre :

Des grandeurs sont dites avoir une raison entre elles lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.

C'est avec l'aide de cet axiome que la théorie de la proportion a été établie dans le livre V d'Euclide. Comme dit Paul Bernays[34], une conséquence de cet axiome est que, une fois un segment unitaire étant choisi, il correspond à un segment un nombre réel qui est sa mesure. Par conséquent, Hilbert a également appelé l'axiome

33. Ce sont des axiomes d'incidence, de l'ordre, de congruence et de parallèle d'Hilbert.
34. http ://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/bernaysHilbert-2003-05-17.pdf

d'archimède comme l'axiome de mesurement. Cependant, l'axiome d'archimède n'est pas suffisant pour construire un système d'axiomes complets car il manque l'axiome de complétude, comme dit P. Bernays [35] :

> *"The completeness axiome is not a consequence of Archimedes' Axiom. In fact in order to show with the aid of Axiom I-IV that this geometry is identical to the ordinary analytical "Cartesian" geometry, Archimedes' Axiom by itself is insufficient. However, by invoking the completeness axiom, although it contains no direct assertion about the concept of convergence, it is possible to prove the existence of a limit that corresponds to a Dedekind cut as well as the Bolzano-Weierstrass theorem for the existence of condensation points, whereby this geometry appears to be identical to Cartesian geometry.*
> *By the above treatment the requirement of continuity has been decomposed into two essentially different parts, namely, into Archimedes' Axiom whose role is to prepare the requirement of continuity and into the completeness axiom which forms the cornerstone of the entire system of axioms."*

En résumé, concernant la continuité dans la géométrie, il faut les deux axiomes nommés l'axiome d'Archimède et l'axiome de complétude. Le rôle de l'axiome d'Archimède est de préparer l'exigence de continuité mais cet axiome lui-même est insuffisant pour prouver l'existence d'une limite ainsi que l'existence de points de condensation et c'est la raison pour laquelle il faut l'axiome de complétude qui constitue la pierre angulaire de l'ensemble du système d'axiomes.

Dans ses travaux, Hilbert d'abord montre l'indépendance de l'axiome d'Archimède avec les autres axiomes et donc, construit une géométrie non-archimédienne dans laquelle tous ses axiomes sont satisfaits sauf l'axiome d'Archimède. Ensuite, il construit le calcul segmentaire qui nous permet de penser à un segment comme à un ensemble des points et d'élaborer la géométrie par les méthodes de la géométrie analytique, même s'il n'utilise à aucun moment les vecteurs.

Son calcul segmentaire est construit selon deux cas différents.

ZOOM SUR LE CALCUL SEGMENTAIRE D'HILBERT

a. Dans un plan métrique

Une méthode fonctionne dans le cadre de la géométrie du plan métrique. Hilbert définit la somme des segments et le produit de segments, après l'établissement d'un segment unitaire, par une construction parallèle. Voici le détail :

> *" In the arithmetic of segments, the word "equal" will be used instead of "congruent" and the sign "=" instead of "$\equiv$".*

35. BERNAYS 1971, p. 28.

If A, B, C are three points on a line and B lies between A and C the sum of the two segments $a = AB$ and $b = BC$ is denoted by $c = AC$ and is expressed as $c = a + b$.

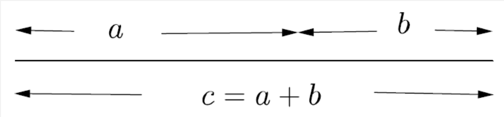


FIGURE *1.13*

The segment a and b are said to be smaller than c. Symbolically,

$$a < c, \quad b < c,$$

and c is said to be larger than a and b. Symbolically,

$$c > a, \quad c > b.$$

[...] For the addition of segments thus defined, the associative law $a + (b + c) = (a + b) + c$ as well as the commutative law $a + b = b + a$ is valid.
In order to define geometrically the product of a segment a by a segment b the following construction will be used : Choose any segment which remains fixed during the entire discussion and denote it by 1. Now lay off the segment 1 and b from the vertex O on the side of o right triangle. Then lay off the segment a on the other side. Join the end points of the segments 1 and a with a line and through the and point of the segment b draw a parallel to this line. It will delineate a segment c on the other side. This segment is then called the product of the segment a by the segment b and is denoted by

$$c = ab.$$

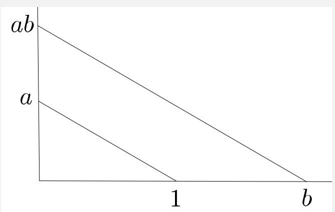


FIGURE *1.14*

[...] It will be shown that the multiplication of segments thus defined follows the commutative law $ab = ba$ and the associative law $a(bc) = (ab)c$. "

Avec ce calcul segmentaire, une base élémentaire de la théorie des proportions et aussi de la géométrie analytique est obtenue, comme suit :

> "*With the aid of the segment arithmetic established above, Euclid's theory of proportion can satisfactorily be developed in the following manner without the use of Archimedes' Axiom :*
> **Definition.** *If a, b, a', b' are any four segments let the proportion*
>
> $$a : b = a' : b'$$
>
> *denote nothing else but the segment equation*
>
> $$ab' = ba'.$$

Autrement dit, on donne la définition des rapports de segments en utilisant leurs produits définis auparavant. Hilbert considère ensuite la direction d'une ligne et les coordonnées d'un point dans un repère orthonormé comme suit :

> *[...] By the axioms of order it is easy to distinguish on a line a "positive" and a "negative" direction. A segment AB that has been denoted thus far by a will continue to be denoted by a only if B lies in the positive direction of A; otherwise it will be denoted by $-a$. A point will be denoted as the segment 0. The segment a is said to be "positive" or greater than 0, symbolically $a > 0$; the segment $-a$ is said to be "negative" or less than 0, symbolically $-a < 0$.*

Bref, on a les deux directions positive et negative pour une ligne. Ensuite, Hilbert donne la définition des coordonnées d'un point dans un repère orthonormé et donne l'équation d'une droite qui passe par l'origine O, après il généralise ce cas et donne l'équation d'une droite quelconque. Voici le détail :

> *[...] In the plane α assume now two mutually perpendicular lines through the point O as fixed coordinate axes and lay off from O any segments x, y on the two lines. Then erect perpendiculars to these line at the end points of the segments x, y and determine their point of intersection P. The segments x, y are then called the coordinates of the point P. Every point in the plane α is uniquely determined by its coordinates x, y which can be positive or negative segments or 0.*
> *Let l be any line in the plane α that passes through the point O and C with coordinates a, b. If x, y are the coordinates of any point on l then it is easily found by Theorem 42 [a] that*
>
> $$a : b = x : y$$

or that

$$bx - ay = 0$$

is the equation of the line l. If l' is a line parallel to l that delineates the segment c on the $x-$axis then the equation of the line l' can be obtained by substituting the segment $x - c$ for the segment x in the equation for the line l. The desired equation then becomes

$$bx - ay - bc = 0.$$

From these developments it is easy to conclude in a way that is independent of the Archimedean Axiom that every line in a plane can represented by means of a linear equation by the coordinates x, y and conversely, every such linear equation, in which the coefficients are segments in the given geometry, represents a line.

The corresponding results in space geometry can be shown just as easily.

The further development of geometry can be done from now on by the ordinary methods that are used in analytic geometry."

Ce premier calcul segmentaire est construit avec l'aide du théorème de Pascal [b]

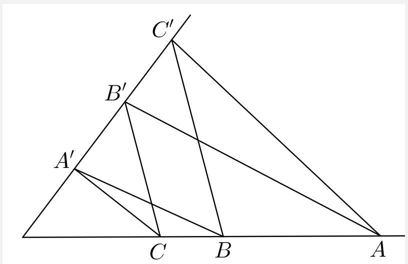


FIGURE *1.15*

car on doit utiliser ce théorème pour construire et démontrer les propriétés. Un autre calcul segmentaire est fondé sur le théorème de Desargues. Voici ce calcul :

a. Dans un plan affin

Le deuxième calcul segmentaire d'Hilbert indépendant de l'axiome d'Archimède se situe en géométrie affine du plan. La somme et le produit de segments sont définis par des structures élémentaires parallèles et, à l'aide du théorème Desargues, les lois de calcul sont prouvés. Voici le détail :

> *"Take two fixed lines in the plane which intersect at the point O and consider only such segments whose initial points are O and whose points lie anywhere on these two fixed lines. Denote the point O itself as the segment 0. Symbolically,*
>
> $$OO = 0 \quad \textit{or} \quad 0 = OO.$$
>
> *Let E and E' be fixed points each on one of two fixed lines through O. Denote the two segments OE and OE' as the segment 1. Symbolically,*
>
> $$OE = OE' = 1 \quad \textit{or} \quad 1 = OE = OE'.$$
>
> *Call the line EE', the unit line for short."*

Bref, on donne un repère affin avec une origine et on donne les unités dans chaque axe. Ensuite, on donne la définition de l'égalité des segments qui se situent sur les axes (en fait on ne considère que ce type de segments) et leur somme comme suit :

> *[...] Furthermore, if A and A' are points on the lines OE and OE', respectively, and if the connecting line AA' is parallel to EE' consider the segments OA and OA' to be equal. Symbolically,*
>
> $$OA = OA' \quad \textit{or} \quad OA' = OA.$$
>
> *In order to define the sum of the segment $a = OA$ and $b = OB$ lying on OE construct AA' parallel to the unit line EE' and draw a parrallel to OE through A', and through B a parallel to OE'. These two parallels intersect at a point A''. Finally draw a parallel to the unit line EE' through A''. It meets the fixed lines OE and OE' at the points C and C', respectively. Then call $c = OC = OC'$ the sum of the segment $a = OA$ and the segment $b = OB$. Symbolically,*
>
> $$c = a + b \quad \textit{or} \quad a + b = c.$$

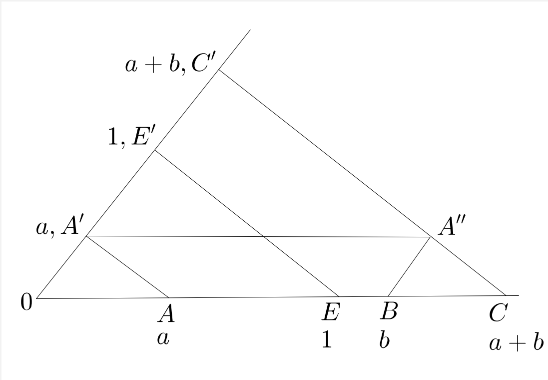


FIGURE *1.16*

> *[...] The point C which determines the sum $a+b$ on the line on which A and B lie is then independent of the adopted unit line EE' [...]*

On continue avec la définition du produit de segments, voici le détail :

> *In order to define the product of a segment $a = OA$ and a segment $b = OB$ the same construction outlined in section 15[c] will be utilized, except that now the sides of the right angle will be replaced by the two fixed lines OE and OE'. Consequently the construction is as follows : Determine the point A' on OE' so that AA' becomes parallels to the unit line EE'. Join E with A' and through B draw a parallel to EA'. This parallel meets the fixed line OE' at the point C'. Call $c = OC'$ the product of the segment $a = OA$ and the segment $b = OB$. Symbolically,*
>
> $$c = ab \quad or \quad ab = c.''$$

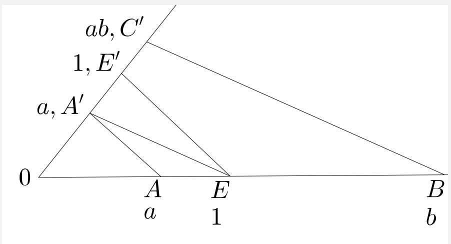


FIGURE *1.17*

a. If two parallels delineate on the sides of any angle the segments a, b, and a', b' then the proportion $a : b = a' : b'$ holds. Conversely, if four segments a, b, a', b' satisfy this proportion and a, a' and b, b' are constructed in pairs on the sides of any angle then the lines joining the end points of a, b and a', b' are parallel.

b. **Pascal's theorem.** Let A, B, C, and A', B', C', be two sets of points on two intersecting lines that are distict from the point of intersection of the lines. If CB' is parallel to BC' and CA' is parallel to AC' then BA' is also parallel to AB'.

c. C'est exactement ce qu'on a fait au dessus en géométrie metrique.

En résumé, le calcul segmentaire chez Hilbert autorise à penser les objets géométriques de manière numérique en donnant des assisses théoriques au lien entre la géométrie synthétique et la géométrie analytique initiée par Descartes. De plus, le calcul segmentaire chez Hilbert conduit à penser à un segment comme un ensemble de points, ce qui est étranger à Euclide et sa méthode ouvre une voie à la pensée des objets de tous les champs comme des *"nombres"* qui servent de coordonnées pour les géométries associées. Avec la réécriture de la géométrie d'Euclide par Hilbert sur base d'une nouvelle conception de la rigueur, tous les défauts de la géométrie d'Euclide sont par conséquent corrigés.

Soulignons, de plus, que l'approche axiomatique d'Hilbert annonce le structuralisme en introduisant les objets géométriques fondamentaux que sont le point, la droite et le plan par les axiomes qui régissent les relations entre ces objets indépendamment de leur nature. Il en va de même du programme d'Erlangen en géométrie. Nous en parlons à la section suivante.

1.3 Le programme d'Erlangen

Un autre événement dans l'histoire de la géométrie a été le programme d'Erlangen de Felix Klein. Ce programme est la thèse de Felix Klein, soutenue en 1872. Le travail de Klein arrive après un épanouissement des mathématiques et en particulier de la géométrie, survenu dans le 19ème siècle avec la création de la géométrie projective, de la géométrie non euclidienne, etc.... Dans ce programme, tous les acquis géométriques sont restructurés en termes de groupes transformations auxquels sont associés des invariants spécifiques. Il conduit à une classification des géométries en fonction du type de propriétés étudiées : la géométrie métrique, la géométrie angulaire ou euclidienne, la géométrie affine, etc. En détail, comme l'analyse Jean-Pierre Kahane (2002) une géométrie consiste, pour l'essentiel, en la donnée d'un ensemble X et d'un groupe G de transformations de X et les éléments de G sont les transformations *"permises"* dans la géométrie en question et elles caractérisent cette géométrie.

> *Il s'agit, par exemple, des isométries pour la géométrie euclidienne plane, ou des transformations affines pour la géométrie affine plane, ou encore des homographies pour la géométrie projective. Le plus souvent, l'ensemble X est muni de données supplémentaires, par exemple un ensemble $\mathcal{D}$ de parties remarquables (les droites, les cercles, ...) et les transformations de G conservent globalement $\mathcal{D}$. Les propriétés relatives à la géométrie en question (propriétés affines, euclidiennes, projective) sont celles qui sont conservées dans l'action du groupe, ainsi que le dit Klein :*
>
> *"Étant donné une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe."*
>
> *Par exemple, pour citer trois résultats célèbres, Pappus, qui n'emploie que les notions de concourance et d'alignement, est un théorème projective tandis que Thalès, qui utilise des parallèles, est un résultat affine et Pythagore, qui met en jeu longueurs et orthogonalité, est un théorème euclidien. On peut dire, en quelque sorte, que chaque théorème possède une (et une seule ?) niche écologique privilégiée, qui correspond au carde dans lequel il s'énonce avec le plus de généralité.* [36]

Il est à noter que, tout comme Hilbert, Klein est amené à penser les objets géométriques comme ensembles de points et les transformations non pas comme des mouvements des objets physiques mais comme des transformations ponctuelles qui opèrent sur tous les points du plan et de l'espace. En effet, il fait apparaître explicitement l'espace comme ensemble de points muni d'une certaine structure (ici l'action d'un groupe de transformations) en même temps qu'il met en évidence la

36. KAHANE 2002, p. 18–19.

notion d'équivalence de structures, ce qui va permettre de dégager le raisonnement géométrique de l'intuition spatiale.

La reconnaissance du rôle des groupes dans l'unification des géométries dans le programme d'Erlangen de Klein et l'idée que deux groupes isomorphes sont essentiellement les mêmes participent au développement de la structure de groupe que Galois (1811-1832) avait exploitée dans sa théorie des équations algébriques. Tout cela contribue à l'émergence de cette première structure algébrique abstraite, ceci avant le début du XXe siècle. Autrement dit, Klein annonce aussi tout comme Hilbert une refonte des mathématiques qu'étudieront les Bourbakistes dans l'esprit du structuralisme. C'est ce que nous analysons en détail dans la section suivante.

1.4 Le structuralisme chez Nicolas Bourbaki

On appelle structuralisme un courant de pensée dépassant les mathématiques et en vigueur, en plusieurs domaines dont les sciences sociales, au milieu du XXe siècle. Il consiste à étudier les systèmes, économiques par exemple en mettant l'accent, non pas sur la nature de ses objets, mais sur les relations qui les lient.

En mathématique, l'idée du structuralisme ne vient pas des Bourbakistes. Conformément à ce que nous avons développé plus haut, on le trouve à l'oeuvre chez Hilbert qui s'en explique dans une lettre à Frege en 1900 :

> *Un concept ne peut être fixé logiquement que par ses relations à d'autres concepts. Ces relations, formulées en certaines expressions, que j'appelle axiomes, arrivant ainsi à la conclusion que les axiomes [...] sont la définition du concept. Je n'ai pas inventé cela parce que je n'avais rien de mieux à faire, mais parce que je m'y suis retrouvé forcé par la rigueur dans une inférence logique et dans la construction logique d'une théorie. Je suis devenu convaincu que les parties le plus subtiles des mathématiques [...] peuvent être traitées avec certitude de cette manière, sinon on ne fait que tourner en rond.* [37]

Selon ce point de vue, un objet mathématique est défini uniquement par ses relations avec d'autre objets. Ces relations forment une structure, et c'est l'étude de cette structure qui devient le coeur de l'activité mathématique.

En fait, le nom de Hilbert est souvent associé à l'application de l'approche axiomatique moderne à des disciplines mathématiques diverses. La première publication dans laquelle Hilbert a appliqué la méthode axiomatique moderne était son livre *Grundlagen der Geometrie* (1898) et le but de l'analyse axiomatique que Hilbert a présenté dans ce livre était d'élucider la structure logique d'une discipline donnée. Par conséquent, on peut savoir clairement quels théorèmes découlent de quelles hypothèses, quelles hypothèses sont indépendantes des autres, et quelles

37. RIVENC 1992, p. 227.

hypothèses sont nécessaires afin d'en tirer l'ensemble des connaissances dans cette discipline. Autrement dit, nous avons une meilleure compréhension des théories mathématiques ainsi qu'une entité mathématique concrète et bien établie.

Dans sa méthode axiomatique, Hilbert ne cherche pas à définir des concepts de base (comme les points et lignes) que la théorie en question discutera. Ces concepts de base sont traités comme des entités abstraites dont la nature et la signification concrète sont négligeables. Pour illustrer cela, Hilbert ironise que les points, les lignes et les plans utilisés dans les axiomes de la géométrie pourraient tout aussi bien être appelés des chaises, des tables et des bouteilles de bière. Seules les relations entre les entités fondamentales définies par les axiomes sont importants. Les propriétés déduites à partir d'une telle théorie formelle sont tout à fait générales, car ils pourraient s'appliquer à un ensemble très différent d'objets, aussi longtemps que les axiomes pour cet ensemble d'objets sont les mêmes.

Au 20ème siècle, le caractère structurel des mathématiques est privilégié par les mathématiciens. S'inspirant entre autres des travaux d'Hilbert, des jeunes mathématiciens, réunis dans un groupe surnommé Nicolas Boubaki, focalisent leur travail sur l'axiomatique, dans le but de construire une théorie de base propre à constituer les fondements de toutes les branches des mathématiques ainsi regroupées derrière ce que l'on appelle désormais LA mathématique. Et ce qu'ils disent d'une structure mathématique rend bien compte de cette idée en faisant écho au point de vue de Hilbert sur la géométrie :

> *On peut maintenant faire comprendre ce qu'il faut entendre, d'une façon générale, par une structure mathématique. Le trait commun des diverses notions désignées sous ce nom générique, est qu'elles s'appliquent à des ensembles d'éléments dont la nature n'est pas spécifiée ; pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations, où interviennent ces éléments [...] On postule ensuite que le ou les relations données satisfont à certaines conditions (qu'on énumère) et qui sont les axiomes de la structure envisagée.* [38]

Voyons aussi ce que dit J. A. Dieudonnée dans son exposition à l'Institut roumain de mathématiques en 1968 :

> *Bourbaki does not attempt to innovate mathematics, and if a theorem is in Bourbaki, it was proved 2, 20, or 200 years ago. What Bourbaki has done is to define and generalize an idea which already was widespread for a long time. Since Hilbert and Dedekind, we have known very well that large parts of mathematics can develop logically and fruitfully from a small number of well-chosen axioms. That is to say, given the bases of a theory in an axiomatic form, we can develop the whole theory in a more comprehensible way than we could otherwise. This is what gave the general idea of the notion of mathematical structure.*

38. BOURBAKI 1950, p. 40.

> *[...] We realized very quickly that despite introducing the idea of structure, which was meant to clarify and separate things, mathematics refused to separate into small pieces. On the other hand, it was clear that the old divisions, Algebra, Arithmetic, Geometry, Analysis were out of date. [...] One could say that the great idea in mathematics have come when several very different structures met.*

Pour Bourbaki, le concept de la méthode axiomatique est le même que celui d'Hilbert. Cependant, pour Bourbaki, cette méthode est indissociable de l'étude des structures. Bourbaki utilise le concept de la méthode axiomatique et les trois concepts de structures-mères pour dépeindre les mathématiques universelles. Bourbaki explique que :

> *"In the nucleus are the main types of structures [...], the mother-structure, one could say. Each of these types already contains quite a wide variety of objects, since one must differentiate the most general structure, the one with the least axioms, from the ones obtained by adding axioms, which each yield a crop of new results [...]. Beyond this innermost nucleus are the structures that one could describe as complexe. These involve one or more mother-structures that aren't merely justaposed [...] but combined organically by one or more axioms connecting them [...]. Finally, farther out are the actual theories, where the elements of the sets in question, until now left undefined within the general structures, gain individual chracteristics. This is where the classical mathematical theories are found*[39]*."*

Bourbaki a donc proposé de reconstruire et repenser toutes les mathématiques à partir des structures fondamentales qu'ils appellent *"structures-mères"*, dont les structures algébriques, les structures topologiques et les structures d'ordre et on va représenter, grâce à elles, l'ensemble de l'univers mathématique en les combinant et en les enrichissant de nouveaux axiomes.

> *Au lieu des compartiments bien délimités de l'Algèbre, de L'Analyse, de la Théorie des Nombres et de la Géométrie, nous verrons, par exemple, la théorie des nombres premiers voisiner avec celle des courbes algébriques, ou la géométrie euclidienne avec les équations intégrales, et le principe ordonnateur sera la conception d'une hiérarchie de structures, allant du simple au complexe, du général au particulier.* [40]

Le concept de structure est présenté dans le livre "Théorie des ensembles" de la série *"Eléments de mathématique"* de Bourbaki. La théorie des ensembles a été conçue pour fournir une base formellement rigoureuse pour l'ensemble du traité

39. MASHAAL 2006, p. 79.
40. BOURBAKI 1950, p. 43.

dont la notion de structure représentait une étape importante. Cependant, le résultat est différent, comme analyse Leo Corry [41] :

> *[...] The concept of structure has no working significance outside the discussion of Chapter IV in Theory of Sets. [...] Didactically and mathematically, Theory of Sets can be totally skipped over, for it has neither heuristic value nor logical import for Bourbaki's treatise.*

Aujourd'hui, aucune discussion des structures mathématiques n'est complète sans la discussion de la théorie des catégories. Introduite vers 1942 par Samuel Eilenberg (qui deviendra plus tard un membre de Bourbaki) et Saunders MacLane, la théorie des catégories fournit un cadre abstrait et général pour décrire de nombreuses situations mathématiques et la connexion entre elles. Cette théorie est plus générale que les structures décrites par Bourbaki mais Bourbaki n'a pas réussi à utiliser des catégories dans son traité, malgré de nombreuses discussions du groupe et les projets préliminaires sur le sujet. Une des raisons est expliquée par Pierre Cartier [42]

> *Bourbaki got away with talking about categories without really talking about them. If they were to redo the treatise, they would have to start with category theory. But there are still unresolved problems about reconciling category theory and set theory.*

Bref, en suivant Hilbert, Bourbaki a adopté la méthode axiomatique de présentation des mathématiques, mais comme dit Christian Houzel [43] "*La méthode axiomatique avait été élaborée par Hilbert pour analyser les fondements de la géométrie élémentaire et elle s'était développée en algèbre ainsi qu'en topologie générale. Bourbaki voulait l'étendre à l'ensemble des mathématiques.*" En fait, l'idée de l'unité des mathématiques est très à la mode dans les années trente, comme explique Christian Houzel :

> *Pour comprendre ce qui s'est passé, il faut resituer Bourbaki dans la conjoncture mathématique de l'époque. En effet la période 1935-1965 où se situe l'activité de Bourbaki est assez particulière dans l'histoire des mathématiques. Elle se caractérise par un effort des mathématiciens pour remettre en chantier les bases de leurs théories et pour construire de nouvelles machineries théoriques dans l'espoir qu'elles permettraient d'aborder plus efficacement les problèmes sur lesquels on butait alors. Ce mouvement touchait presque tous les secteurs mathématiques et il se dévéloppait dans le monde entier et pas seulement en France* [44].

41. CORRY 1992, p. 338.
42. Cité par MASHAAL 2006, p. 84.
43. HOUZEL 2004, p. 56.
44. Ibid., p. 54.

L'unité des mathématiques, la méthode axiomatique et l'étude des structures ne sont pas les idées des seuls Bourbakistes. Les mathématiciens se sont toujours demandés si les mathématiques sont un seul sujet unifié. Par exemple, la question se pose en essayant simplement de comprendre les liens entre l'algèbre et la géométrie (par exemple, pourquoi un ensemble de nombres réels consécutifs peut être identifié avec les points sur un segment de droite ?). La méthode axiomatique est entrée dans les mathématiques modernes à la fin du XIXe siècle avec des œuvres d'Hilbert et d'autres. Pour l'étude des structures, au moins des structures algébriques, Bourbaki a été fortement influencée par le travail de Van Der Waerden.

Donc, le rôle de Bourbaki dans ces questions était d'insister sur ces trois notions, de les relier, pour essayer d'étendre le concept de structure émergente dans le travail des algébristes allemands à l'ensemble des mathématiques. Nous pouvons également conclure que le travail de Bourbaki avec le concept de méthode axiomatique est une continuation directe de l'héritage intellectuel de Hilbert.

On reproche également parfois à Bourbaki son rôle dans la réforme des "maths modernes" mise en place au lycée autour des années 1970. Cette réforme fut ambitieuse en théorie, mais abstraite jusqu'à l'absurde dans ses programmes et se solda par un échec. On y viendra après.

En résumé, même si certaines critiques sont formulées sur le concept de structure, le travail de Nicolas Bourbaki renouvelle complètement la vision des mathématiques et inspire une présentation systématique et unifiée des parties fondamentales des mathématiques selon la méthode axiomatique inspirée de Hilbert. Ce travail a joué un rôle important aussi dans l'évolution de l'enseignement des mathématiques au secondaire et la manière de concevoir leur apprentissage. Nous y viendrons.

Avant cela, nous montrons que le point de vue adopté par Bourbaki sur les mathématiques en général engage, en particulier, un nouveau regard sur la géométrie dont la place se réduit à un chapitre de l'algèbre linéaire, théorie "multi-sens" par excellence qui offre un formalisme adéquat, de type vectoriel, pour définir et étudier les objets des géométries métrique, angulaire et affine.

1.5 La subordination de la géométrie à l'algèbre linéaire

Pour comprendre les enjeux de cette subordination, nous irons des origines de la géométrie analytique à l'émergence de l'algèbre linéaire en passant par celle de formalismes modélisant des objets géométriques indépendamment du choix de repère.

1.5.1 La géométrie analytique : succès et critiques

Historiquement, les liens entre l'algèbre et la géométrie ne commencent à apparaitre qu'avec les débuts de la géométrie analytique. Les premiers à utiliser des outils analytiques dans l'étude de la géométrie sont Descartes et Fermat au 17ème siècle. La méthode analytique obtient rapidement beaucoup de succès auprès la communauté des mathématiciens comme ayant un grand pouvoir de simplification et d'unification car elle permet de résoudre de nombreux problèmes de géométrie. En effet, les outils analytiques permettent de classifier les courbes à partir de leur équation et donc de catégoriser les problèmes de géométrie eux-mêmes.

La recherche d'invariants, d'un repère à l'autre, mène de manière assez naturelle à opérer des changements de coordonnées (soit de repères) et conduit par là au développement de l'étude de ce qui était à l'époque appelé *substitutions linéaires*, ou, en termes modernes, les transformations linéaires. Comme le dit J.-P. Kahane (1999) dans la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques :

> *Même si, suivant Klein, on pense à une géométrie comme à un ensemble muni d'un groupe de transformations, encore faut-il en construire. Pour ce faire, de nombreuses approches ont été mises en œuvre dans l'histoire. [...] Une autre approche, plus récente, est celle de la géométrie analytique, initiée par Descartes, qui utilise les coordonnées. Dans ce cadre, les groupes de transformations apparaissent essentiellement comme les changements de coordonnées que l'on s'autorise dans la géométrie en question.*

En gros, l'algébrisation de la géométrie permet de traiter les problèmes géométriques de manière plus organisée et générique et est considérée, de ce fait, comme un progrès. Cependant, malgré ce succès, des critiques diverses sont exprimées sur la méthode analytique. Primo, sur le fait qu'elle mène à des calculs lourds et alambiqués qui cachent le sens géométrique de la question et qu'elle ne favorise donc pas le recours à l'intuition géométrique. Secundo, d'un point de vue conceptuel, certains considèrent comme inacceptable l'idée d'utiliser des nombres dans la résolution d'un problème géométrique, d'autant que ceux-ci font apparaître une part d'arbitraire dans le choix du système de coordonnées. Voici l'explication de Nicolas Rouche [45] :

> *La géométrie analytique, [...] y arrive, mais avec deux inconvénients. Tout d'abord le repère choisi pour passer d'une figure aux nombres (c.-à-d. aux coordonnées) est arbitraire. Bien entendu, dans chaque problème, on le situe au mieux pour simplifier les calculs, ce qui se fait en observant les symétries de la figure. Néanmoins, il est toujours quelque chose d'extérieur, ajouté à la figure. On exprime aussi cela en disant*

45. Rouche 2002, p. 523.

> *que le repère est un élément extrinsèque à la situation géométrique à l'étude.*
> *Le second inconvénient de la géométrie analytique, c'est qu'une fois le problème mis en coordonnées, on cherche la solution par calcul et que bien souvent, en appliquant les règles de l'algèbre, on oublie la situation géométrique, on s'en écarte en imagination. Certes on n'applique pas n'importe quelles règles de calcul dans n'importe quel ordre. On cherche bien à aller vers le but proposé. Mais en cours de route, il est souvent impossible pratiquement de saisir le sens géométrique des expressions algébriques par lesquelles on passe. Le retour à la figure, évidemment nécessaire, se fait à la fin.*

1.5.2 La recherche d'un formalisme indépendant du choix de repère

Comme le développe Lebeau dans sa thèse [46], historiquement, le vecteur a d'abord été qualifié de résumé des coordonnées avant d'être investi dans des recherches de calcul absolu. Parmi les personnes critiquant la méthode analytique, notamment parce qu'elle demande de mettre en place un système de coordonnées bien souvent étranger à la configuration de départ, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) songe à une nouvelle algèbre géométrique qui agit directement sur les éléments des figures, tels que les points. Cette algèbre, qui ne devrait pas se fonder sur la géométrie élémentaire et devrait être indépendante des coordonnées des points considérés, permet de résoudre *"algébriquement"* des problèmes géométriques. Cependant, une limitation du travail de Leibniz est qu'il ne prend pas en compte l'orientation des figures et la direction des segments, ce qui empêche ce calcul de devenir réellement opératoire.

Par la suite, Möbius publie son *Calcul barycentrique*, une forme d'algèbre opérant sur les points de l'espace. En parallèle, en 1835, Bellavitis publie son *Calcul des Equipollences* dans lequel, pour la première fois, la notion de vecteur est définie comme une classe d'équivalence de bipoints. Ce travail est très marquant car il est le premier où des entités purement algébriques représentent des objets géométriques.

Nous allons faire ici un zoom qui port sur différents façons dont les mathématiciens dans l'histoire, de Leibniz à Pedoe, construisent un formalisme indépendant du choix de repère pour mieux comprendre leur souhait de trouver un formalisme indépendant du choix de repère.

46. LEBEAU 2009, p. 132.

ZOOM SUR LES RECHERCHES D'UN FORMALISME INDÉPENDANT DU CHOIX DE REPÈRE DANS L'HISTOIRE

Le projet de Leibniz sur la géométrie de position
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) est un grand mathématicien. Il a apporté de nombreuses contributions aux mathématiques, y compris son concept d'une géométrie de situation. Les idées principales de Leibniz étaient contenues dans une lettre datée du Septembre 1679 et envoyée à Chrisrian Huygens. Dans cette lettre, il a écrit :

> *[...] And I am not afraid to say that there is a way to advance algebra as far beyond what Vieta and Descartes have left us as Vieta and Descartes carried it beyond the ancients. [...] I am still not satisfied with algebra, because it does not give the shortest methods or the most beautiful constructions in geometry. This is why i believe that, so far as geometry is concerned, we still need another analysis which is distinctly geometrical or linear and which will express situation [situs] directly as algebra expresses magnitude directly.*
>
> *[...] It is well known that nothing is more important in geometry than the consideration of loci. I shall therefore express one of the simplest of these by characters of this kind. The letters of the alphabet will ordinarily signify the points of figures. Letters at the beginning, such as A and B, will express given points ; letter at the end, such as X and Y, unknown points. Instead of using equalities or equations as in algebra, I shall here use relations of congruence, which i shall express by the character γ.* [a]

Bref, Lebniz montre l'importance de la position en géométrie, puis il représente la notion γ comme une relation de congruence définie comme suit :

> - $ABC \ \gamma \ DEF$ *means that the triangles ABC and DEF are congruent with respect to the order of their points, and they can occupy exactly the same place, and that one can be applied or placed on the other without changing anything of the two figures except their place.*

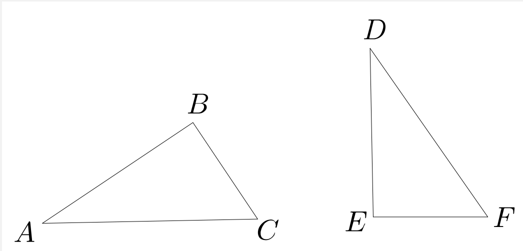


FIGURE *1.18*

- *For all the poins in the world are congruent to each other ; that is, one can always be put in place of another. But all the points in the world are in the same place. This locus can be expressed thus :* $Y\ \gamma\ (Y)$ [b]

- *Let* $AY\ \gamma\ A(Y)$. *The locus of all* Y*'s will be the surface of a sphere whose center is* A *and whose radius is* AY, *which is always the same in length or equal to a given segment* AB *or* CB. *For this reason we can express the same locus as* $AB\ \gamma\ AY$ *or* $CB\ \gamma\ AY$.

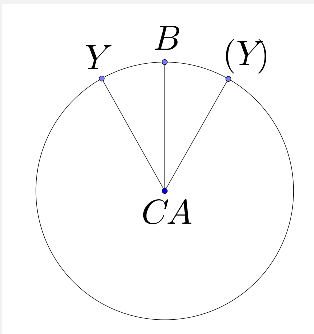


FIGURE *1.19*

- *Let* $AX\ \gamma\ BX$. *The locus of all* X*'s will be a plane. Two points,* A *and* B, *being given, to find a third,* X, *which has the same situation in relation to* A *as it has to* B *(that is,* AX *shall be equal or congruent to* BX, *since all equal straight lines are congruent, or point* B *can be placed on point* A *without changing the situation it had in relation to* X*). I assert that all points*

> *X, (X) of a single definite plane extending to infinity will satisfy this condition. But there is no point outside the plane which will satisfy this condition. Therefore this infinitely extended plane will be the common locus of every point in the universe situated in relation to A as it is to B. (It follows that this plane will pass through the midpoint of the straight line AB, which is perpendicular to it)*

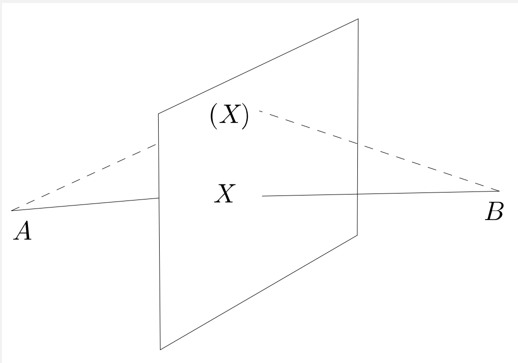


FIGURE *1.20*

En résumé, Lebniz est conscient de la question de la position en géométrie mais pour lui, AB et CD sont équivalents (comme on dit maintenant) car ils ont même longueur quelles que soient leurs positions dans l'espace. C'est ce qui l'empêche de considérer l'orientation des figures géométriques. Cela limitera la portée son analyse, comme le dit Lebeau dans sa thèse :

> *L'ambition de Leibniz est donc bien de fonder un nouveau modèle algébrique pour la géométrie et pas du tout de trouver des écritures qui ne seraient que des réductions ostensives de celles de la géométrie analytique. En outre, la géométrie élémentaire ne doit pas en être un prérequis. Il échoue dans son projet car il ne tient pas compte d'une orientation pour les objets qu'il engage. Cependant, ce projet ambitieux restera intéressant dans l'opinion des mathématiciens et sera porté par d'autres*[c]*.*

Bellavitis ou l'idée de vecteur géométrique comme classe d'équivalence de bipoint

Giusto Bellavitis (1803 - 1880) était un mathématicien italien. Son apport est l'invention de la méthode de équipollence, une nouvelle méthode de géométrie analytique qui est à la fois philosophique et fructueuse. La première publication de Bellavitis sur ce sujet en 1832 insiste davantage sur la méthode que sur les détails et, dans la dernière publication en 1835, il utilise le terme “équipollence" et donne un exposé complet de sa théorie, dont voici quelques extraits [d]

1. Une ligne droite, désignée comme d'habitude par deux lettres, est considérée comme allant de la première à la deuxième, si bien que AB et BA ne doivent pas être considérées comme désignant la même entité, mais comme deux quantités égales ayant des signes opposés.
2. Deux lignes droites sont dites équipollentes si elles sont égales, parallèles et dirigées dans le même sens.

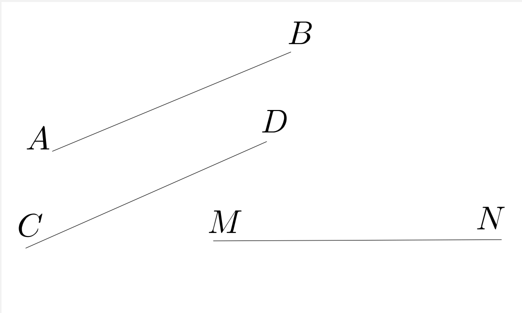
   

   FIGURE *1.21*

   La ligne AB est équipollente à CD et nous exprimons comme suit :

   $$AB \doteq CD$$

   AB n'est pas équipollente à BA mais elle est équipollente à BA pris avec un signe négatif, c'est-à-dire

   $$AB \doteq -BA.$$

   On a aussi que $AB \doteq -CD$, ou en transposant, $AB + CD \doteq 0$.

   AB est égal à MN en longueur mais elles ne sont pas équipollentes. Il arrive parfois qu'il soit nécessaire d'indiquer la longueur d'une ligne sans tenir compte de son inclinaison. Dans ce cas, nous disons $gr.AB = gr.MN$.
3. Si deux ou plusieurs lignes droites sont situées de telle façon que la deuxième extrémité de chacune d'elles coïncide avec la première extrémité de celle qui la suit, alors la droite qui forme avec les droites données un polygone (régulier ou non) et qui est tracée de la première extrémité de la première à la dernière extrémité de la dernière est appelée leur somme équipollente (composta-equipollente). Elle est no-

tée à l'aide de signes $+$ intercalés entre les lignes droites à combiner, avec le signe "$\simeq$" indiquant l'équipollence. Ainsi, on a :

$$AB + BC \simeq AC$$

$$AB + BC + CD \simeq AD, \text{ etc.}$$

De telles équipollences demeurent vraies lorsqu'on remplace chacune des lignes droites par une ligne droite équipollente, quelles que soient leurs positions dans l'espace. Il en résulte que l'on peut ajouter un nombre quelconque de lignes droites de toutes sortes, et que le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les considère. [...]

4. L'équipollence $AB \simeq n.CD$, où n désigne un nombre positif signifie que simultanément AB et CD sont parallèles et de même sens, et que leurs longueurs vérifient la relation exprimée par l'équation $AB = n.CD$.
5. L'inclinaison d'une ligne droite est l'angle que cette ligne droite fait avec une autre ligne droite arbitrairement choisie pour l'origine des inclinations.

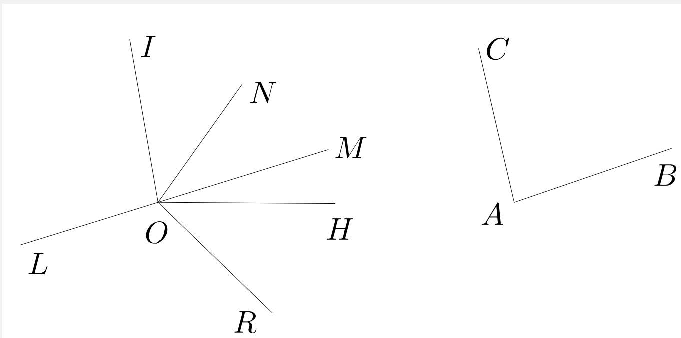


FIGURE *1.22*

Nous prenons comme origine des inclinations, OH, la ligne s'étendant de gauche à droite et horizontale. L'inclinaison d'une ligne droite OM est indiquée par la notation $inc.OM$. AB est équivalent à OM si AB peut être transporté vers OM, ou

$$inc.AB = inc.OM.$$

L'ange HOM est toujours considéré comme à partir de la direction OH pour atteindre la direction OM. Des inclinaisons de droite et au-dessus, c'est-à-dire dans le sens $HMNILR$, sont positifs. Des inclinations prises dans le sens opposé, c'est-à-dire dans le sens $RLINM$, sont négatifs. L'angle MON est égal à l'inclinaison de ON moins l'inclinaison de OM

$$angleMON = inc.ON - inc.OM$$

L'angle MON est positif, mais l'angle NOM est négatif, car il est égal à $inc.OM - inc.ON$.

6. L'égalité $GH \simeq \frac{AB.CD}{EF} \quad (1)$ exprime que
   la ligne GH a non seulement une longueur exprimée par l'équation

   $$gr.GH = \frac{gr.AB.gr.CD}{gr.EF}$$

   mais son inclinaison doit être

   $$inc.GH = inc.AB + inc.CD - inc.EF$$

   exactement comme si nous voulions prendre le logarithme et nous écrivons inc. à la place du log.
   (1) peut également être écrit $GH.EF \simeq AB.CD$.
7. Dans les équipollences, les termes sont transposés, substitués, ajoutés, soustraits, multipliés, divisés, etc., bref toutes les opérations algébriques qui seraient légitimes dans le traitement des équations sont également possibles avec les équipollences et les équipollences qui en résultent sont toujours vraies. Comme nous l'avons dit auparavant, des équipollences non-linéaires ne peuvent se référer qu'à des figures contenues dans un même plan.

En résumé, comme dit Michael J. CROWE (traduit par Pressiat dans sa thèse [e]), on voit apparaître dans la théorie de Bellavitis un calcul ayant beaucoup de ressemblance avec ceux qui rendent compte de la représentation géométrique des nombres complexes. Sur ce point précis, Bellavitis signale que ses première idées sur cette méthode des équipollences lui étaient venues après la lecture de travaux de l'Abbé Buée, mais qu'il avait alors pensé que les vérités géométriques ne pouvaient pas reposer sur la théorie des nombres imaginaires. L'un des buts de sa théorie était de rendre son autonomie à la géométrie : ses droites (ou segments) orientés étaient considérés comme des entités géométriques, et non pas comme des représentations.
Signalons enfin que Bellavitis a longuement tenté d'étendre sa théorie à l'espace tri-dimensionnel, mais qu'il n'y est pas parvenu.

Grassmann ou l'idée de segment orienté et l'introduction de la notion de

vecteur
Cette section renvoie au travail de Desmond Fearnley-Sander[f] sur la contribution de Grassmann en mathématiques. Nous présentons ici une partie de ce travail en traduisant avec détails pour comprendre ce que fait Grassmann avec l'idée d'orientation et la notion de vecteur.
Dans son ouvrage fondamental, l'Ausdehnungslehre (1844), Grassmann décrit les considérations géométriques qui l'ont conduit à la théorie que nous appelons aujourd'hui l'algèbre linéaire. Partant la formule

$$AB + BC = AC \quad (3)$$

que l'on pourrait trouver dans les vieux textes de la géométrie pour décrire une relation entre les longueurs à partir des points colinéaires A, B et C, avec B entre A et C, il a réalisé que cette formule reste valable indépendamment de l'ordre des trois points alignés, à condition qu'on fixe

$$BA = -AB; \quad (4)$$

par exemple, si C est entre A et B, (3) résulte du fait que

$$AB = AC + CB = AC - BC$$

Pendant plusieurs années, Grassmann étudiait attentivement les conséquences de (4), qui est la propriété spéciale qui définit une algèbre extérieure. Son développement de la géométrie est compliquée, et nous n'en donnons ici que certains de ses résultats relatifs au calcul vectoriel.
Commençant avec le matériau de base de la géométrie, des chiffres et des points, nous permettons de les combiner par les opérateurs formels de somme et le produit, en supposant les règles algébriques élémentaires pour ces opérateurs, mais à la condition que (4) vaut pour tous les points A et B et que

$$\alpha A = A\alpha \quad (5)$$

pour tous les nombres réels α et des points A. De (4) on en déduit que, pour chaque point A, on a $A^2 = 0$ et donc un carré d'un point est un nombre, c'est-à-dire

0 n'est pas un point (6)

Nous avons besoin d'une règle pour interpréter géométriquement les entités qui se produisent dans cette algèbre formelle. Pour une paire de points A et B, et des nombres réels positifs α et β avec $\alpha + \beta = 1$, on écrit

$$P = \alpha A + \beta B$$

Ensuite, nous avons immédiatement

$$AP = \beta AB, PB = \alpha A \quad \text{a}nd \quad AP + PB = AB.$$

Ces formules suggèrent que P doit être interprétée comme l'unique point qui divise le segment de ligne de A à B dans le rapport β pour α. Nous interprétons donc P par la bijection $\alpha \longrightarrow \alpha A + \beta B$ entre $[0, 1]$ et toutes les autres interprétations géométriques découlent de ceci. Pour donner un exemple immédiat, l'interprétation de $P = \alpha A + \beta B$ avec $\alpha \neq 0$ et $\beta > 0$ et $\alpha + \beta = 1$ est donné par la formule suivante :

$$B = -\frac{\alpha}{\beta}A + \frac{1}{\beta}P$$

lorsque $-\frac{\alpha}{\beta} \geq 0, \frac{1}{\beta} \geq 0$ et $-\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta} = 1$.
La droite passant par A et B est l'ensemble de tous les points $P = \alpha A + \beta B$ avec $\alpha + \beta = 1$, et par conséquent nous supposons que

si A et B sont des points et $\alpha + \beta = 1$ alors $\alpha A + \beta B$ est un point

Ensuite, la différence de deux points est “un vecteur" et l'interprétation est forcé par l'identité

$$B - A = C - D \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(B + D)$$

La somme d'un vecteur X et un point A est un point, puisque

$$A + X = B \Longleftrightarrow X = B - A$$

Et le produit d'un nombre et d'un vecteur est un vecteur, étant donné que pour $X = B - A$ nous avons $\alpha X = P - A$ où $P = (1 - \alpha)A + \alpha B$, cela implique également que αX doit être interprété comme ayant la même direction que X et α fois sa longueur.
Voici un théorème classique : si, dans un triangle dont les sommets A, B et C, les points D et E, respectivement, divisent le côté de A à B et le côté de A à C par des rapports égaux, la droite de D à E est parallèle à celle de B à C et le rapport de leurs longueurs est le nombre approprié. La preuve est dans une ligne

$$D = \alpha A + \beta B, E = \alpha A + \beta C \Longrightarrow D - E = \beta(B - C)$$

[...] Ces exemples donnent une indication, si pas plus, de la puissance de l'interprétation géométrique que fait Grassmann de l'algèbre linéaire. Ils se situent en géométrie affine, mais en introduisant un produit intérieur on peut

obtenir des preuves algébriques transparentes des théorèmes de la géométrie euclidienne et la trigonométrie.
Bien qu'en 1844, il avait été au courant de leur travail, Grassmann a reconnu plus tard que, à certains égards, sa théorie a été inspirés, en particulier et entre autres, par le concept de l'addition de vecteurs de Bellavitis, et par le calcul barycentrique de Mobius. Mais personne ne s'était approché de l'élégante simplicité de la formule

$$(C - B) + (B - A) = C - A$$

qui, pour Grassmann, suppose l'interprétation de la somme de deux vecteurs. En résumé, pour Grassmann, $B - A$ n'est autre que le vecteur AB, c'est-à-dire qu'il a remplacé la notation AB employée par Bellavitis par la notation $B - A$ et il utilise cette notation dans ses preuves. Il donne aussi le concept de la multiplication extérieure qui correspond à peu près au produit vectoriel moderne et la multiplication intérieure qui correspond au produit scalaire moderne.

Burali-Forti, Marcolongo (1909)
En 1909 Burali-Forti et Marcolongo ont commencé leur collaboration dans l'étude des transformations linéaires de vecteurs et ils ont publié le premier livre italien à propos du calcul vectoriel à savoir *"Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometrica, alla mecanica e alla fisica-Mathematica"*, qui a été presque immédiatement traduit en français en 1910 par S. Lattès, et publié par la librairie scientifique Hermann.
Dans la première partie de ce livre, les auteurs ont proposé un système vectoriel avec la définition de vecteurs utilisant des points et aussi donné la règle de modification les égalités vectorielles. Dans la deuxième partie, ils ont donné des applications de ce système, comme ils le précisent dans la préface :

> *Dans la première partie du livre que nous présentons au public mathématique, nous exposons systématiquement, et sous une forme absolue, autonome, les fondements du calcul vectoriel en n'introduisant que les éléments suivants : nombres réels, points, vecteurs, formes de première espèce de Grassmann (ou barycentres de Möbius) ; nous indiquons les applications immédiates de ce calcul à des questions de géométrie bien connues, en cherchant surtout à bien montrer comment l'usage opportun des vecteurs et de composantes vectorielles permet de présenter la géométrie analytique sous une forme géométrique absolue et d'éliminer tout cet algorithme indirect qui, né avec les coordonnées, doit disparaître nécessairement dès qu'il devient possible d'envisager les éléments géométriques en dehors de tout système fixe de référence.*

> *Dans la deuxième partie nous donnons des applications de ce système vectoriel, que nous pouvons appeler système vectoriel minimum ; nous développons quelques questions de géométrie différentielle, de mécanique et de physique mathématique : nous les avons choisies exprès parmi les questions bien connues, afin de montrer la supériorité énorme du calcul vectoriel absolu sur les méthodes anciennes et indirectes des coordonnées.*
>
> *[...] Sous les aspects que nous venons d'indiquer, notre livre est le premier traité italien de calcul vectoriel. Il diffère profondément, par la méthode et par les notations, de tous les traités publiés antérieurement dans ces dernière années, surtout en Allemagne. Il en diffère par la méthode, car notre but est d'opérer d'une façon absolue sur les éléments géométriques, tandis que d'habitude les vecteurs, et les opérations sur les vecteurs, apparaissent simplement comme des abréviations d'écriture, des tachygraphes des coordonnées. Il en diffère par les notations, car les notations rationnelles que nous adoptons sont conformes, presque dans leur totalité, aux notations proposées par les fondateurs du calcul vectoriel. Pour la genèse et l'histoire de nos notations - que nous voyons adopter avec un véritable plaisir par plusieurs de nos collègues, dans leurs enseignements - nous renvoyons le lecteur aux notes placées à la fin du livre ou aux notes, plus étendues, publiées par nous dans les Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.*

Dans le premier chapitre, les auteurs donnent la notation du vecteur et l'égalité de deux vecteurs comme suit :

> *Nous emploierons, avec Hamilton et Grassmann, la notation*
>
> $$B - A$$
>
> *qu'on lit "B moins A", pour représenter le vecteur déterminé par les points A et B et dirigé de A vers B. Le mot vecteur a été introduit par Hamilton.*
>
> *Les deux vecteurs $B - A$ et $C - D$ sont dits égaux, si le milieu de AD coïncide avec le milieu de BC.*

Ils donnent aussi des règles habituelles du calcul algébrique qui sont applicables aux vecteurs comme suit :

> *Avec la notation adoptée plus haut, l'égalité des deux vecteurs s'exprime par $B-A = D-C$ et, si on applique à cette égalité les règles habituelles du calcul algébrique relatives au signe moins,*

on obtient les égalités

$$B - D = A - C, \qquad C - A = D - B, \qquad C - D = A - B,$$

qui expriment effectivement l'égalité de nouveaux vecteurs : Il suffit en effet de remarquer que le milieu de AB coïncide avec celui de DA, etc.
[...] Si A, B, C, D désignent des points, on a identiquement

$$A + (B - A) = B, \qquad A + (B - B) = A$$

On déduit aussi de $B - A = D - C$ les égalités

$$B = A + (D - C), \qquad A = B + (C - D), etc.$$

toujours comme en algèbre et avec les règles de calcul habituelles relatives aux signes $+, -$
[...] On a identiquement, comme en algèbre,

$$(B-A)+(C-B) = C-A, \qquad (C-B)+(A-C)+(B-A) = 0,$$

L'extrémité E de la ligne polygonale (plane ou gauche) $ABCDE$ s'exprime, à l'aide de l'origine A et des points intermédiaires, sous la forme

$$E = A + (B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D)$$

qui indique clairement le chemin parcouru pour aller de A en E ou les translations successives qui permettent de déduire E de A.
[...] Toutes les règles du calcul algébrique relatives aux signes $+, -$, au produit et au quotient par un nombre réel, sont applicables aux vecteurs. On a de plus

$$-(B - A) = A - B$$

et si l'on pose

$$A - a = A + (-a),$$

a est un vecteur, on aura, comme en algèbre,

$$A + (B - C) = A - (C - B), \qquad A - (A - B) = B, etc.$$

Ils ont également donné la définition d'une ligne, un plan et un espace comme suit

> *Si l'on pose*
> $$P = A + x(B - A),$$
> *P est un point de la droite AB, et réciproquement tout point de la droite AB peut s'exprimer ainsi, puisque P est sur AB lorsque $P - A$ est parallèle à $B - A$.*
>
> *De même si A, B, C sont trois points non en ligne droite, le point*
> $$P = A + x(B - A) + y(C - A)$$
> *parcourt tout le plan ABC, lorsque x et y varient dans le domaine des nombres réels.*
>
> *Enfin, si A, B, C, D sont quatre points non situés dans un même plan, le point*
> $$P = A + x(B - A) + y(C - A) + z(D - A)$$
> *parcourt tout l'espace, lorsque x, y, z varient. On peut donc exprimer tous les points d'une droite, d'un plan, de l'espace a l'aide de deux, trois ou quatre points fixes...*

En résumé, comme les auteurs le déclarent dans l'ouvrage de 1912-1913 sur les travaux des transformations linéaires[g], ils voudraient donner l'usage des *"méthodes simples et rapides du moderne calcul vectoriel intrinsèque"*. C'est la raison pour laquelle ils adoptent la concision bien connue du calcul vectoriel qui *"soit due, en substance, au fait qu'on indique par une seule lettre une expression complexe"*[h]. Ils expliquent aussi la différence avec les calculs ordinaires : *"Notre calcul diffère substantiellement des calculs ordinaires en ce qu'il peut opérer directement sur les éléments géométriques et physiques, sans avoir jamais besoin de recourir à aucune coordonnée. Notre calcul peut ainsi s'appeler intrinsèque, ou absolu, ou autonome"*[i].
C'est aussi ce que Francis Borceux constate dans son livre[j] :

> *La force de cette théorie des vecteurs réside en ceci. Si l'on introduit un système de coordonnées cartésiennes dans le plan usuel, on décrit via celui-ci une bijection entre les points du plan et les couples de nombres réels, c'est-à-dire l'espace vectoriel R^2. Chaque fois que l'on change de repère, on obtient une autre bijection entre le plan et l'espace vectoriel R^2. Par contre, l'espace vectoriel des vecteurs libres se trouve associé au plan de manière intrinsèque, indépendamment de tout choix d'un repère de coordonnées. Il fournit dès lors la possibilité d'appliquer les techniques relatives aux espaces vectoriels sans devoir s'astreindre à exprimer le problème géométrique en termes de coordonnées.*

L'ouvrage de Dan Pedoe "Geometry, a comprehensive course" (1988)
Nous considérons ici le livre intitulé "Geometry, a comprehensive course" de Dan Pedoe (1988) . Ce livre a d'abord été publié en 1970 par Cambridge University Press à Londres, puis au Canada et enfin par Dover Publication, à New York, en 1988. C'est cette dernière édition que nous allons étudier ici. Comme dans certains ouvrages anglo-saxons, Pedoe utilise une nouvelle notation pour le vecteur-position qui nous permet de simplifier certains problèmes connexes. Comme l'analyse André Pressiat :

> *Tout d'abord, afin de placer la notion familière de "segment orienté" sur une base mathématique solide, l'auteur ne répugne pas à utiliser un système d'axes (oblique) et à identifier les points avec leurs couples de coordonnées. Il définit alors le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ comme le couple de nombres réels obtenu en faisant la différence des coordonnées de Q et celles de P. L'égalité des vecteurs est définie à l'aide de l'égalité des couples de nombres réels : c'est une relation d'équivalence. Chaque classe d'équivalence contient un unique élément dont la première place est occupée par le couple $(0,0)$: on le choisit comme représentant de la classe. Ce vecteur joint l'origine O à un point P, appelé le vecteur-position du point P.*
>
> *Ce vecteur-position est appelé vecteur lié. Les autres vecteurs égaux (les autres éléments de la classe, c'est-à-dire les vecteurs $\overrightarrow{XY}$ égaux à $\overrightarrow{OP}$ tels que $X \neq O$ sont dits vecteurs libres.*
>
> *Par la suite, le vecteur-position $\overrightarrow{OP}$ d'un point P est noté tout simplement P. Ainsi, P est égal au couple des coordonnées du point P dans le système d'axes choisi au départ : $P = (x_1, x_2)$. On devine alors aisément comment sont définies l'addition des vecteurs liés et la multiplication d'un tel vecteur par un nombre ; l'addition et la soustraction sont illustrées à l'aide des traces graphiques suivantes :*

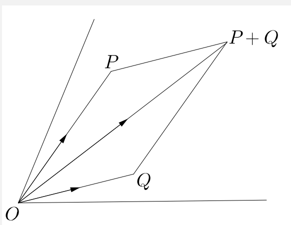


FIGURE *1.23*

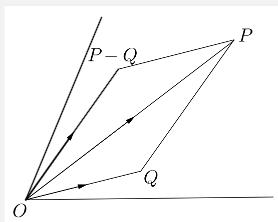


FIGURE *1.24*

> *[...] Pedoe adopte une position plus radicale : la même lettre P désignera à la fois un point et son vecteur-position. [...] Cette*

notation permet de relier un vecteur $\overrightarrow{PQ}$ libre (au sens de Pedoe) avec les vecteurs liés $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ sous une forme particulièrement simple, dont l'importance dans l'oeuvre de Grassmann a déjà été soulignée :

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P$$

En résumé, Pedoe utilise une nouvelle notation pour le vecteur-position en choisissant $(0, 0)$ comme l'origine et ce travail est différent avec ce que nous faisons. Nous y reviendrons après. A l'aide de cette notation, on peut utiliser aussi une expression du type $xA+yB+zC$ comme une combinaison linéaire de trois vecteurs. De plus, dans son ouvrage, Pedoe donne les quatre théorèmes tous démontrés avec des applications simples et des exercices choisis avec soin qui permettent au lecteur de revenir d'une autre manière sur leur formulation ou sur leur démonstration, et de les appliquer. Voyons en détail les quatre théorèmes comme suit :

Théorème 1.
Si C est un point quelconque de la droite déterminée par deux points distincts A et B, alors on peut toujours écrire :

$$C = (1 - t)A + tB,$$

le rapport $\frac{t}{1-t}$ étant égal au rapport $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$.

Théorème 2.
Si A, B et C sont des points alignés, alors il existe des nombres réels x, y, z, non tous nuls, tels que :

$$x + y + z = 0 \text{ et } xA + yB + zC = 0.$$

Théorème 3.*(réciproque du théorème 2)*
Si A, B et C sont des points donnés, et si x, y, z sont des nombres réels non tous nuls, tels que $x+y+z = 0$ et $xA+yB+zC = 0$, alors $x = y = z = 0$.

Théorème 4. *(qui se déduit immédiatement du précédent)*
Si A, B et C sont des points non alignés, et si x, y, z sont des nombres réels tels que $x + y + z = 0$ et $xA + yB + zC = 0$, alors $x = y = z = 0$.

On voit bien qu'aux trois premiers théorèmes sont attachées des techniques qui vont être fortement sollicités dans les problèmes d'alignement et le théorème 4 a, contrairement aux trois théorèmes qui précèdent, joue surtout un rôle au niveau technologique de l'organisation mathématique de Pedoe. Pedoe poursuit par une application qui consiste à démontrer que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Sa démonstration en est plus simple, en évitant le recours à des représentations paramétriques vectorielles. Voici le détail :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$
$$B - A = C - D$$
$$\frac{B + D}{2} = \frac{A + C}{2}$$

Puisque le théorème 1 permet de caractériser le milieu I d'un segment AB par la relation $I = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, souvent notée $I = \frac{A+B}{2}$, on a le résultat.
De plus, ce qui nous voudrons indiquer ici est l'intérêt de l'auteur *"de conserver en géométrie euclidienne ces notations valables pour la géométrie affine en les complétant par une notion et une notation nouvelle propre à la structure euclidienne, permettant ainsi non seulement de modéliser vectoriellement les configurations affines, mais également les configurations de la géométrie euclidienne, en conservant tous les acquis antérieurs en ce domaine (Pressiat, 1999, Ib., pp. 339).*
Il note alors le produit scalaire de deux vecteurs A et B dans un repère orthonormé comme $A.B$, la longueur du vecteur A par $A.A$ ou A^2, et la perpendicularité entre AB et CD est définie par la formule $(D - C)(A - B) = 0$.
Il poursuit avec un exemple très connu, le cercle d'Euler, en utilisant ces notations. Voyons le détail :
Le cercle d'Euler Le cercle d'Euler d'un triangle ABC (figure 8) est l'unique cercle passant par les neuf points remarquables suivants :
Les trois milieux des trois côtés du triangle ;
Le pied de chacune des trois hauteurs du triangle ;
Le milieu de chacun des trois segments reliant l'orthocentre D à un sommet du triangle.
Voici la démonstration de Pedoe :

> *We have already indicated that we shall write $P.P = P^2$ for the inner product if a vector P with itself. Suppose that A, B, C and D form an orthocentric tetrad.*

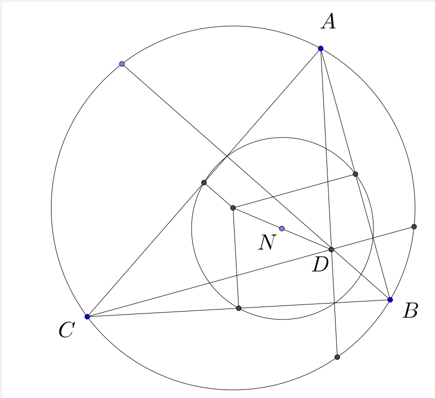


FIGURE *1.25*

If we evaluate the expression

$$(A - D + B - C)^2 - (A - D - B + C)^2,$$

our rules for the inner product show that this can be evaluated as if it were an ordinary algebraic expression, and we have

$$(A-D+B-C)^2-(A-D-B+C)^2 = 4(A-D).(B-C) = 0,$$

since AD is perpendicular to BC.
Again

$$(A-D+B-C)^2-(A+D-B-C)^2 = 4(B-D).(A-C) = 0,$$

and

$$(A+D-B-C)^2-(A-D-B+C)^2 = 4(C-D).(B-A) = 0,$$

since BD is perpendicular to AC, and CD is perpendicular to AB. Hence

$$(A+B-C-D)^2 = (A-B+C-D)^2 = (A-B-C+D)^2.$$

We know that for any vector P, $(-P)^2 = (P)^2$. If we multiply each vector inside the parentheses by -1, we have the equalities :

$$\begin{aligned}(A+B-C-D)^2 &= (-A-B+C+D)^2 = (A-B+C-D)^2\\ &= (-A+B-C+D)^2 = (A-B-C+D)^2\\ &= (-A+B+C-D)^2.\end{aligned}$$

If we introduce the point $N = \frac{A+B+C+D}{4}$, these equalities can be written in the form :

$$\begin{aligned}(N-\frac{C+D}{2})^2 &= (N-\frac{A+B}{2})^2 = (N-\frac{B+D}{2})^2\\ &= (N-\frac{A+C}{2})^2 = (N-\frac{B+C}{2})^2\\ &= (N-\frac{A+D}{2})^2.\end{aligned}$$

If we now recall that the distance $|PQ|$ between two points P and Q is given by the formula

$$|PQ|^2 = (P-Q).(P-Q) = (P-Q)^2,$$

the six equalities we have just obtained show that the point N is equidistant from the six midpoints of the points A, B, C and D, taken in pairs. These midpoints therefore lie on a circle, center N.

a. WILHELM 1989.
b. (Y) is equivalent to Y_1, Y_2, Y_3, etc. (C'est l'auteur qui le remarque et l'on peut comprendre (Y) comme une classe d'équivance)
c. LEBEAU 2009, p. 106.
d. Traduction fait de nos soins en consultant une partie dans la thèse de PRESSIAT 1999 et à partir de l'ouvrage de WILHELM 1994 et SERVERANCE 1930.
e. PRESSIAT 1999, p. 52.
f. DESMOND 1979, p. 814–817.
g. BURALI-FORTI et MARCOLONGO 1992.
h. Cité par PRESSIAT 1999, p. 103.
i. Cité par ibid., p. 103.
j. BURULI-FORTI et MARCOLONGO 1986, p. 317–318.

En résumé, tous ces mathématiciens cherchent un formalisme "algébrique" qui est indépendant du choix de repère afin de l'utiliser de manière plus général. C'est un des facteurs à l'origine de l'émergence de algèbre linéaire comme théorie axiomatique multi-sens qui sert à traiter des problème géométriques, mais aussi bien d'autres problèmes. C'est ce que nous expliquons dans la section suivante.

1.5.3 L'émergence de algèbre linéaire comme théorie axiomatique multi-sens

La théorie de l'extension de Hermann Grassmann marque un tournant dans l'histoire de l'algèbre linéaire car, comme le dit Dorier[47], cette théorie se caractérise par une approche très formaliste dès l'introduction même si elle se fonde sur une certaine intuition de la géométrie. En outre, elle initie à un nouveau regard sur la géométrie dont elle élargit l'empan, englobant des aspects qui relèvent aussi bien de ce qu'on appelle aujourd'hui la géométrie affine, la géométrie vectorielle et la géométrie projective. En reprenant les résultats de Grassmann, Peano, est l'un des premiers mathématiciens à avoir axiomatisé l'algèbre linéaire. En 1888, il propose une axiomatique proche de celle de l'algèbre linéaire moderne adossée à la géométrie élémentaire dans son *Calcolo Geometrico secundo l'Ausdhenungslehre di H. Grassmann e precedutto dalle Operozioni della Logica Deducttiva* alors qu'en même temps, il construit une axiomatique des systèmes linéaires où désormais les objets premiers ne sont plus les objets point, droite et plan de la géométrie élémentaire mais bien les vecteurs et les nombres réels :

> *72. Il existe des systèmes d'êtres pour lesquels sont données les définitions suivantes :*
>
> *1. Il est défini l'égalité de deux êtres a et b du système c'est-à-dire qu'il est défini une proposition, indiquée par $a = b$, qui exprime une condition entre deux êtres du système, satisfaite par certains couples d'êtres, et pas par d'autres, et qui satisfait aux équations logiques :*
>
> $$(a = b) = (b = a), (a = b) \cap (b = c) < (a = c)$$ [48]
>
> *2. Il est défini la somme de deux êtres a et b, ce qui veut dire qu'il est défini un être, indiqué par $a + b$, qui appartient aussi au système donné, et qui satisfait aux conditions :*
>
> $$(a = b) < (a + c = b + c), a + b = b + a, a + (b + c) = (a + b) + c.$$
>
> *Et la valeur commune des deux membres de la dernière égalité sera indiquée par $a + b + c$.*
>
> *3. Étant donnés a un être du système, et m un nombre entier et positif, avec l'écriture ma nous entendons la somme de m êtres égaux à a. Il est facile de reconnaître étant donnés a, b... des êtres du système, m, n...*

47. Dorier 1997, p. 43–45.
48. Peano utilise le signe "=" pour marquer une équivalence, "<" pour marquer une implication et "$\cap$" pour signifier le "et". ces notations ont être introduites dans le premier chapitre sur la logique déductive.

des nombres entiers et positifs, que

$$(a = b) < (ma = mb); m(a + b) = ma + mb;$$

$$(m + n)a = ma + na; m(na) = (mn)a; 1a = a.$$

Nous supposons qu'il soit attribué une signification à l'écriture ma,quel que soit le nombre réel m, de façon que les équations précédentes soient encore satisfaites. L'être ma sera dit produit du nombre (réel) m par l'être a.

4. Enfin nous supposons qu'il existe un être du système, que nous dirons être nul, et que nous indiquerons par 0, tel que, quel que soit l'être a, le produit du nombre 0 par l'être a donne toujours l'être 0, ou

$$0a = 0.$$

Si à l'écriture $a - b$ on attribue la signification $a + (-1)b$ on déduit : $a - a = 0; a + 0 = a$.

DEF. Les systèmes d'êtres pour lesquels sont données les définitions 1,2,3,4 de façon que soient satisfaites les conditions imposées, sont dits systèmes linéaires. (Peano 1988, 141-142). [49]

Le point de vue axiomatique prend le dessus évidemment dès que l'on envisage l'algèbre linéaire comme théorie "multi-sens" supposée rendre compte aussi bien d'espaces fonctionnels, de systèmes linéaires que d'espaces vectoriels.

Mais l'axiomatisation de l'algèbre linéaire peut avoir un intérêt déjà dans sa relation à la géométrie. Ainsi, succédant à Peano, Burali-Forli et Marcolongo ont publié plusieurs textes sur les méthodes vectorielles et leurs applications en cherchant à construire un calcul géométrique intrinsèque, c'est-à-dire non lié à un système de coordonnées. Comme l'explique en effet Dorier [50], la méthode axiomatique est avant tout pour eux un moyen de se départir des coordonnées cartésiennes et de donner aux objets géométriques le statut d'éléments algébriques :

> *[...] De plus, au moins pour tous les travaux qui se situent dans le seul cadre algébrique, cette démarche n'est pas spécifique de l'algèbre linéaire, puisque c'est l'ensemble de l'algèbre qui sera reconstruit à partir d'une approche axiomatique des structures. Pour ce qui est de l'origine géométrique de l'algèbre linéaire, l'approche axiomatique permet de donner une assise plus théorique à un calcul géométrique intrinsèque, par le calcul vectoriel, qui se libère du modèle des coordonnées cartésiennes...*

En lien avec ce point de vue sur l'axiomatisation de l'algèbre linéaire, il convient

49. cité par Dorier (Ib., pp. 62).
50. Dorier 1997, p. 76.

de souligner une *dialectique inévitable qui unit algèbre, notamment linéaire et géométrie. Les interrogations sur la géométrie élémentaire et la mise en évidence du linéaire en son cœur conduisent à la fonder sur l'algèbre et le linéaire. En retour, cette fondation ouvre la possibilité de penser l'algèbre linéaire de manière géométrique."* [51]. On parle alors de...

1.5.4 ...la linéarisation de la géométrie et la géométrie du linéaire

C'est effectivement en ces termes que Bkouche (1986) commente ce double mouvement :

> *[...] la linéarisation de la géométrie permet en retour une géométrisation du linéaire et par cela même une géométrisation des divers domaines de la connaissance où intervient le linéaire. [...] C'est la prise de conscience par les mathématiciens d'un caractère commun à ces divers domaines qui a conduit à l'algèbre linéaire telle que nous la connaissons aujourd'hui, construction unificatrice qui continue l'idéal d'une méthode universelle que l'on retrouve tout au long de l'histoire des mathématiques ; la représentation géométrique de l'algèbre linéaire issue de la représentation linéaire de la géométrie (et le terme même d'espace vectoriel en témoigne) a conduit alors à cette géométrisation universelle, nouveau principe unificateur induisant les transferts d'intuition [...] qui sont autant que la puissance du raisonnement formel, l'un des aspects du développement des mathématiques contemporaines [...] (R. Bkouche, 1986, pp. 489).*

Dieudonné (1964), quant à lui, dans sa préface de l'ouvrage *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, estime que c'est en raison de cette dialectique que la géométrie élémentaire constitue toujours un moyen d'accès privilégié à la géométrie contemporaine dont le calcul vectoriel. Et ce, même si l'algèbre linéaire est devenue la *"voie royale"* pour étudier la géométrie élémentaire dont elle gomme les faiblesses initiales décrites au début du chapitre 1. Nous y reviendrons.

51. Dunia Mwati 2013, p. 164.

CONCLUSION DU CHAPITRE 1

Nous retenons de ce panorama historique quelques aspects essentiels pour la constitution de notre MER :

- Une évolution du raisonnement déductif en géométrie de Euclide à Hilbert.
- L'émergence de l'algèbre linéaire comme théorie "multi-sens" représentative du structuralisme.
- Sa construction, en géométrie, à partir de la géométrie analytique.
- Un lien étroit entre l'algèbre linéaire et la géométrie, la première offrant un cadre symbolique rigoureux pour l'étude de la seconde laquelle nourrit la première d'intuitions fécondes.

Et surtout, ce panorama historique met en évidence de nombreux rapports dialectiques entre les entités reprises dans le schéma 1. L'expression *"rapport dialectique"* est à prendre au sens de son étymologie qui renvoie à un *"échange se discours"*. Évidemment, ces échanges supposent un saut dans le temps mais avec effet de rétroaction. Ainsi les fondements de la géométrie de Hilbert corrigent les faiblesses de la géométrie euclidienne au prix d'une axiomatique mais ce dernier construit celle-ci de manière à pouvoir prouver des résultats … de la géométrie euclidienne. De même, le programme d'Erlangen s'est construit en réponse à la question de l'indépendance des axiomes d'Euclide pour intégrer de nouvelles géométries dont les géométries *"non euclidiennes"* mais permet, en retour, de revisiter la géométrie euclidienne à la lumière et en termes, par exemple du groupe des isométries affines de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et de leurs invariants. Le rapport dialectique entre géométrie euclidienne et algèbre linéaire se traduit par la locution *"linéarisation de la géométrie et géométrisation du linéaire"*. Quant à la linéarisation de la géométrie, on sait ce qu'elle doit à la géométrie analytique, celle-ci étant in fine subordonnée à l'algèbre linéaire, tout en offrant un mode de preuves de propriétés de la géométrie euclidienne ...

Ces différents rapports dialectiques sont ici exprimées par des flèches à double sens.

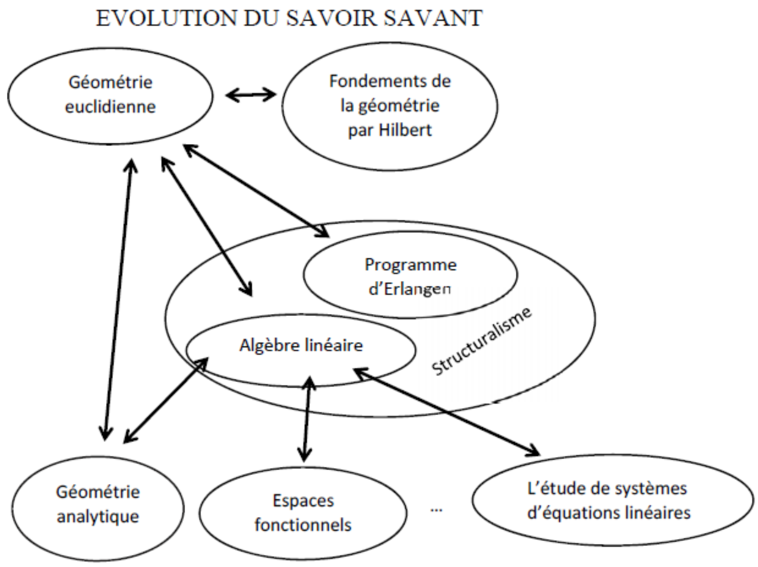


Schéma 1

CHAPITRE 2

L'ÉVOLUTION DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE AU SECONDAIRE

Les changements profonds dans l'histoire des mathématiques, décrits au chapitre 1, provoquent des réformes éducatives dont celle dite des mathématiques modernes. Nous en analysons ici les traits saillants et les retombées en ce qui concerne, tout particulièrement, l'enseignement de la géométrie. Avant, nous exploitons le travail de Catherine Houdement et Alain Kuzniak comme un des cardes théoriques exploités ici.

2.1 Paradigmes géométriques ou les trois types de géométrie

Cette section renvoie au travail de Catherine Houdement et Alain Kuzniak [52]. Selon ces auteurs, on peut distinguer les trois paradigmes géométriques que voici :

- *La géométrie naturelle (géométrie I) :"La géométrie naturelle a pour source de validation la réalité, le sensible. Elle comprend les trois aspects, intuition, expérience, déduction, mais la déduction s'exerce prioritairement sur des objets matériels à l'aide de la perception et de la manipulation d'instruments."*
- *La géométrie axiomatique naturelle (géométrie II) : "Cette géométrie ne prétend pas comme la géométrie naturelle qu'elle est la réalité, mais elle aspire à être un schéma de la réalité. La géométrie euclidienne classique est basée sur ce pas de côté, mais tout l'effort de schématisation est dissimulé et reste implicite." Dans ce*

52. Houdement et Kuzniak 2006, p. 175-193.

paradigme, l'axiomatique est partielle.

- *La géométrie axiomatique formaliste (géométrie III) : "Dans cette géométrie, qui naît à la suite de l'apparition des géométries non-euclidiennes, le cordon ombilical qui liait la géométrie et la réalité est coupé. Les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique l'emporte. L'approche axiomatique formaliste est bien explicitée par l'affirmation de Wittgenstein (1975, pp. 205) qui clôt le débat entre géométrie et réalité : "Les axiomes d'une géométrie peuvent ne contenir aucune vérité". Une différence essentielle avec la géométrie axiomatique naturelle porte sur la complétude du système d'axiomes : en géométrie axiomatique formaliste, l'axiomatisation n'est plus partielle."*

En ce sens, la géométrie I est plutôt celle de Clairaut (ou dans certains cas celle de Legendre), la géométrie II est celle d' Euclide et la géométrie III est celle d'Hilbert. Pour éclairer leurs propos, les auteurs donnent deux exemples, en voici un : les auteurs proposent aux élèves de construire (sur leur papier) tous les triangles possibles en juxtaposant trois pailles parmi lesquelles des pailles de trois longueurs fixées (4 cm, 5,5 cm et 8cm). Cette activité propose une expérience dans le cadre de la géométrie I. Voyons quelques possibilités pour résoudre ce problème :

> *Les élèves peuvent constater que les assemblages proposés ne sont pas toujours possibles. L'expérience permet donc de conclure à l'impossibilité d'assembler dans tous les cas un triangle à partir de trois pailles, et cela est lié aux longueurs choisies par le maître pour les pailles. Il est alors possible d'expliciter les raisons de cette impossibilité : "ça ne marche pas parce que c'est trop court, parce que les pailles ne se joignent pas". [...] Les élèves peuvent aller jusqu'à expliquer dans quels cas la construction n'est pas possible : "si une des longueurs est supérieure à la somme des deux autres." C'est la voie indiquée dans le livre du maître pour terminer l'activité : "Conclure que, pour construire un triangle, il faut que le plus grand côté soit inférieur à la somme des deux autres." [...] Le rôle du maître est essentiel pour passer à cette conclusion, beaucoup plus riche que la constatation de départ : il doit au minimum formuler la question qui poussera à la généralisation. [...] Continuons notre analyse pour montrer un passage possible à la géométrie II.*
>
> *L'activité telle qu'elle est proposée se situe dans la géométrie I. Cependant le passage de l'expérience de construction de triangles avec les pailles au processus absolu d'existence des triangles à partir de trois longueurs arbitraires donne du sens à l'axiome du plus court chemin de la géométrie axiomatique II. On pointe là, un processus possible de fabrication d'un axiome de la géométrie axiomatique II à partir de la géométrie naturelle : l'activité commence dans la géométrie natu-*

relle, l'expérience fait naître un questionnement qui permet de déduire l'énoncé du plus court chemin, qui ensuite existe comme point de départ dans la géométrie II sous la nouvelle forme suivante :

Si A, B et C sont trois points du plan, l'inégalité suivante $AB \leq AC + BC$ est toujours vérifiée.

Ce même dessin "triangulaire" donne lieu à une nouvelle interprétation dans la géométrie III. En effet, de l'inégalité triangulaire dérive en géométrie III une nouvelle propriété, cette fois ci liée aux vecteurs ;

Si A, B et C sont trois points du plan, les trois vecteurs vérifient la propriété $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

Ici, on voit qu'il y a deux problèmes concernant l'enseignement de la géométrie.

Premièrement, il existe trois interprétations géométriques différentes d'un même *"dessin"*, ces interprétations relevant des différents paradigmes :

– *En géométrie I, on lit le dessin au premier degré, c'est le dessin qui est objet.*

– *En géométrie II, le dessin n'est que le support d'objets construits sur le sensible, il n'est plus objet d'étude. Il est plutôt outil pour chercher, conjecturer.*

– *En géométrie III, le dessin est support d'une relation entre des objets virtuels, il est comme un outil heuristique.*

Deuxièmement, la question du choix d'un paradigme pour résoudre un problème géométrique donné.

Si le problème est théorique au départ, on reste dans la géométrie théorique (II ou III). Par contre si la question à résoudre se présente dans le monde physique ou si même elle l'évoque, il existe un véritable choix de traitement : reste-t-on dans la géométrie I ou passe-t-on dans la géométrie II ?

En résumé, il est en général attendu que l'élève traite un problème géométrique dans une géométrie de niveau égal ou supérieur (géométrie I, II ou III) à celui dans lequel le problème est posé. Mais cette demande n'est pas explicitée, il n'existe même pas de mot pour dire, en général, ce niveau de géométrie.

C'est exactement ce qu'on voudrait faire dans notre projet. On voudrait traiter les problèmes de la géométrie dans la géométrie axiomatique formaliste ou la géométrie axiomatique naturelle même si on ne le dit pas et donc la difficulté est de passer parmi les trois types de géométrie pour donner un point de vue assez clair entre le sujet et l'objet de connaissance. On va analyser cela en détail dans la section suivante.

2.2 La géométrie dans les programmes d'enseignement et les difficultés soulevées dans l'enseignement et l'apprentissage au secondaire

Parallèlement avec ce changement profond dans l'histoire des mathématiques qu'on a analysé dans le chapitre 1, il y a aussi les changements dans l'enseignement des mathématiques au secondaire.

Pour mieux comprendre ce qui s'est passé dans l'enseignement de la géométrie, surtout le calcul vectoriel, on va analyser, dans cette section, les trois périodes dans l'histoire : l'enseignement avant la réforme des maths modernes (avant 1960), pendant la réforme (1968-1985) et après la réforme (la contre-réforme de 1985 jusqu'à maintenant).

On commence avec un concept que Yves Chevallard (1985) appelle la *noosphère*. Il désigne ainsi cette

> *[...] coulisse du système d'enseignement par où s'opère l'interaction entre ce système et l'environnement sociétal. Dans cette noosphère, les représentants du système d'enseignement, mandatés ou non (du président d'une association d'enseignants au simple professeur militant), rencontrent, directement ou non (par le libellé dénonciateur, la requête comminatoire, le projet transactionnel, ou les débats assourdis d'une commission ministérielle), les représentants de la société (parents d'élèves, les spécialistes de la discipline qui militent autour de son enseignement, les émissaires de l'organe politique).*

Chevallard et Jullien [53] analysent le rôle de ce concept :

> *Quel rôle joue la noosphère, globalement, dans la production des programmes ? Un rôle qu'il faut situer bien en amont de la stricte rédaction des programmes. C'est la noosphère qui doit en quelque sorte "traiter" les pressions, les exigences qui ont leur origine dans les divers groupes sociaux dont nous avons évoqué l'existence. Son rôle essentiel est, à cet égard, une fonction de régulation des exigences qui s'exercent sur le système d'enseignement. Sans cela, l'acte d'enseignement, en butte à des critiques violentes et incessantes, deviendrait quasiment impossible. La noosphère doit permettre notamment de produire des programmes censés mieux satisfaire les contraintes dont elle a à connaître. L'élaboration de programmes "adaptés" à l'ensemble des pressions auxquelles le système d'enseignement est en proie est un élément important, ou jugé tel, de la réponse que le système d'enseignement doit avancer pour satisfaire ces pressions.*

53. CHEVALLARD et JULLIEN 1990-91, p. 41-76.

> *[...] Le changement du curriculum n'est qu'amorcé par le changement officiel des programmes. [...] On ne se demandera pas si l'enseignant est "capable" ou non de créer le curriculum (au sens strict du verbe créer, comme au sens où l'on "crée" une pièce), mais seulement s'il est capable ou non de "mettre en œuvre", en "application", les programmes. Dans cette perspective, la formation des enseignants apparaîtra restrictivement comme une manière de les rendre capables d'appliquer "correctement" les programmes.*

Bref, le rôle d'enseignement est souvent réduit à la *"mise en œuvre"* des programmes imposés, grâce au rôle de la noosphère dans leur production. C'est la raison pour laquelle on va continuer avec les programmes de la géométrie au secondaire en analysant certains livres dans l'histoire selon les trois périodes décrites.

2.2.1 Avant la réforme des maths modernes

Les Éléments d'Euclide sont le plus ancien exemple connu d'un traitement axiomatique et systématique de la géométrie et son influence sur le développement de la logique et de la science occidentale est fondamentale. Il s'agit probablement du recueil qui a rencontré le plus de succès au cours de l'histoire car, pendant des siècles, il a fait partie du cursus universitaire standard.

Dans le but de simplifier les Éléments d'Euclide, il existe certaines adaptions et versions pédagogiques des Eléments et l'un des plus grands succès de l'édition scolaire est les *"Eléments de géométrie"* écrit par Adrien-Marie Legendre. Legendre modifia le style des Eléments d'Euclide en remplaçant la langue formelle du géomètre grec par un français très vivant. Ses *"Eléments de géométrie"* ont servi de support ou de modèle à l'enseignement de la géométrie élémentaire en France, en Belgique, en Espagne et aux Etats-Unis, jusqu'à la réforme dite des *"mathématiques modernes"*. Cependant, pour concurrencer vraiment les *"Eléments de géométrie"* de Legendre dans les pays francophones, il faut attendre la publication en 1866 de la *"Géométrie élémentaire"* d'Eugène Rouché et Charles de Comberousse et la publication en 1898 et 1902 de deux tomes des *"Leçons de géométrie élémentaire"* de Jaques Hadamard. Les ouvrages de Rouché-Comberousse et de Hadamard inspirèrent à leur tour en Belgique, avec un contenu moins ambitieux, la Géométrie plane et Éléments de topographie et la Géométrie dans l'espace avec compléments (Namur : Wesmael-Charlier) d'Antoine Dalle et C. de Waele qui ont connu pendant un demi-siècle, jusqu'à la réforme dite des mathématiques modernes, plus de vingt éditions et suscité auprès de générations d'élèves belges, les sentiments les plus divers, hormis l'indifférence.

Voyons ici, en guise d'exemple, la sixième édition du livre "Géométrie plane et éléments de topographie" de Ant. Dalle et C. De Waele. Dans les préliminaires, les auteurs présentent des définitions générales, les notions de droite, de plan et la coïncidence des figures. Ils donnent aussi des axiomes utilisés en géométrie. Voici le détail :

> *28. Les corps sont des figures à trois dimensions : longueur, largeur et profondeur.*
> *Les surfaces en ont deux : longueur et largeur.*
> *Les lignes n'en ont qu'une, la longueur ; et le point n'en a pas.*
> *29. Un segment de droite est une portion de droite comprise entre deux points.*
> *Deux segments sont égaux lorsqu'ils peuvent coïncider.*
> *33. Deux figures sont égales, lorsqu'elles peuvent coïncider par superposition.*

Comme analysé plus haut, ces définitions servent essentiellement de référence pour savoir de quoi on parle, sans aucun caractère opératoire, l'idée de grandeurs superposables étant exactement l'idée de la géométrie d'Euclide. Comme Ruhal Floris [54] l'a identifié, l'exposé du livre se poursuit dans une veine euclidienne, structuré déductivement, avec l'étude des segments et des droites, de la perpendicularité, des triangles avec les cas d'égalité, du parallélisme, des quadrilatères. Les formules d'aires et de volumes s'établissent géométriquement, c'est-à-dire sans utilisation du concept de fonction et avec un emploi plutôt intuitif de la notion de limite. L'objectif principal est de construire des figures géométriques, en n'utilisant que les propriétés admises ou démontrées précédemment. Comme a dit Ant. Dalle et C. De Waele dans la préface :

> *En résumé, nos efforts se sont concentrés vers le but d'une importance capitale : Écarter du tracé des figures et de l'exposé de la démonstration, tous les éléments parasites qui empêcheraient la vérité géométrique de pénétrer simple et lumineuse dans l'intelligence de l'élève.*

On peut donc constater que le contenu du livre et de celui d'Euclide sont très similaires, les preuves sont liés aux figures, beaucoup d'imprécision dans le travail d'Euclide reste dans ce livre.

Concernant les vecteurs, dans le livre, les vecteurs sont définis comme des segments de droite orientés comme suit :

> *458. Soit la portion de droite définie par les deux points A et B ; si l'on suppose cette portion de droite parcourue de A vers B, on a le segment $\overline{AB}$; A en est l'origine et B l'extrémité ; si, au contraire, cette portion de droite est parcourue de B vers A, on a le segment $\overline{BA}$.*
> *Le sens d'un segment est le sens du déplacement d'un mobile qui va de l'origine à l'extrémité.*
> *Une droite peut être parcourue dans deux sens différents : l'un deux choisi arbitrairement est pris pour le sens positif ; l'autre est le sens négatif.*

54. Floris 1996, p. 12.

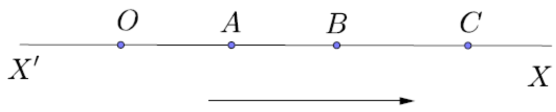


FIGURE 2.*1*

> *Si l'on considère plusieurs segments situés sur une même droite, on regarde comme positifs tous ceux qui sont dirigés dans un même sens convenu, à partir de leurs origines ; et comme négatifs tous ceux qui sont dirigés dans le sens contraire. On attribue ensuite au nombre qui mesure la longueur de chaque segment les signes + ou − suivant que le segment considéré est décrit dans le sens positif ou dans le sens négatif. Ce nombre, ainsi affecté d'un signe, est la valeur algébrique du segment.*

On peut voir que les définitions sont ici liées aussi aux figures. Il n'existe pas d'axiomes de l'ordre et donc, comme le travail d'Euclide, c'est vague et intuitif quand on doit considérer l'ordre des points sur une droite. On peut voir la démonstration de Chasles (de *"vecteur alignés"*) comme un exemple :

> **Relation de Chasles.** *Quelles que soient les positions respectives des trois points A, B, C sur une droite, on a*
>
> $$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$$
>
> *Supposons qu'en parcourant la droite $X'X$ dans un sens positif, on rencontre les points donnés dans l'ordre A, B, C.*

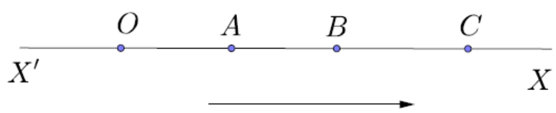


FIGURE 2.2

> *On a évidemment*
>
> $$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$
>
> *[...]*

En résumé, avant la réforme des mathématiques modernes, la géométrie enseignée au secondaire est effectivement celle d'Euclide et les manuels scolaires pâtissent des mêmes faiblesses que celles dénoncées à propos des Eléments, en gros une absence de fondements suffisants pour des preuves rigoureuses, sur base d'une axiomatique permettant de s'affranchir de ce que les figures apportent comme informations. Autrement dit, la géométrie au secondaire relève du paradigme de l'"axiomatique naturelle" au sens donné par Houdement et Kuzniak (2006) dans leurs analyses de pratiques d'enseignement. De ce fait, outre qu'il est un outil pour chercher et conjecturer des propriétés, le dessin reste le support d'objets construits sur le sensible et va jouer un rôle effectif dans les preuves où l'on se dispense, par exemple, de prouver l'existence de certains points dont il atteste. Pour cette raison, au début des années 50, en Belgique et surtout en France, les mathématiciens commencent à trouver l'enseignement de la géométrie un peu poussiéreux et encouragent une refonte de son enseignement.

2.2.2 Pendant la réforme des maths modernes

Comme l'expliquent Bernard Charlot et al. [55], la réforme a commencé au début des années 50, en Belgique et en France du moins, et dans les pays sous leur influence :

> *La réforme de l'enseignement des mathématiques est à l'ordre du jour dès le début des années cinquante. En 1952, trois grands mathématiciens français, Jean Dieudonné, Gustave Choquet et André Lichnerowicz se réunissent à Melun avec deux philosophes suisses pour parler de l'enseignement des mathématiques dans les classes élémentaires. En 1956, au cours d'une réunion organisée à Sèvres par l'Association des Professeurs de Mathématiques, G. Choquet compare ces professeurs à des "gardiens de musée, qui montrent des objets poussiéreux dont la plupart n'ont pas d'intérêt". A la même époque, le mouvement naît en Belgique, où il sera porté par Georges Papy.*

Cependant, comme le dit Bernard Charlot aussi, le véritable coup d'envoi de la réforme est donné en 1958-1959 par une organisation internationale à caractère économique : l'Organisation européenne de coopération économique (O.E.C.E).

> *Dès 1958, l'O.E.C.E. crée un Bureau du Personnel Scientifique et Technique, dont l'un des objectifs est de "rendre plus efficace l'enseignement des sciences et des mathématiques". En novembre 1959, l'O.E.C.E organise un séminaire de dix jours, le Colloque de Royaumont, animé par Marshall H. Stone, de l'Université de Chicago. L'objectif de ce colloque est de promouvoir une réforme du contenu et des méthodes de l'enseignement des mathématiques à l'école secondaire (12-19 ans). G. Choquet y présente un programme pour l'enseignement primaire et secondaire et J. Dieudonné y lance un "A bas Euclide !" qui devient vite célèbre.*

55. BKOUCHE, CHARLOT et ROUCHE 1991, p. 26–27.

En effet, comme analysé par Dirk De Bock et Geert Vanpaemel [56], ce séminaire est considéré aussi bien en Europe qu'aux EU comme une étape importante dans l'histoire de la *"mathématique moderne"*. Comme le séminaire de Royaumont était une initiative de l'OECE, il avait des buts pratiques, teintés politiquement, bien définis. Royaumont n'était donc pas une *"conférence de recherche"* dans laquelle les spécialistes faisaient part des résultats les plus récents dans leur domaine scientifique. Le but était en réalité, de faire un *"bilan"*, de tâter le terrain à propos des développements actuels en mathématiques et dans l'enseignement et de formuler des recommandations que les pays de l'OECE pourraient traduire en plans d'action concrets.

Parmi les exposés, nous nous intéressons à celui de Dieudonné. Comme le constatent les auteurs, Dieudonné trouvait que l'adéquation entre enseignement secondaire et université n'était pas parfaite, mais la raison, selon lui, en était l'évolution des concepts mathématiques. Il ne se prononça pas sur les méthodes d'apprentissage dans l'enseignement secondaire, mais il fut très critique vis-à-vis des contenus. Avec le slogan *"A bas Euclide"*, il résuma l'essentiel du programme, ainsi qu'il envisageait. Qu'est-ce que ça veut dire, ce slogan ? Selon Freudenthal, Dieudonné signifie en fait A bas *"Euclide"*, ici *"Euclide"* renvoie aux manuels contemporaines au secondaire en France.

> *En effet, comme membre du groupe Bourbaki, Dieudonne n'était pas un opposant mais plutôt un promoteur de la méthode axiomatico-déductive, la méthode d'EUCLIDE. DIEUDONNE ne laisse d'ailleurs à ce sujet planer aucun doute, dans sa conférence il fait l'éloge de la façon extraordinaire dont l'ancienne géométrie grecque permet à l'humanité de se réaliser. Il ne proposait donc pas de remplacer quelque chose de "mauvais" par quelque chose de "bon", mais plutôt quelque chose de "bon" par quelque chose de "meilleur". Sa critique ne portait pas sur la méthode d'EUCLIDE elle-même mais sur la manière implicite dont EUCLIDE fait parfois appel à l'intuition et sur un certain nombre d'impuretés dans la réalisation, comme par exemple la distinction entre axiomes et postulats, et encore sur l'attention qu'il porte à des contenus qui, d'après lui, datent ou ne sont plus scientifiquement pertinents. Le prototype de tout ceci, c'est le maudit "triangle" (et l'étude exhaustive de toutes ses propriétés par la technique des cas d'égalité). Ce que DIEUDONNE proposa à Royaumont revient à peu près à remplacer l'ancien système d'axiomes d'EUCLIDE par un espace vectoriel à deux dimensions pourvu d'un produit scalaire. Et dans sa perspective, l'étude de la géométrie de l'espace consiste alors simplement à remplacer "deux" par "trois" dans les axiomes relatifs aux vecteurs de l'espace.* [57].

56. Bock et Vanpaemel 2015, p. 25–36.
57. Ibid., p. 29.

En résumé, il s'agissait surtout d'un réforme de contenus même si elle s'est assortie de méthodes dites actives : on souhaitait enseigner dès le début de l'enseignement secondaire, et même en primaire, les concepts que les Bourbakistes avaient créés pour unifier et fonder sur une même base théorique les domaines mathématiques variés comme la géométrie, l'algèbre, l'analyse,... Ce qui a eu pour effet un enseignement précoce de la théorie des ensembles, des relations entre ensembles et des structures comme celles de groupe et d'espace vectoriel.

En géométrie, cette réforme pédagogique s'est traduite par une toute nouvelle approche dans laquelle les figures géométriques traditionnelles sont passées à l'arrière-plan. Et cette approche était accompagnée d'interdits dont le célèbre et désastreux slogan de Dieudonné, mathématicien français : "A mort le triangle !", la géométrie étant désormais ramenée à l'étude de groupes de transformations ponctuelles illustrées par les images d'une famille finie arbitraire de points, à la lumière du programme d'Erlangen, le but étant d'étudier la structure d'un ensemble de transformations muni de la loi de composition, dont l'ensemble des translations qui deviendront le terreau de l'algèbre linéaire, sous le nom de vecteurs. Dans la foulée, les fameux cas d'égalité de triangles qui avaient été un pilier de la géométrie d'Euclide ont été bannis de manière très volontariste comme en témoigne cette phrase issue d'un manuel :

> *"Si tu peut remplacer la découverte de triangles isométriques par celle d'une isométrie, n'hésite pas !"*
>
> *(Boutriau et al.,1987)*

Et, en même temps, les preuves de propriétés de figures basées sur ces cas d'égalité ont été remplacées par d'autres prenant appui sur les invariants des transformations à la manière de Klein.

> *"Là où la méthode synthétique est employée, les instruments de raisonnement ont changé : ce ne sont plus les cas d'égalité (ou isométrie) des triangles et les cas de similitude, mais les invariants des transformations, c'est-à-dire, par exemple, des propriétés communes à des figures symétriques par rapport à une droite."*
>
> *(Nachtergaele, Libre Belgique, 15 avril 1980)*

Voici l'anthologie qui est faite après des discussions en groupes ou en séances plénières à la fin du séminaire :

> *L'enseignement de la géométrie et de l'algèbre donné dans les écoles doit être adapté de toute urgence aux progrès foudroyants des mathématiques modernes. Cette adaptation exige qu'on élimine de l'enseignement secondaire traditionnel une partie importante (périmée ou dans valeur technique) de la géométrie plane et dans l'espace, de l'algèbre et de la trigonométrie. De plus, il est indispensable que ces matières soient enseignées dans leur enchaînement logique, plus à fond*

> *et avec plus de rigueur. Cette adaptation exige également un enseignement aussi précoce que possible des relations qui unissent la géométrie et l'algèbre, particulièrement l'algèbre linéaire et vectorielle. L'enseignement de la géométrie déductive dans les écoles secondaires doit être basé sur une expérience préalable satisfaisante de la géométrie intuitive ou physique.*

Et donc, il faut enseigner les mathématiques de notre temps, autrement dit, les mathématiques *"modernes"*, comme indiqué dans la Charte de Chambéry [58]

> *Ce qu'on appelle un peu vite la mathématique moderne, ce qu'il conviendrait mieux d'appeler la conception constructive, axiomatique, structurelle des mathématiques, fruit de l'évolution des idées, s'adapte "comme un gant", nous permettrons-nous de dire, à la formation de la jeunesse de notre temps.*

Ou, comme Papy le résume dans son livre [59] :

Mathématique moderne	=	*Vision moderne de la mathématique*
Mathématique moderne	=	*Exposé de la mathématique qui utilise Ensembles et Grandes Structures.*

De plus, le Colloque de Royaumont veut *"préciser les matériels nouveaux et les méthodes d'enseignement rénovées correspondant à ces conceptions"*, c'est-à-dire il insiste sur la nécessité d'une réforme pédagogique.

Dans ce contexte, au lieu d'enseigner d'abord la géométrie pour en extraire peu à peu des éléments qui seront constitutifs de l'algèbre linéaire, on commence par enseigner l'algèbre linéaire pour en venir ensuite seulement à la géométrie comme étant une de ses "spécifications". Cela traduit non seulement la subordination de la géométrie à l'algèbre linéaire dont la raison mathématique est analysée auparavant mais aussi le phénomène que Freudenthal (1973) appelle une inversion didactique.

Comme explique Lebeau (2009) dans sa thèse :

> *Voici en substance et de manière schématique comment GEM (1980) décrit cette transposition telle qu'elle apparaît à l'époque des mathématiques modernes : les notions de structure et de transformation sont centrales. On commence par étudier les translations, définies par la relation d'équipollence, sur base d'axiomes d'incidence et de parallélisme et on montre que l'ensemble des translations muni de la loi de composition forme un groupe commutatif. Suivent les homothéties qui*

58. C'est un colloque chargé de présenter un plan de rénovation. Il est organisé par l'A.P.M. en janvier 1968 à CHAMBÉRY.
59. PAPY 1967, p. VII–VII.

> *vont permettre d'introduire le champ des réels. Le théorème de Thalès, quant à lui, introduit un ordre sur les réels.*
>
> *La composée de deux translations se traduit en somme de vecteurs et, une fois défini le produit d'un vecteur par un réel, on arrive à la structure d'espace vectoriel grâce à laquelle on va pouvoir faire de la géométrie affine.*
>
> *Reste à introduire un produit scalaire pour pouvoir faire de la géométrie métrique.* [60]

En gros, comme le dit Lebeau, ces transpositions sont organisées autour des concepts premiers de vecteurs, d'espaces vectoriels ou affins et de produit scalaire comme forme bilinéaire symétrique positive qui remplacent en géométrie, les notions premières de point, droite, plan.

Nous allons analyser en détail ici les manuels "Mathématique moderne" de Papy et de Jean M. Nachtergaele, Marc Van Cutsem et Andre Louviaux.

ZOOM SUR LES MANUELS A L'EPOQUE DE MATHEMATIQUES MODERNES

Commençons avec la collection de Papy, qui s'imposa comme le chef de file d'une évolution de la pédagogie des mathématiques en Belgique. Comme dit dans la préface de son livre :

> *Tel est l'objectif de ce livre qui s'adresse à tous ceux qui veulent s'initier à la mathématique d'aujourd'hui, quels que soient leur âges et leur formation antérieure. Il convient en particulier pour les élèves (de 12 ans) des classes de sixième qui ont adopté le programme expérimental officiel du Ministère de l'Education Nationale et de la Culture de Belgique.*
>
> *[...] Les chapitres 21 à 23 poursuivent l'édification de la géométrie affine du plan, orientée vers les structures vectorielles qui dominent toute la mathématique actuelle. [...] Les translations sont présentées comme classe d'équipollence et mènent d'emblée au groupe commutatif des translations, qui introduit le premier calcul vectoriel.*

Dans le chapitre 21, Papy donne d'abord la définition des couples équipollents en les reliant par un ou deux parallélogrammes.

> *DEFINITION.*
>
> *1. Deux couples de points non alignés sont* **équipollents** *ss'ils peuvent être reliés par un parallélogramme.*

60. Lebeau 2009, p. 158.

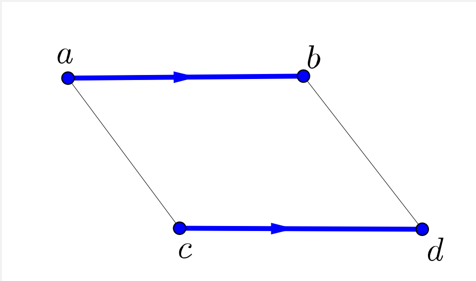


FIGURE 2.3

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) \uparrow (\mathbf{c},\mathbf{d}) \iff (\mathbf{ac}||\mathbf{bd} \quad \mathbf{et} \quad \mathbf{ab}||\mathbf{cd})$$

2. Deux couples (non identiques) de points alignés sont équipollents ss'ils peuvent être reliés par deux parallélogrammes.

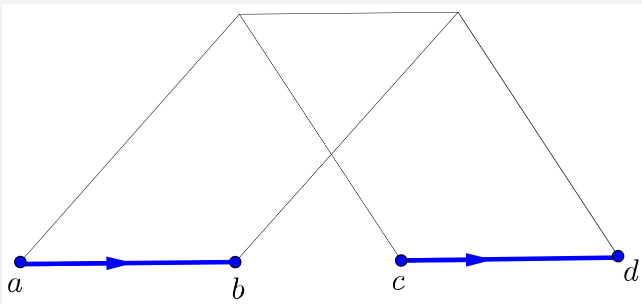


FIGURE 2.4

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) \uparrow (\mathbf{c},\mathbf{d})$$

3. Nous admettrons encore que tous les couples identiques sont équipollents

$$(a,a) \uparrow (b,b) \uparrow (c,c)...$$

et que tout couple équipollent à un couple identique est identique.

Il donne après la définition du milieu par l'équipollence de deux couples d'équipollents

DEFINITION.

> *Si* $(a, m) \uparrow (m, b)$*, on dit que* m *est le* **centre** *de la paire* a, b *ou le* **milieu** *du segment* $[a, b]$.

Pour définir le vecteur, Papy utilise le concept de translation comme suit :

> *DEFINITION.*
> *On appelle* **translation** $\overrightarrow{ab}$ *l'ensemble des couples équipollents à* (a, b).
> *En formule :*
>
> $$\overrightarrow{ab} = \{(x, y) \in \Pi \times \Pi \mid (x, y) \uparrow (a, b)\}$$
>
> *Donc*
>
> $$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd} \iff (a, b) \uparrow (c, d)$$

Il montre après que l'ensemble T des translations est un groupe commutatif pour la composition. Avec ce résultat, il introduit le vecteur comme suit :

> *Nous avons noté* T, o *le groupe des translations.*
>
> *Nous avons utilisé jusqu'ici le signe* o *qui est le signe général de la composition.*
>
> *Il importe donc de faire l'effort nécessaire pour assimiler ce nouveau langage.*
>
> *La translation* t *prendra le nom de* **vecteur** *et sera notée, de préférence,* $\overrightarrow{t}$.
>
> *La réciproque* t^{-1} *de la translation* t *sera notée* $-\overrightarrow{t}$ *et prendra le nom de* **vecteur symétrique ou opposé** *au vecteur* $\overrightarrow{t}$.
>
> *La translation identique* 1_Π *s'écrira* $\overrightarrow{o}$ *et prendra le nom de* **vecteur nul**.
>
> *L'ensemble* T *sera alors noté* V.
>
> *Voici un petit dictionnaire de synonymes qui t'aidera à passer d'un langage à l'autre.*

DICTIONNAIRE DE SYNONYMES	
o	$+$
translation	*vecteur*
composition	*addition*
composé	*somme*
translation t	*vecteur* $\overrightarrow{t}$
1_Π	$\overrightarrow{o}$
t^{-1}	$-\overrightarrow{t}$
translation réciproque	*vecteur symétrique (ou opposé)*
T	V
T, o	$V, +$

De même, dans le livre II destinée à la 5^e année d'une collection “Mathématique moderne” de Jean M. Nachtergaele, Van Cutsem et Louviaux, les vecteurs sont définis comme graphes d'une translation. Voici la table de matière du livre II pour les deux chapitres qui nous concernent :

Chapitre IV : Équipollence et translation

Couples équipollents - Propriétés de l'équipollence - Translation - Le groupe commutatif

Chapitre VII : Les vecteurs - Espace vectoriel

Vecteur - Le groupe $(V, +)$ - Sous-groupe de $(V, +)$ - Multiplication scalaire - Milieu du couple - Théorème de géométrie - L'espace vectoriel $(Q, V, +)$

Afin de définir le concept de vecteur au chapitre VII, la notion de couples équipollents est introduite au chapitre IV comme suit :

Couples équipollents

> *Par définition, nous dirons que deux couples sont équipollents dans trois cas différents :*
>
> 1er cas : *Deux couples non alignés sont appelés équipollents si, étant de même sens, leurs éléments sont les sommets d'un parallélogramme.*

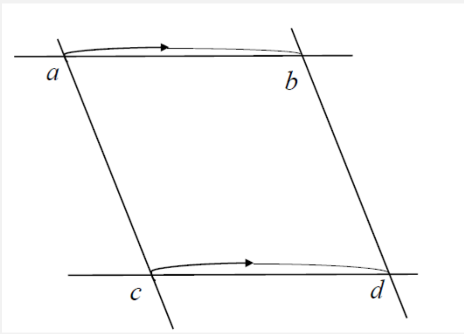


FIGURE 2.5

> *Si* $abcd$ *est un parallélogramme et si les couples* (a, b) *et* (c, d) *sont de même sens, nous écrirons :* $(a, b) \uparrow (c, d)$ *nous lirons :* (a, b) *est équipollent à* (c, d).
>
> 2e cas : *Deux couples alignés sont équipollents si, étant de même sens, ils peuvent être reliés par deux parallélogrammes.*

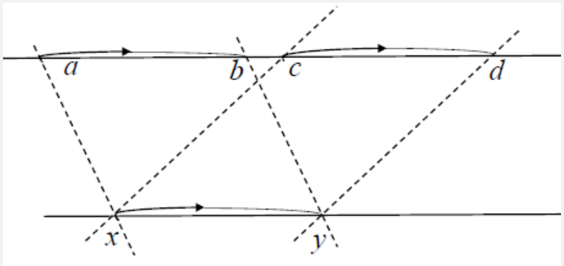


FIGURE 2.6

Si a, b, c, d *sont alignés et si* a, b, y, x *et* c, d, y, x *sont des parallélogrammes, avec* (a, b) *et* (c, d) *de même sens :* $(a, b) \uparrow (c, d)$.

2e cas : *Deux couples identiques sont toujours équipollents :* $(a, a) \uparrow (b, b)$.

Comme explique Lebeau, on voit le rôle que la figure du parallélogramme joue dans la désignation géométrique des couples équipollents.

Le vecteur

Le concept de vecteur est défini au chapitre VII du livre II comme *"le graphe d'une translation, c'est-à-dire l'ensemble des couples de cette translation"* ou encore l'ensemble des couples équipollents à un couple donné.
Par la suite la relation d'équipollence est présentée comme une équivalence et les translations munies de la loi de composition permettent d'illustrer le concept de groupe commutatif.
Concernant les opérations sur les vecteurs, les auteurs définissent l'addition vectorielle en la faisant correspondre à la composition des translations :

Addition vectorielle

A la composition des translations, nous ferons correspondre l'addition des vecteurs et nous utiliserons un langage adapté à l'opération d'addition :

A la translation t	*corres.*	*le vecteur $\overrightarrow{t}$*
A l'ensemble des translations $\mathcal{T}$	*corres.*	*l'ensemble des vecteurs V*
Au symbole de la composition des translations (o)	*corres.*	*le symbole de l'addition (+)*
A la composée de deux translations	*corres.*	*la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{t} + \overrightarrow{s}$*
Au neutre 1_π de la composition des translations	*corres.*	*le neutre pour l'addition des vecteurs : le vecteur nul désigné par $\overrightarrow{0}$*
A l'élément symétrique d'une translation t, c'est-à-dire t^{-1}	*corres.*	*l'élément symétrique du vecteur $\overrightarrow{t}$, c'est-à-dire $-\overrightarrow{t}$*
A $(\mathcal{T}, o)$	*corres.*	$(V, +)$

Concernant deux vecteurs de même origine, la somme des vecteurs est explicitée comme suit :

> *Pour effectuer la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{oa}$ et $\overrightarrow{ob}$ de même origine, il suffira donc de construire un couple (a, c) tel que $(a, c) \uparrow (o, b)$. L'image du point o par $s \circ t$ donnera la position du point c telle que $\overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ob} = \overrightarrow{oc}$.*

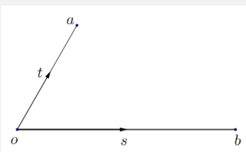


FIGURE *2.7*

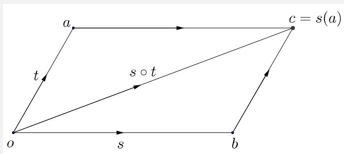


FIGURE *2.8*

Multiplication scalaire

La multiplication d'un vecteur par un scalaire naturel est définie par l'utilisation de l'addition comme suit :

$$n\overrightarrow{v} = \underbrace{\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} + \cdots + \overrightarrow{v}}_{n\ fois}$$

En suite, les auteurs définissent $-n\overrightarrow{v}$ et $\frac{1}{n}\overrightarrow{v}$ en utilisant le symétrique de $\overrightarrow{v}$ et la résolution d'équation $nx = b$ où $x = \frac{b}{n}$ et de là ils donnent du sens aux écritures $\frac{m}{n}\overrightarrow{v}$. Ensuite ils établissent une structure d'espace vectoriel sur V l'ensemble des vecteurs sur le champ $\mathbb{Q}$.

Un passage à la géométrie analytique

De plus, pour passer à la géométrie analytique en utilisant les bases et les coordonnées, les auteurs des livres à l'époque des mathématiques modernes expliquent clairement ce qui se cache dans les formules *"algébriques"*. Tout d'abord, dans le livre III, destiné à la troisième année pour les élèves de 14-15 ans, les auteurs commencent avec l'étude de l'ensemble $\mathbb{R}$ qui vient compléter l'ensemble $\mathbb{Q}$. Après ils donnent la notion de graduation réelle relativement à un vecteur $\overrightarrow{oa}$:

> *Étant donné deux points distincts o et a, sur une droite D, on appelle graduation réelle de base $\overrightarrow{oa}$ l'ensemble des points de la droite D, cet ensemble étant en bijection avec $\mathbb{R}$, le point o étant pris comme origine et $\overrightarrow{oa}$ comme vecteur unitaire (...) à chaque point de la droite correspond une et une seule abscisse réelle (telle que $\overrightarrow{ox} = r\overrightarrow{oa}$).*

Ensuite ils définissent la coordonnée d'un point du plan comme suit :

> *Dans le plan π, considérons deux droites sécantes A et B ainsi que leur point d'intersection $\{o\}$. Sur chacune de ces droites, fixons respectivement les vecteurs unitaires $\overrightarrow{oa}$ et $\overrightarrow{ob}$. Construisons le vecteur*
>
> $$\overrightarrow{ox} = 2\overrightarrow{oa} + 3\overrightarrow{ob}$$
>
> *ou*
>
> $$\overrightarrow{x} = 2\,\overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$$

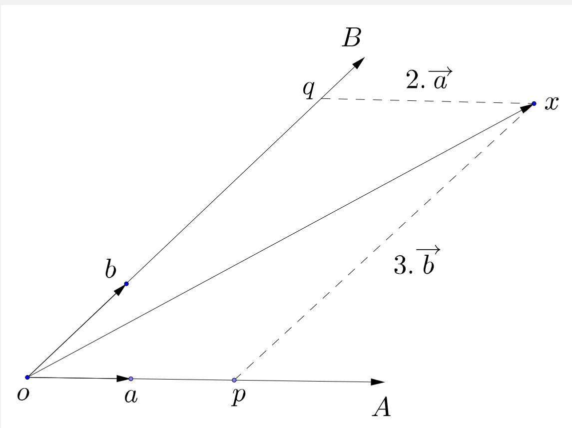


FIGURE 2.9

> *Nous dirons que le point $x \in \pi$ est alors repéré par le couple $(2,3)$ appelé la coordonnée de ce point.*

L'association biunivoque entre le point x et sa coordonnée $(2,3)$ est justifié par le fait qu'il existe un et un seul couple $(2,3)$ telle que $\overrightarrow{ox} = 2\overrightarrow{oa} + 3\overrightarrow{ob}$ et cela est précisé dans la suite du livre par la définition de la dépendance et l'indépendance linéaires.
Ensuite, les auteurs introduisent l'idée d'un plan pointé en un point o qui leur permettra de considérer des modèles géométriques.

> *Tout élément de V est un ensemble de couples équipollents, si nous choisissons un point o dans le plan et si nous convenons de représenter tout élément de V par le couple dont l'origine est o, à chaque point x du plan π correspondra un seul vecteur dont (o,x) est un couple. Dans ces conditions, on dit que le plan π est "pointé en o" ; on le désignera par π_0.*

Ainsi les auteurs établissent une bijection de V sur π_0 qui à tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de V fait correspondre un point du plan pointé, image du vecteur.

Afin de donner les équations de la droite dans un repère $(O, \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\})$, les auteurs ont expliqué auparavant les définitions de la dépendance linéaire, l'indépendance linéaire, le *"théorème fondamental"*, etc. suivant le schéma cidessous :

> *DEFINITION. - Un vecteur $\overrightarrow{x}$ d'un vectoriel E sur le champ $\mathbb{R}$ est combinaison linéaire d'une partie P de E ($P = \{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, ...\}$) si $\overrightarrow{x} = r.\overrightarrow{a} + s.\overrightarrow{b} + t.\overrightarrow{c} + ...(r,s,t \in \mathbb{R})$.*
>
> *- Les opérateurs r, s, t éléments de $\mathbb{R}$ sont les coefficients de la combinaison linéaire.*
>
> *DEFINITION. Des vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$,... éléments d'un vectoriel E sont linéairement dépendants si l'un d'eux au moins est combinaison linéaire des autres.*
>
> *Des vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$,... sont linéairement indépendants si aucun d'eux n'est combinaison linéaire des autres.*
>
> *Une partie $P = \{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, ...\}$ de E est une partie libre si $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$,... sont linéairement indépendants.*
>
> *Une partie $P = \{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, ...\}$ de E est une partie liée si $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$,... sont linéairement dépendants.*
>
> *Une condition nécessaire et suffisante pour que $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ soient linéairement dépendants est qu'il existe une combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ égale au vecteur $\overrightarrow{0}$ dont les coefficients ne soient pas tous nuls.*

> *THEOREME FONDAMENTAL. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ soit une base est que tout élément de $\mathbb{R}^2$ puisse s'exprimer d'une et une seule manière comme combinaison linéaire de cette partie.*

Par la suite, les auteurs expliquent l'isomorphisme entre $(\mathbb{R}, V, +)$ et $(\mathbb{R}, \pi_0, +)$.

> *Il existe une bijection de V sur π_0.*
>
> *Dès lors, en désignant par $x + yn$ et en appelant somme des points x et y, le point z élément de π_0 de manière que $\overrightarrow{oz} = \overrightarrow{ox} + \overrightarrow{oy}$ et par $r.x$ le produit de x par r, le point m de manière que $\overrightarrow{om} = r\overrightarrow{ox}$, nous définissons une addition et une multiplication scalaire sur l'ensemble des points du plan qui confèrent à $\pi_0, +$ la structure d'espace vectoriel sur le champ $\mathbb{R}$.*

La droite vectorielle est alors définie comme un sous-vectoriel de π_0

$$D = \{\overrightarrow{p} = r\overrightarrow{d} \text{avec} r \in \mathbb{R}\}$$

et par l'isomorphisme concerné l'image de $\overrightarrow{p} = r\overrightarrow{d}$ est $(x, y) = r(m, n)$ et l'égalité des couples fournit

$$\begin{cases} x = rm \\ y = rn. \end{cases}$$

Ensuite, l'équation de la droite comprenant les points a et b est définie comme suit :

> *1) Pour tout point x de la droite ab, l'égalité*
>
> $$\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a} = k.(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})$$
>
> *est l'équation vectorielle de la droite ab.*
>
> *2) En exprimant ces vecteurs au moyen de leurs coordonnées dans un repère $(O, \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\})$ on obtient :*
>
> $$(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}) - (a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2}) = k.(b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2}) - (a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2})$$
>
> *d'où*
>
> $$x_1 - a_1 = k.(b_1 - a_1)$$
> $$x_2 - a_2 = k.(b_2 - a_2)$$
>
> *c'est-à-dire les équations paramétriques de la droite ab.*

> 2) *En éliminant k entre les deux équations paramétriques précédentes, nous trouvons*
>
> $$\frac{x_2 - a_2}{x_1 - a_1} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$
>
> *c'est l'équation cartésienne de la droite ab, c'est-à-dire la relation entre x_1 et x_2, éléments de la coordonnées d'un point quelconque de la droite ab.*
>
> Ici, on trouve l'avantage ces propos concernant l'alignement et le passage à l'espace car la subordination de la géométrie analytique à l'algèbre linéaire permet d'éviter un mode de validation géométrique qui est illustré par Lebeau et Schneider (2009). De plus, comme explique Lebeau, les opérations sur les différents ensembles qui interviennent dans cette étude (vecteurs, couples de réels, points du plan pointé) sont construites de manière à obtenir un isomorphisme entre les espaces vectoriels ainsi établi, ce qui permet de valider le passage entre les différents écritures. Cependant, remarquons que le lien avec l'expérience sensible de l'espace physique n'est pas établi.
> De plus, à l'époque de la réforme des mathématiques modernes, le mot d'ordre était d'amarrer la géométrie à l'algèbre linéaire dont on peut dire que le succès était lié à la fécondité de la propriété de linéarité d'objets variés en maints domaines mathématiques. Pour la géométrie élémentaire, l'idée était d'introduire les droites dans le plan comme "translatées" de sous-espaces vectoriels. On privilégiait alors un point O dans le plan et on identifiait tout autre point P du plan au vecteur *"lié"* $\overrightarrow{OP}$ .Ce point de vue diffère de celui adopté ici d'entrée de jeu puisque nous ne privilégions aucun point qui serait l'origine d'un sous-espace vectoriel associé, pour les raisons avancées supra. On y reviendra plus bas.

En résumé, on voit bien que les mathématiciens à l'époque voient clairement les liens entre la géométrie et l'algèbre linéaire et ils proposent l'introduction de cette dernière au niveau de l'enseignement secondaire car elle unifie la géométrie synthétique et la géométrie analytique en même temps qu'elle apporte des fondements rigoureux pour faire de la géométrie élémentaire, comme le constate Dieudonné (1964) [61] :

> *Il me semble qu'il y a intérêt à familiariser le débutant le plus tôt possible avec les notions essentielles de cette discipline, à lui apprendre à "penser linéairement", ce qui est d'autant plus facile qu'il y a peu de notions, en mathématiques, qui soient plus simples à définir que celles d'espace vectoriel et d'application linéaire. A notre époque de proli-*

61. DIEUDONNÉ 1964, p. 12–14.

> *fération intense dans toutes les sciences, tout ce qui condense et tend à l'unification a une vertu qu'on ne saurait surestimer. [...] D'autre part, j'ai cherché à résister à la tentation d'introduire prématurément les théories qui seront enseignées à l'Université. Il me semble que la nature nous a heureusement fourni "une ligne de démarcation" toute tracée, en nous douant de l'intuition géométrique pour les espaces à 2 et 3 dimensions, il est donc possible de représenter graphiquement tous les phénomènes de l'Algèbre linéaire limités à ces deux dimensions.*

Le paradigme d'enseignement de la géométrie devient alors, comme disent Houdement et Kuniak (2006), celui d'une géométrie *"axiomatique formaliste"* où le dessin est le support d'une relation entre des objets virtuels, son rôle étant réduit à celui d'un outil heuristique.

Comme l'analysent Cissé Ba et Jean-Luc Dorier (2006) [62] , la position de Dieudonné, qui a dominé la réforme des mathématiques modernes, est en réalité un modèle idéologique du haut vers le bas : importer le modèle de l'espace euclidien normé pour l'introduction du vecteur au collège dans la perspective de l'enseignement ultérieur de l'algèbre linéaire, comme théorie transverse à divers domaines mathématiques.

C'est sûr que les mathématiciens veulent construire un système global d'enseignement des mathématiques avec un point de vue axiomatique et structural pour éviter les erreurs existant auparavant en mathématiques mais des critiques portant sur cette réforme des mathématiques modernes n'ont pas tardé et tout particulièrement sur l'enseignement de la géométrie qu'elle inspirait. Globalement, la géométrie, dans les programmes de cette époque, était devenue, il faut le dire, absconse, pour les élèves. Ainsi, Krygowska (1975) dénonce la nouvelle définition du vecteur comme élément d'un espace vectoriel qui est celle de l'algèbre linéaire et qui n'a aucune incidence immédiate sur les pratiques enseignantes en physique pas plus qu'elle n'induit d'intuition géométrique dans l'étude du calcul vectoriel. On cite ici aussi le débat de Krygowska [63] sur "La réforme de l'enseignement des mathématiques" organisé par la Régionale Parisienne de l'Association des Professeurs de l'Enseignement Public en Avril 1975 :

> *Quelqu'un a parlé des erreurs. On peut le faire dans divers perspectives. Il y a les petites erreurs des manuels, mais on peut aussi faire une réforme qui soit globalement une erreur. Et il ne faut pas objecter la réforme continue, parce qu'on peut continuer les erreurs !*
>
> *Faire une réforme est une grande responsabilité, il faut la préparer sérieusement. On a parlé de points de vue différents, mais il y a aussi des*

62. Ba et Dorier 2006, p. 24.

63. Débat sur la réforme de mathématiques modernes entre Madame Krygowska et Monsieur Freudenthal - in Chantiers de Pédagogie mathématique - Régionale parisienne de l'APMEP - Cahier 33 - juin 1975.

> *points de vue faux, comme celui, en pédagogie, de partir de l'abstraction pour aller aux fausses concrétisations.*
>
> *C'est aussi une erreur de penser qu'on peut faire une réforme sans préparer les maîtres. Cette erreur a été faite en France et en Allemagne. Il faut une stratégie pour préparer les gens, maîtres et parents. Il faut employer des moyens modernes, comme la télévision...*

De même, à propos de l'ensemble de la réforme, Bkouche, Charlot et Rouche (1991) [64] soulèvent, de manière très alarmante, la question du sens, pour les élèves, des mathématiques qu'on leur enseigne :

> *[...] Les maths modernes : une construction trop lente du sens : [...] Pour un mathématicien, les structures sont avant tout des instruments dont il se sert pour étudier les phénomènes mathématiques qui peuplent sa pensée. Elles lui servent à voir des choses et à se mouvoir efficacement dans l'univers mental qui est le sien. Mais l'univers des élèves est très loin de celui du mathématicien. [...] Il est vrai qu'enseigner très tôt des structures abstraites aurait été, si cela s'était avéré praticable, un remarquable raccourci. Malheureusement, les élèves n'avaient pas "le paysage mental" voulu. [...] En résumé, la réforme a mis trop tôt entre les mains des élèves des instruments trop puissants, qui ne pouvaient que rarement leur servir à résoudre des problèmes, à travailler des applications. La construction du sens dans ces circonstances se faisait trop lentement pour les élèves, et beaucoup ont décroché.*
>
> *L'inégalité entre professeur et élève s'est trouvée renforcée. Le professeur mathématicien connaît bien, lui, le paysage mathématique où les structures ont un sens et fonctionnent. Mais comment expliquer cela aux élèves qui ne sont pas dans ce paysage ? Le professeur souffre d'une rétention de sens. Son seul recours quand on lui demande "à quoi ça sert ?" est de répondre "vous verrez plus tard". Mais les élèves souffrent encore plus de la rétention de sens du professeur.*

En Belgique, une brochure du GEM (1985) [65] dénonce les excès de l'époque, en particulier le caractère peu naturel de certains énoncés, tel celui de l'axiome des parallèles d'Euclide qui s'énonce désormais : *Toute direction est une partition du plan.* Alors que son énoncé initial faisant une référence au tracé d'une droite parallèle à une autre. Car, tout ce qui relève de l'expérimental et de la mesure est reporté, voire proscrit. Par exemple, l'usage du rapporteur est relégué à la 4ème année du secondaire, le temps non seulement d'amarrer la géométrie aux structures d'espaces vectoriels et d'espaces affins mais aussi de construire l'ensemble des réels lui-même comme un espace vectoriel. Il faut en outre avoir défini "proprement" les angles, comme classes d'équivalence de couples de demi-droites de même origine,

64. Bkouche, Charlot et Rouche 1991, p. 49–50.
65. Groupe enseignement mathématiques (GEM) 1985.

images les uns des autres par une isométrie. Ce qui suppose un niveau d'abstraction assez élevé :

> *Le choix d'une certaine axiomatique et d'un exposé déductif conduit à des définitions parfois très éloignées de l'intuition. Ainsi en va-t-il par exemple de la rotation, si on l'introduit comme composée de deux symétries orthogonales d'axes concourants. Pour toute personne non avertie, et donc sur le terrain de l'élève, une rotation, "c'est quand ça tourne d'un certain angle", et personne n'imaginerait ces deux retournements successifs qui reviennent au même. Plus généralement, définir une isométrie comme composée de symétries orthogonales et se servir de la notion d'isométrie pour définir la distance par après, c'est négliger l'intuition pour laquelle une isométrie "c'est quand la distance se conserve". C'est en outre priver les élèves du remarquable choc intellectuel que peut provoquer la découverte du théorème de réduction de toutes les isométries à des composées de symétries orthogonales seulement. On n'imagine aucun élève qui, partant de sa connaissance familière des rotations ou des déplacements, arrive par tâtonnements à les définir en termes de symétries orthogonales. De telles définitions sont par conséquent imposées par l'autorité mathématicienne, et même si nous savons qu'elles ne sont pas arbitraires, il est clair qu'elles le paraîtront.* [66]

En effet, la relation d'équivalence est le principal outil pour définir de nouveaux objets comme l'angle ou encore la direction d'une droite, ce qui demande à l'élève une "escalade de l'échelle des ensembles", au péril de son intelligibilité :

> *Prenons l'exemple des vecteurs. On part du plan Π, ensemble de point au niveau 1. Un couple de points est une partie de Π. L'ensemble des couples est donc au niveau 2. Une translation est une partie de l'ensemble des couples, donc la famille des translations, encore appelées vecteurs, est au niveau 3. Les éléments de ce niveau 3 sont le matériau de base de la géométrie reprise dans un cadre nouveau. Appelons ν l'ensemble des vecteurs. Un couple de vecteurs est une partie de ν, et donc la famille $\nu \times \nu$ des couples de vecteurs est au niveau 4. Or l'addition vectorielle est une application de $\nu \times \nu \to \nu$, etc. On laisse au lecteur de soin de compter les échelons suivants.*
>
> *Un esprit quelque peu habitué aux mathématiques fixe sans peine son imagination au niveau requis par un exposé, mais en demeurant prêt à la déplacer vers les autres niveaux pour suivre les besoins de l'argumentation. Cette mobilité mentale n'est pas, loin s'en faut, le tout des mathématiques. Il ne sert pas à grand-chose de choisir sans cesse le*

66. GROUPE ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUES (GEM) 1985, p. 21–22.

discours qui la requiert le plus.[67]

En résumé, comme le dit dans une conférence de Daniel Perrin rédigé par Christiane Zehren[68], il est patent que l'échec de la réforme des maths modernes est pour beaucoup dans le développement de la didactique en France. En effet, l'absence d'une véritable réflexion didactique au moment de l'élaboration de cette réforme a conduit à des erreurs grossières. Par exemple, la proposition de Dieudonné d'introduire l'algèbre linéaire au lycée en dimension inférieure ou égale à 3 semble aujourd'hui devoir être rejetée pour des raisons didactiques essentielles, comme le montrent les travaux d'Aline Robert et Jean-Luc Dorier[69]. Par contre, et c'est là une retombée positive, le marasme occasionné dans l'enseignement a été le détonateur de l'émergence de la didactique des mathématiques.

2.2.3 Des contre-réformes qui se cherchent encore

Des "contre-réformes" successives ont vu le jour, en France comme en Belgique, pas toujours si claires que cela, histoire de ménager à juste titre la susceptibilité d'enseignants malmenés. Dans ces contre-réformes, on en revient au paradigme de la géométrie "axiomatique naturelle" avec, entre autres, la notion "d'îlot déductif" par laquelle Choquet (1964) propose d'initier les élèves au raisonnement déductif sur des organisations déductives locales basées sur des axiomes qui ont une évidence physique. On note également un regain d'intérêt pour les propriétés de figures géométriques.

2.2.3.1 Des références au vectoriel surplombantes et peu convaincantes

En ce qui concerne les types d'approches, la géométrie enseignée est un mélange entre la géométrie synthétique, la géométrie analytique et la géométrie vectorielle.

Plusieurs propriétés de figures géométriques dans le plan et l'espace sont explorées, dans une visée expérimentale, mais peu sont démontrées dans le cadre de la géométrie synthétique.

Le rapport de l'algèbre linéaire à la géométrie analytique demeure surplombant, les définitions initiales des objets géométriques étant données en termes de variétés linéaires et de variétés affines. Le passage du registre vectoriel au registre cartésien se fait alors par l'intermédiaire du registre paramétrique, le passage d'un registre à l'autre s'effectuant sans aucune référence théorique ni discours technologique. Cet état de choses conduit à des difficultés d'apprentissage liées, en particulier, aux équations cartésiennes d'objets géométriques perçues comme des étiquettes de ces objets plutôt que comme contraintes portant sur les coordonnées de leurs points (Lebeau et Schneider, 2010).

67. Ibid., p. 24.
68. PERRIN et ZEHREN 2009, p. 83–92.
69. DORIER et al. 2000.

Le calcul vectoriel est présenté officiellement, dans les programmes scolaires, comme outil de résolution de problèmes géométriques ou comme tremplin vers des enseignements en physique. Mais, dans les pratiques enseignantes, l'enseignement proprement dit du calcul vectoriel est axé sur les aspects technologico-théoriques tandis que les types de problèmes et techniques relèvent plus de la géométrie analytique et concernent assez peu les propriétés de figures remarquables. Il s'agira, par exemple, de déterminer l'équation cartésienne d'un plan passant par un point et parallèle à un plan donné.

Même si elle n'est guère assumée, l'algèbre linéaire demeure donc une référence dans les pratiques enseignantes, ainsi que le soulignent Ba et Dorier (2006) :

> *Malgré le rejet de la réforme des mathématiques modernes, le modèle de l'algèbre linéaire, s'il a disparu officiellement des programmes du secondaire, continue de marquer l'organisation mathématique autour du vecteur. [...] On continue de faire "démontrer" sans le dire les axiomes de la structure linéaire.* [70]

Quant à la notion de vecteur, elle est introduite en fin du degré inférieur de l'enseignement secondaire, de manière *"naïve"*, en association avec la notion de translation ou de variation de positions ou encore par le biais de trois caractéristiques non définies *a priori* – direction, sens et longueur – renvoyant ainsi l'élève à ce qu'il voit d'une figure qu'il est supposé interpréter en termes de segments orientés. C'est un retour aux leçons de géométrie de Jacques Hadamard (1898), qui traduit bien le lien naturel entre translation et vecteur quand il définit la translation :

> *Si, par tous les points d'une figure, on mène des droites égales, parallèles et de même sens, les extrémités de ces droites forment une figure égale à la première. [...] L'opération par laquelle on passe de la première figure à la seconde a reçu le nom de translation. On voit qu'une translation est déterminée quand on se donne en grandeur, direction et sens le segment tel que AA', qui va d'un point à son homologue. Aussi désigne-t-on une translation par les lettres d'un tel segment : on dit par exemple la translation AA'.* [71]

A nouveau, aucun discours technologique de type géométrique et/ou algébrique ne vient valider le lien entre le langage vectoriel (vecteurs égaux, multiples, ...) et les configurations géométriques dont il rend compte.

Tous ces facteurs rendent très incertaine l'existence d'une niche écologique où l'enseignement des vecteurs pourrait se nourrir d'enjeux didactiques consistants, qu'ils soient liés à l'algèbre élémentaire, à l'étude de la géométrie ou à celle de la physique :

> *Cependant, des aspects algébriques plus propres au vecteur, comme le lien avec le théorème de Thalès, sont passés sous silence. La dis-*

70. BA et DORIER 2006, p. 28.
71. Cité par BA 2007, p. 64.

> *parition de toute niche algébrique opère toujours comme un manque, qu'une fois rejetée (à juste titre) la référence à la structure d'espace vectoriel, rien n'est venu combler. Dans ce sens, il conviendrait de s'interroger sur la nécessité d'assumer la part intrinsèquement algébrique du vecteur, qui n'est pas celle d'une structure linéaire, mais s'exprime de façon indissociable de la nature géométrique de ceux-ci.*
> *Par ailleurs, la niche "outil performant pour la géométrie" a elle aussi du mal à fonctionner. Il est en effet difficile de trouver un problème de géométrie posé sans vecteur où la modélisation par des vecteurs conduise à un usage réellement performant de l'outil vectoriel. On a vu en effet, à travers l'évolution des programmes (et l'analyse historique le confirme) que l'habitat géométrique n'était pas si naturel qu'il y paraît pour les vecteurs. Pour une part importante, le vecteur géométrique est une création didactique qui a permis à un moment donné de résoudre un problème idéologique et pratique dans l'organisation du savoir enseigné.* [72]

De plus, en géométrie, le vecteur s'insère le plus souvent dans une approche analytique par les coordonnées. Cependant, comme l'explique Dorier (1997) :

> *S'il nous paraît évident que l'outil vectoriel enrichit de façon substantielle la méthode analytique, la question se pose cependant de savoir à quel niveau de l'enseignement du vecteur il est le plus approprié d'introduire la représentation analytique. Il nous semble qu'il peut y avoir un danger à introduire trop tôt ce type de représentation, si l'on veut que l'aspect algébrique des opérations vectorielles (addition et multiplication vectorielle) prenne un sens suffisamment stable dans le contexte d'une géométrie sans coordonnées. Pour bien faire saisir l'intrication très spécifique du géométrique et de l'algébrique dans la constitution du vecteur et des opérations qui lui sont attachées, il semble préférable de ne pas introduire les coordonnées trop tôt, celles-ci risquant de cantonner l'aspect algébrique dans le seul cadre numérique. Par ailleurs, la représentation par les coordonnées est source de nouvelles difficultés dans la confusion entre segment orienté et vecteur : par exemple, certains élèves confondent les coordonnées du vecteur avec celles de l'extrémité d'un représentant.* [73]

N'oublions pas de préciser qu'avec les interdits de la géométrie axiomatique au secondaire depuis la contre-réforme jusqu'au aujourd'hui, les éléments de la géométrie se développent à partir des axiomes dans un ordre presque intangible. De plus, comme l'analyse plus haut le GEM, pour arriver rapidement aux structures globales, on préfère donner des îlots déductifs avec des définitions qu'on peut admettre sans démonstration mais parfois certains de ces îlots ne sont pas bien faits

72. BA et DORIER 2006, p. 29.
73. DOUADY 1997, p. 85–86.

donc ils ne sont pas clairs et rigoureux et par conséquence, les élèves éprouvent beaucoup de difficultés à les accepter comme tels. On va analyser ces difficultés en détail dans la section suivante avec le cas du vecteur.

En 1978, les nouveaux programmes apparaissent en France et, tout particulièrement dans leur partie géométrique, ils mettent l'accent sur l'utilisation de l'acquis intuitif des élèves. Comme l'analyse Cisée Ba, le texte du programme précise que : *"Le calcul vectoriel ne doit pas constituer un terrain purement algébrique ; la maîtrise de ses relations avec les configurations joue un rôle essentiel pour la résolution des problèmes de géométrie".*

> *C'était oublier que le vecteur géométrique est algébrique par essence et que cette nature algébrique n'a nullement besoin de s'afficher par l'intermédiaire de l'espace vectoriel. Les opérations sur les vecteurs géométriques sont constitutives du concept même de vecteur géométrique :*
>
> *La longueur est la base de l'algébrique depuis Grecs.*
>
> *Le sens (sur une même direction) est ce qui permet de considérer des grandeurs négatives incontournables dans la constitution de l'addition.*
>
> *La direction enfin est ce qui vient de l'idée de multiplication.*
>
> *Cette dernière hypothèse est plus difficile à comprendre. Mais regardons ce qu'est la multiplication de deux vecteurs. Dans l'algèbre géométrique des Grecs anciens, la multiplication de deux nombres (c'est-à-dire de deux segments) est l'aire d'un rectangle. Si l'on passe du rectangle au parallélogramme apparaît dans la formule de l'aire le sinus de l'angle formé par les deux côtés, c'est-à-dire la position relative de leurs directions (l'idée de négatif implique ici la prise en compte de l'orientation). Ainsi comme le souligne Grassmann dans l'introduction de l'Ausdehnungslehre, c'est le parallélogramme et non le rectangle qui symbolise le vrai concept de multiplication si l'on considère les grandeurs géométriques orientées (en direction et sens). Ce point de vue souligne l'importance de la direction des grandeurs géométriques dans l'idée de produit. (Dorier 2000, pp.79-80)* [74]

A cela s'ajoute, pensons-nous, que le retour à la géométrie *"naturelle"*, au sens de Houdement et Kuzniak, où les propriétés de congruence, d'incidence et d'ordre demeurent empiriques, occulte ce qui fait de l'algèbre linéaire un véritable outil de preuve de propriétés géométriques.

Quant aux liens avec la physique, Cisée Ba souligne que la nouvelle définition du vecteur, comme élément d'un espace vectoriel issue de la nouvelle structuration de l'enseignement de la géométrie autour de l'algèbre linéaire, n'a pas eu d'incidence immédiate sur les pratiques enseignantes en physique. Voyons ce que dit Hulin, cité par Ba dans sa thèse :

74. Cité par BA 2007, p. 63–64.

> *La coordination physique - mathématique se complique : à côté du décalage dans le temps entre l'enseignement de mathématiques et les besoins de l'enseignement de physique, il existe un décalage entre les mathématiques modernes enseignées et les mathématiques applicables utilisées dans l'enseignement de la physique.*

Ba et Dorier (Ib.) estiment aussi qu'il n'est pas plus aisé de leur trouver une place dans ce contexte :

> *Reste la niche "outil pour la physique", mais elle paraît aussi difficile à faire vivre. En effet, peu de situations physiques sont utilisables en troisième ou même en seconde, dans lesquelles le formalisme vectoriel soit vraiment pertinent. Le plus souvent, on trouve dans les manuels des habillages plus ou moins cachés de situations pseudo physiques. L'élève en est réduit à comprendre ce qu'on veut lui faire faire, faute de pouvoir avoir vraiment prise sur la situation physique en jeu.* (Ba et Dorier, Ib., p. 29)

Comme Cisée Ba, les études des didacticiens de la physique par exemple mettent à jour certaines difficultés liées aux vecteurs et à leur utilisation en physique, et tentent d'éclaircir ce constat d'échec.

> *C'est ainsi qu'en 1973, Malgrange, Saltiel et Viennot réalisent une enquête par questionnaire auprès d'étudiants entrant en première année d'université pour chercher à caractériser les significations que ceux-ci attachent aux vecteurs et leur utilisation en physique. Parmi les difficultés repérées, la plus tenace concerne l'addition vectorielle, à laquelle s'ajoutent celles dues au langage de la physique qui ne distingue pas en général la grandeur vectorielle de la grandeur scalaire (la vitesse désigne aussi bien le vecteur vitesse que l'intensité de la vitesse).*
>
> *[...] En somme, ces auteurs attribuent ces difficultés à "l'influence trop grande d'une géométrie mal articulée sur l'algèbre et qui laisse dans l'ombre bien des aspects des relations entre forces, mouvements et géométrie des déplacements.* [75]*"*

Cet état des lieux ne facilite pas la compréhension, par les élèves, du concept même de vecteur, ainsi que l'ont mis en évidence plusieurs recherches en didactique dont celles de Le Thi Hoai (1997), Bittar (1998) et Pressiat (1999). C'est l'objet de la section suivante.

75. Cité par ibid., p. 63.

2.2.4 Des difficultés d'apprentissage de la notion de vecteur

2.2.4.1 La définition de vecteur au secondaire

Voyons ici la définition du vecteur dans Astro-Math 4 [76]

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ dont un représentant est déterminé par les points A et A' est défini par

- Sa direction : La direction de la droite AA'

- Son sens : celui de la flèche qui va de A vers A'

- Sa norme : la longueur du segment AA'.

Après avoir analysé la différence entre les travaux d'Euclide et d'Hilbert, on peut constater que cette définition est une définition descriptive typique du travail d'Euclide. On ne comprend pas le fond la portée de cette définition quand il n'y a pas de construction de la définition au secondaire, c'est-à-dire qu'il faut l'admettre comme on en a déjà discuté dans la section auparavant. En plus, cette définition est basée sur le travail d'Euclide parce qu'on utilise le mot *"longueur"* dedans, alors que le calcul vectoriel peut être utilisé en géométrie affine. De plus, dans l'espace, et même dans le plan, on ne donne pas la définition du sens et de la direction donc, comme on l'a dit dans la section supra, on néglige avec cette définition très rapide de nombreux paliers conceptuels sans comprendre d'où elle vient la définition.

En fait, on peut construire la définition du vecteur avec les axiomes d'espace vectoriel selon la méthode axiomatique de Hilbert comme suit :

Un espace vectoriel sur K, ou K-espace vectoriel, est un ensemble E, dont les éléments sont appelés vecteurs, muni de deux lois :

Une loi de composition interne "+" : $E^2 \longrightarrow E$, appelée addition

Une loi de composition externe à gauche "·" : $K \times E \longrightarrow E$, appelée multiplication par un scalaire telles que les propriétés suivantes soient vérifiées.

1. *$(E, +)$ est un groupe abélien, autrement dit la loi "+" est commutative et associative, elle admet un élément neutre, pouvant être noté 0 ou 0_E, appelé vecteur nul et tout vecteur v a un opposé, noté $\breve{}v$. C'est-à-dire que pour tous vecteurs u, v et w de E :*

$$u + v = v + u; \quad u + (v + w) = (u + v) + w$$

$$0_E + v = v; \quad u + (-u) = 0_E$$

2. *La loi "·" vérifie les propriétés suivantes : elle est distributive à gauche par rapport à la loi "+" de E et à droite par rapport à l'addition du corps K, elle vérifie une associativité mixte (par rapport à la multiplication dans K),*

76. DANEL et DEMEZEL 2009, p. 45.

l'élément neutre multiplicatif du corps K, noté 1, est neutre à gauche pour "$\cdot$". C'est-à-dire que pour tous vecteurs u, v de E et tous scalaires λ, μ :

$$\lambda \cdot (u+v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v); \quad (\lambda + \mu) \cdot u = (\lambda \cdot u) + (\mu \cdot u).$$

Cependant, on peut voir que la définition ci-dessus est abstraite pour l'élève au secondaire et on doit utiliser ici des mots qui n'existent que dans les manuels universitaires et pour comprendre cette définition, il faut pas mal d'informations préparatoires préalables, sinon les élèves ne peuvent pas la saisir.

Il convient de rappeler ici l'existence d'un phénomène appelé *"transposition didactique"* par Chevallard (1985) et mentionné dans le traité de Schneider (2008) :

> *Entre les institutions où les savoirs sont créés (par exemple, un département universitaire de mathématique en ses activités de recherche) et les institutions où ils sont enseignés et appris (les écoles secondaire, les départements de mathématiques en leurs activités pédagogiques, etc.), un savoir fait l'objet de transformations qui en déterminent sa transposition à des fins d'enseignement suivant le schéma suivant :*
>
> Objet de savoir $\Rightarrow$ objet à enseigner $\Rightarrow$ objet d'enseignement
>
> *qui montre qu'un objet de savoir doit déjà avoir été retenu comme objet digne d'être enseigné avant de subir une quelconque transformation.*

Une analyse de la transposition didactique explique pourquoi on ne peut pas enseigner la définition du vecteur comme ce qui est pratiqué aujourd'hui par les mathématiciens. Dans le manuel de mathématique de 4ème année qui est écrit par Werbrouck et Wambersie (1983), la définition du vecteur est présentée comme des couples équipollents mais il n'y a pas assez des explications et donc, comme on peut le voir dans l'histoire, ça ne marche pas avec cette définition au secondaire et on doit la remplacer par la définition qu'on donne plus haut. Même si avec cette définition *"descriptive"*, les élèves ont beaucoup de difficultés à étudier le vecteur. On décrit dans la section suivante la recherche de Le thi Hoai Chau comme un exemple qui étage cette conclusion.

2.2.4.2 Des difficultés d'apprentissage de la notion de vecteur

Le Thi Hoai Chau (1997 [77] et 2001 [78]) met en évidence plusieurs obstacles d'apprentissage du concept de vecteur chez des élèves du secondaire au Vietnam et en France.

77. Le Thi 1997.
78. Le Thi 2001.

Une première difficulté qu'ils rencontrent est de sortir du domaine métrique pour considérer les vecteurs non seulement sous l'aspect de leur norme mais aussi sous celui de l'orientation dans l'espace. Un deuxième niveau de difficulté concerne l'appropriation des caractéristiques d'orientation des vecteurs, à commencer par la distinction entre *"sens"* et *"direction"* et leur articulation : à une direction correspondent deux sens et un sens ne détermine pas une direction.

D'abord, il faut comprendre ce qui se passe dans les programmes concernant l'étude du vecteur en France et au Viet Nam. L'auteur explique dans la première partie que, au Viet Nam, l'objet *"vecteur"* est introduit en première (classe de dixième [79]) et troisième (classe de douzième [80]) année de lycée :

> *Ce n'est qu'en dixième, c'est-à-dire en première année de lycée, avec l'introduction des vecteurs, qu'apparaît pour la première fois l'orientation des objets géométriques. A cette occasion, on définit les coordonnées d'un vecteur dans un repère. En onzième (deuxième année de lycée) on étudie la géométrie dans l'espace seulement par la méthode synthétique. Enfin, l'enseignement de la géométrie en classe de douzième (troisième et dernière année de lycée) est consacré à l'extension du calcul vectoriel dans l'espace puis à la méthode analytique.* [81]

Concernant la définition du vecteur, l'acteur analyse le manuel de Van Nhu Cuong, qui est le manuel le plus utilisé dans le nord du Viet Nam et dans ce manuel, un vecteur est défini par le segment orienté :

> *Dans le manuel étudié, un vecteur est défini par le segment orienté, qui est ensuite caractérisé essentiellement par ses trois caractéristiques de longueur, direction et sens. Ces trois caractéristiques apparaissent lors de la définition de l'égalité de deux vecteurs, qui utilise simultanément le langage mathématique et le langage de la vie quotidienne :*
>
> *"Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si*
>
> *a. Les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues et telles que sur ces droites le sens de A à B est le même que celui de C à D.*
>
> *b. Les longueurs des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égales : $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CD}\|$."*.
>
> *[...] Le vecteur est donc un segment orienté et son sens est celui de l'origine vers l'extrémité. Dans une démarche dont le point de départ est le segment orienté, le passage à la classe d'équivalence est difficilement concevable par les élèves. On peut alors prévoir le risque que les élèves confondent le vecteur et ses différents représentants. D'un point de vue pragmatique, cela n'a pas forcément de conséquence né-*

79. La classe de dixième correspond à la classe de seconde en France (élève de 15 à 16 ans).
80. Cette classe correspond à la terminale en France.
81. LE THI 2001, p. 161.

> *faste dans l'utilisation de l'outil vectoriel, mais pose problème du côté du savoir mathématique visé [...].* [82]

Tandis qu'en France, la notion de vecteur est liée à la translation et donc, comme l'a constaté Le Thi Hoai Chau, ces obstacles d'apprentissage a avoir une dimension épistémologique comme celle liée au passage de grandeurs scalaires aux grandeurs vectorielles peuvent aussi interférer avec des obstacles de type didactique. Ainsi,

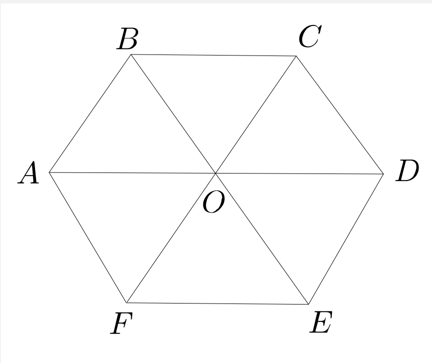
> *"le fait que la notion de vecteur soit en France liée à la translation semble favoriser la compréhension de l'équivalence des segments orientés. Par contraste, l'utilisation faite au Vietnam du segment (orienté) pour introduire la notion de vecteur semble aggraver la difficulté à sortir du modèle métrique".* [83]

Au-delà du relevé et de l'analyse de ces obstacles concernant la notion de vecteur, nous pensons qu'il faut les situer par rapport à une organisation praxéologique plus globale sur laquelle nous reviendrons après.

ZOOM SUR L'EXPERIMENTATION DE LE THI HOAI CHAU

Maintenant, on va examiner l'expérimentation [a] conduite au Viet Nam et en France pour voir les difficultés rencontrées par les élèves en apprenant la notion du vecteur. Le test a été proposé au Viet Nam et en France dès que les élèves ont eu terminé le programme sur les vecteurs. Ce test comportait trois questions, comme suit :

> **Question 1.** Combien peut-on définir de vecteurs différents à partir de trois points distincts A,B,C (parmi lesquels aucun point n'est le milieu de deux points restants) ? Quels sont ces vecteurs ?
>
> **Question 2.** Soit un hexagone régulier ABCDEF dont le centre est O.



82. Ibid., p. 163.
83. Ibid., p. 163.

FIGURE 2.10

a. Les conclusions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

Conclusion	Vraie	Fausse	Justification
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FA}$			
$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$			

a. Parmi tous les vecteurs dont l'origine et l'extrémité sont prises dans l'ensemble des points A, B, C, D, E, F, O indiquez tous les vecteurs qui sont égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Question 3. Les écritures suivantes sont-elles correctes ou non ? Justifiez votre réponse.

Ecriture	Vraie	Fausse	Ne peut pas conclure	Justification
$\overrightarrow{a} > \overrightarrow{0}, \quad \overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$				
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} > \overrightarrow{AC}$ (A, B, C ne sont pas alignés)				

D'abord, ces questions sont ouvertes : elles ne guident pas les élèves dans une direction donnée et les obligent à argumenter. De plus, pour minimiser l'importance de l'aspect visuel, l'auteur ne propose pas des représentations comportant des flèches. Elle utilise donc comme configuration un hexagone régulier sur laquelle ne sont représentés que des segments et des points : seules les questions sont formulées dans le registre vectoriel. De plus, l'hexagone régulier a la particularité que ses demi-diagonales ont une longueur égale aux côtés. Les élèves doivent alors voir dans l'hexagone régulier six vecteurs distincts dans trois directions différentes.

Avant d'analyser le résultat de l'expérimentation, l'auteur explique les stratégies possibles au sens de Brousseau(1986)[b] comme suit :

– Stratégie Norme (N) : Il y a compréhension d'une forme de classe d'équivalence, mais seul le critère d'égalité des longueurs est retenu lors de l'examen de l'équivalence des objets. La stratégie qui en découle consiste à ne retenir du vecteur que sa norme. Cette stratégie n'est gagnante que pour la comparaison de vecteurs de même direction et de même sens.
– Stratégie Sens (S) : Cette stratégie se fonde sur une forme de compréhension de la classe d'équivalence, les conditions qui la déterminent étant cette fois l'égalité des longueurs et d'une seule caractéristique d'orientation, le *"sens"*. Le terme *"sens du vecteur"* n'est dans ce cas pas compris avec la signification mathématique, mais examiné d'une façon contingente : sens de gauche à droite, de haut vers bas...
– Stratégie Direction=Sens (D=S) : Dans cette stratégie, l'équivalence repose bien sur l'égalité des longueurs, des directions et des sens des représentants. Mais il y a amalgame des deux mots *"sens"* et *"direction"*, qui se traduit par l'emploi soit d'un seul mot -*"sens"* ou *"direction"*-pour les deux caractéristiques d'orientation, soit simultanément des deux mots considérés comme inséparables, ce qui conduit à des redondances. Un tel amalgame peut s'expliquer par le fait que, dans la langue courante, les deux notions ne sont pas toujours distinguées. Par exemple, dans plusieurs situations, le terme *"direction"* comprend déjà une idée de *"sens"* : on dit par exemple *"ils se séparent et partent dans deux directions opposées"*, ce qui, mathématiquement, correspond à la même direction mais à deux sens opposés. On dit aussi de projectiles qu'ils sont partis dans *"tous les sens"*, ce qui traduit plutôt l'idée de direction différentes.
– Stratégie Vecteur (V) : Cette stratégie consiste à considérer de façon correcte et pertinente les trois caractéristiques (longueur, direction, sens) pour vérifier une égalité vectorielle. En particulier, la comparaison du sens ne s'effectue que sur des vecteurs ayant même direction. Cette stratégie dénote une conceptualisation correcte de la notion de vecteur.
– Stratégie Parallélogramme (P) : Cette stratégie consiste à vérifier l'égalité de deux vecteurs par la configuration en parallélogramme des deux bipoints les représentant. Notons qu'il faut prendre en compte les parallélogrammes aplatis ou les parallélogrammes ayant éventuellement deux ou plusieurs points confondus. [c]

Nous analysons ici en détail le but de chaque question à la lumière des stratégies pour mieux comprendre les difficultés que les élèves doivent affronter. La première question est d'énumérer tous les vecteurs établis à partir de trois points distincts (parmi lesquels aucun point n'est le milieu de deux points restant). Cette question a l'air facile mais une réponse correcte demande la prise en compte par l'élève du vecteur nul, élément de nature plus algébrique que géométrique. Presque deux tiers des élèves ignorent le vecteur nul dans leur réponse et voici l'analyse qu'en fait Le Thi Hoai Chau :

> *Le vecteur nul joue le rôle d'élément neutre du groupe additif de l'espace vectoriel, qui est une structure algébrique, pas géométrique. L'élève ne se pose sans doute pas la question de l'existence du vecteur nul lorsqu'il fait des calculs vectoriels, parce qu'il travaille avec les vecteurs comme avec des nombres.*
> *[...] La difficulté à reconnaître le vecteur nul semble avoir une même racine épistémologique que celle à sortir du modèle métrique pour étudier la géométrie d'un nouveau point de vue. Le segment nul et la translation identique n'ont pas de sens pour les élèves lorsqu'ils restent dans le cadre de la géométrie métrique.* [d]

La deuxième question concerne l'égalité de plusieurs vecteurs. Il faut rappeler ici que, d'un point de vue mathématique, le vecteur géométrique est une classe d'équivalence soit de segments soit de bipoints donc :

> *La compréhension de l'égalité des vecteurs repose sur une compréhension plus ou moins formelle de la notion de classe d'équivalence, qui entraîne un usage étendu et parfois ambigu des termes relatifs à l'égalité, et sur une compréhension des conditions qui déterminent l'équivalence - égalité des longueurs, des directions et des sens, ou reconnaissance de la configuration du parallélogramme.* [e]

L'acteur a choisi des vecteurs de même norme qui se différencient par une seule caractéristique d'orientation (direction, ou sens dans les cas de vecteurs de même direction) car :

> *Le mot "vecteur" est un support d'information qui contient trois composantes inséparables, la longueur étant une notion bien connue des élèves, alors que la direction et le sens sont des notions nouvelles et difficiles à coordonner pour eux.* [f]

Le résultat est que près d'un quart des élèves testés considèrent l'égalité des longueurs comme seul critère (c'est-à-dire ils mettent en œuvre la stratégie N) pour décider de l'équivalence de segments et cela confirme aussi la difficulté des élèves à sortir du modèle métrique en géométrie. De plus, un grand nombre d'élèves ont du mal à s'approprier les deux caractéristiques d'orientation du vecteur mais *"les difficultés dans l'appropriation des deux caractéristiques d'orientation du vecteur semblent être plus sérieuses pour les élèves vietnamiens que pour les élèves français"*. Cela peut-être dépend du choix de la manière d'enseigner la notion de vecteur dans les deux pays car, comme explique l'auteur, en France, la notion de direction d'une droite est enseignée

avant les vecteurs ; de plus, l'enseignement en classe de seconde insiste sur les deux notions de direction et de sens des vecteurs. A l'opposé, la notion de direction n'est pas introduite dans le manuel vietnamien : les élèves vietnamiens ne disposent que du parallélisme des droites et du mot *"sens"* pour désigner les deux caractéristiques du vecteurs.
Il y a aussi des problèmes concernant la stratégie D=S car c'est difficile pour les élèves de distinguer *"sens"* et *"direction"* et de comprendre que la comparaison de sens ne peut se faire que pour des vecteurs ayant même direction.
Concernant la troisième question, il existe deux types de réponses différentes liées aux choix d'enseignement effectués dans chacune des institutions étudiées. Comme analyse Le Thi Hoai Chau, les élèves vietnamiens "*restent dans un modèle métrique et disent qu'un vecteur est toujours positif (ou* $\overrightarrow{a} > \overrightarrow{0}$ *car la norme de* $\overrightarrow{a}$ *est plus grand que* 0*)*" et les élèves français "*pensent qu'un vecteur peut être positif ou négatif : d'après eux, on peut comparer deux vecteurs de même direction par leur mesure algébrique en référence à un vecteur unité. C'est le problème concernant la stratégie N. Il semble donc que le modèle unidirectionnel orienté soit présent chez de nombreux élèves français et ait du mal à être dépassé.*" Notons ici que ces erreurs s'observent dans l'histoire aussi car, comme dit l'auteur :

> *Le passage du segment à des entités vectorielles, plus riches et plus abstraites, représente de toute évidence un saut informationnel et conceptuel dans l'étude de la géométrie. Notons que ces résultats peuvent être rapprochés des études historiques relatives à l'apparition du concept de vecteur et du développement du calcul vectoriel, qui montrent comment la résistance du modèle métrique en géométrie a été source de difficultés dans la genèse du calcul vectoriel.*
>
> *Le type d'erreurs qui provient de la seule prise en compte de la longueur a des racines épistémologiques profondes : la difficulté du passage des grandeurs scalaires (longueur) à la prise en compte des caractéristiques d'orientation des entités vectorielles paraît ne pas pouvoir être évitée, quels que soient les choix d'enseignement.* [g]

De plus, concernant la stratégie P, aucun vietnamien n'utilise la stratégie P et très peu de français l'exploitent. Comme dit Lounis(1987), le concept de bipoint de semble pas très prégnant et opératoire pour la grande majorité des élèves. Les élèves préfèrent, assez spontanément, mobiliser les caractéristiques vectorielles à leurs yeux mieux perceptibles à travers leur représentation symbolique (segment de droite fléché), donc plus concrète ou plus maniable. Le Thi Hoai Chau pense donc que les éléments de direction, de sens, de longueur du vecteur sont plus opérationnels pour les élèves que la

configuration du parallélogramme. Cependant, nous ne sommes pas d'accord avec cette idée car nous pensons que la raison est d'origine du choix d'enseignement du concept de *"vecteur"*. En fait, car on enseigne le vecteurs soit avec les trois caractéristiques *"longueur"*, *"direction"* et *"sens"*, soit avec la translation qui conduit à ces trois caractéristiques aussi, les élèves vont bien sûr utiliser ces trois caractéristiques vectorielles comme objets opératoires. Il faut donc les enseigner les vecteurs en utilisant la configuration du parallélogramme et comparer les deux choix ensemble. Nous y reviendrons dans le dernier chapitre.
En conclusion, si l'on utilise la définition de vecteur comme un segment orienté avec les trois caractéristiques de longueur, direction et sens (comme on le fait au Viet Nam), les élèves ne peuvent pas sortir du modèle métrique et considérer les objets en jeu non seulement sous l'aspect de mesure mais aussi sous l'aspect d'orientation dans l'espace. De plus, si la notion de vecteur est liée à la translation comme on le fait en France, les élèves peuvent comprendre la question de la direction mais en la séparant du problème du sens, ou ils peuvent comprendre la question du sens limité à une seule direction, c'est-à-dire qu'ils restent dans un modèle unidirectionnel orienté et ne peuvent pas prendre en compte toutes les directions orientées. Par conséquent, le calcul vectoriel et la géométrie en général au secondaire aujourd'hui est celle de *"naturelle"* dans le sens de Houdement et Kuzniak, où des propriétés de congruence, d'incidence et d'ordre demeurent empiriques, occultant ce qui fait de l'algèbre linéaire un véritable outil de preuve de propriétés géométriques.

a. LE THI 2001, p. 165.
b. Une stratégie est un "ensemble de choix" définis sur tous les ensembles d'états permis à partir de chaque état possible : cette modélisation (Brousseau 1986) est issue de la théorie des jeux
c. Cité par LE THI 2001, p. 169–170.
d. Cité par ibid., p. 184.
e. Ibid., p. 169.
f. Ibid., p. 166.
g. Cité par ibid., p. 180–181.

2.2.5 La transposition didactique du calcul vectoriel entre France et pays Anglo-Saxons

Cette section renvoie au travail d'André Pressiat (1999). Après avoir pris en considération des ouvrages publiés en français relatifs au calcul vectoriel, il constate que :

> *Le calcul vectoriel, organisé comme avant la période des "mathématiques modernes" autour du barycentre et du produit scalaire, se voit alors confier une mission nouvelle : fournir un moyen d'étudier les configurations de la géométrie plane (affine, mais également métrique), moyen auquel on n'hésite guère à attribuer le qualificatif de "puissant". Les choses se déroulent conformément à la culture et aux habitudes de l'institution tant que le barycentre est disponible pour traiter des problèmes d'alignement et de concours ; mais l'évolution des programmes et leur articulation avec ceux du collège amènent à retarder l'introduction de ce dernier : confiants dans la puissance du calcul vectoriel, les auteurs de manuels proposent cependant de résoudre des problèmes d'alignement dans un cadre technologique pauvre, réduit aux règles de calculs dans l'ensemble des vecteurs, et à la caractérisation de l'alignement en termes de colinéarité de vecteurs. Les grosses difficultés rencontrées par les élèves dans la mise en œuvre de telles démonstrations ne remet guère en cause l'idée que ces exercices constituent un bon départ pour enseigner le calcul vectoriel : divers aménagements de dispositifs didactiques d'aide à l'apprentissage d'un tel emploi des vecteurs sont mis au point et publiés dans des revues ou brochures professionnelles*[84].

Cependant, même si les auteurs des manuels sont confiants dans la puissance du calcul vectoriel, André Pressiat montre que :

> *Le calcul vectoriel tel qu'il est enseigné au début du lycée en France ne constitue pas un outil "puissant" pour l'étude de problèmes tels que les problèmes d'alignement et l'étude de configurations, essentiellement pour les raisons suivantes :*
>
> - *La difficulté de la modélisation d'une situation géométrique en termes de vecteurs est sous estimée, du fait de l'apparente proximité entre la désignation des points par les lettres et la notation $\overrightarrow{XY}$ utilisée pour les vecteurs ; l'utilisation dans les manuels du verbe "traduire" pour identifier cette phase de modélisation est un indice de cette sous estimation ; en autre termes, le dispositif de travail pour vectorialiser les figures est trop pauvre ;*
> - *Les techniques utilisées sont complexes, personnalisées, et nécessitent souvent une utilisation explicite de la figure qui semble violer le contrat usuel à ce sujet ;*
> - *La technologie est trop fruste pour pouvoir contrôler et justifier des techniques.*
>
> *L'adjonction aux notations $\overrightarrow{XY}$ de la notation du vecteur "libre" $\overrightarrow{u}$ est certes utile pour énoncer les résultats technologiques ; mais elle n'est*

84. PRESSIAT 1999, p. 459.

> *d'aucun secours dans les questions qui nous occupent. Le dispositif dans lequel la technologie est élaborée est donc lui aussi trop pauvre* [85].

La notation $\overrightarrow{XY}$ est très utilisée en pratique en France de même que la notation $\overrightarrow{u}$ qui est, pour l'élève, d'un emploi délicat. De plus, on utilise très peu les vecteurs-positions même si *la bijection entre l'ensemble des vecteurs et un plan pointé est certes traitée sur le plan technicologico-théorique. Parfois même, souligne-t-on (notamment dans les ouvrages universitaires), une telle bijection n'est pas canonique, et le changement de point-origine change l'image d'un vecteur dans le plan pointé, autrement dit, on en souligne les faiblesses.* A contrario, dans certains pays anglo-saxons (Allemagne, Grande-Bretagne, États-Unis), s'observe un autre focus ainsi que l'analyse Pressiat :

> *Au lieu de mettre le calcul vectoriel au service de l'élaboration d'une théorie du barycentre, les organisations mathématiques que nous avons rencontrées dans des ouvrages de niveaux divers en provenance de ces pays mettent l'accent sur la bijection entre le plan (ou l'espace) pointé et l'ensemble des vecteurs : contrairement aux habitudes et à la culture françaises à ce sujet, cette bijection n'est pas seulement considérée au niveau technologique de l'organisation (à ce niveau, toutes les cultures s'accordent) mais également au niveau de techniques, et d'abord du point de vue du dispositif de ces techniques : les vecteurs-positions, qui cohabitent avec les vecteurs notés sous la forme* $\overrightarrow{XY}$ *par l'intermédiaire de la relation* $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}$*, constituent l'outil essentiel mis en oeuvre dans ces techniques ; la technologie est évidemment adaptée en conséquence et on y trouve des énoncés faisant allusion à ces vecteurs-positions. Ces énoncés sont évoqués dans certains ouvrages universitaires français, mais leur transposition dans l'enseignement secondaire n'a guère été tentée (pp. 461).*

C'est ce point de vue qu'illustre le cours de Pedoe, mathématicien contemporain, et dont nous avons décrit le travail à la section 1.5.2.

En résumé, l'analyse de Pressiat montre que l'enseignement du calcul vectoriel en France est concentré sur les aspects technologico-théoriques tandis que les types de problèmes et techniques relèvent de la géométrie analytique. De plus, le barycentre et le produit scalaire tiennent une place importante dans l'organisation. Ce phénomène peut être expliqué par les habitudes et la culture françaises et de plus, la focalisation sur les problèmes de concours. Deux notations du vecteurs sont utilisées : $\overrightarrow{AB}$, d'une part et la notation du "vecteur libre" $\overrightarrow{u}$, d'autre part.

Au contraire, l'enseignement du calcul vectoriel dans les pays anglo-saxons est plus radical et focalisé sur les applications des théories. Dans cet univers, on utilise

85. PRESSIAT 1999, p. 461.

le pointage du plan ou de l'espace, ainsi que les vecteurs-position. Pressiat parle alors de géométrie de position.

2.3 Conclusion du chapitre 2 en termes d'articulation de domaines et de paradigmes géométriques

Jusqu'à la réforme des Mathématiques Modernes, la géométrie enseignée dans le secondaire était en gros, celle d'Euclide et souffrait des mêmes faiblesses, soit une absence d'axiomes (ceux que Hilbert formulera ultérieurement) permettant un raisonnement déductif rigoureux affranchi de toute information donnée par les figures.

Nous pouvons résumer cette réforme et les contre-réformes au moyen des schémas 2 et 3 ci-dessous entre lesquels il est intéressant d'établir un parallèle. Lors de la réforme des mathématiques modernes (schéma 2), l'algèbre linéaire et le programme d'Erlangen, emblématiques du courant structuraliste, dominent l'enseignement de la géométrie. On étudie la structure d'ensembles formés de transformations munis de la loi de composition et/ou d'une multiplication scalaire. Parmi ces transformations, les translations ou vecteurs constitueront la base de la définition des droites et des plans. De la sorte, l'algèbre linéaire surplombe la géométrie euclidienne dont il s'agit d'étudier les structures vectorielle et affine au détriment des propriétés de figures géométriques remarquables, ce que nous avons exprimé par des flèches à sens unique. Quant à la géométrie analytique, elle devient un produit dérivé de l'algèbre linéaire, le focus étant mis sur le travail de traduction des équations vectorielles en déclinaisons paramétriques et cartésiennes ainsi que sur des exercices techniques plus que sur les preuves algébriques de propriétés de figures géométriques.

Le schéma 3 illustre la transposition actuelle, pas très claire à vrai dire, ce que nous exprimons par des traits pointillés entre divers pôles. On revient aux propriétés de figures en géométrie synthétique mais on en démontre peu. Les références à l'algèbre linéaire demeurent très présentes dans les pratiques enseignantes et ce sont elles qui déterminent les objets de la géométrie analytique. Dès lors, faute de temps et malgré les injonctions institutionnelles, on peine à donner une place consistante aux démonstrations de propriétés géométriques que ce soit à travers la méthode synthétique, la méthode analytique ou la méthode vectorielle. Il n'existe donc pas de niche écologique permettant de faire vivre les vecteurs d'autant que ceux-ci ne sont pas vraiment définis mais plutôt suggérés intuitivement par des dessins, ce qui n'est satisfaisant ni pour le mathématicien, ni pour leur apprentissage alors tributaire de conceptions erronées.

Réforme des maths modernes

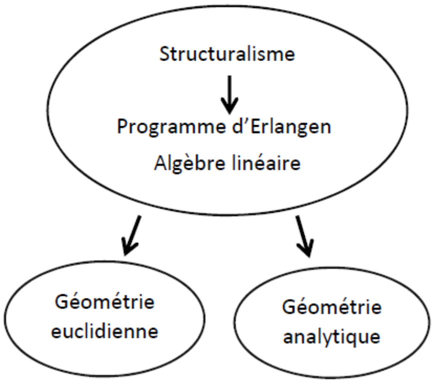


Schéma 2

Contre-réforme

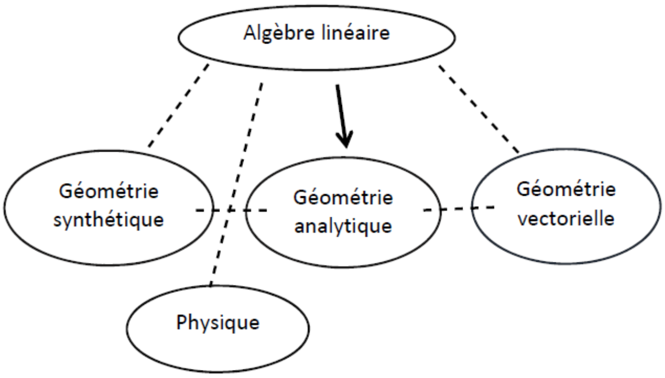


Schéma 3

Cet état des lieux nous a poussées à construire un autre Modèle Epistémologique de Référence (MER) dans lequel un formalisme particulier basé sur des “bipoints”, inspiré de l'histoire, joue le rôle d'intermédiaire entre l'étude de figures géométriques et leur modélisation vectorielle en guise d'entrée dans l'algèbre linéaire. Nous décrivons ce MER plus loin...

En ce qui concerne les paradigmes géométriques, a travers l'histoire de l'enseignement de la géométrie en Belgique aussi bien qu'en France, on pourrait conclure que, avant la réforme des maths modernes, la géométrie au secondaire relève du paradigme de l'axiomatique naturelle où les dessins jouent un rôle effectif dans les démonstrations géométriques.

Ensuite, pendant la réforme, le paradigme devient celui d'une géométrie axiomatique formaliste où le rôle des dessins était réduit à celui d'un outil heuristique, assez rarement toutefois, les figures géométriques étant reléguées à l'arrière plan.

Cette réforme a occasionné de nombreuses difficultés d'apprentissage répertoriées dans ce chapitre dont celles étudiées par Le Thi Hoai Chau (1997 et 2001) relatives au concept de vecteur.

Enfin les contre-réformes, supposées corriger les excès de l'époque des mathématiques modernes, se situent malaisément entre géométrie axiomatique formaliste, géométrie axiomatique naturelle voire géométrie naturelle : d'une part, on garde des mathématiques modernes des aspects d'une structuration du curriculum de l'époque, par exemple un point de départ vectoriel pour définir les objets droite et plan et, d'autre part, une définition du vecteur par des attributs renvoyant au monde sensible, comme la notion de sens et même celle de direction à moins de la lier à un repère. En outre, une géométrie axiomatique naturelle est timidement présente dans l'étude de la géométrie euclidienne, à travers quelques théorèmes.

CHAPITRE 3

LE FORMALISME BIPOINT COMME “PASSEUR" DES CONFIGURATIONS GÉOMÉTRIQUES À LEUR MODÉLISATION VECTORIELLE

Le MER construit ici l’a été à la lumière de l’histoire des mathématiques et de celle de leur enseignement que nous avons étudiées au deux premiers chapitres. Le concept de MER et son rôle *“phénoménotechnique”* sont détaillés dans la section 3.1. Dans la section 3.2, nous expliquons l’intérêt de construire ce MER à un niveau élevé de l’échelle de co-détermination didactique. Ensuite, nous situons le MER à un niveau curriculaire entre l’étude de l’algèbre élémentaire et l’étude de la géométrie. Dans les deux sections 3.4 et 3.5, nous expliquons quelques éléments théoriques au fondement de notre MER : le concept de praxéologie, la distinction entre praxéologie “modélisation” et praxéologie “déduction” et le discours heuristique, ce qui nous permet de préciser davantage les tenants et aboutissants de notre MER. L’intention de celui-ci est de construire un formaliste permettant des démonstrations “calculatoires” de nouvelles propriétés de figures géométriques. Ce formalisme est supposé évoluer, le maillon central qui sert de jonction entre le géométrique et le vectoriel étant un calcul analytique “compact” qui porte sur des “bipoints”. La section 3.6 situe les apports de ce formalisme par rapport à la géométrie vectorielle. Nous expliquons ensuite dans la section 3.7 pourquoi notre point de départ n’est pas vectoriel. Enfin, la section 3.8 explique l’évolution du mode de validation dans notre MER entre le processus de “modélisation” et le processus de “déduction”.

3.1 Le concept de MER

Comme expliqué par Schneider (2013), il convient de construire un MER en respectant certaines conditions si l’on veut qu’il ait un rôle *“phénoménotechnique"*.

Avant de distinguer entre un usage phénoménotechnique du concept de MER et un qui ne l'est pas, nous considérons d'abord l'utilisation du mot *"phénoménotechnique"* pour décrire l'ingénierie didactique.

Dans son cours à l'Ecole d'Eté d'Orléans en 1982, Chevallard posait effectivement ainsi la question des rapports entre la recherche en didactique et l'action subséquente sur le système d'enseignement : non pas en termes d'innovation ou de recherche-action mais en termes de mise à l'épreuve de constructions théoriques élaborées par les chercheurs dans les réalisations didactiques qui constituent surtout, en tant que méthodologies de recherche *"le lieu de cette étape cruciale de l'activité scientifique à laquelle Bachelard a donné le nom parodique de phénoménotechnique"*.

Le néologisme *"phénoménotechnique"* de Bachelard (1949) est enraciné dans un constructivisme épistémologique qui fait des *"phénomènes"* non pas des observables que donnerait à voir une réalité supposée indépendante ou *"ontologique"* mais des construits humains le plus souvent collectifs. Plus précisément, ces phénomènes émergent d'une pensée dialectique entre objets et concepts à la manière du rationalisme appliqué tel que l'entend Bachelard (1949), qui suppose de *"passer par le positivisme afin de le dépasser.* Nous en donnons pour exemple des situations contrefactuelles suggérées par une hypothèse théorique pour en accroître la crédibilité, par exemple, des expériences de pensée, en l'occurrence ce qu'on appelle le *"bateau de Galiléé"* concernant la relativité des référentiels.

Pour nous, les théories didactiques sont potentiellement *"phénoménotechniques"* en ce sens qu'elles peuvent faire voir et rendre intelligibles des phénomènes didactiques en particulier par des expériences qui permettent aux chercheurs d'invalider certaines de leurs hypothèses

Il s'agit bien sûr d'une portée potentielle a priori plus ou moins effective dans les usages qu'en font les chercheurs.

Plusieurs recherches, à l'heure actuelle, font usage du MER, mais un tel usage n'est pas en soi phénoménotechnique au sens où nous l'avons entendu plus haut. Dans une Conférence tenue au 4ème Colloque de la TAD à Toulouse (2013), Schneider analyse les conditions sous lesquelles la construction d'un tel modèle peut être phénoménotechnique. Elle contraste pour cela deux études de cas : le premier sur le théorème de Lagrange à l'Université, le second sur l'algèbre élémentaire.

Le premier usage du concept de MER semble être, après analyse approfondie, peu voire pas du tout phénoménotechnique. Il s'agit d'un MER autour du théorème de Lagrange pour étudier des enseignements universitaires dans une filière mathématique et une filière économique (Xhonneux, 2001 ; Xhonneux et Henry, 2011). On pourrait trouver une version détaillée de cette analyse (Schneider, 2013) à l'URL suivante :

http ://hdl.handle.net/2268/190488.

Essentiellement, cette recherche manque d'une référence externe mentionnée par

Bosch et Gascon (2002) [86] qui permet un regard théoriquement construit sur les pratiques empiristes et permettrait de les dénaturaliser et de favoriser la découverte d'un phénomène didactique. À l'inverse, le MER construit par Gascon au sujet de l'algèbre élémentaire illustre ce que nous entendons par là.

L'autre exemple de MER analysé par Schneider est un retour aux sources du concept de MER à l'origine duquel se trouve la posture de dénaturalisation typique de la TAD. Le point de départ de ce MER (Gascon, 1993) est un analyse épistémologique de l'algèbre, non pas basée comme ce qui se fait d'habitude, sur la genèse de l'algèbre dans l'école d'Alexandrie où des *"valeurs indéterminées"* sont représentées pas des lettres à la place des nombres, mais sur la *"nouvelle algèbre"* de Viète ainsi que sur la *"méthode"* de Descartes qui permettent de rendre *"analytique"* le patron d'Analyse-Synthèse. Après avoir illustré l'efficacité de la langue algébrique en arithmétique, Gascon illustre que le fait de représenter les données également par des lettres, que l'on appelle paramètres, permet de s'intéresser à la structure des problèmes, au-delà de la seule obtention de l'inconnue, et de produire de nouvelles connaissances sur le système modélisé, relatives par exemple aux conditions d'existence des solutions, à leur interprétation dans le contexte y compris dans des cas particuliers de l'énoncé...

En effet, ce MER joue ici le rôle d'une technique phénoménologique en rendant moins transparent et donc en dénaturalisant le modèle implicite qui prévaut dans l'enseignement de l'algèbre, modèle que Chevallard et Gascon ont appelé *"arithmétique généralisée"*. Ce modèle met l'accent sur le *"symbolisme algébrique"* et l'oppose à un supposé *"langage arithmétique"* que le premier est censé élargir et généraliser. Il conduit, d'une part, à la *"désarticulation"* du corpus de problèmes en résolutions d'équations ou d'inéquations, de manipulation d'identités et de fonctions élémentaires, d'application de formules et de résolution de problèmes concrets et, d'autre part, à l'interprétation des difficultés d'acquisition du langage algébrique trop exclusivement référée au cadre arithmétique, comme la modification du sens des signes $+, =$, d'un langage à l'autre.

Comme l'illustre Gascon à propos de l'algèbre élémentaire, ce modèle agit comme un système de conditions et de contraintes sur les pratiques en *"permettant l'existence de certaines d'entre elles et en empêchant que d'autres puissent apparaître"*. En effet, *"On peut considérer qu'il existe, dans toute institution didactique où l'on enseigne des mathématiques, des modèles implicites des différents domaines du savoir mathématique enseigné, d'où émerge par extension un modèle implicite de la nature même du savoir mathématique"* (Gascon, 1993).

Le modèle théorique alternatif est ensuite construit à partir d'une question portant sur un domaine mathématique afin de clarifier les modèles empiriques implicites. Ce modèle implicite se doit d'être dénaturalisé et pris comme *"objet d'étude, c'est-à-dire comme faisant partie des faits didactiques qui constituent la base "empirique" de la recherche"* en insistant sur la nécessité pour le chercheur d'avoir à sa disposi-

86. BOSCH et GASCON 2002.

tion *"un "modèle alternatif" qui sert précisément de référence pour interpréter le modèle dominant dans l'institution qu'il étudie"* (Gascon, 1993).

3.2 Un MER à construire à un niveau élevé de l'échelle de co-détermination didactique

Comme expliqué à la section 2.2.4.1, entre les institutions où les savoirs sont créés et les institutions où ils sont enseignés et appris, un savoir fait l'objet de transformations qui déterminent un phénomène appelé *transposition didactique* (Chevallard 1985) suivant le schéma suivant :

Objet de savoir $\rightarrow$ objet à enseigner $\rightarrow$ objet d'enseignement

Mais les contraintes pesant sur la transposition didactique peuvent se situer à divers *niveaux de co-détermination didactique* (Chevallard 2004) répertoriés sur l'échelle suivante :

Niveau -3	Civilisation
Niveau -2	Société
Niveau -1	Ecole
Niveau 0	Pédagogie
Niveau 1	Discipline : Mathématique
Niveau 2	Domaine : p. ex, l'Analyse
Niveau 3	Secteur : p. ex, le Calcul Intégral
Niveau 4	Thème : p. ex, le Théorème fondamental
Niveau 5	Sujet : p. ex, le Calcul d'une aire

Chevallard distingue sur cette échelle neuf niveaux dont les plus génériques sont la civilisation, la société, l'école, la pédagogie et les plus spécifiques sont la discipline, la domaine, le secteur, le thème et le sujet. Il souligne aussi le principe essentiel que traduit l'échelle proposée : ce qu'on peut faire à tel échelon dépend des contraintes imposées et des conditions créés à d'autres échelons.

Ainsi, l'organisation du temps scolaire en "cours" d'une heure - aspect qui se situe au niveau "Ecole" - peut-elle influencer le choix des sujets traitables. Quant aux aspects sociétaux, ils peuvent être déterminants. Par exemple, comme le développe WOZNIAK 2007, la statistique est devenue un objet d'enseignement beaucoup plus tôt dans les pays anglo-saxons qu'en France car les statistiques elles-mêmes y ont été intégrées plus vite comme données incontournables dans tout domaine d'étude.

Se joue également ici ce que Chevallard (1992 et 1999) appelle la *relativité institutionnelle* du savoir et des pratiques qui lui sont liées. En effet, le savoir n'appartient pas uniquement à ceux qui le créent - les savants - mais aussi à ceux qui l'exploitent. On peut ici évoquer certaines pratiques d'ingénieurs ou de physiciens liées au symbole "dx", pratiques que n'apprécient pas vraiment les mathématiciens pour des raisons théoriques (sur ce sujet, voir e.a. Balhan, 2016). A vrai dire, le rapport institutionnel à un objet de savoir est lié au projet qui conditionne ce que l'on fait du savoir.

Pour toutes ces raisons, il est périlleux de mener une recherche en se cantonnant à un sujet mathématique précis comme le théorème de Pythagore ou la primitive d'une fonction rationnelle. Car on récolterait des données relatives à une transposition transparente à force d'être naturalisée. Ainsi en va-t-il de nombreuses recherches pédagogiques portant sur des outils diagnostiques d'erreurs relatives au calcul algébrique : il arrive (souvent) qu'on crée un algorithme d'aide aux élèves pour leur faire adopter des règles nulle part justifiées dans la transposition en vigueur. De même, il convient de situer les obstacles d'apprentissage liées à un théorème en situant ce dernier dans une culture mathématique plus globale correspondant à une transposition explicite et assumée comme le fait Balhan (2016) à propose du théorème fondamental de l'Analyse.

Ce brassage de niveaux divers de l'échelle de co-détermination didactique ne peut se passer d'un choix curriculaire où l'on se positionne sur ce que l'on vise à travers l'enseignement des mathématiques. C'est ce que nous faisons à la section 3.3.

3.3 Une perspective globale : l'algèbre comme économie de pensée au service de la géométrie

A l'instar de Schneider (2008), nous faisons le choix d'inscrire l'enseignement des mathématiques dans une perspective d'économie de pensée telle que décrit ci-dessous à propos de la recherche des automorphisme de solides et de l'algèbre :

> *Cette situation [...] illustre l'économie de pensée qu'offrent les mathématiques en permettant de réduire des problèmes complexes à une manipulation réglée et souvent algorithmisable d'outils techniques. En particulier, le langage algébrique est un symbolisme écrit qui permet, moyennant le respect de certaines règles, un traitement automatique de données duquel on peut tirer de l'information supplémentaire*[87].

Dans cette perspective, il nous faut expliquer l'articulation choisie ici entre algèbre et géométrie. Mais aussi ce que nous mettons derrière l'expression "faire de la géométrie" au niveau de l'enseignement secondaire.

87. SCHNEIDER 2008, p. 24.

Le point de vue adopté pour l'algèbre est celui que nous partageons avec Bosch et Gascon (2002) [88] :

> *L'algèbre élémentaire n'apparaît pas initialement comme une organisation mathématique (OM) au même niveau que les autres organisations qui s'étudient à l'école [...]. [C'est] un instrument mathématique d'étude d'organisations mathématiques : un instrument didactique [...] A la question "qu'est-ce-que l'algèbre élémentaire ?" nous ne répondons pas en termes d'OM, mais en termes de processus de modélisation d'OM par d'autres OM.*

Les OM à modéliser algébriquement sont premières et diversifiées : par exemple, les problèmes de constructions géométriques, les problèmes de "dénombrement simple",... En outre, c'est le processus de modélisation lui-même qui est central, avant de laisser place à des OM "totalement algébrisées" où l'outil algébrique est étudié en tant d'objet. Dans cette perspective, les paramètres jouent un rôle fondamental et font apparaître des formules qui peuvent être interprétées comme des fonctions à plusieurs variables.

A l'instar de Krysinska et Schneider (2010) et Schneider (2012), notre choix s'est porté sur la subordination de l'algèbre élémentaire à :

1. L'étude de classes paramétrées de fonctions : fonctions homographiques, sinusoïdales, exponentielles, ...
2. L'étude de propriétés des figures géométriques.

C'est le deuxième point qui nous intéresse ici. Schneider (2012) insiste en effet sur l'importance de la géométrie analytique qui offre des occasions privilégiées d'apprendre aux élèves à concevoir un plan de calcul algébrique qui mène quelque part : il suffit de penser à la preuve analytique de la concourance des médianes d'un triangle pour voir que l'on y fait jouer à leurs équations respectives des sorts différents dans un programme finalisé, deux de ces équations formant un système dont la solution doit vérifier la troisième. La géométrie analytique offre ainsi une finalité à l'algèbre élémentaire qui pâtit toujours aujourd'hui d'un défaut déjà mentionné en 1988 par Chevallard et qui serait un facteur d'échec :

> *A l'issue du collège, la manipulation des expressions algébriques n'est tendue vers aucun but extérieur au calcul algébrique, lequel doit trouver en lui-même la source de ses propres exigences. Aussi, les "règles" de cette manipulation sont-elles immotivées, purement formelles, s'exprimant par des consignes elles-mêmes standardisées (développer, factoriser).*

Comme on le verra, le formalisme bipoint rend le même service, étant l'équivalent d'un formalisme analytique "compact" qui respecte les règles du calcul algébrique élémentaire. Et ce formalisme constitue une véritable économie de pensée

88. Bosch et Gascon 2002.

en permettant de remplacer certaines preuves de propriétés géométriques relevant de la méthode synthétique par des preuves calculatoires souvent plus faciles.

Encore faut-il que le travail proposé aux élèves dans le formalisme analytique standard ou le formalisme bipoint puisse être, à son tour, finalisé. Tout dépend ici du focus choisi par l'enseignement de la géométrie.

Le point de vue adopté ici est celui défendu par Bkouche (1982), point de vue qui comporte plusieurs aspects. Le premier concerne l'objectif de l'enseignement de la géométrie :

> *Je dirai d'abord que le premier objectif de l'enseignement de la géométrie est la géométrie, point n'est besoin de chercher des pseudo-justifications du type : formation de l'esprit rationnel ou importance de la géométrie dans les autres sciences, qui font apparaître un enseignement comme lieu de passage obligé vers un quelque chose qui garde toujours un aspect mystérieux (l'enseignement reste encore trop souvent perçu comme une initiation au sens mystique du terme, et l'enseignement des mathématiques encore plus)*[89].

Ensuite Bkouche s'explique sur le sens même de la géométrie, d'abord comme "moyen d'appréhension de notre rapport [...] aux phénomènes spatiaux" avant d'être "la construction rationnelle que l'on sait". Ce qui, d'après lui, rend à la géométrie dans l'espace une place première, la géométrie plane s'étant

> *constituée en science autonome, peut-être parce que très tôt l'homme a su représenter par le dessin ou l'écriture sa façon de dire le monde, peut-être parce que confronté, pour diverses raisons, à des problèmes de mesures terrestres (rappelons ici l'étymologie du terme géométrie) il s'est borné à des situations planes*[90].

Enfin, et c'est là l'aspect le plus important à nos yeux, il estime capital de revenir à une géométrie **dans** l'espace (qui n'est pas la géométrie **de** l'espace) "parce qu'elle a pour objet l'étude des phénomènes spatiaux [et] va mettre en valeur cette dialectique de l'empirisme et du rationnel qui est la base même du développement scientifique" :

> *Si l'on regarde l'histoire de l'enseignement de la géométrie dans l'espace en France, on peut considérer qu'avant la réforme de 1970, il s'appuyait essentiellement sur les relations d'incidence et qu'après la réforme il se réduit à l'algèbre linéaire tridimensionnelle ; dans le premier cas il s'agissait à partir d'objets simples (!) : le point, la droite, le plan, de découvrir peu à peu les situations spatiales pour arriver enfin à l'étude des solides, dans le second cas les situations géométriques*

89. BKOUCHE 1982, p. 2.
90. Ibid., p. 5.

> *n'apparaissent qu'à travers le calcul, les élèves devant accepter le fait miraculeux que ces calculs ont une signification géométrique, autrement dit dans tous les cas la géométrie dans l'espace apparaît comme un jeu formel, les situations spatiales apparaissant à la fin comme le lapin du chapeau du magicien*[91].

D'où l'importance, dans notre MER, d'une étude de propriétés de solides mais aussi de figures planes. C'est à ce prix, pensons-nous, qu'on peut donner une réelle finalité et donc fonctionnalité au calcul analytique ou au calcul bipoint. Il ne s'agit donc plus, dans les objectifs, de se contenter de compétences techniques telles que calculer l'intersection de deux droites, déterminer les équations d'une droite passant par tel point et perpendiculaire à tel plan, ... Il s'agit de mettre en œuvre une stratégie de calcul qui conduit à prouver telle propriété au départ d'hypothèses à traduire.

3.4 Un MER situé à l'articulation de deux niveaux praxéologiques

Le Modèle Epistémologique de Référence envisagé ici se définit à la lumière des praxéologies *“modélisation"* et des praxéologies *“déduction"*.

Avant de préciser ces deux concepts, considérons le concept de praxéologie par lequel Chevallard (1992) modélise toute activité humaine, en particulier l'activité mathématique. Conformément à l'étymologie, les praxéologies sont constituées de deux blocs :

- Le bloc *praxis* rend compte des pratiques mathématiques en termes de techniques permettant de réaliser des tâches données par la manipulation réglée de symboles mathématiques, de représentations graphiques ou autres...
- Le bloc *logos* constitue un discours sur la pratique censé justifier les techniques choisies pour réaliser les tâches données, les rendre intelligibles en regard de celles-ci, voire favoriser la production de nouvelles techniques plus performantes. Ce bloc prend la forme de ce que Chevallard appelle tantôt une *technologie* au sens étymologique du terme, c'est-à-dire un discours sur la technique, tantôt une *théorie*.

C'est respectivement par ces blocs que Chevallard définit le savoir-faire et le savoir constitutifs d'une organisation praxéologique en utilisant la notation $[T, \tau, \theta, \Theta]$. Selon Chevallard, T est un type de tâches contenant au moins une tâche t, τ est une certain manière de faire ou technique permettant d'accomplir une tâche de ce type, θ est la technologie rendant intelligible et justifiant la technique, Θ est la théorie justifiant à son tour et rendant compréhensible la technologie.

91. BKOUCHE 1982, p. 7.

Concernant le concept de praxéologie, Schneider (2008) distingue deux niveaux : les praxéologies de type *"modélisation"* et celles de type *déduction*.

Les praxéologies *"modélisation"* sont orientées vers la modélisation mathématique de systèmes intra ou extra-mathématiques constitués d'objets premiers. On peut considérer ceux-ci comme des objets préconstruits au sens de Chevallard (1991), c'est-à-dire d'objets dont l'existence résulte, aux yeux de personnes assujetties à une même intuition, d'un *"croisement d'énoncés du langage et de situations surdéterminées"* permettant de s'assurer qu'on parle bien de la même chose. Mais, ce n'est qu'au terme de telles praxéologies que les préconstruits se constituent en concepts mathématiques par le truchement d'une définition pour se prêter à une théorie déductive que sont les praxéologies de type *"déduction"*. D'une praxéologie *"modélisation"* à une praxéologie *"déduction"* sur de mêmes objets, les modes de validation diffèrent considérablement : ils peuvent être pragmatiques dans les praxéologies *"modélisation"*, ainsi on s'assure sur des exemples de la validité du modèle créé ou on le conforte par une expérience fût-elle de pensée alors que, dans les praxéologies *"déduction"*, la validation est soumise aux seules règles du raisonnement déductif. Mais l'ordre d'exposition est inversé du premier type de praxéologie au second, le type de tâches par lequel débutent les praxéologies *"modélisation"* deviennent les *"applications"* clôturant la théorie dans les secondes.

Ici, les objets préconstruits sont déjà partiellement construits au sein de la géométrie élémentaire dont ils sont les termes primitifs : point, droite et plan mais aussi les figures géométriques qu'ils forment. On cherche à les modéliser par les outils de la géométrie analytique dans un premier temps (coordonnées, équations), et ceux de la géométrie vectorielle ensuite. Les modes de validation sont d'abord ceux de la géométrie euclidienne basés, conformément au paradigme de géométrie *"axiomatique naturelle"*, sur une part de déductif et une part d'expérimental. On table sur les résultats connus des élèves au niveau scolaire envisagé : cas d'isométrie et de similitude des triangles, théorème de Thalès. Pour la géométrie dans l'espace, on se réfère à un îlot déductif des propriétés géométriques utiles à l'extension à l'espace des formalismes construits dans le plan, éventuellement après les avoir identifiées avec les élèves lors de ce travail. On mise donc sur la géométrie synthétique élémentaire, comme **pilote**, pour valider les premières règles du modèle calculatoire. A ce niveau praxéologique de *"modélisation"* ce sont des éléments de géométrie euclidienne qui servent de soubassement à la géométrie affine à laquelle la géométrie euclidienne a été *"subordonnée"* à un moment donné de l'histoire. Cela peut être choquant pour les mathématiciens d'aujourd'hui. Les élèves de 14-15 ans ici concernés sont, quant à eux, plutôt dans la situation des mathématiciens qui, dans l'histoire, ont crée un formalisme (vectoriel ou autre) susceptible d'englober leurs connaissances préalables de géométrie euclidienne. La praxéologie *"modélisation"* s'inverse alors en une praxéologie *"déduction"* qui opère une rupture avec ce qui a fondé les règles de base et où de nouvelles propriétés géométriques sont prouvées au départ de ces règles.

En effet, l'intention annoncée dès le départ aux élèves est de construire un formalisme permettant des démonstrations *"calculatoires"* de nouvelles propriétés de figures géométriques. Comme déjà dit, ce formalisme est supposé évoluer, le maillon central qui sert de jonction entre le géométrique et le vectoriel étant un calcul analytique *"compact"* qui porte sur des *"bipoints"* et que nous illustrons dans les sections suivantes. Le schéma 4 illustre les entités de ce MER entre lesquels nous cherchons à favoriser des rapports dialectiques. Ainsi, comme souligné *supra*, c'est l'étude de configurations géométriques de base qui permet de formuler les règles fondamentales des formalismes créés, et ce sont ces règles qui sont utilisées, en retour, pour prouver les propriétés d'autres configurations géométriques. De même, les formalismes *"bipoints"* et *"vecteurs"* se font écho l'un à l'autre tout comme ils l'ont fait dans l'histoire.

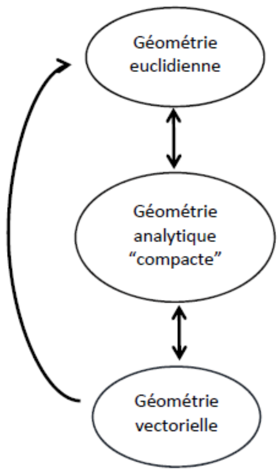


Schéma 4

Notre MER a quelque parenté avec celui à l'oeuvre dans le travail du Cojerem (1995) et l'approche de Lebeau et Schneider (2009) bien qu'il n'était explicité ni dans l'un, ni dans l'autre. Dans le premier, un chapitre est consacré au calcul de coordonnées *"préparant au calcul vectoriel"* mais seul ce dernier prédomine dans des problèmes géométriques choisis, de plus, en géométrie plane. Quant au second ouvrage, il traite de la modélisation analytique des objets fondamentaux des géométries $2D$ et $3D$, étayée par des arguments proprement géométriques mais l'étude de figures géométriques n'est pas le but premier. Il contient également quelques écritures *"bipoints"*, qui est développé particulièrement dans les pays anglo-saxons comme expliqué dans la section 2.2.5.

3.5 Un MER à forte composante heuristique qui suppose un discours "heuristique"

Le feuilletage de notre MER en deux niveaux praxéologiques suppose de prendre en compte les deux facettes de l'activité mathématique qui se déclinent - dans le cadre restreint de la résolution de problèmes géométriques - en termes d'analyse et de synthèse.

Cela explique que le travail fait dans le cadre d'une praxéologie "modélisation" doit être expliqué dans un discours particulier que l'on nomme discours heuristique.

Nous situons ci-dessous le concept de discours heuristique dans les travaux pionniers de Lakatos et verrons ensuite comment étendre l'acceptation initiale de Lakatos en nous appuyant sur le concept de praxéologie de Chevallard.

Comme annoncé à la section 1.2.2, le *"platonisme mathématique"* s'oppose au *"constructivisme"* selon lequel les objets mathématiques sont le fruit d'une activité humaine qui consiste à les créer en tant que tels.

Dans ce dernier courant, il convient ici de se référer au travail de Lakatos [92] sur la méthode des *preuves et réfutations* : "Preuves et réfutations, essai sur la logique de la découverte mathématique". En gros, cette méthode consiste à mettre à l'épreuve une *conjecture primitive ou naïve* ainsi que la *preuve-mère* que le mathématicien en propose et qu'il soumet à la sagacité d'autres chercheurs. Les éventuels *contre-exemples* qui invalident cette conjecture servent à détecter, dans la preuve-mère, les éléments caduques et, au cours de cet examen détaillé, les concepts initiaux sont amenés à être modifiés ou complétés par des *concepts-éprouvettes* construits pour pouvoir reformuler la conjecture primitive et la prouver.

L'exemple typique qui illustre ce travail de preuves et réfutations porte sur le célèbre *"théorème faux"* de Cauchy qui annonce qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue lorsqu'elle est la limite d'une suite (f_n) de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'examen des contre-exemples permet de voir que la preuve-mère bute sur la notion de convergence uniforme d'une suite de fonctions, laquelle notion devient alors le concept-éprouvette autorisant une reformulation de la conjecture primitive et la preuve du nouveau résultat : Si (f_n) est une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers h, alors h est continue.

De sa réflexion, Lakatos éprouve le besoin de distinguer deux styles d'exposés mathématiques : le style *"déductiviste"* et le style *"heuristique"*.

Dans le style déductiviste, comme l'explique Lakatos [93] on commence par une liste précautionneuse d'axiomes, de lemmes ou de définitions. Les axiomes et les définitions paraissent fréquemment artificiels et d'une complication déroutante. On ne dit jamais comment ces complications sont nées. La liste d'axiomes et de définitions est suivie de théorèmes soigneusement mis en mots, encombrés de conditions

92. LAKATOS 1984.
93. Ibid., p. 183.

pesantes ; il semble impossible que quiconque ait jamais pu les inventer. Le théorème est suivi de la preuve. De plus,

> *Dans le style déductiviste toute proposition est vraie, toute inférence valide. Les mathématiques sont présentées comme un ensemble toujours plus vaste de vérités éternelles et immuables. Contre-exemples, réfutations, critiques ne peuvent y pénétrer. L'exposé se donne des airs de certitude en commençant par des définitions déguisées, issues des preuves et à l'épreuve des monstres, et par le théorème dans sa forme définitive, faisant disparaître la conjecture primitive, les réfutations et la critique de la preuve. Le style déductiviste cache la lutte, dissimule l'aventure. L'histoire toute entière disparaît. Les tentatives successives de formulation du théorème au cours de la procédure de preuve sont vouées à l'oubli cependant que le résultat final est exalté, élevé à une infaillibilité sacrée.* [94]

Au style déductiviste, Lakatos oppose le style heuristique comme expliqué ci-dessous :

> *Le style déductiviste arrache la définition-éprouvette à sa "preuve-mère", il la fait tomber du ciel d'une façon artificielle et autoritaire. Il cache le contre-exemple global qui a conduit à sa découverte. Le style heuristique, au contraire, met au premier plan ces facteurs. Il met en valeur la situation-problème, il souligne la "logique" qui a donné naissance au nouveau concept.*

Cependant, on n'a pas toujours le choix, dans l'enseignement, entre ces deux styles. Comme l'analyse Dunia Mwati [95] dans sa thèse, d'une part, les outils mathématiques permettant une approche déductiviste ne sont pas encore tout à fait au point et certains d'entre eux ne sont même pas encore introduits. D'autre part, certains de ces outils sont introduits sans que leur fondement mathématique (jugé difficile ou peu adapté à ce niveau d'enseignement) ne soit établi. Ce qui rend inéluctable à ce niveau d'enseignement la mise sur pied d'un discours heuristique, mais dans le cadre d'une praxéologie *"modélisation"*.

En fait, le discours heuristique décrit au sens strict par Lakatos est limité car un discours heuristique se doit d'être adapté à un niveau d'enseignement donné et surtout à un projet mathématique qui peut relever, tantôt de la modélisation, tantôt de la mise en ordre déductive. Cela nous amène à un sens *"large"* du discours heuristique proposé par Schneider (2001) afin de prendre en compte la relativité institutionnelle du savoir (voir section 3.2).

En analysant une Approche Heuristique de l'Analyse (AHA), Schneider (2001) rapproche la rencontre culturelle mimétique de Chevallard (1999) du discours socio-

94. Lakatos 1984, p. 183–184.
95. Dunia Mwati 2013, p. 33.

épistémologique (au sens de Fourez, 1992) qui prétend décrire comment les humains raisonnent sans porter de jugement, un peu comme un anthropologue observe les mœurs d’une peuplade, a contrario d’une épistémologie normative qui impose la “bonne” façon de raisonner. Un tel discours n’impose pas de définition selon le mode :“Un écosystème, c’est ...” ou “Un espace vectoriel, c’est ...”, mais présente les circonstances d’émergence du concept. Par exemple : “Pour éclaircir telles questions relatives à l’environnement, les géographes utilisent la notion d’écosystème ...”. Dans une certaine mesure, ce discours participe à l’effacement du professeur censé présenter telle pratique mathématique, non comme bonne ou idéale mais comme une façon de procéder, parmi d’autres possibles, choisie par un groupe de personnes en fonction d’un projet visé. On y explique donc les “raisons d’être” du savoir et de ses usages dans un institution donnée. Et c’est dans ce sens là que nous considérons le concept de “discours heuristique”.

3.6 Un MER orienté vers la construction d’un formalisme “bipoint”

A l’époque des mathématiques modernes, le concept de bipoint ou couple (A, B) de points A et B d’un espace affine était central dans l’étude de la géométrie. Ainsi que nous l’avons décrit à la section 2.2.2, le concept de couples équipollents était alors défini par le biais d’un parallélogramme ou d’une chaîne de parallélogrammes et un vecteur devenait une classe d’équivalence de couples équipollents. C’est là une introduction aux vecteurs que semble regretter Stella Baruk (1992) :

> *La notion de “bipoint" a disparu des programmes du collège après y avoir fait son entrée au moment de la réforme dite “des maths modernes" : disparition regrettable car c’est une notion facile, fort utile et éclairante.*
> *[...] A partir de la donnée d’un bipoint, plusieurs êtres mathématiques peuvent être évoqués : des êtres géométriques, mais aussi, si la droite est munie d’un repère, des grandeurs et des nombres*[96].

Et pourtant, comme analysé à la section 2.2.3, un tel enseignement était dénué de sens pour bon nombre d’élèves, le principe même de définition d’un concept au départ d’une relation d’équivalence leur passant au-dessus de la tête.

Sans doute peut-on incriminer l’absence d’une finalité annoncée d’entrée de jeu et donc bien visible pour les élèves.

Nous avons donc cherché ici à construire un projet d’enseignement autour d’une finalité présentée aux élèves dès le départ par des activités d’introduction qui permettent de l’expliciter : construire un calcul qui permet de démontrer des propriétés de figures géométriques planes et de solides.

96. Baruk 1992, p. 164–166.

Ce calcul prend appui sur ce que les élèves connaissent déjà en matière de géométrie analytique et s'apparente à ce que Hamilton, Grassmann, Burali-Forti, Marcolongo s'autorisent comme écritures, en particulier $B - A$ pour représenter ce que nous notons $\overrightarrow{AB}$. Expliquons-nous sur l'enjeu majeur du calcul recherché, à savoir l'invariance souhaitée de ce formalisme par rapport au choix de repère.

3.6.1 Construire un formalisme indépendant du choix d'un repère ou les propriétés intrinsèques des vecteurs

Comme analysé plus haut, la géométrie analytique donne des facilités pour traiter des problèmes géométriques mais elle a aussi certains inconvénients (le détail est dans la section 1.5.1). Nous avons vu en effet que, dans l'histoire, plusieurs mathématiciens comme Burali Forti et Marcolongo ont eu envie de construire un formalisme *“autonome”* qui permet de calculer directement sur les objets géométriques sans manipuler les coordonnées numériques qui les représentent dans un repère donné. Les raisons de ce souhait sont étudiées par Lebeau (2009) dans sa thèse [97]. La première est la pénibilité des calculs :

> *Une première raison qui incite à abandonner les coordonnées tient à la pénibilité des calculs, comme en attestent les propos de Bricard (1929) :*
> *“Si on fait usage du trièdre cartésien classique, un vecteur est représenté par ses trois coordonnées, c'est-à-dire par ses projections sur les axes, et l'on est encore conduit à opérer sur les nombres. Or on constate tout de suite que les équations vont le plus souvent par groupes de trois, celles d'un même groupe ne différant entre elles que par des permutations circulaires de lettres. Comme c'est la chose la plus fastidieuse (quand les équations sont compliquées, le calculateur se borne d'ordinaire à écrire la première d'entre elles et remplace les autres par des lignes de points), il est naturel de souhaiter une notation plus concise. On la trouve dans le calcul vectoriel, qui opère directement sur les vecteurs.”*

La deuxième raison tient aux propriétés intrinsèques du formalisme recherché :

> *C'est, peut-être, ce que Burali Forti et Marcolongo traduisent de la sorte :*
> *“[...] nous développons quelques questions de géométrie différentielle, de mécanique et de physique mathématique : nous les avons choisies exprès parmi les questions bien connues, afin de montrer la supériorité énorme du calcul vectoriel* **absolu** *sur les méthodes anciennes et* **indirectes** *des coordonnées.”*

97. LEBEAU 2009, p. 142.

Il s'agit bien sûr des propriétés intrinsèques des vecteurs dont Klein (1974) souligne l'importance et qui sont décrites dans CREM (2002) [98] :

> *D'un certain point de vue, on peut considérer un repère comme un poste d'observation. Les relations intrinsèques sont celles qui définissent des configurations (des ensembles de n-uples de points) que l'on voit de la même façon - que l'on ne peut pas discerner -, quel que soit le poste d'observation que l'on choisisse. Ces configurations sont proprement géométriques, au sens où la géométrie est la même dans tous les patelins du monde. Les relations non intrinsèques par contre définissent des configurations qui sont liées à un lieu donné, que l'on voit différemment lorsqu'on change de poste d'observation. On pourrait dire que ces configurations relèvent plutôt de la géographie que de la géométrie. Le mot est de F. Klein, mais il s'agit bien entendu d'une géographie quelque peu théorique, où les accidents de terrain ne sont ni des montagnes, ni des villes.*

Commençons ici par la relation

$$B - A = C - D \quad (1)$$

qui résume

$$\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D & (2) \\ y_B - y_A = y_C - y_D & (3) \end{cases}$$

et le changement de repère défini par les formules d'une transformation affine :

$$x = r_{11}x' + r_{12}y' + s_1$$

$$y = r_{21}x' + r_{22}y' + s_2$$

avec la condition $r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} \neq 0$ et avec les notations de la figure suivante où l'on passe des coordonnées (x, y) d'un point X dans le premier repère à ses coordonnées (x', y') dans le second :

98. ROUCHE 2002, p. 530.

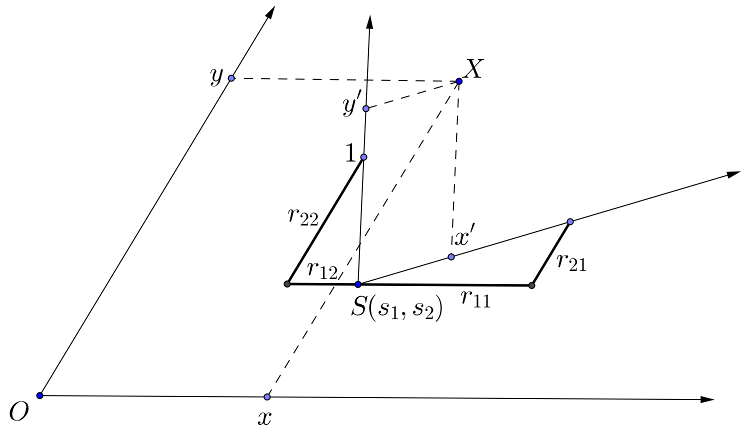


FIGURE *3.1*

Avec le changement de repère, on a :

$$x_A = r_{11}x'_A + r_{12}y'_A + s_1$$

$$y_A = r_{21}x'_A + r_{22}y'_A + s_2$$

et de même avec les autres points. On a donc

$$x_B - x_A = r_{11}x'_B + r_{12}y'_B + s_1 - (r_{11}x'_A + r_{12}y'_A + s_1) = r_{11}(x'_B - x'_A) + r_{12}(y'_B - y'_A)$$

$$x_C - x_D = r_{11}x'_C + r_{12}y'_C + s_1 - (r_{11}x'_D + r_{12}y'_D + s_1) = r_{11}(x'_C - x'_D) + r_{12}(y'_C - y'_D)$$

et la relation (2) devient

$$r_{11}(x'_B - x'_A) + r_{12}(y'_B - y'_A) = r_{11}(x'_C - x'_D) + r_{12}(y'_C - y'_D)$$

De même, la relation (3) devient

$$r_{21}(x'_B - x'_A) + r_{22}(y'_B - y'_A) = r_{21}(x'_C - x'_D) + r_{22}(y'_C - y'_D)$$

En utilisant la condition $r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} \neq 0$ on en déduit que

$$\begin{cases} x'_B - x'_A = x'_C - x'_D \\ y'_B - y'_A = y'_C - y'_D \end{cases}$$

La relation (1) est donc intrinsèque. Comme le dit Lebeau (2009) :

> *Ainsi donc pour des raisons multiples, naît un formalisme qui opère sur des objets géométriques. Il permet non seulement une plus grande*

> *simplicité des calculs mais conserve de plus l'identité des grandeurs manipulées. En géométrie, il doit rendre compte de configurations géométriques qui "tiennent le coup" dans un changement de repère.*

Un contre-exemple nous fera mieux comprendre ce qu'est une propriété intrinsèque. Considérons la relation $P = A + B$, supposée correspondre à deux égalités de même forme portant respectivement sur les abscisses et ordonnées de ces points dans un repère. Elle ne demeure pas invariante pour toute transformation affine sauf à considérer qu'il s'agit d'une transformation linéaire laissant O invariant, par exemple, une rotation de centre O (voir figure 3.2). Dans ce cas, la configuration pérenne est celle d'un parallélogramme de sommets A, B, P et ... O. Par contre, lors d'une translation amenant O sur T, les points P, A et B deviennent respectivement $P' = P + T, A' = A + T, B' = B + T$ et la relation $P' = A' + B'$ ne tient plus.

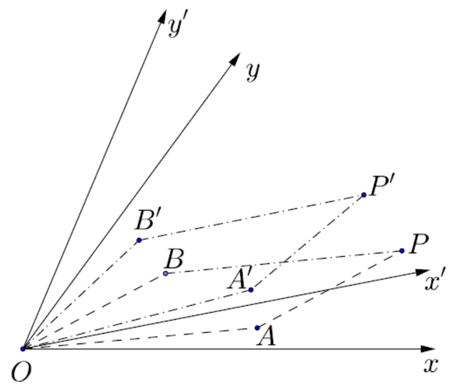


FIGURE *3.2*

3.6.2 Des combinaisons affines associées à des propriétés intrinsèques de vecteurs

Dans notre projet, nous ne faisons intervenir que des relations associées à des propriétés intrinsèques de vecteurs : elle correspondent à des *combinaisons affines.* Par exemple, les relations $P = A + k(B - A)$ et $P = A + k(B - A) + k'(C - A)$ expriment respectivement les points P d'une droite AB et les points P d'un plan ABC. Elles s'écrivent encore :

$$P = A + k(B - A) = (1 - k)A + kB \text{ et}$$

$$P = A + k(B - A) + k'(C - A) = (1 - k - k')A + kB + k'C.$$

On dit alors que P est une combinaison affine de A et B ou que P est une combinaison affine de A, B et C, le qualificatif "affine" exprimant que la somme des coefficients des points A, B (et C) dans chacune des expressions est égale à 1. En particulier, la condition de parallélisme de droites, PA et BC, s'exprime par l'existence d'un nombre k tel que $P - A = k(B - C)$, soit par l'expression de P sous forme d'une combinaison affine de A, B et C : $P = A + kB - kC$.

Ces combinaisons affines correspondent aux propriétés intrinsèques des bipoints ou vecteurs associés, en ce sens qu'elles restent invariants par changement de repère. Et elles le sont dans la mesure où elles expriment des configurations géométriques qui demeurent sous l'effet de transformations affines ou de changements de repères : parallélogramme, configuration particulière de 3 points alignés, ... On est donc dans un contexte où l'algébrique est sous la tutelle du géométrique, ce qui n'empêche des manipulations ou simplifications standard telles que $A - B + B - C = A - C$ qui relèvent, de manière évidente, de l'arithmétique sur les coordonnées des points impliqués. D'ailleurs, cette dernière simplification, qui est le pendant de la relation de Chasles, rend compte d'une configuration triangulaire demeurant pérenne dans un changement de repère.

3.6.3 Évitement du plan pointé

Le pointage du plan était un maillon important dans le cursus typique de la réforme des mathématiques modernes. Par exemple, à cette époque, on proposait, de la droite, une approche assez différente, sur le plan épistémologique, de celle travaillée dans notre projet.

Comme on l'a vu en effet, à la section 2.2.2, le mot d'ordre de cette réforme était d'amarrer la géométrie à l'algèbre linéaire dont on peut dire que le succès est lié à la fécondité de la propriété de linéarité d'objets variés en maints domaines mathématiques. Il s'agissait aussi de faire découler, de la géométrie “linéarisée", les éléments fondamentaux de la géométrie analytique en passant du registre vectoriel au registre cartésien par l'entremise du registre paramétrique. Pour la géométrie élémentaire, l'idée était alors d'introduire les droites dans le plan comme “translatées" de sous-espaces vectoriels. On privilégiait un point O dans le plan et on identifiait tout autre point P du plan au vecteur “lié" $\overrightarrow{OP}$. On choisissait une base $\left\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right\}$ dans l'espace vectoriel considéré et on créait la droite vectorielle de base $\left\{\overrightarrow{OA}\right\}$ comme l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{OP} = k \cdot \overrightarrow{OA}$.

A partir d'une figure emblématique (figure 3.3), on définissait une droite quelconque déterminée par les points A et B comme l'ensemble des points X tels que

$$\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = k\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AX} = k \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Ce qui soulevait des difficultés d'apprentissage , les élèves ne parvenant pas toujours à identifier la droite en question dans ce dessin touffu :

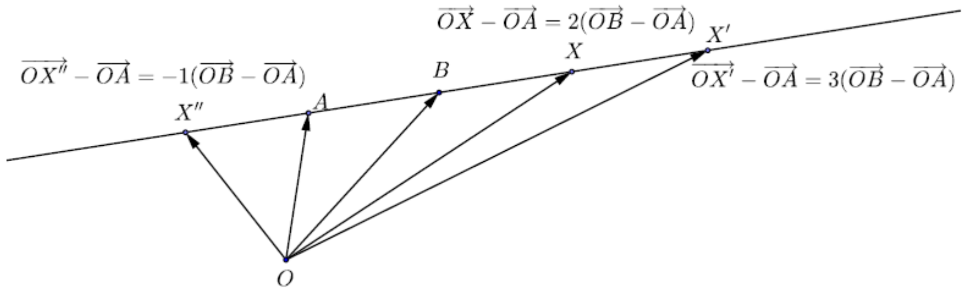


FIGURE *3.3*

De même, retrouve-t-on ce point de vue chez Pedoe (section 1.5.2) lorsqu'il définit un vecteur lié comme représentant d'une classe de bipoints pour définir ensuite une somme de vecteurs liés sur base de la figure 3.4

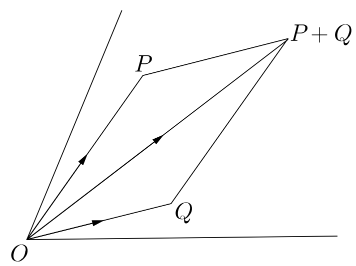
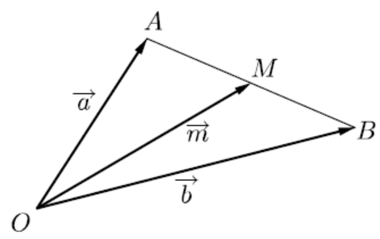
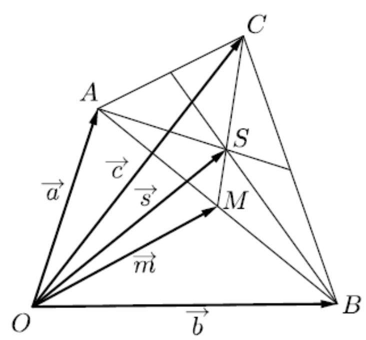


FIGURE *3.4*

Il convient ici de rappeler que, comme le décrit Pressiat (1999), l'emploi de vecteurs-positions se retrouve en bonne place dans plusieurs ouvrages anglo-saxons, a contrario de la tradition française, ce qu'il illustre par des figures empruntées à un manuel scolaire allemand (Collection LS, Lambacher et Schweizer, 1995/1996) :



$$\overrightarrow{m} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$$



$$\overrightarrow{m} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$$

FIGURE *3.5*

Ce point de vue diffère de celui adopté dans notre projet puisque nous ne privilégions aucun point qui serait l'origine d'un sous-espace vectoriel associé à l'espace affine étudié, pour les raisons avancées *supra*. Les vecteurs que nous y définirons comme ensembles de bipoints équipollents sont donc d'office des vecteurs libres, l'idée de vecteur lié nous paraissant contre-productif pour l'apprentissage du concept même de vecteur. D'ailleurs, les “vecteurs liés ne sont pas des vecteurs !" comme le précisent Bouvier et George (1979) dans leur définition du vecteur :

> *Pendant longtemps, on appela vecteurs liés des couples de points de $\mathbb{R}^2$ (ou des triples de $\mathbb{R}^3$) et vecteurs libres classes modulo l'équipollence. Aujourd'hui la terminologie s'est précisée : les vecteurs liés (qui ne sont pas des vecteurs) sont désormais appelés bipoints, le mot vecteur étant réservé aux vecteurs libres.*

Pour ce qui est des droites, par exemple, nous privilégierons plutôt les points de vue illustrés par les figures 3.6 et 3.7 :

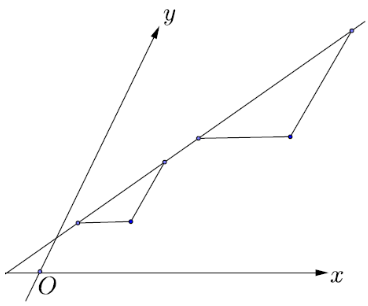


FIGURE *3.6*

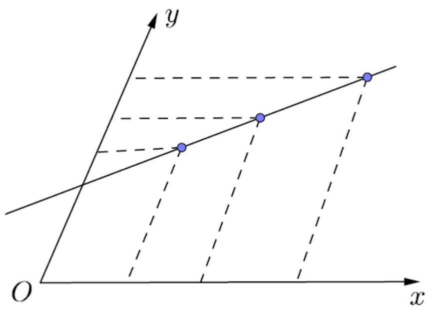


FIGURE *3.7*

correspondant à la première approche des droites préconisée par les programmes scolaire belges, dans le cadre restreint des graphiques de fonctions du premier degré caractérisés par la constance du taux d'accroissement.

Constance que l'on peut prouver soit en identifiant des triangles semblables (figure 3.6), soit en utilisant le théorème de Thalès dans les faisceaux de droites parallèles projetant les points de la droite sur un axe (figure 3.7). Nous y reviendrons.

Terminons pour souligner que nous ne négligeons cependant pas l'intérêt du pointage du plan critiqué ci-dessus, en particulier dans l'étude de systèmes linéaires où l'on accorde une importance particulière aux systèmes homogènes, le point O de coordonnées nulles y jouant un rôle à part. En effet, le dernier chapitre du projet, au travers de l'étude des exemples de systèmes linéaires de 3 équations à 2 inconnues et ceux de 3 équations à 3 inconnues, montre l'intérêt de penser leurs ensembles de solutions comme translatés des sous-espaces vectoriels formés par les solutions des systèmes homogènes associés.

3.7 Une praxéologie "modélisation" qui va de la géométrie synthétique vers la géométrie vectorielle

Rappelons le schéma qui caractérise le MER en vigueur ici :

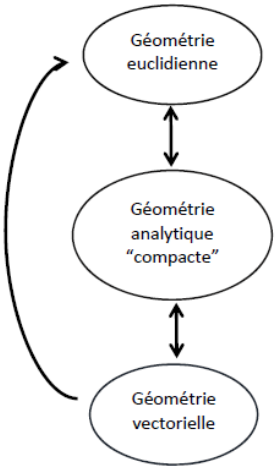


Schéma 4

La transposition didactique en vigueur dans les programmes belges et manuels scolaires associés prend la géométrie vectorielle comme point de départ respectant en cela la subordination de la géométrie à l'algèbre linéaire (voir section 1.5.3). Les droites et plans y sont définis d'emblée comme variétés linéaires et affines à partir de leurs équations vectorielles respectives. Ces équations vectorielles sont alors déclinées en équations cartésiennes et on en arrive ainsi à la géométrie analytique où très peu de propriétés de figures géométriques sont démontrées... faute de temps ou peut-être en raison de la complexité liée au choix du repère et à la lourdeur des calculs.

Ce parcours n'est pas sans inconvénients, ainsi que développé par Lebeau et Schneider (2010). D'abord, le passage du vectoriel au paramétrique relève, dans le secondaire, du tour de passe-passe perçu par les élèves comme une recette : *"on barre les flèches et on déploie les égalités sur les composantes"* disent-ils. Or, ce passage relève d'un théorème de l'algèbre linéaire : *"Tout espace vectoriel E de dimension finie n sur un corps commutatif K est isomorphe à l'espace K^n des coordonnées (par rapport à une base donnée de E, n est un naturel")*[99].

On voit donc que ce parcours ne s'inscrit absolument pas dans une praxéologie "déduction" où tout théorème se doit d'être déduit des définitions et axiomes de base.

Ensuite, les élèves sont en droit de s'interroger sur la validité des modèles qui servent à définir les objets géométriques à l'instar de ces deux élèves

99. LEBEAU et SCHNEIDER 2010, p. 6.

> *qui mettent en cause la définition vectorielle d’un plan en arguant que la somme de deux vecteurs de l’espace ne donne pas forcément un vecteur “coplanaire” (sic !) avec les précédents parce que, dans l’espace, “le parallélogramme peut être gauche”. Qu’aurait pu répondre le professeur qui avait préalablement défini la somme de deux vecteurs par le biais des composantes ? Montrer que cette somme permet d’exprimer la coplanarité en s’appuyant sur une caractérisation synthétique du plan ? Et, s’il avait défini la somme vectorielle de deux vecteurs de “l’espace” par le biais de la règle du parallélogramme, les élèves auraient été obligés de s’incliner mais auraient peut-être demandé des comptes sur le passage d’une somme vectorielle à celles relatives aux composantes. Car, ces élèves posent là une question dont la portée épistémologique est consistante en interrogeant la pertinence du modèle vectoriel pour rendre compte d’un objet, le plan, sur lequel ils briguent avoir quelque connaissance. Cette question se pose déjà pour la droite* [100]*...*

Enfin, comme le montrent les recherches de Lebeau (2009), les caractérisations paramétriques et cartésiennes sont à travailler pour elles-mêmes car elles soulèvent des difficultés d’apprentissage qui résistent à la formation mathématique même universitaire. Ainsi, les élèves interprètent l’équation $y = ax + b$ dans l’espace usuel comme étant celle d’une droite et non celle d’un plan car ils postulent indûment une parenté de forme entre les équations 2D et 3D d’un même objet géométrique. De même, au niveau de l’enseignement supérieur,

> *[...] le registre paramétrique semble mal maîtrisé surtout quant à la quantification existentielle liée au(x) paramètre(s). C’est elle en effet qui permet des écritures multiples des droites et des plans puisqu’on peut changer dans les équations paramétriques associées et le point de référence appartenant à la droite ou au plan et le(s) vecteur(s) directeur(s) pourvu qu’on respecte la dépendance linéaire (notons que celle-ci se repère facilement à vue pour la droite et beaucoup moins pour le plan). Mais les étudiants ont du mal à gérer cette diversité d’écriture, étant plus attachés à l’apparence ostensive des équations qu’à la quantification associée au(x) paramètre(s)* [101].

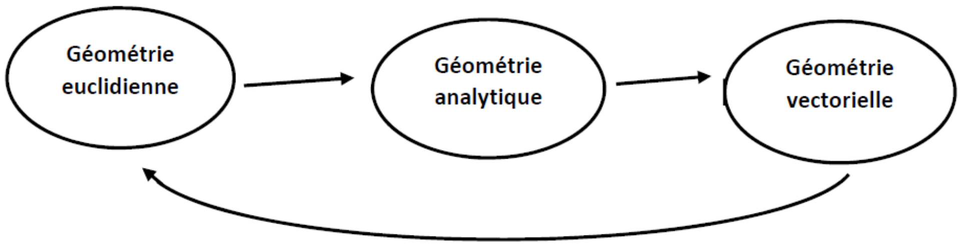
Si l’on ajoute à ces difficultés, des obstacles d’apprentissage liés au concept même de vecteur et dont nous avons parlé à la section 2.2.4, on est en droit de questionner la pertinence de ce parcours.

Par ailleurs, plusieurs chercheurs (Dorier et al., 1997) soulignent l’importance des images géométriques dans l’apprentissage de l’algèbre linéaire et s’expriment en faveur de l’utilisation de la géométrie analytique pour préparer l’algèbre linéaire

100. LEBEAU et SCHNEIDER 2010, p. 7.
101. Ibid., p. 8.

car la première leur semble plus naturelle pour aborder des concepts tels que le caractère générateur, l'intersection de sous-espaces.

Toutes ces raisons nous poussent à prôner un parcours qui va de la géométrie synthétique (euclidienne) à la géométrie vectorielle en passant par la géométrie analytique et qui, par conséquent, va à rebours du parcours standard :



Avec un retour dans l'autre sens en considérant la géométrie vectorielle comme un outil de preuve de propriétés de la géométrie euclidienne.

A ceci près que le géométrie analytique est *"compacte"* dans notre projet sous la forme du formalisme bipoint et que l'on se posera la question de l'intérêt réel du formalisme vectoriel.

3.8 Un mode de validation évoluant d'une praxéologie "modélisation" à une praxéologie "déduction"

Rappelons qu'il s'agit de construire un formalisme qui exprime les propriétés intrinsèques des vecteurs, soit leurs propriétés invariantes lors d'un changement de repère. Mais les élèves concernés (15 ans) ne connaissent ni les transformations affines ni les formules de changements de repères affins. Ils ne sont même pas conscients qu'on pourrait en changer ou choisir le repère pour faciliter le travail analytique.

Il ne peut être question de leur enseigner ces notions absentes des programmes scolaires. Le mode de validation doit donc être adapté. Pour pallier à cette situation, on prend donc la peine de prouver, sur base de théorèmes connus des élèves, que les formules sont valables en toute généralité, les coordonnées des points des configurations géométriques concernées étant exprimées de manière générique. Ces théorèmes ont été prouvés, ou admis comme axiomes, dans le cadre de la géométrique synthétique, préalablement dans les programmes : théorème de Thalès, théorème de Pythagore, cas d'isométrie ou de similitude des triangles.

Le mot *"justifier"* renvoie donc d'abord au discours technologique de Chevallard et s'inscrit dans la construction d'une praxéologie *"modélisation"* : les tâches consistent en effet à créer des modèles exprimant des configurations géométriques (parallélogrammes, ...) et les techniques de validation envisagées reposent sur ce que les élèves connaissent, d'une part, de la géométrie synthétique et d'autre part, de la droite graduée et d'un repère. C'est donc une justification hybride des bases d'une théorie en voie de construction, s'appuyant sur des éléments d'autres théories. Une telle justification qui articule plusieurs domaines mathématiques, ici la géométrie synthétique et l'analyse, est typique d'une praxéologie *“modélisation"* et c'est ce qui explique le caractère heuristique du discours.

Ensuite, les modélisations (bipoint ou vectorielle) de configurations géométriques de base, validées de cette manière, constituent les règles de départ à partir desquelles peut s'enclencher la déduction de nouvelles propriétés géométriques.

Nous détaillons ce double processus principalement en géométrie affine et en géométrie métrique au chapitre 4.

CONCLUSION DU CHAPITRE 3

Pour conclure, nous reprenons les traits saillants du MER construit ici.

Il convient de le situer haut dans l'échelle de co-détermination didactique car il articule, à un large niveau curriculaire, l'apprentissage de l'algèbre élémentaire et des apprentissages géométriques multiples prévus dans un curriculum assez standard de la géométrie pour l'enseignement secondaire. D'une part, l'approche de l'algèbre élémentaire y est finalisée tant par la modélisation fonctionnelle que par la géométrie analytique. D'autre part, on y étudie d'abord la géométrie **dans** l'espace (au sens de Bkouche), c'est-à-dire les propriétés de figures planes et de solides avant d'arriver à l'étude de la géométrie **de** l'espace, soit celle de la structure vectorielle et affine qui lie les objets "simples" que sont le point, la droite et le plan.

Notre MER s'inscrit dans une visée heuristique au sens de Lakatos et induit un parcours qui commence par une praxéologie "modélisation" au sens de Schneider : on cherche à créer un modèle algébrique de configurations géométriques "de base" de la géométrie affine d'abord et de la géométrie métrique ensuite.

Ce modèle algébrique relève d'une géométrie analytique "compacte", soit du formalisme bipoint qui résume en 2 ou 3 dimensions des relations homologues entre les coordonnées respectives des points concernés, relations invariantes du choix du repère. En géométrie affine, les configurations de base sont le parallélogramme et les configurations particulières de points alignés auxquelles s'ajoutent les notions de perpendicularité et de distance en géométrie métrique. Le modèle algébrique rend compte alors des propriétés intrinsèques des vecteurs respectivement propres à chacune de ces géométries mais il est lui-même validé par les théorèmes d'une géométrie subordonnée, la géométrie euclidienne, lesquels sont les seuls résultats connus des élèves : cas d'isométrie et de similitude des triangles, théorèmes de Thalès et de Pythagore.

Cette validation assumée dans le cadre d'une praxéologie "modélisation" conduit à la construction des relations de base du modèle algébrique qui peuvent ensuite constituer les "axiomes" d'une praxéologie "déduction" (au sens de Schneider), amorce de la géométrie vectorielle, même si les choses ne sont pas forcément présentées ainsi aux élèves et qu'on insiste surtout sur l'instrumentalité des formalismes bipoint et vectoriel pour prouver de nouvelles propriétés géométriques.

Le MER ainsi constitué va donc de la géométrie euclidienne à la géométrie vectorielle en passant par une géométrie analytique "compacte".

Le rôle *"phénoménotechnique"* de ce MER tient au fait qu'il représente un "modèle alternatif" permettant d'interpréter le modèle dominant dans l'enseignement de la géométrie aujourd'hui. Il nous permet ainsi de "dénaturaliser" la transposition didactique actuelle qui est toujours sous l'influence de la réforme des mathématiques modernes mais qui a été édulcorée d'éléments théoriques jugés trop difficiles pour les élèves et, par conséquent, a été réduite à un ensemble de "recettes". Nous y reviendrons dans le chapitre 5.

Nous continuons, dans le chapitre suivant, par l’étude des valences sémiotique et instrumentale du formalisme bipoint, en comparaison avec le formalisme vectoriel.

CHAPITRE 4

QUESTIONS DE SÉMIOTICITÉ ET D'INSTRUMENTALITÉ DU CALCUL BIPOINT

Le Modèle Épistémologique de Référence développé et argumenté au chapitre 3 a été décliné en une ingénierie didactique ample destinée à des élèves du secondaire. Le chapitre 4 constitue une analyse de cette ingénierie principalement en termes de sémioticité et d'instrumentalité du calcul bipoint dont la construction est, rappelons-le, l'enjeu premier de ce MER.

Outre quelques concepts de la théorie des situations didactiques de Brousseau que nous présenterons au fur et à mesure, notre analyse s'appuie sur des grilles de lecture des formalismes mathématiques et des correspondances de l'un à l'autre : jeux de cadres chez Douady (1984), registres sémiotiques de Duval (1993), dialectique ostensif/non-ostensif ainsi que les valences sémiotique et instrumentale des ostensifs chez Bosch et Chevallard (1999) et la notion d'extension praxémique de Matheron (2010). Ces divers cadres théoriques sont explicités dans la section 4.1.

Dans la section 4.2, nous analysons la sémioticité et l'instrumentalité du calcul bipoint en géométrie affine et, à la section 4.3, nous le faisons pour la géométrie métrique, avec une sous-section qui constitue une petite échappée vers les preuves qu'autorise le formalisme des nombres complexes.

4.1 Apports de cadres théoriques

4.1.1 Les notions de cadres et jeux de cadres chez Douady

On peut interpréter l'analyse faite à la section 3.8 à la lumière de la notion de cadre. Rappelons en effet que le formalisme bipoint est “justifié” dans notre MER, par des théorèmes de géométrie, tel le théorème de Thalès qui relève de la géométrie synthétique au niveau des élèves concernés mais aussi par la bijection entre les réels et les points d'une droite graduée qui repose sur les axiomes de continuité de l'analyse mathématique. On constitue ainsi les prémisses d'un nouveau cadre à la croisée de cadres existants.

Comme nous le verrons ci-dessous, le "changement" de cadres peut ainsi faire évoluer les connaissances.

Dans son article publié en 1984 [102], Douady définit la notion de cadre comme suit :

> *Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outils, des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée.*

L'analyse, par exemple, est un cadre lui-même partagé en sous-domaines qui sont, à leur tour, des cadres traitant d'objets plus spécifiques : l'analyse complexe qui étudie les fonctions de variables complexes, l'analyse fonctionnelle qui étudie les espaces de fonctions (de Banach et d'Hilbert),... Comme on le voit avec ce dernier exemple, un cadre (ici l'analyse) peut être, à son tour, englobé dans un cadre plus vaste : par exemple, celui des espaces métriques ou encore celui des espaces topologiques. La géométrie conduit, elle aussi, à de multiples divisions, selon les objets étudiés ou les méthodes pour le faire : géométrie métrique, affine, ..., synthétique, analytique, ..., hyperbolique, ... Mais elle se prête aussi à des extensions et/ou recoupements avec d'autres cadres comme la géométrie différentielle à l'articulation de l'analyse, de la topologie et de l'algèbre linéaire.

On touche ici, à l'échelle des mathématiques, à ce que Douady appelle *"jeux de cadres"*, dans un contexte d'apprentissage, soit *"des changements de cadres provoqués à l'initiative de l'enseignant, à l'occasion de problèmes convenablement choisis, pour faire avancer les phases de recherche et évoluer les conceptions des élèves."*

En effet, comme l'explique Rogalski (2001), les changements (ou jeux) de cadres sont féconds en mathématiques. Il en précise trois aspects :

- Le changement de cadres pour faciliter les résolutions d'exercices et de problèmes : "Les jeux de cadres peuvent permettre un traitement qu'on ne sait pas faire ou qu'on pourrait mal faire dans le cadre de départ et qui est rendu plus aisé dans un autre cadre". Ainsi, comme illustré dans Lebeau (2009) :

  "L'utilité d'un jeu de cadres intervient lorsque l'on souhaite résoudre une inégalité à deux variables telle que $x-y > 0$. Cette inégalité se situe dans le

102. DOUADY 1986, p. 5–31.

cadre de l'algèbre mais sa résolution y est délicate. Il convient de changer de cadre et de traduire cette inégalité dans celui de la géométrie analytique : on dessinera la droite $x - y = 0$ qui sépare le plan Oxy en deux demi-plans, l'un comprenant l'ensemble des points de coordonnées (x, y) telles que $x - y > 0$ et l'autre comprenant l'ensemble des points de coordonnées (x, y) telles que $x - y < 0$. Ensuite, il suffit de considérer la zone adéquate".

- Le changement de cadres pour faire évoluer les connaissances : "Un changement de cadres permet de rechercher dans un autre cadre un objet qui s'y trouve encore "implicitement" mais qui y est plus facilement repérable que dans le cadre où l'on travaille initialement". Il est également possible de "situer le cadre où l'on se pose un problème dans une théorie plus générale qui contient d'autres cadres, et d'aller chercher dans ceux-ci une idée, une analogie, pouvant être importée". L'exemple donné par Rogalski est tiré du DEUG première année.

  "On se propose de déterminer toutes les suites numériques $u = (u_n)$ vérifiant les relations

  $$u_{n+1} = au_n + b, \quad \text{ou } u_{n+1} = au_n + b_n, \quad \text{ou } u_{n+1} = a_n u_n + b_n,$$

  les suites $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ étant données.

  La première chose est de reconnaître, dans le cadre des suites numériques, qu'il s'agit d'un problème linéaire, et donc de reformuler le problème sous la forme canonique de l'équation linéaire générale du cadre plus théorique de l'algèbre linéaire $T(u) = v$ (ici, $u = (u_n), v = b$ et T est l'application linéaire de l'espace vectoriel des suites dans lui-même définie par la relation $T(u) = (u_{n+1} - a_n u_n)_n$. On a ainsi changé de "niveau de conceptualisation" par "formalisation".

  La théorie dit alors qu'il faut résoudre l'équation "sans second membre" : $(u_{n+1} - a_n u_n) = 0$, ce qui donne tout de suite $u_n = C \prod\limits_{0 \leq p \leq n-1} a_p$ où C est une constante arbitraire. Il faut alors trouver une solution particulière, et le problème est de savoir comment. Mais la théorie générale de l'équation linéaire contient d'autres cadres, par exemple celui des équations différentielles linéaires, où on peut chercher une idée ou une analogie qu'on pourra peut-être importer dans le cadre des suites récurrentes linéaires. Et on ne peut pas ne pas penser à la méthode de variation des constantes... et cela marche ! On "fait varier" la constante C de la solution de l'équation homogène (le noyau T), en posant $u_n = w_n \prod\limits_{0 \leq p \leq n-1} a_p$. La nouvelle suite inconnue vérifie $w_{n-1} - w_n = b_n \left(\prod\limits_{0 \leq p \leq n} a_p \right)$, et le résultat s'en suit par sommation."

- La formation des énoncés en référence à un cadre : Selon Duval (2001),

> "l'approche par changements de cadres attire l'attention sur le fait que la formation de l'énoncé est une composante essentielle du problème, dans la mesure où elle se fait en référence aux concepts d'un cadre mathématique".

Notre MER illustre évidemment cette évolution de connaissances en croisant, comme rappelé supra, deux cadres pour construire une caractérisation algébrique de configurations géométriques. Cependant, selon Lebeau (2009), le découpage en cadres semble trop grossier car, à l'intérieur de ces cadres, le changement d'une écriture à une autre, d'un dessin à un autre pose problème aux élèves. On touche là aux registres de Duval (1993) expliqués dans la section suivante.

4.1.2 Représentation sémiotique et registres chez Duval

Comme l'explique Duval (1993) [103], une écriture, une notation, un symbole représentent un objet mathématique : un nombre, une fonction, un vecteur,... De même les tracés et les figures représentent des objets mathématiques : un segment, un point, un cercle... Cela veut dire que les objets mathématiques ne doivent jamais être confondus avec la représentation qui en est faite. Par conséquent, la distinction entre un objet et sa représentation est donc un point stratégique pour la compréhension des mathématiques.

De plus, selon cet auteur, le seul moyen d'avoir accès aux objets mathématiques est celui des représentations sémiotiques :

> *Les diverses représentations sémiotiques d'un objet mathématique sont absolument nécessaires. En effet, les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles dans la perception, ou dans une expérience intuitive immédiate, comme le sont les objets communément dit "réels" ou "physiques" ! Il faut donc pouvoir en donner des représentants. Et, en outre, la possibilité d'effectuer des traitements sur les objets mathématiques dépend directement du système de représentation sémiotique utilisé. Il suffit de considérer le cas du calcul numérique pour s'en convaincre : les procédures, et leur coût, dépendent du système d'écriture choisi. Les représentations sémiotiques jouent un rôle fondamental dans l'activité mathématique. [...] c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible* [104].

Concernant la définition de représentations sémiotiques, Duval a dit :

> *Les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a*

103. DUVAL 1993.
104. Ibid., p. 38.

> *ses propres contraintes de signifiance et de fonctionnement. Une figure géométrique, un énoncé en langue naturelle, une formule algébrique, un graphe sont des représentations sémiotiques qui relèvent de systèmes sémiotiques différents. On considère généralement les représentations sémiotiques comme un simple moyen d'extériorisation des représentations mentales pour des fins de communication, c'est-à-dire pour les rendre visibles ou accessibles à autrui* [105].

De plus, Duval a expliqué aussi le paradoxe cognitif de la pensée mathématique dans l'enseignement dont la raison est qu'on accorde beaucoup plus d'importance aux représentations mentales qu'aux représentations sémiotiques. En effet, comme l'explique Duval, on ne peut pas faire comme si les représentations sémiotiques étaient simplement subordonnées aux représentations mentales, puisque que le développement des secondes dépend d'une intériorisation des premières et que seules les représentations sémiotiques permettent de remplir certaines fonctions cognitives essentielles, comme celle liée au traitement des objets mathématiques :

> *Le fonctionnement cognitif de la pensée humaine se révèle inséparable de l'existence d'une diversité de registres sémiotiques de représentation. Si on appelle* **sémiosis** *l'appréhension, ou la production, d'une représentation sémiotique, et* **noésis** *l'appréhension conceptuelle d'un objet, il faut affirmer que la noésis est inséparable de la sémiosis.*

Par conséquent, *"il n'y a pas de noésis sans sémiosis"* ou, en d'autres mots, *"pour appréhender un concept il est nécessaire de disposer de plusieurs représentations sémiotiquement hétérogènes de ce concept et de les coordonner et la compréhension nécessite cette différenciation entre représentants et représenté* (Duval cité par Lebeau, Ib., pp. 57).

Duval parle ensuite de trois activités cognitives fondamentales liées à la sémiosis :

– La formation d'une représentation identifiable comme une représentation d'un registre donné.
– Le traitement d'une représentation qui est la transformation de cette représentation dans le registre même où elle a été formée.
– La conversion d'une représentation qui est la transformation de cette représentation en une représentation d'un autre registre en conservant la totalité ou une partie seulement du contenu de la représentation initiale.

En ce qui concerne les difficultés de conversion, Duval épingle la notion de congruence (ou non congruence) des représentations sémiotiques qui détermine les conditions de réussite dans la conversion entre deux registres sémiotiques différents. Pour mieux comprendre cela, donnons ici deux exemples de Duval commentés par Lebeau :

105. Ibid., p. 39.

1. *Si l'on considère une représentation dans le registre de la langue naturelle, soit "l'ordonnée est supérieure à l'abscisse", il est possible de la traduire dans le registre algébrique, soit "$y \geq x$".*
   Une correspondance terme à terme entre les unités signifiantes respectives de chacun des registres est suffisante pour effectuer la traduction. Dans ce cas, la conversion inverse permet de retrouver l'expression initiale du registre de départ.

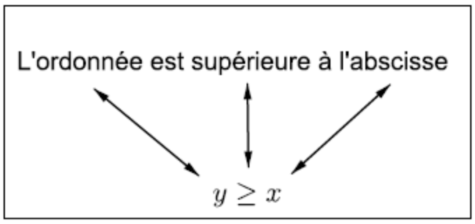


FIGURE *4.1*

Duval parle alors de congruence des représentations.

2. *Si l'on considère la représentation en langage naturel, soit "l'ensemble des points dont l'abscisse et l'ordonnée ont le même signe" et son expression algébrique "$x.y > 0$", il n'y a plus de correspondance terme à terme entre les unités signifiantes respectives des deux registres. En effet, une réorganisation de l'expression donnée du registre de départ est nécessaire pour obtenir l'expression correspondante dans le registre d'arrivée. En outre "> 0" regroupe deux unités signifiantes. La conversion inverse ne permet pas de trouver l'expression initiale : "$x.y > 0$" se traduit naturellement par "le produit de l'abscisse et l'ordonnée est supérieure à 0" et non par "l'ensemble des points dont l'abscisse et l'ordonnée sont de même signe".*
   Duval parle alors de non congruence des représentations. Dans ce cas, selon lui, non seulement le temps de traitement augmente mais la conversion peut se révéler impossible à effectuer, ou même à comprendre s'il n'y a pas eu un apprentissage préalable concernant les spécificités sémiotiques de formation, de traitement et de conversion de représentations qui sont propres à chacun des registres en présence.

Dans notre travail, on va expliquer qu'on peut parler de non congruence non seulement entre les signes mais aussi entre les stratégies de démonstration d'un formalisme et celles d'un autre dans divers registres. Nous y reviendrons plus loin.

La théorie de Duval est à mettre en lien avec la dialectique ostensifs/non ostensifs de Bosch et Chevallard (1999), bien que le focus et les perspectives diffèrent de l'une à l'autre. C'est ce que nous expliquons à la section suivante.

4.1.3 La dialectique ostensif/non-ostensif

Dans son travail, Bosch et Chevallard (1999) [106] développent l'idée que l'activité mathématique est outillée par des *"ostensifs"* définis comme un objet

> *ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. Ainsi en est-il d'un objet matériel quelconque et, notamment, de ces objets matériels particuliers que sont les sons (parmi lesquels les mots de la langue), les graphismes (parmi lesquels les graphèmes permettant l'écriture des langues naturelles ou constitutifs des langues formelles), et les gestes.*

De plus, parmi ces types d'objets matériels, les ostensifs scripturaux éloignés du langage parlé ont un rôle primordial dans l'activité mathématique car ils permettent des manipulations que le langage ne permet pas, comme l'explique Jack Goody :

> *C'est l'existence d'un système de notations très éloigné de la parole qui rend possible la pensée et les opérations mathématiques. [...] La formule a une capacité particulière qui nous permet de mener à bien les raisonnements mathématiques : elle conserve l'équilibre ou l'égalité entre les deux côtés sur lesquels on effectue les mêmes opérations (soustraction de $2x$ ou division par $n-1$, par exemple). Il n'y a aucun moyen de le faire sans visualiser l'opération. La parole seule en est incapable, l'écriture le peut. Sa dimension spatiale et visuelle permet le développement de ce genre de manipulation.* [107]

Le traitement régulé des ostensifs procure donc une économie de pensée que Schneider (2008) illustre par un exemple sur la résolution de systèmes : une manipulation de symboles algébriques permet de résoudre "automatiquement" un problème à deux inconnues pourvu que cette manipulation soit conforme à certaines règles.

Les ostensifs et non-ostensifs associés ont une existence commune au sein d'institutions, qu'elles soient savantes ou didactiques :

> *[...] comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement - au sens où on leur attribue une existence - sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours) (Bosch et Chevallard, 1999).*

En outre, ostensifs et non-ostensifs sont impliqués, de manière dialectique, dans les techniques et pratiques mathématiques d'une institution donnée :

106. Bosch et Chevallard 1999.
107. Cité par ibid., p. 18.

> *Considérons, pour simplifier, l'exemple que propose Duval à propos de l'écriture du rapport numérique entre deux segments orientés sur une droite munie d'une graduation régulière, activité qui consiste, en l'espèce, à produire une écriture du type $AB = 5CB$ à partir de la donnée d'un segment gradué où sont placés les points A, B et C. Cette activité peut apparaître comme transparente d'un point de vue mathématique restreint : il suffirait de regarder la droite graduée pour en déduire l'égalité de segments. Considérée en tant que processus cognitif, elle apparaît comme une "tâche de conversion" entre deux registres de représentation sémiotique : celui du figuratif et celui de l'écriture symbolique. Donc, là où la vision mathématique restreinte reste muette, l'approche cognitive permet d'expliquer les principales difficultés que comporte cette tâche (erreur de signe, inversion du rapport, etc.) en les attribuant au phénomène de non-congruence entre ces registres. Or, dans ce qui est présenté comme un changement de registres qui ne dépendrait que du fonctionnement cognitif du sujet, nous voyons, quant à nous, la mise en œuvre d'une technique mathématique, qui aboutit à l'écriture d'égalité entre segments par le truchement de l'écriture d'une égalité entre rapports de segments et rapports de mesures des segments (Bosch et Chevallard, 1999).*

On quitte, avec la dialectique ostensif/non-ostensif, une perspective ou un focus essentiellement cognitifs, pour se situer dans une perspective institutionnelle en questionnant systématiquement le choix, dans une institution donnée, des techniques permettant de réaliser une tâche et le choix des discours technologiques et ostensifs associés. C'est à la lumière d'un tel regard didactique dépassant les aspects cognitifs pour prendre en charge les aspects sociétaux et institutionnels que nous étudierons la dialectique ostensifs/non ostensifs *"généralement conçue en termes de signes et de signification : les objets ostensifs sont des signes d'objets non-ostensifs qui en constituent le sens ou la signification"*.

Cette étude suppose celles des valences instrumentale et sémiotique des ostensifs, valences expliquées à la section suivante.

4.1.4 Les valences instrumentale et sémiotique des ostensifs

Aux ostensifs sont associés deux valences. D'abord une **"valence instrumentale"** qui *"existe aussi bien dans les symboles écrits (en mathématiques, par exemple) que dans les mots que l'on prononce ou dans les gestes que l'on fait (Bosch et Chevallard, 1999)"*. Cette valence relève de la *praxis* et fait de l'ostensif un instrument de travail dont l'utilisation permet une économie de pensée. Ensuite, une **"valence sémiotique"** liée au *logos*, grâce à laquelle l'ostensif apparaît *comme signe, ou plutôt comme signifiant d'autres objets :*

la notation $\sqrt{\ }$, l'expression "racine carrée" et une certaine représentation graphique dans un repère cartésien peuvent renvoyer à cet objet non ostensif qu'est la racine carrée (ou la fonction racine carrée), l'écriture "130km/h" évoquer une grandeur ou une limitation de vitesse, etc.

Ces deux valences associées à un même ostensif ne sont pas indépendantes l'une de l'autre car, comme l'expliquent Bosch et Chevallard (1999), c'est la valence sémiotique qui permet aux non-ostensifs de réguler la manipulation des ostensifs :

On constate ainsi que la valence sémiotique d'un ostensif fonctionne en étroite relation avec sa valence instrumentale : dans un cas on peut ainsi manipuler $\frac{dy}{dx}$ comme un quotient, dans l'autre il apparaît comme un tout figé, inerte. La complexe dialectique de l'instrumental et du sémiotique conduit ainsi à différents cas de figure. L'ostensif peut notamment perdre son instrumentalité en perdant sa sémioticité, par exemple parce que les techniques de manipulation qui le rendaient opératoire ont cessé d'être intelligibles et justifiables. En sens inverse, l'ostensif peut acquérir une plus grande instrumentalité par le fait d'un travail technologique ou théorique qui permet de légitimer et de contrôler de nouveaux usages techniques. Pour le dire autrement, dans un cas l'emploi de l'ostensif se trouve "privé de sens" du fait de l'obsolescence des technologies associées aux techniques qui le mobilisaient jusque-là, tandis que, dans un autre cas, de nouvelles technologies pourront venir "(re)créer du sens" en justifiant cet emploi.

Il arrive aussi que certains ostensifs soient porteurs d'un *"transport"* de pratiques mathématiques d'un domaine où elles sont déjà installées dans un autre domaine mathématique où elles devront être recréées et légitimées. Ce point de vue renvoie aux extensions praxémiques qui font l'objet de la section suivante.

4.1.5 L'extention praxémique chez Matheron

La notion d'extension praxémique développée par Matheron (2010) est un concept particulièrement utile en matière d'extensions d'ensembles de nombres. Comme l'expliquent Schneider, Job, Matheron et Mercier (2015)

Le terme de "praxème", au sens de Chevallard (1991), est formé à l'image du terme linguistique de lexème. En didactique, il s'agit d'une unité minimale de signification de la pratique du savoir, au sein d'une institution donnée, dotée d'une même signification pour les sujets de cette institution. Par exemple, l'écriture de deux nombres l'un sous l'autre, de telle manière que les chiffres des divers ordres soient exactement superposés, est un praxème, unité minimale de signification qui

> *évoque déjà la pratique "poser une opération en colonnes". De même calculer un produit, calculer une somme de produits sont des praxèmes dans l'accomplissement de la technique de calcul du produit de deux matrices. C'est à ce concept de praxème que se réfère la notion d'extension praxémique* [108].

Les extensions praxémiques concernent l'usage de systèmes de praxèmes et des notations qui les supportent dans des pratiques nouvelles. Et cet usage est, bien entendu, de l'ordre d'une extension qu'il faut légitimer. Ainsi, comme le développe Matheron (2010), Newton revendique, dans sa *"méthode des fluxions"*, la possibilité de transposer à l'algèbre les pratiques de l'arithmétique et, en particulier, les praxèmes provenant de la division des entiers. En effet, de même que tout nombre décimal est la somme de la série de fractions décimales

$$28.57 = \Sigma_{n\geq 2} O \times 10^n + 2 \times 10^1 + 8 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + \Sigma_{n\geq 3} O \times 10^{-n},$$

de même Newton regarde toute expression algébrique comme son développement en série :

$$\frac{a^2}{b+x} = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^2} + (\frac{a^2x^2}{b^2})(\frac{1}{b+x}).$$

Comme Matheron (2010) le montre, Newton arrive à une telle écriture en engageant

> *un bloc de praxèmes venus des mathématiques antérieurement connues* [à son époque]. *Par exemple, on retrouve la pratique qui consiste à multiplier le quotient obtenu par le diviseur et à reporter ce produit afin de le soustraire au reste du dividende, ou encore la disposition de ce travail dans l'algorithme* [et donc le praxème de la "potence" ou l'équivalent illustré à la figure 4.2].

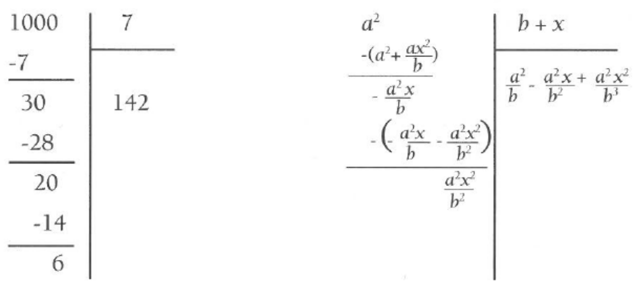


FIGURE *4.2*

Notre analyse ultérieure montrera que le calcul bipoint relève d'une telle extension praxémique.

108. SCHNEIDER et al. 2015, p. 17–18.

4.2 Le formalisme bipoint en géométrie affine

Dans cette section nous explorons les valences sémiotique et instrumentale du formalisme bipoint dans le cadre de la géométrie affine. Ces valences sont à analyser relativement au parcours proposé aux élèves, car la transposition didactique est susceptible de conditionner ces valences. C'est en ce sens que l'analyse faite ici est aussi une analyse a priori globale de ce parcours. La valence sémiotique du formalisme bipoint est l'objet de la section 4.2.1. Sa valence instrumentale est ensuite examinée à la section 4.2.2, en lien avec sa valence sémiotique et en comparaison avec les valences correspondantes du formalisme vectoriel. La section 4.2.3 complète ces analyses par un recueil de quelques propriétés et leurs preuves qui mettent bien en évidence l'instrumentalité du calcul bipoint.

4.2.1 Valence sémiotique du formalisme bipoint dans l'ingénierie

La géométrie affine est celle du groupe des applications affines d'un espace affine $\mathcal{E}$ dans un espace affine $\mathcal{F}$ associés respectivement aux espaces vectoriels E et F. A une telle application u est associée une application linéaire $f : E \to F$ telle que, pour tout point M de $\mathcal{E}$ et pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de E, on ait

$$u(M + \overrightarrow{v}) = u(M) + f(\overrightarrow{v}).$$

Nous nous limiterons ici aux automorphismes affines du plan (resp. espace) affine associé à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), en les considérant comme composées de transformations linéaires et de translations, un changement dans l'ordre de composition supposant un autre choix de translation.

Les invariants associés à ce groupe des automorphismes affines sont principalement le parallélisme, d'une part et, d'autre part, le rapport de section r d'un point P par rapport aux points A et B avec lesquels il est aligné et qui est défini par la relation $r = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}$. Il s'ensuit que la géométrie affine étudie des configurations géométriques (ensembles de figures jouissant de même propriétés) caractérisées par des propriétés qui restent invariantes sous l'effet des transformations affines : principalement, la configuration "parallélogramme" et la configuration "Thalès" d'un faisceau de parallèles coupées par deux sécantes qui détermine des configurations équivalentes de trois points alignés (figure 4.3 et 4.4).

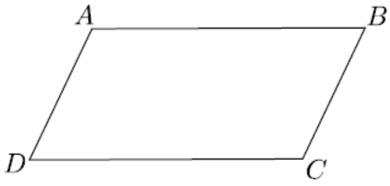


FIGURE *4.3*

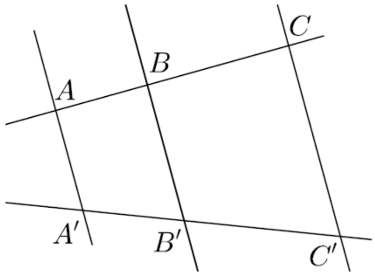


FIGURE *4.4*

La deuxième configuration permet d'ailleurs de définir la première car un parallélogramme est un quadrilatère dont les diagonales AC et DB se coupent en leur milieu, le milieu M d'un segment étant défini par un cas particulier de la figure 4.4 (figure 4.5). Dans notre parcours, la construction du formalisme bipoint en géométrie 3D suit d'ailleurs ce cheminement.

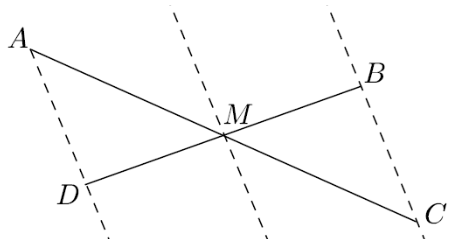


FIGURE *4.5*

Pour ce qui est de la géométrie 2D, nous avons préféré étudier le parallélogramme et la configuration Thalès séparément, dans un premier temps, et ce, pour plusieurs raisons :

1. Il nous semblait plus opportun de repartir de la définition du parallélogramme connue des élèves concernés, soit un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.
2. Le parallélogramme nous conduira à définir le concept de vecteur à travers l'équipollence de couples et la configuration "Thalès" amènera le concept de vecteurs multiples. Il nous semblait donc plus naturel de procéder dans cet ordre.
3. La relation entre le parallélogramme et une configuration Thalès particulière pourra ensuite faire l'objet d'un premier énoncé "bipoint" :

$$B - A = C - D \Leftrightarrow \frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2}$$

que l'on soumettra à la sagacité des élèves tout en leur faisant découvrir le parallélogramme "aplati". Or l'ordre suivi ici permet de mieux mettre en évidence la subordination d'une configuration à l'autre.

4.2.1.1 Deux tâches d'introduction dans le plan

Dans le plan, nous proposons donc aux élèves deux tâches distinctes qui leur sont proposées en deux versions chacune, d'abord en précisant les points par des coordonnées numériques puis par des coordonnées génériques :

> *Déterminer les coordonnées*
>
> *1) du 4ème sommet D du parallélogramme $ABCD$ à partir de celles des points A, B et C ;*
>
> *2) d'un point P situé sur une droite AB et deux fois plus éloigné de A que de B.*

Nous reviendrons plus loin sur le choix des coordonnées numériques pour nous expliquer ici sur l'intérêt du travail générique. Rappelons en effet, comme détaillé à la section 3.6.2, que le formalisme à construire doit rendre compte des propriétés intrinsèques des vecteurs, c'est-à-dire, des propriétés invariantes sous l'effet de transformations affines ou, ce qui revient au même, lorsqu'on change de repère affin. Or, cet univers est inconnu des élèves et est absent des programmes scolaires. Le travail générique a donc pour fonction de montrer l'invariance des relations établies entre coordonnées par rapport à la position relative des points envisagés et des éléments du repère (origine, axes...). Avant d'initier les élèves à l'idée qu'on puisse choisir le repère, on prend dans celui-ci des points aux coordonnées quelconques, ce qui revient au même.

Les relations qui rendent compte des configurations géométriques doivent donc être prouvées de manière générale. Par exemple, les sommets $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ et $D(x_D, y_D)$ d'un parallélogramme vérifient les relations

$$\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases}$$

Pour les raisons expliquées plus haut, le discours technologique qui valide ces relations est emprunté à la géométrie synthétique.

Le parallélogramme

Dans le cas du parallélogramme, on recourt à un cas d'isométrie de triangles et une propriété du parallélogramme. La définition initiale de ce quadrilatère est celle que proposent les manuels scolaires : un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles. Il est donc a priori non croisé, les manuels faisant l'impasse sur les quadrilatères croisés ou, au mieux, en montrent un sans définir la convexité [109]. La preuve s'appuie sur une propriété connue des élèves : Deux côtés d'un parallélogramme ainsi défini sont parallèles et de même longueur. On en déduit que, sur la figure 4.6, les triangles ABE et DCF sont isométriques, moyennant l'égalité d'angles à côtés respectifs parallèles.

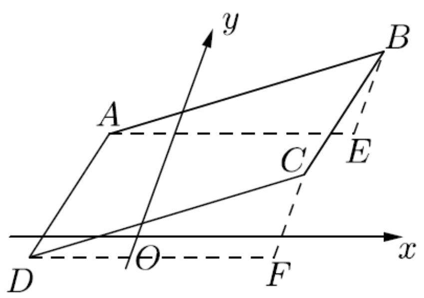


FIGURE 4.6

Mais, pour arriver aux formules visées :

$$\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D & (a) \\ y_B - y_A = y_C - y_D & (b) \end{cases}$$

109. Notons quelques exceptions dont COJEREM 1995a (p. 78) qui précise qu'"quadrilatère est convexe si, lorsqu'on joint par un segment deux points quelconques M et N intérieurs au quadrilatère, ce segment ne sort jamais du quadrilatère". Mais les notions d'intérieur et d'extérieur sont précisées par un dessin et, juste après, les auteurs considèrent l'implicite habituel : "Dans l'ensemble de ce livre, nous ne considérerons que des quadrilatères convexes et nous omettrons même le qualificatif "convexe", par commodité".
Dans les manuels scolaires actuels, soit on définit le quadrilatère de façon descriptive, soit on ne le définit pas mais on n'a jamais parlé d'un quadrilatère croisé. Voici le détail :
Dans "Amplitude 1re secondaire" - Ed. Erasme 2017, un quadrilatère est un polygone a 4 côtés.
Dans ce même manuel, le polygone est défini comme une figure géométrique plane, formée d'une suite de segments, chacun d'entre eux partageant une extrémité avec le précédent et le suivant, délimitant ainsi un contour fermé.
La collection "Déclic 6e" - Hachette Education 2009 définit le quadrilatère de la même manière mais ne définit pas le polygone. Celui-ci est dessiné et on précise le vocabulaire. Il en est de même dans la collection Triangle - Ed. Hatier 2009.
Dans RandoMaths 1re - Ed. Erasme 2009, le quadrilatère n'est pas défini, on précise le vocabulaire (sommets et côtés) et on définit les côtés adjacents, côtés opposés, sommets consécutifs, ... Le polygone est ensuite défini comme une figure plane à plusieurs côtés.

il faut s'assurer que, pour des segments parallèles à un des axes, on peut définir une longueur par des différences de coordonnées de leurs extrémités dans un ordre précis, l'unité étant celle qui permet de graduer l'axe.

L'usage d'un cas d'isométrie de triangles peut étonner car il relève de la géométrie métrique subordonnée à la géométrie affine, ici en construction. Nous nous en expliquerons à la section 4.3.1.4.

Ce sont les relations (a) et (b) supra que l'on choisit de représenter par une relation unique :

$$B - A = C - D \qquad (1),$$

laquelle jouit des propriétés algébriques standard puisqu'elle modélise deux égalités portant sur les nombres que sont les coordonnées.

Pour autant, on s'assure ici du sens géométrique que pourraient avoir des transformations algébriques. En particulier, on explique que la relation (1) exclut le parallélogramme croisé alors que l'équivalence algébrique

$$B - A = C - D \Leftrightarrow \frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2}$$

ne peut s'interpréter dans l'univers des parallélogrammes définis par l'une ou l'autre de ces relations équivalentes que si l'on y intègre le parallélogramme aplati.

Ce travail trouve son aboutissement lorsqu'on s'appuie sur la relation (1) pour définir l'équipollence de couples de points ou bipoints et le concept de vecteur comme ensemble de couples équipollents, le mot "ensemble" suppléant l'absence des notions de relation d'équivalence et de classe d'équivalence dans les programmes. Cette approche amène d'office les composantes d'un vecteur, dans un repère, entre lesquelles on a les relations (a) et (b).

Mais le focus portera préalablement sur l'importance de l'ordre dans lequel on considère les points non seulement à propos du parallélogramme mais aussi par rapport à la configuration "Thalès" dans un faisceau de droites parallèles.

La configuration "Thalès"

La deuxième tâche dévolue aux élèves est la recherche d'un point P situé sur une droite AB et deux fois plus éloigné de A que de B. L'usage de l'article indéfini "UN" est délibéré : il existe en effet deux tels points et seule la considération de l'ordre des points sur une droite permet de le comprendre. La projection des points sur les axes et l'usage du théorème de Thalès, connu des élèves en géométrie synthétique, débouchent sur deux relations du type

$$\begin{cases} x_P - x_A = k(x_B - x_A) & (c) \\ y_P - y_A = k(y_B - y_A) & (d) \end{cases}$$

pour une même valeur de k, celle-ci variant lorsque P évolue sur la droite. La porte est alors ouverte sur la caractérisation d'une droite à partir de deux de ses points que résument les relations (c) et (d) ou leur version "compacte" de type bipoint :

$$P - A = k(B - A) \qquad (2)$$

pour un réel k correspondant à chaque point P.

On y traite en même temps de la notion de configurations équivalentes de trois points alignés. On s'appuie enfin sur (2) pour introduire la notion de vecteurs multiples à partir de leurs composantes.

4.2.1.2 Des tâches à caractère fondamental

Au terme de ce travail, les résultats justifiés sur base de la géométrie synthétique sont, en gros :

1) $ABCD$ est un parallélogramme non croisé (éventuellement aplati) si et seulement si $B - A = C - D$ (1).
2) P appartient à la droite AB si et seulement s'il existe un réel k tel que $P = A + k(B - A)$ (2).
3) De plus, sur la figure 4.7, les points A, B et P, d'une part, et C, D et Q, d'autre part, vérifient les relations respectives

$$P = A + k(B - A); \quad Q = C + k(D - C)$$

pour une même valeur de k.

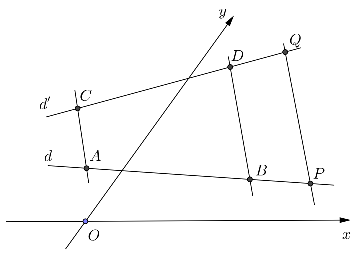


FIGURE *4.7*

Les relations (1) et (2) sont à mettre en lien avec les deux invariants majeurs de la géométrie affine répertoriés plus haut : d'une part, le parallélisme de droites et donc, en particulier, les configurations "parallélogramme" emblématiques de cette géométrie et, d'autre part, ce qu'on appelle le rapport de section r d'un point P par rapport aux points A et B avec lesquels il est aligné : on peut le définir comme une fonction du paramètre k de la relation (2), soit $r(k) = k/(1-k)$. Ce qui revient à définir $r = \frac{P-A}{B-P}$ avec $B \neq P$.

La valeur de k dans l'égalité $P = A + k(B - A)$ nous renseigne sur la position de P par rapport aux points A et B. Ainsi $k = 0$ conduit à $P = A$ et $k = 1$ à $P = B$. En outre, $k > 1$ si P est “à droite" de B, $k < 0$ si P est “à gauche" de A et $0 < k < 1$ si P est entre A et B.

FIGURE *4.8*

En somme, cette relation définit une “métrique” sur une droite AB quelconque en lui étant intrinsèque : cette droite est en effet ainsi graduée avec A comme origine et B comme point d'abscisse unitaire.

Par conséquent, notre analyse explique le caractère fondamental des deux tâches proposées aux élèves, dans le contexte de la géométrie affine. Le qualificatif “fondamental” est celui que Brousseau (1998) utilise pour désigner des questions, problèmes ou tâches qui impliquent le savoir visé comme réponse ou résolution optimale si ce n'est exclusive. Le caractère fondamental ne suffit pas pour permettre la dévolution de ces questions, problèmes ou tâches aux élèves. L'existence d'un milieu et d'un contrat lié est tout aussi indispensable. Nous y reviendrons au chapitre 5. Contentons-nous de dire ici que tout contrat local s'inscrit dans le contrat global spécifié dès le début du parcours : remplacer les preuves de la géométrie synthétique par des preuves calculatoires. La propriété des diagonales d'un parallélogramme, qui ne requiert pas la mention initiale du caractère non croisé est ici prouvée de deux manières pour s'expliquer avec les élèves sur le contrat global. Elle peut à terme devenir la définition d'un parallélogramme $ABCD$ caractérisé alors par la relation bipoint

$$\frac{A + C}{2} = \frac{B + D}{2}.$$

moyennant tout ce qui est dit plus haut.

C'est un élément majeur d'une future construction déductive.

4.2.1.3 Les mêmes configurations en 3D, dans un autre ordre...

Pour ce qui est de la géométrie 3D, nous avons choisi de commencer par la configuration “Thalès”, nous appuyant sur le fait qu'on peut exploiter, dans un plan de l'espace usuel, tout théorème de géométrie plane. Ici il s'agit de la configuration du faisceau de droites parallèles coupées par deux sécantes que l'on utilise après s'être assuré qu'on est bien dans un plan.

La configuration “parallélogramme” se travaille ensuite à partir de la configuration "Thalès", le parallélogramme $ABCD$ (éventuellement aplati) étant défini à partir de la relation $\frac{A+B}{2} = \frac{C+D}{2}$. Cependant, la section 7.1.3 du projet développe une autre approche du parallélogramme indépendante ne s'appuyant pas sur la configuration "Thalès".

Dans tous les cas, on exploite des théorèmes supposés déjà démontrés en géométrie 3D, par la méthode synthétique, et on prouve ainsi les caractérisations bipoint "Thalès" et "parallélogramme", comme conditions à la fois nécessaires et suffisantes.

Un élément important de ces preuves est la bijection, dans un repère donné, entre les points de l'espace usuel et les triplets de réels que sont leur coordonnées dans ce repère. Cette bijection fait également l'objet d'une preuve au départ de théorèmes supposés validés par la méthode synthétique.

En gros, comme pour le formalisme bipoint 2D, le mode de validation repose ici sur la géométrie euclidienne élémentaire, conformément à ce qui a été annoncé dans la construction de notre praxéologie "modélisation".

4.2.1.4 ...la coplanarité en plus

Évidemment, en géométrie 3D, il faut, de plus, caractériser la coplanarité. C'est ce qui est fait dans le projet à partir de la caractérisation d'une droite et de la configuration "parallélogramme". On justifie en effet, à la section 7.2 du projet, que, trois points A, B et C non alignés étant donnés, on peut leur "raccorder" tout point P de l'espace au moyen d'un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont sur les droites AB et AC. On utilise ensuite l'expression de l'alignement pour caractériser tout point P du plan ABC par l'écriture

$$P = A + k(B - A) + k'(C - A),$$

k et k' étant des réels associés à P, qui s'exprime ensuite de manière vectorielle par

$$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC},$$

la combinaison linéaire de deux vecteurs étant définie par les trois relations entre leurs composantes :

$$\begin{cases} x_P = x_A + k(x_B - x_A) + k'(x_C - x_A) & (1) \\ y_P = x_A + k(y_B - y_A) + k'(y_C - y_A) & (2) \\ z_P = z_A + k(z_B - z_A) + k'(z_C - z_A) & (3). \end{cases}$$

Cette filiation de la coplanarité à la configuration "parallélogramme" correspond parfaitement à la perspective décrite par BKOUCHE 1982 : on commence par l'étude de figures planes et de solides, soit de la géométrie **dans** l'espace, pour construire progressivement la géométrie **de** l'espace ou l'étude "d'objets simples" que sont le point, la droite et le plan. Ici on va du parallélogramme au plan. On répond de la sorte au questionnement légitime de certains élèves qui demandent des comptes sur la relation entre coplanarité et combinaisons linéaires de vecteurs, comme nous l'avons expliqué à la section 3.7.

4.2.2 Valence instrumentale du formalisme bipoint en géométrie affine

La valence instrumentale ne peut être étudiée indépendamment de la valence sémiotique ainsi que nous l'illustrons en guise de mise en bouche à travers quatre démonstrations d'une propriété affine, situées dans divers cadres.

4.2.2.1 Un exemple de propriété affine dans quatre cadres distincts

A des fins d'analyse, nous reprenons ci-dessous l'énoncé d'une propriété affine et quatre preuves de cette propriété : respectivement selon la méthode vectorielle, la méthode "barycentrique", la méthode bipoint et la méthode synthétique. Pour faire schématique, nous ne reprenons que le seul calcul assorti de quelques précisions, pour les trois première méthodes du moins, que nous commenterons ensuite.

Énoncé. Étant donné un quadrilatère $ABCD$. Les points E, F sont les milieux respectifs de AB et CD et les points M, N, P, Q les milieux respectifs de AF, CE, BF, DE. Démontrer que $MNPQ$ est un parallélogramme.

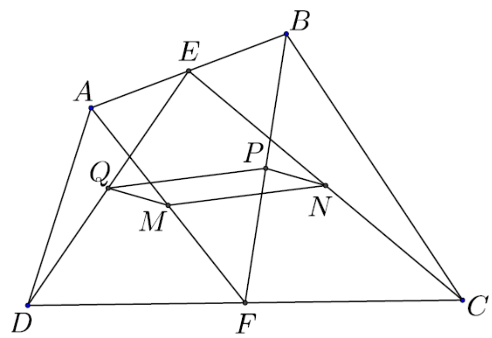


FIGURE *4.9*

Preuve 1. (En utilisant le calcul vectoriel)

Il faut prouver que $\overrightarrow{QP} - \overrightarrow{MN} = 0$

$$\begin{array}{rl} & \overrightarrow{QP} - \overrightarrow{MN} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}(\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QF}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MC}) = 0 \\ & \text{(car P est le milieu de BF et N est le milieu de EC)} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DF}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FE}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FC}) = 0 \\ \Leftrightarrow & 2\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CA} = 0 (\text{ puisque } \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EA} = 0 \text{ et } \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CF} = 0) \\ \Leftrightarrow & 2\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} = 0 \end{array}$$

Cette égalité ci-dessus est vraie parce que $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FE} = 0$, $\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EB} = 0$, $\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EA} = 0$.

Preuve 2. (En utilisant le calcul barycentrique)

Choisissons le système $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ et supposons que $D(x, y, 1-x-y)$. Nous allons prouver que $P - Q = N - M$.

Nous avons

$$E = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$
$$F = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}C = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2})$$
$$M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}F = (\frac{1}{2} + \frac{x}{4}, \frac{y}{4}, \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{y}{4})$$
$$P = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}F = (\frac{x}{4}, \frac{y}{4} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{y}{4})$$
$$N = \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}C = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$$
$$Q = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}E = (\frac{1}{4} + \frac{x}{2}, \frac{1}{4} + \frac{y}{2}, \frac{1}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y}{2})$$

On voit évidemment de la coordonnée des quatre points que $P - Q = N - M$.

Preuve 3. (En utilisant la notation bipoint)

Nous allons démontrer que

$$N - M = P - Q.$$

Nous avons

$$M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}F = \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D \text{ (car } F \text{ est milieu de } CD)$$

$$N = \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}C = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{2}C \text{ (car } E \text{ est milieu de } AB)$$

$$P = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}F = \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D \text{ (car } F \text{ est milieu de } CD)$$

$$Q = \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}D = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{2}D \text{ (car } E \text{ est milieu de } AB)$$

De ces égalités, on obtient

$$N - M = P - Q = B + \frac{1}{4}C - \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}D.$$

Preuve 4. (En utilisant la géométrie synthétique)

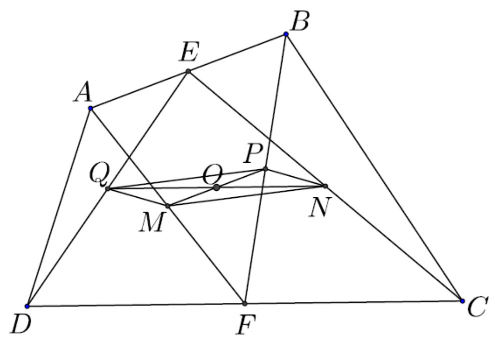


FIGURE *4.10*

Nous allons démontrer que les diagonales de $MNPQ$ (que sont NQ et MP) ont le même milieu.

Supposons que $MP \cap EF = O$. En utilisant le théorème de Thalès dans les triangles ABF, AEF et EBF, nous avons $MP||AB$ et $MP = \frac{1}{2}AB, MO||AE$ et $MO = \frac{1}{2}AE, OP||EB$ et $OP = \frac{1}{2}EB$.

Puisque E est le milieu de AB alors nous avons que O est le milieu de MP.

M est le milieu de AF et $MO||AE$ donc O est le milieu de EF. Par conséquent, O est le milieu commun de EF et MP.

Supposons que $NQ \cap EF = O'$, de la même façon, on peut conclure que O' est le milieu commun de EF et NQ. En conclusion, $O \equiv O'$ et NQ et MP ont le même milieu.

Ces quelques démonstrations illustrent la variété des stratégies de démonstration, en fonction du cadre retenu et des théorèmes qui lui sont inhérents. La valence instrumentale des ostensifs liés à un cadre donné est donc fortement liée à leur valence sémiotique. Par exemple, pour comprendre la preuve liée au calcul barycentrique, il faut saisir que, contrairement au calcul bipoint indépendant du repère, l'usage du barycentre est lié au choix préalable d'un repère "barycentrique", composé de trois points non alignés $A(1,0,0), B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$ dont aucun n'est privilégié comme origine comme ce serait le cas en géométrie analytique. Il faut aussi comprendre que les coordonnées barycentriques d'un point peuvent varier à un coefficient multiplicateur non nul près sauf à les "normaliser" en fixant leur somme à 1 : c'est le cas de A, B et C mais aussi d'un autre point comme D pour lequel la troisième coordonnée s'obtient, de ce fait, en retranchant de 1 la somme de deux autres.

On a donc affaire ici à plusieurs registres sémiotiques entres lesquels il n'existe pas de conversion congruente au sens de DUVAL 1993 et ce, déjà même au niveau des ostensifs dans des relations telles que $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MN}$ (1) et $P - Q = N - M$ (2). En effet, de part et d'autre du signe d'égalité, on retrouve de (1) à (2) : deux lettres P et Q accolées et surmontées d'une flèche ou les même lettres, mais dans l'ordre inverse, séparées d'un signe "-" qui rappelle la soustraction des composantes. Mais cette non-congruence est mineure en regard de ce que nous appellerions la non-congruence entre les "stratégies" de démonstration liées à des cadres différents : on trouve, dans un cadre, une "stratégie" absente d'un autre. Nous allons illustrer et expliquer cet aspect en nous cantonnant au formalisme bipoint et au formalisme vectoriel, étant donné l'objet de notre analyse et celui du projet d'enseignement qui lui est lié. C'est objet de la section suivante.

4.2.2.2 Des stratégies de démonstration propres au calcul vectoriel

Le calcul vectoriel devient un outil performant pour démontrer des propriétés de figures géométriques moyennant l'identification de propriétés stratégiques. COJEREM 1995a, en répertorie cinq reprises ci-dessous :

Propriétés stratégiques pour démontrer au moyen de vecteurs

P1. **La relation de Chasles**
Quels que soient les points A, B, C du plan,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

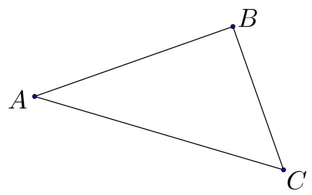


FIGURE 4.11

P2. **Le milieu d'un segment**
Le point M est le milieu du segment AB si et seulement si une des égalités suivantes est réalisée

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \text{ ou } \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} \text{ ou } \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 0.$$

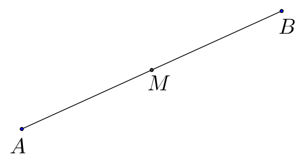


FIGURE 4.12

P3. **Définitions vectorielles du parallélogramme**
Le quadrilatère convexe $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si une des égalités suivantes est réalisée

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ ou } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \text{ ou } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}.$$

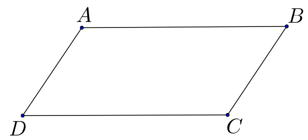


FIGURE *4.13*

P4. **Somme de vecteurs parallèles**
Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont parallèles au vecteurs $\overrightarrow{XY}$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ est parallèle au vecteur $\overrightarrow{XY}$.

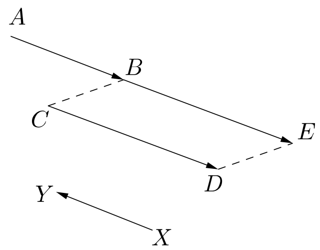


FIGURE *4.14*

P5. **Le vecteur nul est le seul vecteur simultanément parallèle à deux vecteurs non parallèles entre eux**
Si $\overrightarrow{XY}$ est parallèle aux vecteurs non parallèles $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, alors $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{0}$, ce qui signifie aussi que $X = Y$.

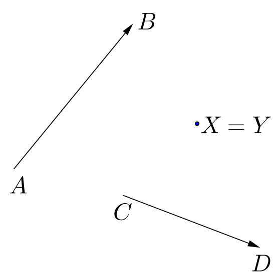


FIGURE *4.15*

Nous reprenons ci-après deux propriétés par lesquelles ces auteurs illustrent ces propriétés stratégiques du calcul vectoriel, afin de les confronter, à la section 4.2.2.3, aux usages à l'œuvre dans les preuves reposant sur le calcul bipoint.

Propriété 1. Dans tout trapèze, le segment qui joint les milieux des diagonales est parallèle aux bases et sa longueur vaut la demi-différence de celles-ci.

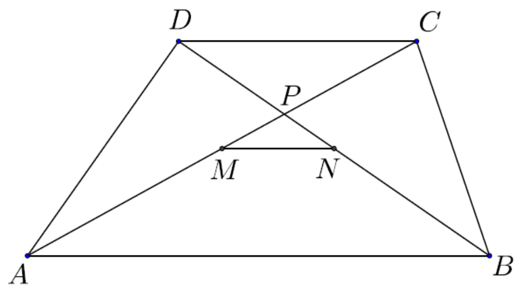


FIGURE *4.16*

Preuve. (En utilisant le calcul vectoriel)

Voici le trapèze $ABCD$ donc les côtés AB et CD sont parallèles (figure 4.16). Soit AB la grande base de ce trapèze et appelons M et N les milieux respectifs de AC et de BD.

Le segment MN doit vérifier deux conditions : être parallèle aux bases AB et DC et avoir une longueur égale à la demi-différence entre les longueurs de AB et de DC. Les notions de direction et de longueur suggèrent une écriture vectorielle de ces deux conditions, à savoir que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})$.

Du point de vue du sens, cette égalité est également plausible. En effet, vu que AB est la grande base du trapèze, M et N qui sont milieux des diagonales se situent entre, d'une part, le point d'intersection de ces dernières et, d'autre part, A et B. Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$, s'ils sont parallèles, ont donc même sens. De plus, vu que AB est plus long que DC, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$ a même sens que $\overrightarrow{AB}$.

La thèse peut encore s'écrire

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$$

ou encore

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

Pour démontrer cette égalité, nous allons utiliser la loi de Chasles (Propriété P_1) afin de décomposer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ en passant pas M et N (ce qui est normal puisque M et N figurent dans la thèse). On obtient

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}$$

et

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}.$$

En additionnant membre à membre

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM}) + 2\overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND}).$$

Mais, comme M est milieu de AC et N est milieu de CD, les sommes $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND}$ sont nulles (propriété P_2).

En conclusion,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{MN},$$

c'est-à-dire

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}).$$

Ceci montre bien que MN est parallèle aux bases et en vaut la demi-différence.

Propriété 2. Dans tout parallélogramme, une médiane et une diagonale ont toujours même milieu.

Soit le parallélogramme $ABCD$, M le milieu de AB et N le milieu de DC. Il faut montrer que O, point de rencontre de BD et de MN est milieu de ces segments.

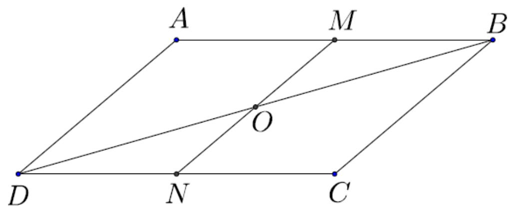


FIGURE *4.17*

Preuve. (En utilisant le vecteur nul)

Voyons la démonstration extraite du livre de Cojerem en utilisant le propriété P5 concernant le vecteur nul :

Une manière de montrer que O est le milieu de BD et de MN est de prouver que $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{0}$ et que $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{0}$ (propriété P_2). Tâchons d'abord de trouver une égalité vectorielle qui résume les données principales de l'hypothèse.

Le point M est milieu de AB, donc, par P_2, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

De même, $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{NC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. Or, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ car $ABCD$ est un parallélogramme (P_3). Dès lors, on peut résumer les données en écrivant

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DN} \quad (1)$$

Décomposons les deux membres de (1) par la propriété P_1, en passant par O :

$$\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{ON}$$

ou
$$\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{BO}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{NO}$ et $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{DO}$ sont égaux. Or, par le principe P_4, le premier est parallèle à $\overrightarrow{MN}$, le second à $\overrightarrow{BD}$, mais $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas parallèles. Par le principe P_5, il nous faut donc admettre que $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{0}$ et que $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{0}$. Le point O est bien le milieu de la médiane MN et de la diagonale BD.

Voici donc décrites et illustrées cinq propriétés stratégiques liées aux preuves géométriques, selon la méthode vectorielle.

Regardons à présent si ces stratégies demeurent dans les preuves liées au formalisme bipoint et, si non, ce qui les remplace ou qui fait qu'on n'en a pas besoin. Ou, si oui, la manière dont elles se formulent dans ce nouveau formalisme.

4.2.2.3 Les stratégies de démonstration liées au formalisme bipoint

Nous repartirons ici des cinq stratégies identifiées à la section précédente telles qu'illustrées à propos de deux propriétés et poursuivrons l'analyse au-delà de ces seules propriétés.

La relation de Chasles

La traduction de la relation de Chasles dans le formalisme bipoint a un caractère d'évidence :
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
s'y écrit en effet
$$B - A + C - B = C - A,$$
cette dernière égalité étant liée à une simplification algébrique élémentaire. N'oublions pas que les propriétés algébriques standard s'appliquent aux égalités "bipoint" puisque celles-ci résument deux (ou trois) égalités homologues respectivement entre les abscisses, ordonnées (et cotes) des points concernés.

Par exemple, en géométrie 2D, la simplification bipoint faite plus haut revient à en faire deux dans les égalités suivantes :

$$x_B - x_A + x_C - x_B = x_C - x_A$$

$$y_B - y_A + y_C - y_B = y_C - y_A.$$

Somme toute, que ce soit dans le formalisme vectoriel ou le formalisme bipoint, la relation de Chasles exprime une configuration géométrique restant invariante par transformation affine ou lors d'un changement de repère affin : c'est le triangle, "moitié" d'un parallélogramme comme illustré à la figure 4.18, en supposant bien sûr que la configuration "triangle" intègre le triangle aplati, tout comme la configuration parallélogramme.

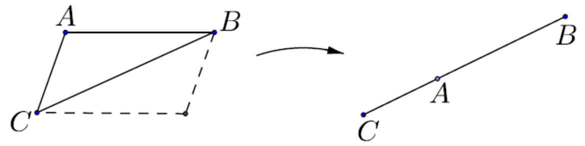


FIGURE 4.18

En fait, la relation de Chasles ne fait qu'exprimer des relations pérennes, dans une base ou un repère quelconque, entre composantes de vecteurs ou entre différences de coordonnées de points. Cependant, l'usage de cette relation ne se décline de la même manière d'un formalisme à l'autre.

Dans le formalisme vectoriel, on utilise la relation de Chasles dans la réécriture d'une somme de vecteurs ou dans la "décomposition" d'un vecteur en somme de deux autres de manière à faire intervenir un point stratégique dans les hypothèses ou la thèse. Dans la propriété 1 démontrée vectoriellement à la section 4.2.2.2, on veut démontrer que $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ dans la figure 4.16 mais il faut pour cela "décomposer" $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ de telle sorte que M et N entrent dans le jeu. Dans la propriété 2, on veut faire intervenir O dans la traduction $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DN}$ des hypothèses.

Dans le formalisme bipoint, les choses se mettent en place toutes seules sans que l'on ait à prendre délibérément la décision d'une quelconque décomposition de vecteurs. En ce qui concerne la propriété 1, pour démontrer le parallélisme de MN avec DC (ou AB), il suffit d'exprimer les hypothèses dans l'écriture bipoint

$$\begin{cases} A - B = k(D - C) \\ M = \frac{A+C}{2} \\ N = \frac{B+D}{2} \end{cases}$$

et de calculer

$$\begin{aligned} M - N &= \frac{A + C - B - D}{2} = \frac{A - B + C - D}{2} \\ &= \frac{k(D - C) + (C - D)}{2} = \frac{k - 1}{2}(D - C). \end{aligned}$$

Bien sûr, il faut organiser le calcul judicieusement pour pouvoir exprimer toutes les hypothèses mais, malgré tout, le déroulement demeure plus simple. Nous reviendrons plus loin sur la deuxième partie de la thèse. Pour ce qui est de la propriété 2, il suffit d'écrire les hypothèses sous la forme $B - A = C - D$ ou $\frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2}$, $M = \frac{A+B}{2}$ et $N = \frac{D+C}{2}$ et d'écrire O sous la forme

$$\begin{aligned} O &= \frac{M+N}{2} = \frac{A+B+D+C}{4} \\ &= \frac{B+D+A+C}{4} = \frac{A+C+A+C}{4} \\ &= \frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2}. \end{aligned}$$

Là aussi, il faut savoir piloter le calcul en fonction du but à atteindre de manière à faire jouer toutes les hypothèses. Mais il faut reconnaitre que le déroulement de la démonstration dans sa version “bipoint” est plus naturel que l'usage du vecteur nul utilisé dans la démonstration vectorielle et sur lequel nous reviendrons.

Les raisons de cet avantage du formalisme bipoint sont à examiner de près et nous le ferons en abordant la deuxième propriété stratégique qui est celle du milieu d'un segment.

Le milieu d'un segment

Il existe plusieurs façons d'exprimer en termes de vecteurs que le point M est milieu d'un segment AB : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}$ ou toute transformation d'une de ces relations mais encore la relation

$$\overrightarrow{PM} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2}$$

à partir d'un point P quelconque.

Cette dernière relation n'a pas été utilisée ici mais nous verrons plus loin la nécessité ou l'intérêt d'y recourir dans la méthode vectorielle.

Dans la méthode bipoint, une seule relation suffit :

$$M = \frac{A+B}{2}$$

laquelle est équivalente, de manière triviale, aux traductions des précédentes : $M - A = B - M$, $M - A = \frac{B-A}{2}$, $M - A + M - B = O$, $M - P = \frac{A-P+B-P}{2}$.

La plupart du temps, en géométrie “bipoint”, cette seule relation suffit pour exprimer qu'un point est le milieu d'un segment. Cela peut s'expliquer, nous semble-t-il, par le parallèle que l'on peut faire entre l'approche étudiée ici, soit la recherche d'une expression algébrique invariante par changement de repère de configurations géométriques de base, et la construction d'une géométrie de position ainsi que voulue par Pedoe. Ainsi qu'expliqué à la section 3.6.3, dans l'entreprise de celui-ci, la théorie repose sur les vecteurs liés à une origine, soit les vecteurs-position $\overrightarrow{OP}$. De ce fait, une fois le plan (ou l'espace) pointé par le choix d'un point O et d'une base

$\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$, tous les autres points sont sur pied d'égalité car tous extrémités d'un vecteur-position. Et donc tous exprimés par leurs composantes dans cette base. Et ce sont les relations entre leurs composantes qui vont permettre d'écrire $\overrightarrow{m}$ directement en fonction de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, sous la forme $\overrightarrow{m} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$ pour exprimer que le point M est milieu du segment AB dans les notations de la figure 4.19.

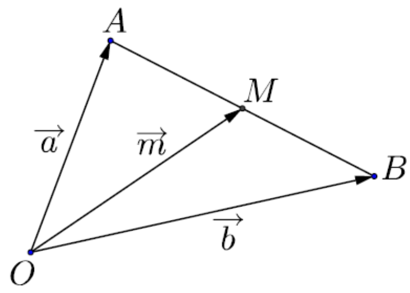


FIGURE *4.19*

Cela revient évidemment à la relation bipoint $M = \frac{A+B}{2}$ qui résume deux relations homologues entre les coordonnées des points concernés et qui exprime M directement par rapport à A et B.

Mais, pour les raisons expliquées à la section 3.6.3, nous avons préféré "l'évitement du plan pointé" en payant le prix d'un discours technologique basé sur la géométrie élémentaire : on prouve, par la méthode synthétique, que les expressions algébriques modélisant les configurations géométriques de base sont valides dans un repère quelconque. A défaut de pouvoir gérer des changements de repère avec les élèves concernés, on a considéré des coordonnées génériques ce qui, in fine, revient au même.

Au-delà de cette différence de justifications, les preuves exprimées dans le formalisme bipoint simplifient la vie tant en ce qui concerne la relation de Chasles qu'en ce qui touche au milieu d'un segment.

Car, en définitive, des relations vectorielles telles que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{PM} = \frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}$, une fois exprimées en termes de bipoints ou de vecteurs positions, tous référés de la même manière, se simplifient automatiquement pour ne laisser que ce qui est vraiment utile à l'étude d'une configuration particulière, par exemple

$$M = \frac{A+B}{2} \text{ ou } \overrightarrow{m} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2}$$

dans le cas du milieu.

La relation de Chasles, quant à elle, passe à l'arrière-plan, étant implicite seulement car muette dans les expressions algébriques standard.

Du milieu d'un segment, on passe au centre de gravité G d'un triangle ABC pour lequel on peut tenir le même discours.

Il en existe (au moins) deux expressions vectorielles : d'une part, la relation

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

et, d'autre part, la relation

$$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$$

pour un point P quelconque. Dans la première, G intervient comme origine de trois vecteurs distincts et, dans la deuxième, G est extrémité d'un vecteur dont l'origine est un point P quelconque qui n'a rien à voir avec la configuration de départ. Il est facile de montrer que toutes ces relations sont équivalentes à

$$G = \frac{A + B + C}{3}$$

dans le formalisme bipoint ou

$$\overrightarrow{g} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3}$$

dans la géométrie de position, ces deux dernières relations permettant d'éviter la relation de Chasles à l'œuvre de manière implicite dans les simplification algébriques. Ici aussi, G (ou $\overrightarrow{g}$) est directement précisé par ses coordonnées en fonction de celles des points A, B et C au lieu d'être mobilisé comme origine ou extrémité d'un vecteur.

Nous voyons là un avantage du calcul bipoint. Bien que, comme nous le verrons dans certaines applications en géométrie métrique, les autres caractérisations du milieu et du centre de gravité peuvent s'avérer utiles.

Le parallélogramme

Pour exprimer qu'un quadrilatère convexe $ABCD$ est un parallélogramme en termes de vecteurs, on peut utiliser une des relations suivantes :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ ou } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \text{ ou } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}.$$

C'est ce que précisent les auteurs du Cojerem dans leur “définition vectorielle” du parallélogramme. Le qualificatif “convexe” y est en fait superflu si l'on considère l'ordre d'énonciation des sommets d'un quadrilatère soit A, B, C et D car, comme analyse à la section 4.2.1.1, le fait que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même sens suffit à exclure un quadrilatère croisé. Il faut savoir ici que, dans COJEREM 1995a, l'égalité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ signifie que

1. les segments AB et DC ont même longueur ;

2. les segments AB et DC sont parallèles ;
3. pour aller de A vers B, on se dirige dans le même sens que pour aller de D vers C.

Nous y reviendrons.

Bien sûr que ces quatre relations reprises supra sont équivalentes mais pour passer de l'une à l'autre, il faut utiliser les autres propriétés vectorielles comme, par exemple, la relation de Chasles, pour prouver que la relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ est équivalente à la relation $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Voici le détail :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

Toutes les relations précédentes peut être remplacées par une relation bipoint :

$$A - B = D - C$$

qui est équivalente avec $A - D = B - C$, $B - A + D - C = 0$ ou encore $D - A + B - C = 0$.

Tout à fait comme dans le cas du milieu d'un segment, une seule relation "bipoint" suffit pour exprimer plusieurs caractérisations vectorielles du parallélogramme.

De plus, pour prouver qu'un quadrilatère (convexe) est un parallélogramme, il arrive que l'on doive exploiter non pas une des caractérisations traduites par les écritures vectorielles reprises plus haut mais la propriété d'un parallélogramme d'avoir des diagonales qui se coupent en leur milieu commun :

Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si ses deux diagonales se coupent en leur milieu

Cette propriété est facilement traduite, en termes de bipoint, par la relation :

$$\frac{A + C}{2} = \frac{B + D}{2}$$

qui est obtenue par un calcul algébrique simple à partir de la relation $A - B = D - C$.

Cependant, c'est moins évident de déduire une expression vectorielle de cette propriété à partir d'une des quatre relations :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ ou } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \text{ ou } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}.$$

En effet, pour exprimer que O est milieu du segment AC en termes de vecteurs, on peut utiliser soit $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, soit $\overrightarrow{AO} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$, soit $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{0}$. De plus, pour exprimer que O' est milieu du segment BD en termes de vecteurs, on peut utiliser soit $\overrightarrow{BO'} = \overrightarrow{O'D}$, soit $\overrightarrow{BO'} = \frac{\overrightarrow{BD}}{2}$, soit $\overrightarrow{BO'} + \overrightarrow{DO'} = \overrightarrow{0}$. Par conséquent, quelle relation pourrait exprimer le fait que O et O' sont le même point, c'est-à-dire que AC et BD se coupent en leur milieu ? La preuve la plus logique, nous semble-t-il, devrait aboutir à

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{0}$$

car cela prouverait que le milieu O de AC appartient à la droite BD et est situé au milieu du segment BD.

Autrement dit, si l'on a un quadrilatère $ABCD$, il y a deux possibilités de prouver qu'il est un parallélogramme :

- Soit on prend O comme milieu de AC et on prouve que O est aussi milieu de BD en montrant que $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$.

- Soit on prend O comme l'intersection de AC et BD et puis on montre que $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{0}$.

Il nous semble que la première possibilité est plus facile. Voici le détail :

Soit O le milieu de AC. On a donc $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$. De plus, puisque $ABCD$ est un parallélogramme, on a l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. En utilisant la relation de Chasles de sorte que le point O intervienne, on a :

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}.$$

En utilisant $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, on en déduit que $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$, ce qui signifie que O est aussi milieu de BD.

Il est clair que cette relation n'est pas aussi facile à obtenir que la relation bipoint correspondante.

Concernant la réciproque, quand on a un quadrilatère $ABCD$ dont les deux diagonales se coupent en leur milieu O, pour prouver que $ABCD$ est un parallélogramme en terme de vecteurs, il faut prouver que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$. Il nous semble que, la façon la plus simple ici est de passer par la relation de Chasles comme suit :

Les diagonales AC et BD se coupent en leur milieu O donc $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$. Alors

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC},$$

ce qui montre que $ABCD$ est un parallélogramme.

Cette démonstration n'est pas difficile mais on doit utiliser une autre propriété, soit la relation de Chasles et, de plus, le fait qu'on doive choisir entre certaines égalités données comme l'égalité prouvée peut jeter la confusion dans le choix des élèves.

Par conséquent, le fait que, dans plusieurs problèmes concernant un parallélogramme il faut utiliser la propriété que les deux diagonales se coupent en leur milieu montre l'avantage du formalisme bipoint pour caractériser le parallélogramme.

Vecteurs parallèles, somme et rapport de longueurs

Dans le livre de Cojerem, le concept de vecteurs parallèles est défini comme suit :

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont parallèles si et seulement si l'un d'eux est multiple de l'autre. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc parallèles s'il existe un réel r tel que $\overrightarrow{AB} = r\overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{CD} = r\overrightarrow{AB}$.

Puis les auteurs montrent toutes les situations de vecteurs parallèles dans la figure suivante :

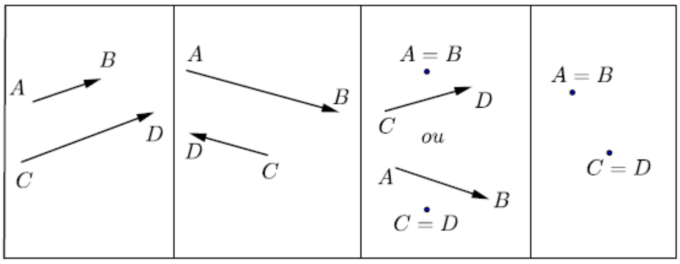


FIGURE *4.20*

En fait, si l'on ne veut pas expliquer en détail tous les cas particuliers, on peut définir les vecteurs parallèles simplement par la relation $\overrightarrow{CD} = r\overrightarrow{AB}$, en proposant que les deux vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas nuls (car on a déjà une autre propriété vectorielle qui énonce que le vecteur nul est parallèle à tous les autres).

Ensuite, on va utiliser cette égalité pour prouver que si deux vecteurs sont parallèles à un même troisième, leur somme est également parallèle à ce troisième vecteur, soit la propriété 4 dans les cinq propriétés stratégiques répertoriées à la section 4.2.2.2.

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ parallèles au vecteur $\overrightarrow{XY}$. Envisageons le cas où $\overrightarrow{XY}$ est non nul. Étant donné la définition d'un vecteur parallèle à un autre, il existe des nombres r et s tels que

$$\overrightarrow{AB} = r\overrightarrow{XY} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} = s\overrightarrow{XY}$$

En additionnant,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = r\overrightarrow{XY} + s\overrightarrow{XY} = (r+s)\overrightarrow{XY}.$$

Cette dernière égalité indique bien que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est un vecteur parallèle à $\overrightarrow{XY}$.

Comme illustré plus haut à propos de la preuve de la propriété 1, il revient à peu près au même de prouver le parallélisme de segments par la méthode vectorielle ou par la méthode bipoint. En effet, si l'on a un segment XY ($X \neq Y$) qui est parallèle à AB et CD, on a

$$B - A = r(Y - X)$$
$$D - C = s(Y - X)$$

donc

$$B - A + D - C = (r + s)(Y - X).$$

En résumé, on trouve ici une certaine congruence des représentations au sens de Duval (1993) entre la représentation vectorielle et celle de bipoint. Autrement dit, pour ce problème, il nous semble que les deux formalismes ont des instrumentalités équivalentes et qu'on peut passer facilement de l'un à l'autre.

Venons-en au rapport de longueurs de segments parallèles, qui est l'objet de la propriété 1. Celle-ci énonce que le segment joignant les milieux des diagonales d'un trapèze vaut la demi-différence des bases.

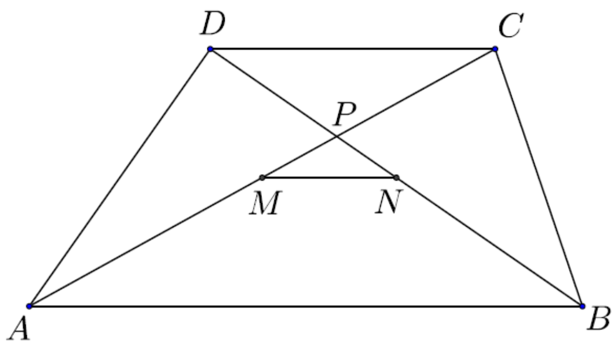


FIGURE 4.21

Dans le Cojerem, cette partie de l'énoncé est traitée de manière vectorielle. On peut aussi le prouver par le formalisme bipoint et ce, même en l'absence d'une métrique définie dans le plan. Nous avons en effet travaillé dans ce cadre, les configurations équivalentes de points alignés à la section 4.2.1.2 après avoir expliqué, à la section 1.1.4.3, que les faisceaux de parallèles permettaient de déterminer sur deux sécantes des segments aux longueurs proportionnelles. C'est en effet là un des maillons centraux de la géométrie d'Euclide, à la base de cet invariant affin majeur qu'on appelle le rapport de section.

Or, plus haut, nous avons prouvé que le segment MN était parallèle aux bases du trapèze en établissant que, pour un réel k donné,

$$M - N = \frac{k-1}{2}(D - C),$$

k étant le rapport des bases : $A - B = k(D - C)$.

Mais la même relation prouve par la même occasion la partie de l'énoncé concernée ici. En effet, les relations bipoint résument des relations entre coordonnées des points impliqués dans un repère affin quelconque. On peut donc choisir celui-ci de telle sorte qu'un axe soit parallèle aux bases du trapèze auxquelles on peut donc attribuer une longueur définie par rapport à la graduation de l'axe. Ce n'est même pas nécessaire : il suffit de considérer, sur une droite d passant par O, des points O, E, F et G obtenus en traçant des parallèles à partir des points de l'axe d'abscisses $0, 1, k$ et $\frac{k-1}{2}$ (figure 4.22).

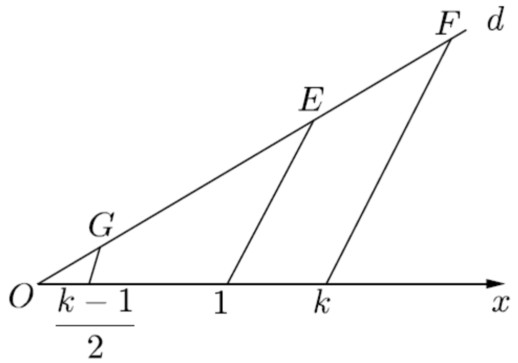


FIGURE *4.22*

Dans cette construction, à la Thalès, les parallèles transportent les rapports de longueurs. Donc OE figure la base DC, OF la base AB, EF la différence des bases et OG représente MN. La relation supra prouve donc bien la thèse. Cela revient évidemment au même de reporter sur une droite quelconque prolongeant DC des segments ad hoc pour représenter l'autre base, leur différence...

Évidemment, on transporte ici une construction, possible à la règle et au compas, quelque peu anachronique par rapport à la construction du formalisme bipoint. En outre, il existe un réel danger à ce que les élèves interprètent des écritures $M - N$, $D - C$,... comme des longueurs sans avoir perçu qu'il serait alors en jeu ici une métrique intrinsèque où l'on prendrait la base DC comme segment unitaire. Nous avons donc évité ce genre de propriétés dans notre projet pour les étudier dans le cadre d'une géométrie métrique où l'on définira un produit scalaire.

Dans la situation présente, le formalisme vectoriel et le formalisme bipoint sont sur pied d'égalité, à savoir performances équivalentes et même souci quant à l'absence d'un produit scalaire et donc d'une métrique : dans leur démonstration, les auteurs assortissent d'ailleurs leurs preuves d'arguments de plausibilité sur le sens des vecteurs, avec référence forte à la position des points telle que visualisée sur le dessin.

La stratégie du vecteur nul

Dans les démonstrations vectorielles, le vecteur nul est un outil important pour plusieurs problèmes. D'abord, comme le montre Cojerem, à partir du concept de vecteurs parallèles, le vecteur nul est le seul vecteur simultanément parallèle à deux vecteurs non parallèles entre eux. Les auteurs expliquent ensuite que :

> *La propriété que nous venons de démontrer, à savoir que $\overrightarrow{0}$ est le seul vecteur parallèle en même temps à deux vecteurs non parallèles entre eux, peut sembler étrange, au même titre que le fait d'avoir accepté que $\overrightarrow{0}$ est parallèle à n'importe quel vecteur. Ces deux faits ont cependant un grand intérêt et fournissent une stratégie pour démontrer, entre autres, que deux vecteurs sont multiples, que trois points sont alignés, ou encore, que deux points sont confondus. En voici deux exemples :*
>
> 1. *Supposons que $\overrightarrow{AM} + r\overrightarrow{CM}$ soit simultanément parallèle aux vecteurs non parallèles $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Par la propriété précédente, on en déduit que $\overrightarrow{AM} + r\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$, ce qui signifie que $\overrightarrow{AM} = r\overrightarrow{MC}$. Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont multiples et les points A, M et C sont alignés.*
> 2. *Lorsque l'on veut montrer que deux points sont confondus, on établit que le vecteur que ces points déterminent est parallèle à deux vecteurs qui ne le sont pas, et que donc il et nul.*

Cependant, il nous semble que les démonstrations exploitant le vecteur nul ne sont pas naturelles comme celle de la propriété 2 reprise plus haut. De plus, comme nous l'avons expliqué dans la section 2.2.4.2, selon Le Thi Hoai Chau, les élèves n'acceptent pas le vecteur nul à cause de deux raisons :

- Le vecteur nul joue le rôle d'élément neutre du groupe additif de l'espace vectoriel, qui est une structure algébrique, pas géométrique.
- Le segment nul et la translation identique n'ont pas de sens pour les élèves lorsqu'ils restent dans le cadre de la géométrie métrique.

De plus, comme l'explique Cissé Ba [110], les vecteurs géométriques, en particulier le vecteur nul, sont une sorte de création didactique qui a permis à un moment donné de résoudre un problème idéologique et pratique dans l'organisation du savoir enseigné.

Le formalisme bipoint permet d'éviter ce recours artificiel au vecteur nul. Comme on l'a vu en effet, les points y sont gérés directement par leurs coordonnées génériques dans un repère quelconque (ou composantes des vecteurs-position associés dans une base choisie), au sein de relations impliquant les points-clés d'une configuration géométrique, au lieu d'être impliqués comme une des extrémités d'un vecteur

110. BA 2007, p. 64.

ainsi que c'est le cas dans le formalisme vectoriel. De ce fait, c'est l'identité de leurs expressions bipoint qui atteste de l'égalité de points. Évidemment, cela est lié à la bijection entre l'ensemble des points de l'espace usuel et l'ensemble $\mathbb{R}^3$.

Quant au bipoint qui serait l'équivalent du vecteur nul : $A - A, B - B$, il renvoie au point O qui n'a a priori aucune raison d'être un point-clé d'une quelconque configuration géométrique. De même l'alignement de points s'exprime-t-il directement à partir de leurs écritures bipoint.

Nous pouvons conclure cette section 4.2.2.3 en soulignant la forte instrumentalité du formalisme bipoint en géométrie qui en fait un outil très efficace pour démontrer des propriétés relevant de cette géométrie. Cette instrumentalité vient de l'expression directe des relations entre points clés d'une configuration géométrique et du fait que ces relations bénéficient des propriétés algébriques standard. On évite ainsi, en particulier, la relation de Chasles et l'utilisation du vecteur nul qui font intervenir d'autres points dont l'intervention est provisoire.

Terminons, dans la section 4.2.3, par quelques exemples en géométrie affine 3D pour illustrer la fécondité du formalisme bipoint dans les preuves géométriques.

4.2.3 Exemples d'application du formalisme bipoint en géométrie affine

Comme le calcul vectoriel, le calcul bipoint s'exporte de la géométrie 2D à la géométrie 3D. Nous avons montré comment gérer ce passage au niveau de la sémioticité en considérant la géométrie euclidienne comme soubassement de notre construction heuristique. Dans cette section, nous reprenons un ensemble de propriétés de solides et leurs preuves dans le formalisme bipoint afin d'illustrer la grande instrumentalité de ce dernier y compris en 3D.

4.2.3.1 Le théorème de Varignon dans le plan

Si $ABCD$ est un quadrilatère quelconque et M, N, P et Q les milieux respectifs de ses côtés, alors $MNPQ$ est un parallélogramme.

Si ce théorème peut étonner, c'est parce que, d'une figure assez "irrégulière", soit un quadrilatère quelconque, on conclut à une forme de régularité, le parallélogramme jouissant d'une propriété de symétrie car ses diagonales MP et NQ qui sont les médianes du quadrilatère initial se coupent en leurs milieux : c'est ce qui est illustré à la figure 4.23.

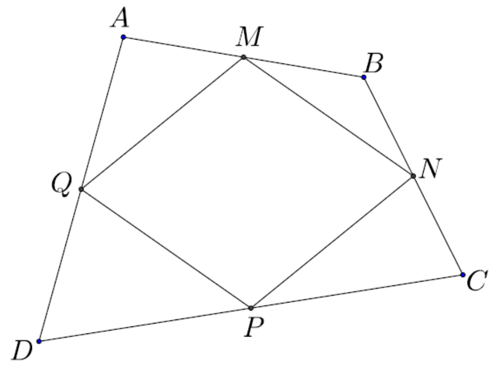


FIGURE *4.23*

On peut facilement démontrer ce théorème par la méthode synthétique si l'on pense à tracer un segment supplémentaire : soit la diagonale DB du quadrilatère, soit sa diagonale AC. Il suffit alors d'exploiter le théorème de Thalès dans les triangles DAB et DBC ou dans les triangles CDA et ABC. Sa preuve "bipoint" est en tout point comparable à celle faite, à l'exemple suivant, d'une première généralisation à l'espace du théorème de Varignon.

Ce théorème reste vrai que le quadrilatère soit croisé ou non, le parallélogramme pouvant devenir aplati. Dans le cas où il est non croisé, il découle de ce résultat que l'aire du quadrilatère est le double de celle du parallélogramme.

4.2.3.2 Première généralisation du théorème de Varignon (4 points non coplanaires)

Passons à l'espace où quatre points A, B, C et D peuvent ne pas être coplanaires ce qui se traduirait par le fait que le quadrilatère $ABCD$ est gauche. Qu'à cela ne tienne : le théorème de Varignon reste valide et sa démonstration, en termes de bipoints, y est la même que dans le plan. Dans ce cas, A, B, C et D sont les sommets d'un tétraèdre et l'étonnement n'en est que plus grand puisque l'on construit une figure plane, un parallélogramme, en partant de points non coplanaires, sommets d'un solide. En voici l'énoncé et la preuve.

Soit $ABCD$ un tétraèdre et M, N, P, Q les milieux respectifs des quatre arêtes AB, BC, CD et DA. Le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.

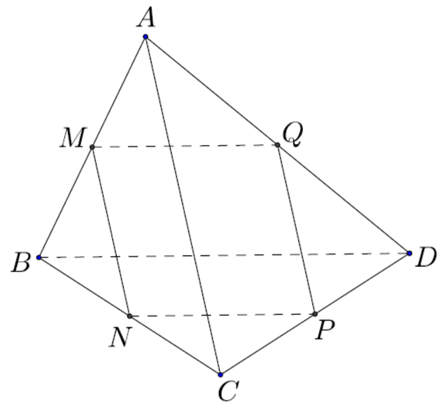


FIGURE *4.24*

La preuve, dans le formalisme bipoint, est exactement pareille que pour la "version-plan" de ce théorème.

Il s'agit en effet de prouver que $N - M = P - Q$.

Puisque M, N, P, Q sont les milieux des arêtes du tétraèdre $ABCD$, on a :

$$M = \frac{A+B}{2}, \quad N = \frac{B+C}{2}, \quad P = \frac{C+D}{2}, \quad Q = \frac{A+D}{2}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} N - M &= \frac{B+C}{2} - \frac{A+B}{2} = \frac{C-A}{2}, \\ P - Q &= \frac{C+D}{2} - \frac{A+D}{2} = \frac{C-A}{2}. \end{aligned}$$

On en conclut que $N - M = P - Q$ et donc que $MNPQ$ est un parallélogramme.

Cette première généralisation du théorème de Varignon en appelle une deuxième lorsque l'on envisage aussi les milieux R et S des arêtes AC et BD (figure 4.25). On fait alors intervenir toutes les arêtes du tétraèdre, par couples d'arêtes opposées soit d'arêtes n'ayant pas de sommet commun.

4.2.3.3 Deuxième généralisation du théorème de Varignon

Les trois segments joignant les milieux d'arêtes opposées d'un tétraèdre ont même milieu.

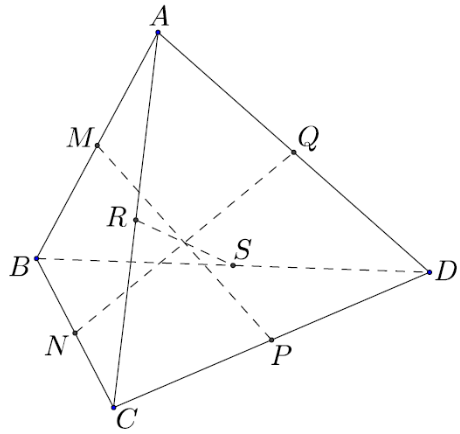


FIGURE *4.25*

Soit un tétraèdre $ABCD$ et les milieux de ses arêtes M, N, P, Q, R, S tels que représentés dans la figure 4.25.

On doit prouver que :

$$\frac{M+P}{2} = \frac{N+Q}{2} = \frac{R+S}{2} \cdot$$

En utilisant la formule du milieu, on a :

$$\begin{aligned} M &= \frac{A+B}{2}, & N &= \frac{B+C}{2}, & P &= \frac{C+D}{2}, \\ Q &= \frac{A+D}{2}, & R &= \frac{A+C}{2}, & S &= \frac{B+D}{2} \cdot \end{aligned}$$

Il en découle que

$$\begin{aligned} \frac{M+P}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{A+B}{2} = \frac{C+D}{2}\right) = \frac{1}{4}(A+B+C+D), \\ \frac{N+Q}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{B+C}{2} = \frac{A+D}{2}\right) = \frac{1}{4}(A+B+C+D), \\ \frac{R+S}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2}\right) = \frac{1}{4}(A+B+C+D) \cdot \end{aligned}$$

Par conséquent, les trois segments MP, NQ, RS ont le même milieu O qui s'écrit :

$$O = \frac{1}{4}(A+B+C+D) \cdot$$

Une sorte de troisième généralisation du théorème de Varignon tient à la considération du solide dual du tétraèdre. De quoi s'agit-il ? Nous ouvrons ici une parenthèse "culturelle" et, pour faire simple, ne considérerons qu'une seule manière de définir le polyèdre dual d'un polyèdre donné. On met en correspondance les centres de gravité des faces du dual avec les sommets du premier en respectant les propriétés d'adjacence : à deux faces de l'un ayant une arête commune, on associe deux sommets d'une même arête de l'autre. Ainsi, le dual d'un cube est un octaèdre régulier (figure 4.26). La dualité respecte une propriété de circularité intéressante : le dual d'un octaèdre régulier est... un cube (figure 4.27), ce qui fait qu'en prenant le dual du dual, on retrouve le polyèdre de départ à une similitude près. En ce qui concerne le tétraèdre, c'est encore plus particulier : ce solide est son propre dual (figure 4.28).

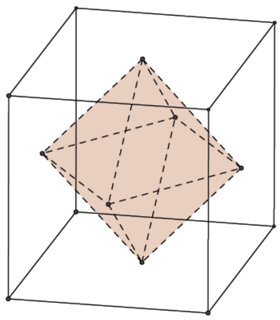


FIGURE *4.26*

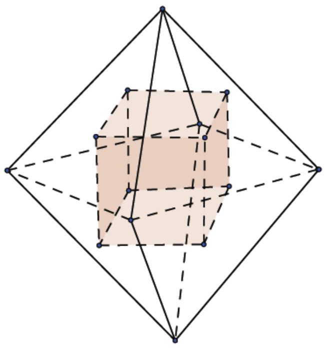


FIGURE *4.27*

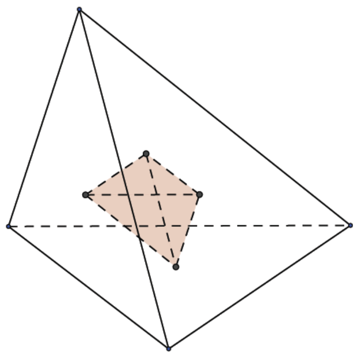


FIGURE *4.28*

Nous n'en dirons pas plus ici sur l'intérêt de la dualité, nous contentant de considérer, à l'instar de *http ://maths.ac-noumea.nc/polyhedr/tetra.htm*, une autre généralisation du théorème de Varignon où les côtés d'un quadrilatère sont remplacés par les faces d'un octaèdre, les milieux des côtés du premier devenant les centres de gravité des faces du second. Tout comme le quadrilatère, l'octaèdre peut être aussi irrégulier que l'on veut, son dual aura une certaine forme de régularité puisque ce sera un parallélépipède. Fort de ces informations, le lecteur peut donc comprendre en quoi la propriété étudiée à la section suivante constitue aussi une généralisation du théorème de Varignon.

4.2.3.4 Le dual d'un octaèdre

Les huit centres de gravité des faces d'un octaèdre sont les sommets d'un parallélépipède.

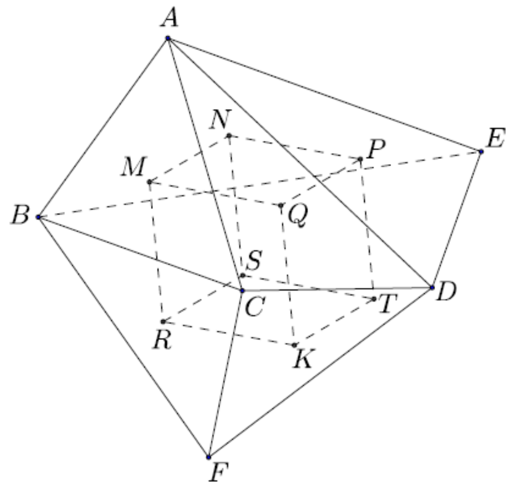


FIGURE *4.29*

Soit un octaèdre $ABCDEF$ et les huit centres de gravité de ses faces notés M, N, P, Q, R, S, T, K comme sur la figure 4.29.

Pour prouver que $MNPQRSTK$ est un parallélépipède, il faut prouver que ses six faces sont des parallélogrammes. Nous le ferons pour la face $MNPQ$, le travail étant pareil pour les autres.

En utilisant la formule du centre de gravité, on a :

$$M = \frac{A+B+C}{3}, \quad N = \frac{A+B+E}{3}, \quad P = \frac{A+E+D}{3}, \quad Q = \frac{A+C+D}{3}.$$

Il vient donc

$$M - N = Q - P = \frac{C-E}{3},$$

ce qui signifie que $MNPQ$ est un parallélogramme.

Cette propriété n'est pas sans lien avec le centre de gravité du tétraèdre lui-même auquel nous nous consacrons ci-dessous.

En effet, ce centre de gravité coïncide avec le point de rencontre des segments joignant les milieux des arêtes opposées. Et ces milieux déterminent un octaèdre, dual du parallélépipède dans lequel le tétraèdre est inscrit, comme illustré par les figures 4.30 et 4.31 et décrit dans *http ://maths.ac-noumea.nc/polyhedr/tetra.htm*.

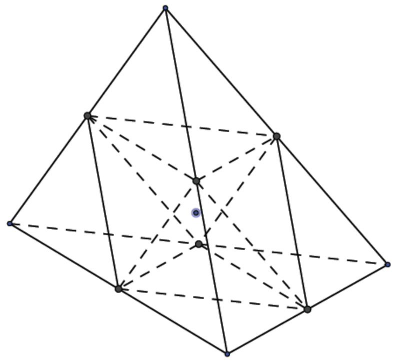


FIGURE 4.30

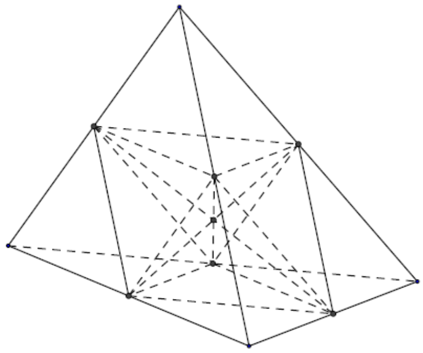


FIGURE 4.31

4.2.3.5 Centre de gravité d'un tétraèdre

La définition de ce centre de gravité repose sur la propriété suivante illustrée à la figure 4.32 :

Dans un tétraèdre, les quatre segments joignant chacun un sommet au centre de gravité de la face opposée sont concourants et le point de concours est situé au quart de chacun de ces segments, en partant de la face.

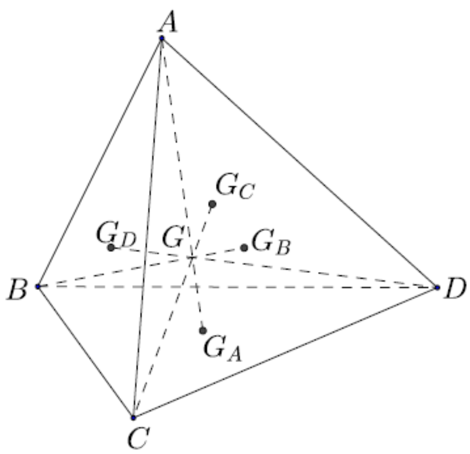


FIGURE 4.32

En utilisant le formule du centre de gravité d'un triangle, on a :

$$G_A = \frac{B+C+D}{3}, \qquad G_B = \frac{A+C+D}{3},$$

$$G_C = \frac{A+B+D}{3}, \qquad G_D = \frac{A+B+C}{3}.$$

Le point G_1 situé au quart du segment AG_A en partant de la face s'écrit :

$$G_1 = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}G_A = \frac{1}{4}(A + B + C + D).$$

De même, les points G_2, G_3, G_4 situés respectivement au quart des segments BG_B, CG_C, DG_D en partant de la face correspondante s'écrivent de la même manière. Par conséquent, les segments AG_A, BG_B, CG_C et DG_D sont concourants au point $G \equiv G_1 \equiv G_2 \equiv G_3 \equiv G_4 = \frac{1}{4}(A + B + C + D)$.

Vu son écriture, ce point G coïncide avec le point O de concours des segments qui joignent les milieux des arêtes opposées du tétraèdre (voir propriété étudiée en 4.2.3.3).

C'est le centre de gravité, au sens du physicien, d'un solide plein et de masse volumique homogène qui a la forme d'un tétraèdre. On peut en effet décomposer mentalement ce solide en une infinité de triangles parallèles à une de ses faces, par exemple la face ABC (figure 4.33).

Les centres de gravité de ces triangles sont alignés et forment le segment qui joint D au point D', centre de gravité du triangle ABC. C'est pareil pour les autres faces.

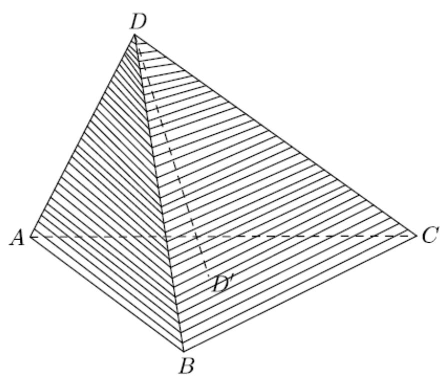


FIGURE 4.33

4.2.3.6 Quelques autres propriétés

Le sujet des tétraèdres est inépuisable et nous y reviendrons en géométrique métrique. Mais n'oublions pas qu'il s'agit surtout, dans cette situation, de nous faire la main en matière de preuves s'appuyant sur le formalisme "bipoint". Terminons donc, modestement, par l'énoncé et la démonstration de quelques propriétés disons... un peu moins spectaculaires.

1. Soit $ABCD$ un tétraèdre. I, J sont les centres de gravité respectifs des faces ACB et ACD. Prouver que IJ et BD sont parallèles (figure 4.34).

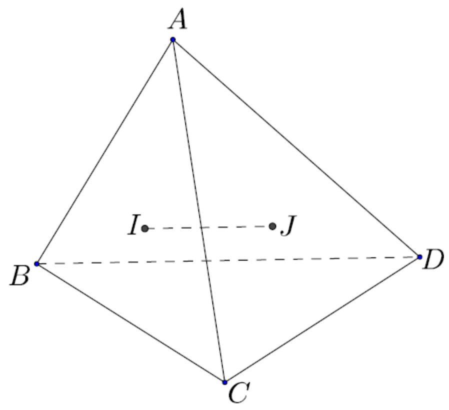


FIGURE 4.34

Puisque I, J sont les centres de gravité des faces ACB et ACD, on a

$$I = \frac{A+B+C}{3}, \quad J = \frac{A+C+D}{3}\cdot$$

Il est dès lors évident que

$$I - J = \frac{B-D}{3},$$

c'est-à-dire que IJ et BD sont parallèles.

2. Soit une pyramide $SABCD$ dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. Le point G est le centre de gravité de la face SAB et le point E situé sur le segment AD, au tiers à partir de A. Prouver que GE est parallèle au plan SCD (figure 4.35).

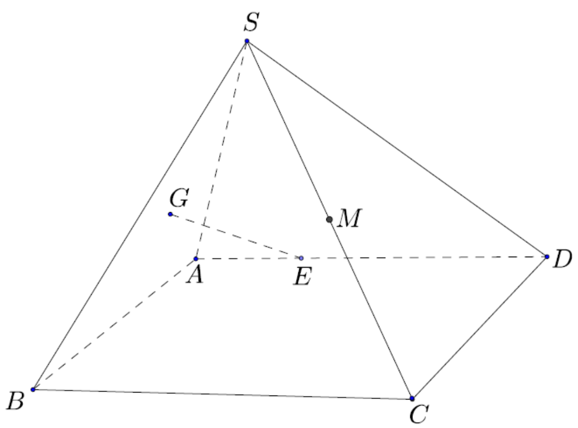


FIGURE 4.35

Voici la traduction de nos hypothèses :

$$A - B = D - C, \quad G = \frac{S + A + B}{3}, \quad E = \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}D\cdot$$

Pour prouver que GE est parallèle au plan SCD, on va montrer que GE est parallèle à une droite de ce plan, soit MD, M étant le milieu de SC.

En effet :

$$\begin{aligned} G - E &= \frac{S + A + B}{3} - \left(\frac{2}{3}A + \frac{1}{3}D\right) \\ &= \frac{1}{3}(S - A + B - D) \\ &= \frac{1}{3}(S + C - 2D) \quad (\text{car } A - B = D - C) \\ &= \frac{1}{3}(2M - 2D) \quad (M \text{ est le milieu de } SC) \\ &= \frac{2}{3}(M - D). \end{aligned}$$

Par conséquent GE et MD sont parallèles et GE est parallèle au plan SCD contenant MD.

Remarquons que l'intervention de MD peut paraitre ingénieuse... sauf à observer attentivement la figure 4.31 qui est une perspective de la situation spatiale conservant le parallélisme des droites.

3. Soient $ABCD$ et $ABEF$ deux parallélogrammes qui ne sont pas coplanaires. Les points M et N sont situés respectivement sur le segment AC au tiers à partir de A et sur le segment BF au tiers à partir de B. Prouver que MN et DE sont parallèles (figure 4.36).

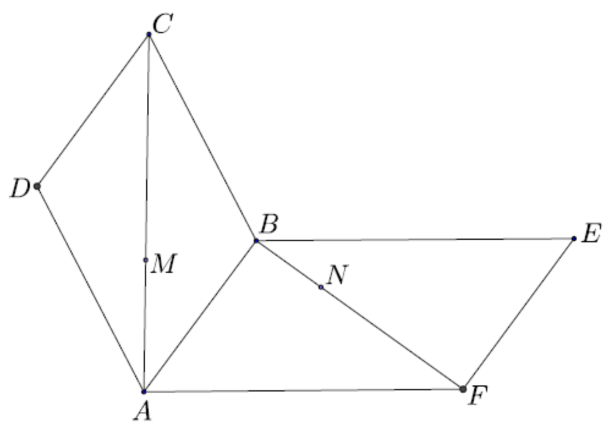


FIGURE *4.36*

On a, par hypothèse,

$$A - B = D - C, \quad A - B = F - E, \quad M = \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}C, \quad N = \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}F.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} M - N &= \left(\frac{2}{3}A + \frac{1}{3}C\right) - \left(\frac{2}{3}B + \frac{1}{3}F\right) \\ &= \frac{2}{3}(A - B) + \frac{1}{3}(C - F) \\ &= \frac{2}{3}(D - C) + \frac{1}{3}(C - F) \\ &= \frac{2}{3}(D - C) + \frac{1}{3}(C + C - D - E) \\ & \text{(car } D - C = F - E \text{ donc } F = -C + D + E.) \\ &= \frac{1}{3}(D - E). \end{aligned}$$

Par conséquent, MN et DE sont parallèles.

4. Soit $SABCD$ une pyramide dont la base $ABCD$ est un trapèze. M et N sont les milieux de SA et SB respectivement. Prouver que MN et CD sont parallèles (figure 33).

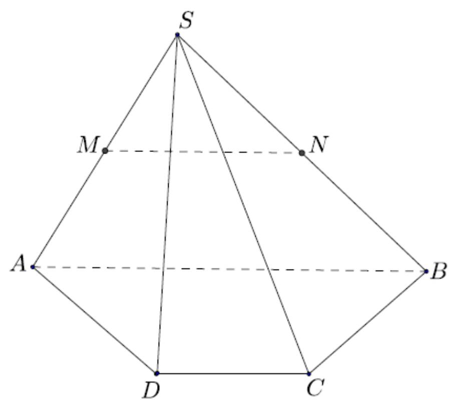


FIGURE *4.37*

On peut utiliser la méthode synthétique dans cet exemple pour montrer que MN et CD sont parallèles en utilisant le fait qu'elles sont toutes les deux parallèles à

AB. Cependant, le formalisme bipoint dans ce cas permet également une preuve commode dont voici le détail :

$$\begin{aligned} M - N &= \frac{A-B}{2} \quad (\text{car } M = \frac{S+A}{2} \text{ et } N = \frac{S+B}{2} \\ &= \frac{k}{2}(C-D) \quad (\text{car } AB \text{ est parallèle à } CD \text{ donc } A - B = k(C-D) \end{aligned}$$

pour une certaine valeur de k.

Par conséquent, MN et CD sont parallèles.

4.3 Le formalisme bipoint en géométrie métrique

Comme dans le cas de la géométrie affine, nous explorons ici les valences sémiotique et instrumentale du formalisme bipoint en géométrie métrique. Ici aussi, ces deux valences sont étudiées dans une relation dialectique. La section 4.3.1 porte néanmoins davantage sur la valence sémiotique. Quant aux sections 4.3.2 et 4.3.3, elles s'organisent un peu différemment que ce que nous avons fait pour la géométrie affine : nous reprenons, à la section 4.3.2, une liste de problèmes résolus à la fois par le calcul vectoriel et par le calcul bipoint et ensuite à la section 4.3.3, nous analysons les difficultés techniques rencontrées. Cette section se termine par une échappée vers le formalisme des complexes.

4.3.1 Valence sémiotique du formalisme bipoint dans l'ingénierie

Rappelons l'intention majeure de notre projet : fonder un calcul permettant de prouver des propriétés géométriques, la géométrie euclidienne étant le soubassement de cette construction à laquelle nous souhaitons donner une dimension heuristique. Voyons comment cette intention se décline en géométrie métrique.

4.3.1.1 Le théorème de Pythagore comme prérequis et non comme application du calcul visé

Pour comprendre les raisons ce ce point de vue, nous ferons ici un détour par la géométrie vectorielle telle qu'elle s'enseignait à l'époque des mathématiques modernes.

Commençons par une des propriétés d'addition du cosinus :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Il existe une multitude de preuves de cette propriété dans des cadres différents y compris celui de la trigonométrie du triangle rectangle. Elles ne sont pas faciles pour les élèves. On comprend dès lors que l'on puisse apprécier la démonstration "simple" qu'en procurent les propriétés du produit scalaire et qu'on trouvait dans les manuels à l'époque des mathématiques modernes :

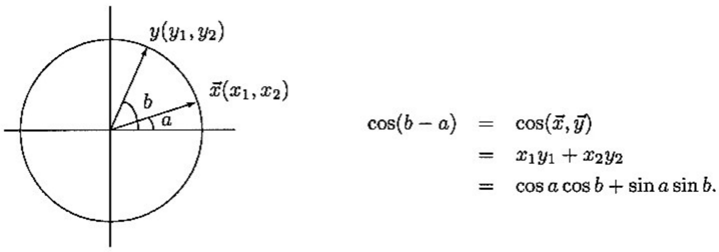


FIGURE *4.38*

Encore aujourd'hui, plusieurs professeurs du secondaire apprécient la "simplicité" de cette démonstration :

"La démonstration utilisant le produit scalaire est simple et élégante, mais repose sur une équivalence de formulation vue (? Pas sûr - l'équivalence a bien pu être acceptée telle quelle et non démontrée !) il y a bien longtemps et refait sans le dire la démonstration de l'équivalence."

Ce propos laisse cependant supposer que la preuve supra soulève la question de "l'œuf et de la poule" en suggérant une sorte de circularité sans être très explicite là-dessus. C'est pourtant bien le cas : si l'on regarde cette démonstration de près, on voit qu'elle s'appuie non seulement sur la définition du cosinus basé sur le produit scalaire [111]

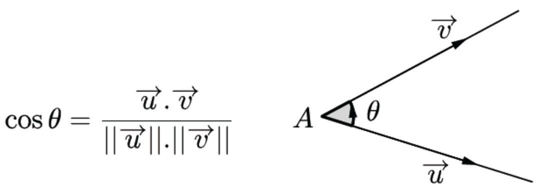


FIGURE *4.39*

mais aussi sur l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1v_1 + u_2v_2,$$

qui n'est rien d'autre que l'expression, dans le cas de vecteurs normés, du théorème que l'on souhaite prouver.

111. BOUVIER et GEORGE 2005, p. 204.

Simple effectivement cette démonstration, mais à quel prix au niveau de l'apprentissage des élèves ?

Notre intention didactique va à rebours de cette approche, en considérant le théorème de Pythagore non comme une application du calcul vectoriel ou, ici, de son équivalent en termes de calcul bipoint mais au contraire comme une des prémisses de ce calcul.

Il en va du même du théorème de Pythagore généralisé ou théorème d'Al-Kashi qui exprime le cosinus d'une angle $\hat{A}$ dans un triangle quelconques ABC en fonction des longueurs des côtés [112] :

$$\cos \hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC}$$

Ce théorème est, dans notre projet d'enseignement, considéré comme prouvé dans le cadre de la géométrie euclidienne et nous en ferons un point de départ et non une application.

Terminons ce préambule par une remarque relative à l'évolution du curriculum. Malgré ses défauts et ses illusions, l'approche préconisée à l'époque des mathématiques modernes avait une certaine cohérence. Ce n'est plus le cas aujourd'hui et il n'est pas rare d'observer des élèves-professeurs s'appuyer implicitement ou non sur le théorème de Pythagore généralisé pour prouver les propriétés du produit scalaire et s'appuyer sur les mêmes propriétés pour prouver ensuite le théorème en question. Car le maintien de la définition du cosinus en termes de produit scalaire pourrait bien aujourd'hui s'appuyer sur des “mauvaises” raisons pédagogiques telle que la suivante nous semble-t-il :

“Un gros avantage de la démonstration basée sur le produit scalaire est qu'elle est aisée à retenir. En fait, elle est basée sur une seule définition. D'où, elle sera sûrement privilégiée dans les classes de plus faible niveau.”

S'agit-il en effet de retenir ou de comprendre ? Et qu'est-ce que comprendre si ce n'est saisir les raisons d'être de telle ou telle définition, par exemple celle du cosinus en termes du produit scalaire qui nous éloigne de la définition du cosinus à partir du cercle trigonométrique.

Comme on le voit à partir de la propriété étudiée dans cette section, les concepts eux-mêmes peuvent être riches de propriétés déjà prouvées par ailleurs : le mathématicien en est conscient évidemment mais qu'en est-il des élèves ? C'est sans doute là la difficulté majeure du produit scalaire et de ses propriétés.

112. Ibid., p. 205.

4.3.1.2 Une parenthèse sur les preuves synthétiques du théorème de Pythagore et de celui d'AL-Kashi

Avant d'arriver au calcul bipoint en géométrie métrique, nous nous permettons une longue parenthèse sur le point de vue que nous privilégierons comme approche de ces théorèmes en géométrie synthétique. Il s'apparente à ce qui est développé plus amplement dans Rosseel et Schneider (2009) [113].

A propos de preuves du théorème de Pythagore

Dans l'enseignement secondaire, on privilégie aujourd'hui des preuves du théorème de Pythagore par les aires impliquant des puzzles plutôt ingénieux et l'énergie des élèves est polarisée sur ceux-ci. Cela n'est pas sans inconvénient, ainsi que plusieurs chercheurs en didactique l'on mis en évidence : "[...] on verra un élève absorbé pendant une heure sur des questions de surfaces résolues à l'aide de puzzles, qu'il suit pas à pas, puis tomber des nues lorsque, au sortir de cette activité ardue, le professeur lui demande de calculer l'hypoténuse d'un triangle rectangle, connaissant les longueurs des côtés de l'angle droit. Il n'a pas du tout perçu, même s'il l'a noté au passage sur son cahier, que le puzzle en question était la démonstration d'un théorème, et que ce théorème était là pour justifier les techniques lui permettant d'accomplir la tâche demandée. Il n'y a pas eu de tâche problématique correspondant à la question étudiée. Ce point de départ étant absent, il n'y a eu ni dévolution du problème ni, par conséquent, construction d'une technique permettant de le résoudre et l'élève, même attentif et sérieux, se trouve tout à fait démuni" (R. Noirfalise, 1995) [114].

C'est entre autres pour cette raison que Rosseel et Schneider (2009) ont adopté une démonstration qui se base sur des rapports de longueurs tout en exploitant une propriété que seuls les triangles rectangles possèdent : un triangle rectangle est partagé en deux triangles qui lui sont semblables par la hauteur relative à son hypoténuse (figure 4.40)

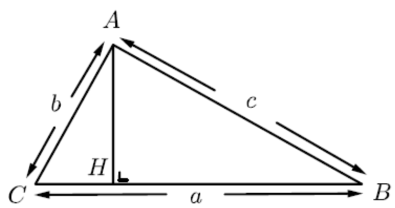


FIGURE *4.40*

En effet, les triangles CAB et CHA (figure 4.40) sont semblables, ayant deux angles de même amplitude : un angle droit et l'angle commun $A\hat{C}H$. Pour des raisons analogues, les triangles CAB et AHB sont semblables.

113. ROSSEEL et SCHNEIDER 2009.
114. Cité par ibid., p. 105.

Or, ces trois triangles possèdent une autre propriété : l'aire du plus grand, A_1, vaut la somme des aires des deux autres, A_2 et A_3 :

$$A_1 = A_2 + A_3. \qquad (1)$$

Étant donné que le rapport de similitude qui permet d'aller de CAB à CHA vaut $\frac{b}{a}$ et que le rapport de similitude qui va de CAB à AHB vaut $\frac{c}{a}$, la relation (1) s'écrit encore

$$A_1 = \frac{b^2}{a^2}A_1 + \frac{c^2}{a^2}A_1$$

ou

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Cette démonstration s'appuie également sur des relations entre aires. Mais cet aspect est superflu car on peut arriver à la même conclusion en s'appuyant seulement sur des rapports de longueurs : avec les notations de la figure 4.41,

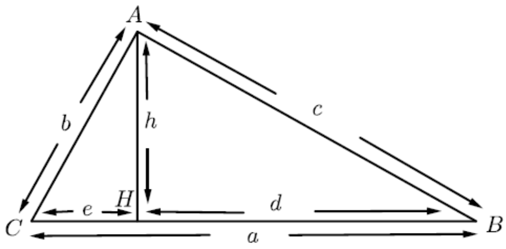


FIGURE *4.41*

on obtient, par similitude des trois triangles concernés, que

$$\frac{d}{c} = \frac{c}{a} \qquad \text{ou} \qquad c^2 = da \qquad (2)$$

et que

$$\frac{e}{b} = \frac{b}{a} \qquad \text{ou} \qquad b^2 = ea \qquad (3)$$

En sommant (2) et (3), il vient

$$c^2 + b^2 = a(d + e) = a^2.$$

Bien sûr, ce théorème peut s'interpréter en termes d'aires de carrés construits sur les côtés du triangle rectangle. Mais ce n'est pas là le plus important. D'abord, la plupart des applications du théorème de Pythagore concernent des longueurs de segments, figurant, par exemple, des grandeurs inaccessibles. Et c'est pour cela que l'observation de Noirfalise, reprise plus haut, prend tout son sens.

Ensuite, là où les preuves "par les aires" pour arriver à des relations entre longueurs prennent tout leur intérêt, c'est principalement dans l'Antiquité, en raison de l'absence de l'algèbre et du concept de nombre. Comme le montre la démonstration reprise plus haut, on arrive à ses fins avec de simples simplifications algébriques pourvu que l'on dirige bien les calculs.

Enfin, si l'on opte pour une interprétation du théorème de Pythagore en termes d'aires, il vaut mieux opter pour les aires des triangles plutôt que pour les aires de carrés si l'on veut mettre en évidence, outre l'évidence du puzzle créé, "les raisons profondes" de ce théorème. C'est ce que développe Bachelard (1949) à qui nous empruntons les extraits suivants :

> *[...] Quand on cherche, avec Bouligand, la raison profonde du théorème de Pythagore, quand on s'applique à isoler, comme le dit Bouligand, l'élément causal de la démonstration, autrement dit, lorsqu'on cherche pour quelle cause le carré vient illustrer une propriété touchant les longueurs des côtés du triangle rectangle, on ne tarde pas à voir, comme nous allons le montrer, que cette causalité du carré n'est qu'occasionnelle. Le carré n'est qu'une figure entre mille pour illustrer la pythagoricité du triangle rectangle. Il jouit d'un privilège historique immérité et c'est ce privilège que la culture récurrente va supprimer.*
>
> *En effet, si le carré permet de mettre en lumière la pythagoricité du triangle rectangle, il le doit au fait que le carré est un polygone régulier et que, par conséquent, tous les carrés sont semblables entre eux, comme sont semblables entre eux tous les polygones réguliers d'un même nombre de côtés.*
>
> *Il est en effet tout de suite évident que la pythagoricité du triangle rectangle vaut pour tout polygone régulier. Ainsi, dans l'hypothèse où le théorème de Pythagore est démontré sous sa forme classique, on se convainc aisément qu'il est vrai pour des triangles équilatéraux (figure 4.42)* [... ainsi que pour tous les polygones réguliers ou toutes les figures semblables dessinées sur les côtés du triangle rectangle]*".*

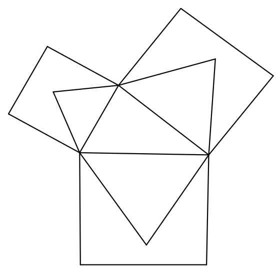


FIGURE *4.42*

C'est en méditant sur cette régularité que nous allons découvrir la *cause profonde de la proposition de Pythagore généralisée. La notion de régularité ne joue en effet ici que le rôle d'une économie verbale. La causalité est plus profonde, elle ne réside pas dans la régularité des polygones. La notion causale se trouvera en réfléchissant que tous les polygones réguliers à n côtés sont semblables entre eux. Tous les carrés sont semblables, tous les triangles équilatéraux sont semblables, tous les pentagones sont semblables. [...]*

Ainsi, en cherchant le caractère de causalité rationnelle, on passe successivement du carré aux polygones réguliers, des polygones réguliers aux figures semblables. Le caractère causal est la similitude.

[...] Nous avons donc atteint la suprême généralité de l'antique proposition de Pythagore du seul fait que nous en avons découvert la cause rationnelle. Cette proposition se présente comme une administration très curieuse des figures semblables. Seul le triangle rectangle donne cette contribution équilibrée des surfaces. Un triangle quelconque ne jouit pas de cette propriété qui est donc caractéristique de l'angle droit. [...]

A propos du théorème d'Al-Kashi

Le fait que tout triangle rectangle peut être ainsi partagé - par la hauteur relative à l'hypoténuse - en deux triangles qui lui sont semblables constitue en effet un marchepied vers le théorème d'Al-Kashi. En effet, quand on trace la hauteur d'un triangle quelconque, on détermine deux autres triangles dont le triangle d'origine est composé de manière additive (figure 4.43) ou soustractive (figure 4.44) suivant que l'angle d'où la hauteur est issue est aigu ou obtus.

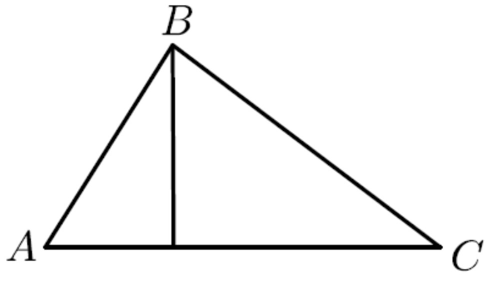


FIGURE *4.43*

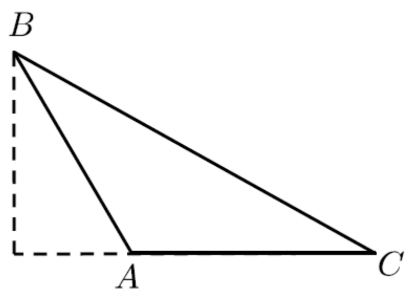


FIGURE *4.44*

Évidemment ces deux nouveaux triangles ne sont pas semblables au triangle de départ. Mais ils sont rectangles et on peut donc y appliquer les formules de trigonométrie comme illustré sur la figure 4.45.

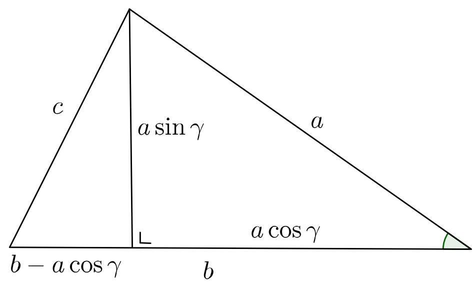


FIGURE *4.45*

En exploitant ensuite le théorème de Pythagore au triangle rectangle dont l'hypoténuse est le côté c, on obtient

$$c^2 = (b - a\cos\gamma)^2 + (a\sin\gamma)^2 = b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2\cos^2\gamma + a^2\sin^2\gamma.$$

En utilisant l'identité remarquable

$$\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1,$$

on obtient le résultat escompté, après simplification

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\gamma.$$

La méthode est en tous points similaires pour les angles obtus, et conduit à un résultat identique.

A propos de la réciproque du théorème de Pythagore

Nous évoquerons aussi dans notre analyse la réciproque du théorème de Pythagore.

Nous pouvons démontrer cette réciproque à partir du théorème d'Al-Kashi, comme dans Cojerem (1995a). Ce n'est pas le choix que nous ferions aujourd'hui, préférant la démonstration que voici qui se base sur un cas d'isométrie des triangles :

Soit un triangle ABC dont les côtés a, b et c vérifient la relation $a^2 = b^2 + c^2$. Construisons un autre triangle $A'B'C'$, rectangle, et dont les côtés de l'angle droit mesurent b et c (figure 4.46), soit les deux nombres les plus petits de la relation. D'après le théorème de Pythagore, son hypoténuse a' vérifie la relation $a'^2 = b^2 + c^2$. Donc $a' = a$ et les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques car ayant trois côtés correspondants de même longueur. On en conclut que le triangle ABC est rectangle, lui aussi.

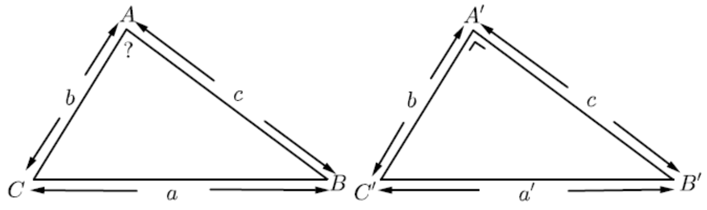


FIGURE *4.46*

4.3.1.3 La validation du calcul bipoint et/ou du calcul vectoriel dans l'ingénierie

Conformément à notre projet initial, nous souhaitons construire ici un formalisme qui autorise des démonstrations calculatoires de propriétés métriques de figures planes et de solides.

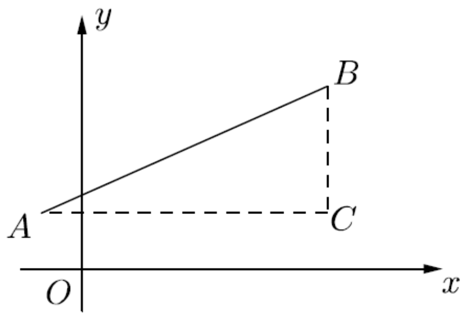
Les bases de ce formalisme sont des relations liant les coordonnées, dans un repère quelconque, de points formant des configurations structurantes de la géométrie métrique : points déterminant deux droites perpendiculaires (ou orthogonales), sommets d'un triangle rectangle ou quelconque dont les côtés ont des longueurs qui vérifient des relations particulières.

Les théorèmes majeurs de la géométrie élémentaire métrique sont supposés avoir été prouvés, par la méthode synthétique, ainsi qu'illustré dans la section précédente. Ces théorèmes servent alors à valider les bases du nouveau formalisme en prouvant que les relations entre coordonnées sont des relations intrinsèques, c'est-à-dire indépendantes du choix du repère métrique, modélisant des configurations géométriques elles-mêmes invariantes sous l'effet de transformations métriques (ou euclidiennes) : les isométries et les similitudes.

Aux yeux des élèves concernés, la “généralité” des relations établies le seront sur base de coordonnées génériques dans un repère métrique quelconque.

Validation en géométrie 2D

En géométrie 2D, le théorème de Pythagore et sa réciproque constituent a priori la plaque tournante dans la validation du formalisme. En effet, le théorème direct donne accès à l'expression de la distance entre deux points à partir de la métrique commune aux deux axes laquelle permettait déjà de définir la longueur d'un segment situé sur une droite parallèle à un axe (voir figure 4.47).



$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

FIGURE *4.47*

En outre, ce théorème et sa réciproque conduisent à l'expression d'une condition nécessaire et suffisante de la perpendicularité de deux droites. Avec les notations de la figure 4.47,

$$d^2(A, B) = d^2(A, C) + d^2(B, C) \text{ si et seulement si } A\hat{C}B = 90^o$$

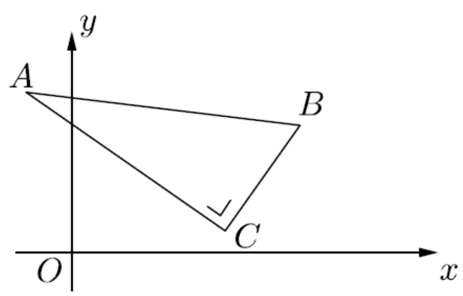


FIGURE *4.48*

ou, après simplifications,

$$(x_C - x_A)(x_C - x_B) + (y_C - y_A)(y_C - y_B) = 0 \text{ si et seulement si } A\hat{C}B = 90^o$$

Ce n'est pas le choix retenu ici. Nous avons préféré traiter indépendamment la perpendicularité des droites, d'une part, et la relation de Pythagore, d'autre part. Cela afin de ménager un enjeu de découverte et de synthèse de ce qu'il y a de commun aux calculs suivants, le premier exprimant le carré de la distance entre B et C, alors que l'annulation du second exprime la perpendicularité de AC et CB :

$$(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2$$

et

$$(x_C - x_A)(x_C - x_B) + (y_C - y_A)(y_C - y_B)$$

afin de définir le produit scalaire, la norme d'un vecteur et la notion d'orthogonalité.

Dans notre ingénierie, le parcours est en effet très progressif : à la section 4.3, nous traitons, en termes de coordonnées et de vecteurs directeurs, la condition nécessaire et suffisante de perpendicularité de deux droites. La justification se base alors sur la similitude des triangles OAP et $P'BO$ (figure 4.48) formés à partir des axes et de deux droites perpendiculaires passant par l'origine.

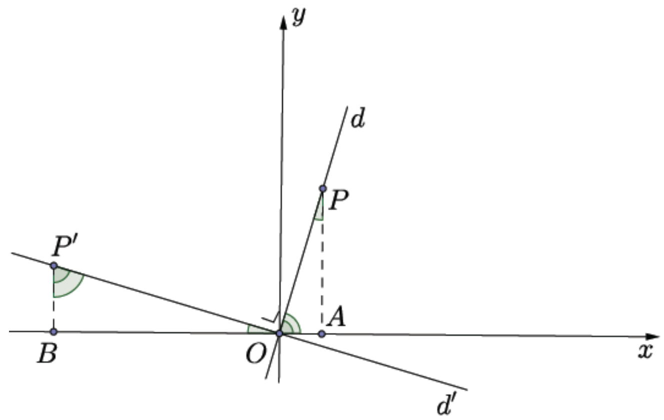


FIGURE *4.49*

Quant au théorème d'Al-Kashi, supposé acquis, il permet de relier l'expression du produit scalaire en termes de composantes à sa caractérisation via le cosinus, créant ainsi un pont vers la physique.

Validation en géométrie 3D

En géométrie 3D, on organise la validation à partir du théorème de Pythagore valable dans tout plan de l'espace si l'on postule que, en géométrie 3D, les théorèmes de la géométrie 2D demeurent dans un plan quelconque. On établit d'abord, à la section 8.1, l'expression de la distance entre deux points, puis la condition nécessaire de perpendicularité de deux droites, cette condition ne pouvant être suffisante étant donné la possible orthogonalité de deux droites gauches. On poursuit en établissant la critère de perpendicularité entre droite et plan et le critère de perpendicularité de deux plans. Les preuves de ces deux derniers théorèmes sont de type calculatoire, le formalisme vectoriel ayant été introduit pour les besoins de la cause.

Des coordonnées aux formalismes vectoriel et/ou bipoint

Notre intention initiale était de privilégier le formalisme bipoint en géométrie affine, lequel y a été la source des définitions de vecteur et de vecteurs multiples à travers la relation d'équipollence des bipoints. Mais aussi d'en rester au formalisme vectoriel en géométrie métrique en raison de son caractère plus standard.

Chemin faisant, nous avons malgré tout testé le formalisme bipoint en géométrie métrique et l'avons trouvé tout aussi efficace si pas plus que le formalisme vectoriel. Aussi, nous avons décidé de couper la poire en deux en exprimant le produit scalaire à la fois dans le formalisme vectoriel et dans le formalisme bipoint, en utilisant suivant les cas l'un ou l'autre de ces formalismes : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ ou $(B-A) \cdot (D-C)$.

Dans notre ingénierie, on utilise exclusivement le formalisme vectoriel en géométrie métrique 2D (chapitre 5). Dans le chapitre 8 consacré à la géométrie métrique 3D, ce formalisme reste prioritaire mais le formalisme bipoint est introduit au début de la section 8.6, avant un relevé de problèmes résolus de diverses manières : méthode vectorielle, méthode bipoint et méthode synthétique. Voici en quels termes on donne sens au formalisme bipoint :

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ s'écrit

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$$

dans le formalisme vectoriel et

$$(B-A) \cdot (D-C)$$

dans le formalisme bipoint, les deux conduisant à l'unique calcul

$$(x_B - x_A)(x_D - x_C) + (y_B - y_A)(y_D - y_C) + (z_B - z_A)(z_D - z_C).$$

Notons que, de manière évidente,

$$(B-A) \cdot (D-C) = (A-B) \cdot (C-D).$$

Quant aux propriétés du produit scalaire, elles s'expriment indifféremment par

- $k\,\overrightarrow{AB} \cdot m\,\overrightarrow{CD} = km\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ ou $k(B-A) \cdot m(D-C) = km(B-A) \cdot (D-C)$, qui exprime la compatibilité du produit scalaire avec le produit par un réel.
- $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EF}$ ou $(B-A+D-C) \cdot (F-E) = (B-A) \cdot (F-E) + (D-C) \cdot (F-E)$ pour la distributivité du produit scalaire par rapport à l'addition des vecteurs,
- $d(A,B) = |AB| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$ ou $d(A,B) = |AB| = \|B-A\| = \sqrt{(B-A) \cdot (B-A)}$ pour ce qui est de l'expression de la distance entre deux points. Nous nous permettrons d'alléger l'écriture en notant AB la longueur du segment AB. C'est donc le contexte qui permet de savoir si AB représente un segment ou une droite (par exemple, dans $AB \perp CD$) ou sa longueur (par exemple dans l'écriture AB^2).
- ...

4.3.1.4 Une large place octroyée dans la validation aux cas d'isométrie ou de similitude des triangles

Comme nous l'avons développé à la section 2.2.2, les cas d'isométrie et de similitude des triangles ont été largement discrédités à l'époque des mathématiques modernes.

Ils sont à présent restaurés dans les référentiels actuels de compétences et les programmes scolaires associés. Cependant, même s'ils sont présents dans les manuels, comme conditions déterminantes d'un triangle à une isométrie ou à une similitude près, on observe qu'ils ne sont guère utilisés comme outils de démonstrations.

On aurait tort cependant de nier leur rôle dans la constitution de la géométrie élémentaire car, comme le souligne Bkouche (1988) :

> *Axiome fondateur de la géométrie, le principe de l'égalité par superposition s'appuie essentiellement sur la notion de mouvement ; la géométrie est ainsi fondée empiriquement sur le lien entre corps solide et mouvement, et c'est la coïncidence par transport d'un corps sur un autre qui permet de conclure à l'égalité de deux corps [...]. Le problème de la géométrie est alors d'énoncer a priori des conditions d'égalité, ce qui permettra d'éliminer le mouvement, remplacé par un raisonnement s'appuyant sur les critères d'égalité ainsi définis.* [115]

En outre, comme observé par Cojerem (1995a), les cas d'isométrie et de similitude offrent, aux élèves plus jeunes, des possibilités de preuves dont les ressorts leur sont facilement identifiables avec des trames récurrentes comme celle de la "démonstration discursive" proposée à la section 1.1.1 dans notre projet où l'on combine, comme souvent, un cas d'isométrie et des configurations d'angles particulières (correspondants, ...).

En tout cas, de telles preuves sont plus faciles à appréhender que les preuves reposant sur les invariants des transformations d'autant qu'il arrive que la supposition *a priori* de ces invariants est un résultat plus puissant que celui qu'on cherche à démontrer.

Pour toutes ces raisons, Schneider (2011) estime que les cas d'isométrie, en particulier, constituent une entrée en matière privilégiée au contrat de démonstration :

> *Plus que d'autres propriétés mathématiques, les cas d'isométrie de triangles sont, nous semble-t-il, susceptibles de marquer, aux yeux des élèves, la différence de contrat entre une géométrie d'observation basée sur des constats à partir de "dessins" et une géométrie raisonnée sur des figures géométriques dotées de propriétés : il ne s'agit plus de superposer physiquement un triangle découpé dans un papier sur un autre dessiné pour constater leur "coïncidence", mais d'énoncer les*

115. Cité par SCHNEIDER 2008, p. 48.

> *conditions minimales assurant a priori cette possibilité de les superposer*[116].

Nous n'avions donc pas de raison de nous priver ici de cet outil de preuve.

Remarquons toutefois qu'il est *a priori* plus pertinent dans certaines géométries que dans d'autres. En effet, les cas d'isométrie sont liés aux isométries qui sont les transformations associées à la géométrie métrique alors que les cas de similitude sont liés aux similitudes associées à la géométrie euclidienne. Or ces géométries sont subordonnées à la géométrie affine, les isométries et similitudes étant des transformations affines particulières. Malgré tout, nous avons fait le choix ici, dans une perspective heuristique, d'étayer les outils de base de la géométrie affine par ces outils que sont les cas d'isométrie et de similitude des triangles déjà familiers aux élèves en commençant, en géométrie 2D, par la configuration "parallélogramme", avant de greffer celle-ci, en géométrie 3D, à la configuration "Thalès" d'un faisceau de parallèles. Les mêmes preuves, basées sur les cas d'isométrie ou de similitude sont utilisées aussi, en géométrie métrique, par exemple pour démontrer la condition nécessaire et suffisante de perpendicularité de deux droites du plan et, en outre, on a vu le lien fort qui existe entre la similitude et le théorème de Pythagore. Ces cas d'isométrie et de similitude trouvent donc ici un terrain d'exercice qu'elles n'ont plus guère...

4.3.2 Exemples de problèmes géométriques résolus par le calcul bipoint et/ou par le calcul vectoriel

Comme annoncé dans l'introduction, cette section reprend un ensemble de propriétés métriques, principalement en géométrie 3D, qui sont démontrées pour la plupart dans le formalisme vectoriel et dans le formalisme bipoint. L'intention est de disposer d'éléments d'analyse comparative des instrumentalités respectives de ces deux formalismes.

Cette analyse sera menée à la section 4.3.3 et sera prolongée aux preuves de propriétés métriques que permet l'usage des nombres complexes.

4.3.2.1 Exemple 1 : dans un cube

Il y a beaucoup de droites perpendiculaires ou orthogonales dans un cube, à commencer par les droites supports d'arêtes ayant un sommet commun. Nous nous intéressons ici à d'autres droites telles que certaines diagonales du cube et celles de ses faces qui sont également orthogonales sans que ce soit évident. Nous traiterons aussi la perpendicularité d'une droite et d'un plan.

On considère un cube $ABCDEFGH$. Montrer que

116. SCHNEIDER 2008, p. 117.

a) AE *et* BC *sont orthogonales.*

b) HC *et* AF *sont orthogonales.*

c) AF *et* BC *sont orthogonales.*

d) HC *et* DF *sont orthogonales.*

e) *La droite* HF *est perpendiculaire au plan* $GEAC$*. En déduire que* HF *est orthogonale à* EC*.*

f) *Les plans* AFG *et* CHE *sont perpendiculaires.*

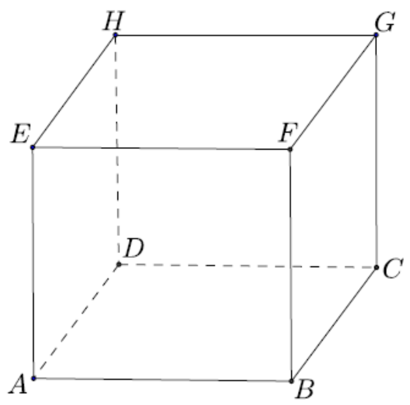


FIGURE *4.50*

a) On peut utiliser le calcul vectoriel pour prouver que AE et BC sont orthogonales comme suit :

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

Bien sûr on peut utiliser aussi la notation bipoint car $ABFE$ est un carré donc $A - E = B - F$. Par conséquent,

$$(E - A) \cdot (C - B) = (F - B) \cdot (C - B) = 0.$$

b) Notons que $ADGF$ est un parallélogramme (c'est même un rectangle) car AD et FG sont parallèles et de même longueur. On a donc $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DG}$. Dès lors,

$$\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{DG} = 0$$

car $HGCD$ est un carré donc les deux diagonales sont perpendiculaires.

En utilisant la notation bipoint, on a $F - A = G - D$. Alors

$$(C - H) \cdot (F - A) = (C - H) \cdot (G - D) = 0.$$

c) La preuve vectorielle repose sur le calcul que voici :

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

Et la preuve "bipoint" sur le calcul équivalent :

$$\begin{aligned}(F-A)\cdot(C-B) &= ((F-B)+(B-A))\cdot(C-B)\\ &= (F-B)\cdot(C-B)+(B-A)\cdot(C-B)=0.\end{aligned}$$

d) En utilisant les vecteurs et les caractéristiques du cube, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{HC} &= \left(\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GF}\right)\cdot\overrightarrow{HC}\\ &= \overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{HC}\\ &= \overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{HC} \text{ car } CDHG \text{ est un carré}\\ &= \overrightarrow{GF}\cdot\left(\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GC}\right)\\ &= \overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GC}=0.\end{aligned}$$

De même, avec le formalisme bipoint, on a :

$$\begin{aligned}(F-D).(C-H) &= ((F-G)+(G-D))\cdot(C-H)\\ &= (F-G)\cdot(C-H)+(G-D)\cdot(C-H)\\ &= (F-G)\cdot(C-H)\\ &= (F-G)\cdot((C-G)+(G-H))\\ &= (F-G)\cdot(C-G)+(F-G)\cdot(G-H)=0.\end{aligned}$$

e)

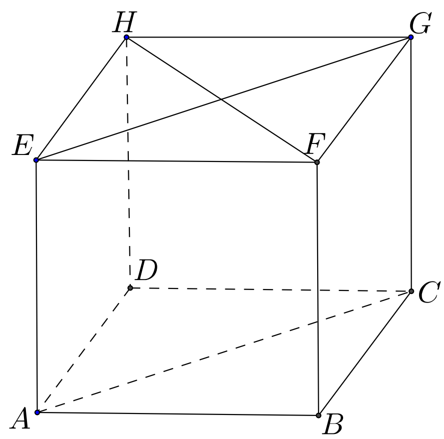


FIGURE 4.51

Pour prouver que HF est perpendiculaire au plan $GEAC$, on va prouver que $HF \perp EG$ et $HF \perp AE$ car EG et AE sont des droites sécantes du plan $GEAC$.

En fait, on peut utiliser ici la méthode synthétique car on a tout de suite que $HF \perp EG$ puisque ce sont deux diagonales d'une face du cube. De plus, AE est perpendiculaire à EH et à EF donc AE est perpendiculaire au plan EHF. Par conséquent, AE est orthogonale à HF.

Cependant, si l'on veut utiliser la notation vectorielle, on peut écrire que $\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{EG} = 0$ en utilisant la propriété indiquée plus haut et, de plus

$$\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{AE} = \left(\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF}\right) \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$$

en utilisant le fait que AE est perpendiculaire à EH et à EF.

De même, avec le formalisme bipoint, on peut écrire ceci :

$$\begin{aligned}(F-H)\cdot(E-A) &= (F-E+E-H)\cdot(E-A)\\ &= (F-E)\cdot(E-A)+(E-H)\cdot(E-A)=0.\end{aligned}$$

Pour déduire enfin que HF est orthogonale à EC, on a besoin de la propriété : “Si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est perpendiculaire (ou orthogonale) à toutes les droites du plan".

f)

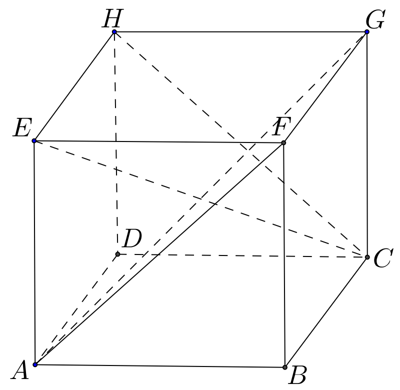


FIGURE 4.52

Pour prouver que les plans AFG et CHE sont perpendiculaires, on va prouver que HC est perpendiculaire à AFG.

On a déjà montré en b) et d) que $HC \perp AF$ et $HC \perp DF$. Il en résulte que HC est perpendiculaire au plan AFG car orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. Le plan CHE est donc perpendiculaire au plan AFG car il contient la droite HC perpendiculaire à ce plan.

Ce premier problème nous a permis de rappeler le critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan, ainsi que celui de la perpendicularité de deux plans. Ces critères seront exploités dans les problèmes suivants sans être toujours explicités.

De plus, dans les preuves, on doit parfois "ajouter un point" afin de représenter un vecteur par des autres vecteurs. Par exemple, en d), on doit faire intervenir deux fois le point G en utilisant la relation de Chasles. Cependant, cette démarche est naturelle car, en fait, pour démontrer que $DF \perp HC$, il faut trouver les droites qui sont perpendiculaires à HC, et on voit tout de suite que $DG \perp HC$ donc c'est évident qu'il faut représenter $\overrightarrow{DF}$ par $\overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{GF}$. La démarche est équivalente pour le formalisme bipoint. Ensuite, il reste $\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{HC}$ et puisque GF est perpendiculaire à HG et GC donc c'est évident d'écrire $\overrightarrow{HC}$ sous le forme $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GC}$.

Dans ces cas, l'usage du formalisme vectoriel et l'usage du formalisme bipoint sont équivalentes car on ne trouve pas la prioritaire de l'un par rapport à l'autre.

4.3.2.2 Exemple 2 : dans un tétraèdre orthocentrique

Un tétraèdre orthocentrique est un tétraèdre dont deux paires d'arêtes opposées sont orthogonales. Prouver que, dans un tel tétraèdre :

a) La troisième paire d'arêtes opposées est faite d'arêtes orthogonales.

b) Le pied d'une hauteur est l'orthocentre de la face opposée, soit l'intersection de ses hauteurs.

c) La somme des carrés des longueurs de deux arêtes opposées sont égales.

d) Les quatre hauteurs sont concourantes en un point H appelé l'orthocentre du tétraèdre.

a)

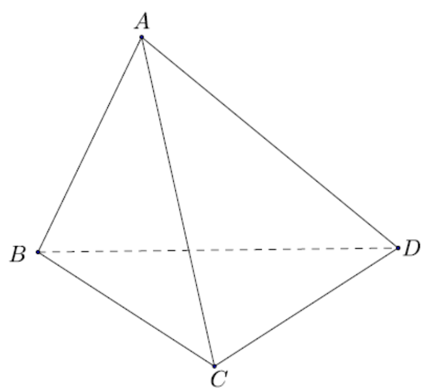


FIGURE *4.53*

Supposons que $AB \perp CD$ et $BC \perp AD$. Les droites AC et BD sont orthogonales car le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ est nul.
En effet,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} \text{ (car } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0) \\
&= \overrightarrow{BC} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) \\
&= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0.
\end{aligned}$$

Dans la notation bipoint, cela devient

$$\begin{array}{lcll}
AB \perp CD & \Leftrightarrow & (B - A) \cdot (D - C) = 0 & \\
& \Leftrightarrow & B \cdot D - B \cdot C - A \cdot D + A \cdot C = 0 & (1) \\
BC \perp AD & \Leftrightarrow & (C - B) \cdot (D - A) = 0 & \\
& \Leftrightarrow & C \cdot D - C \cdot A - B \cdot D + B \cdot A = 0 & (2) \\
(1) + (2) & \Rightarrow & B \cdot A - A \cdot D - B \cdot C + C \cdot D = 0 & \\
& \Leftrightarrow & (C - A) \cdot (D - B) = 0, &
\end{array}$$

d'où $AC \perp BD$.

b)

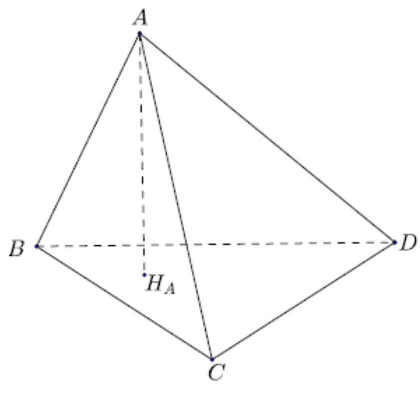


FIGURE *4.54*

Notons H_A l'orthocentre de la face BCD. Nous allons prouver que $AH_A \perp$ plan BCD.
On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AH_A} \cdot \overrightarrow{CD} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH_A}\right) \cdot \overrightarrow{CD} \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH_A} \cdot \overrightarrow{CD} \\
&= 0 \quad \text{(car } AB \perp CD \text{ et } H_A \text{ est l'orthocentre de } BCD).
\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH_A}\cdot\overrightarrow{BC} &= \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH_A}\right)\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DH_A}\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= 0 \quad \text{(car } AD\perp BC \text{ et } H_A \text{ est l'orthocentre de } BCD).\end{aligned}$$

Par conséquent, $AH_A \perp CD$ et $AH_A \perp BC$ et on en conclut que $AH_A \perp$ plan BCD.

En utilisant le formalisme bipoint, on écrit par exemple le premier argument de cette preuve sous la forme :

$$\begin{aligned}&(H_A - A).(D - C)\\ &= ((H_A - B) + (B - A)).(D - C)\\ &= (H_A - B).(D - C) + (B - A).(D - C)\\ &= 0 \text{ (car } AB \perp CD \text{ et } H_A \text{ est l'orthocentre de } BCD.)\end{aligned}$$

c) On va prouver que $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$.

$$\begin{aligned}&AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2\\ \Leftrightarrow\ & \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CD}\right\|^2\\ \Leftrightarrow\ & \left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}\right)\\ \Leftrightarrow\ & \left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}).\overrightarrow{AC}\\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}\right) = 0\\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right) = 0\\ \Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = 0.\end{aligned}$$

La dernière égalité est évidente car $AC \perp BD$.
De même, on a $BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$.

En utilisant le formalisme bipoint, on remplacerait la première partie de cette preuve par

$$\begin{aligned}&AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2\\ \Leftrightarrow\ & (B - A)^2 + (D - C)^2 = (C - B)^2 + (D - A)^2\\ \Leftrightarrow\ & D\cdot A + C\cdot B - B\cdot A - D\cdot C = 0\\ \Leftrightarrow\ & (C - A)\cdot(D - B) = 0.\end{aligned}$$

La dernière égalité est évidente car $AC \perp BD$.

De même, on a $BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$.

d) Dans ce cas, la méthode synthétique montre son avantage car il n'est pas évident de prouver cette propriété en utilisant le calcul vectoriel ou la notation bipoint.

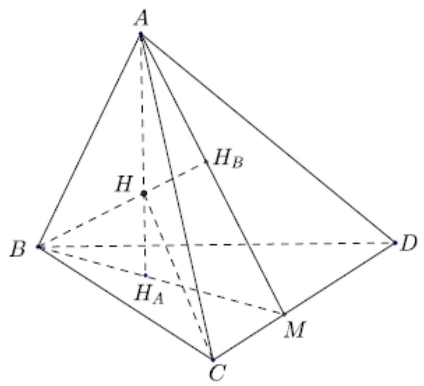


FIGURE *4.55*

D'abord, on va démontrer que AH_A et BH_B sont sécants. Notons M l'intersection de BH_A et CD. On a $BH_A \perp CD$ par définition de H_A et $AB \perp CD$ par hypothèse. La droite CD est donc perpendiculaire au plan ABM car perpendiculaire (ou orthogonale) à deux droites sécantes de ce plan. Par conséquent, CD est perpendiculaire (ou orthogonale) à toutes les droites de ce plan, en particulier $CD \perp AM$. De plus, $CD \perp AH_B$ par définition de H_B donc le point H_B appartient à AM, H_B appartenant au plan ACD.

Situons-nous à présent dans le triangle ABM : $BH_B \perp$ plan ACD en vertu du point b) démontré plus haut ; par conséquent, BH_B est une des hauteurs du triangle ABM, AH_A en étant une autre : elles se coupent donc en un point H.

On démontre de manière équivalente que H est le point de rencontre de AH_A et CH_C, et aussi de AH_A et DH_D, ce qui est la thèse.

4.3.2.3 Exemple 3

On considère un tétraèdre $ABCD$ tel que les triangles ABD et ABC sont rectangles en B. Démontrer que les droites AB et CD sont orthogonales.

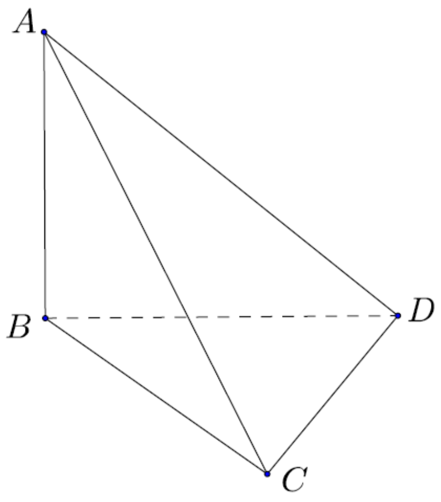


FIGURE 4.56

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}\\ &= 0 \quad (\text{car } AB\perp CB \text{ et } AB\perp BD).\end{aligned}$$

Dans le formalisme bipoint, la preuve s'écrit :

$$(A-B).(B-D)=0 \Rightarrow A\cdot B - A\cdot D - B^2 + B\cdot D = 0 \quad (1)$$
$$(A-B).(B-C)=0 \Rightarrow A\cdot B - A\cdot C - B^2 + B\cdot C = 0 \quad (2)$$

$$(1)-(2) \Rightarrow A\cdot C - A\cdot D - B\cdot C + B\cdot D = 0 \Rightarrow (A-B).(C-D)=0$$

ou les droites AB et CD sont orthogonales.

Dans cet exemple, la preuve utilisant le calcul vectoriel semble être plus facile que celle utilisant le formalisme bipoint. En effet, pour prouver que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ en notant que, dans les hypothèses, on a déjà les deux relations : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, il est naturel de penser à la relation de Chasles ici pour écrire $\overrightarrow{CD}$ sous la forme $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}$. Cependant, la preuve utilisant le formalisme bipoint est aussi évident car, on commence par la thèse qu'il faut prouver la relation suivante :

$$(A-B).(C-D)=0 \Leftrightarrow A\cdot C - A\cdot D - B\cdot C + B\cdot D = 0(3)$$

Ensuite on continue avec les hypothèses pour obtenir (1) et (2) et on voit tout de suite qu'il faut prendre $(1) - (2)$ pour avoir (3).

Par conséquent, il nous semble que, même si les deux types de preuves ne sont pas équivalentes ici, ce n'est pas facile de comparer et d'indiquer quel type de preuve est plus efficace dans cet exemple.

4.3.2.4 Exemple 4

On considère un tétraèdre $ABCD$ tel que les triangles ABD et ABC sont isocèles rectangles en A. Si G est le centre de gravité du triangle BCD, démontrer que AG et CD sont orthogonales.

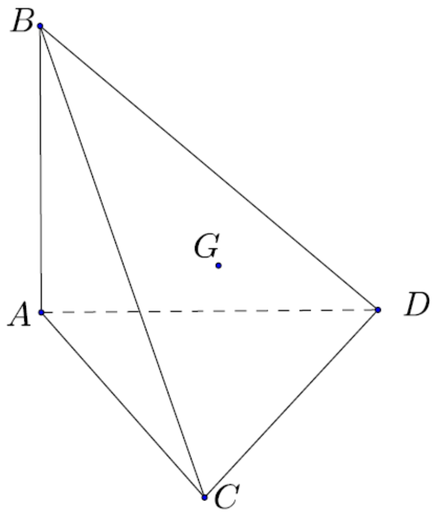


FIGURE *4.57*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CD} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{CD}\\
&\quad \text{(ici on utilise une propriété du centre gravité selon laquelle,}\\
&\quad \text{si } G \text{ est le centre de gravité de } BCD \text{ alors, pour un point}\\
&\quad A \text{ quelconque, on a } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD} \quad \text{(avec } M \text{ milieu de } CD \text{ selon}\\
&\quad \text{une propriété vectorielle du milieu)}\\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} \quad \text{(car } ACD \text{ est isocèle en } A \text{ alors } AM\perp CD\text{)}\\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right)\\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\\
&= 0 \quad \text{(car } AB\perp AC \text{ et } AB\perp AD\text{)}
\end{aligned}$$

Par conséquent, AG et CD sont orthogonales.

En utilisant le formalisme bipoint, on a

$$G = \frac{B+C+D}{3},$$

$$(B-A)\cdot(D-A) = 0,$$

$$(B-A)\cdot(C-A) = 0,$$

$$(B-A)^2 = (C-A)^2 = (D-A)^2.$$

Il faut prouver que AG et CD sont orthogonales, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
&(G-A)\cdot(D-C)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{B+C+D}{3}-A\right)\cdot(D-C)=0\\
\Leftrightarrow\ & B\cdot D - B\cdot C - C^2 + D^2 - 3A\cdot D + 3A\cdot C = 0\\
\Leftrightarrow\ & 3A\cdot C - 3A\cdot D - B\cdot C + B\cdot D + 2A\cdot D - 2A\cdot C = 0\\
& \text{(car } (D-A)^2 = (C-A)^2 \text{ donc } D^2 - C^2 = 2D\cdot A - 2C\cdot A\\
& = 2A\cdot D - 2A\cdot C)\\
\Leftrightarrow\ & B\cdot D - B\cdot C - A\cdot D + A\cdot C = 0\\
\Leftrightarrow\ & (B-A)\cdot(D-C) = 0.
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité est vraie puisque $(B-A)\cdot(D-A)=0$ et $(B-A)\cdot(C-A)=0$ donc
$$(A-B)\cdot((D-A)-(C-A))=0$$
ou
$$(A-B)\cdot(D-C)=0.$$

Par conséquent, AG et CD sont orthogonales.

Dans cette exemple, le formalisme bipoint montre son avantage en comparaison avec le calcul vectoriel car, pour le formalisme bipoint, on doit utiliser en plus certains propriétés comme le propriété du centre de gravité et du milieu. Par contre, pour le formalisme bipoint, on utilise seulement les règles algébriques pour démontrer la thèse.

4.3.2.5 Exemple 5

Soit $OABC$ un tétraèdre dont les trois bases OAB, OBC et OAC sont rectangles en O. H appartient au plan ABC tel que $OH \perp$ plan ABC. Prouver que H est l'orthocentre de ABC.

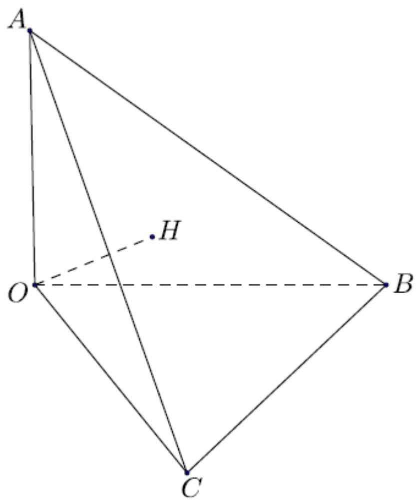


FIGURE *4.58*

On va prouver que $BH \perp AC$. De même, on prouverait que $AH \perp BC$ et donc que H est l'orthocentre de ABC. On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OH}\right) \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{AC} \quad (\text{car } OH \perp AC) \\
&= \overrightarrow{BO} \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \\
&= 0 \quad (\text{car } OB \perp OA \text{ et } OB \perp OC).
\end{aligned}$$

On peut utiliser la notation bipoint comme ci-dessous :

$$\begin{aligned}
(H-B).(C-A) &= (H-O+O-B).(C-A) \\
&= (O-B).(C-A) \text{ (car } OH \perp AC \text{ donc } (H-O).(C-A)=0) \\
&= (O-B).(C-O+O-A) \\
&= (O-B).(C-O)+(O-B).(O-A) \\
&= 0 \\
&\text{(car } OB \perp OA \text{ et } OB \perp OC \text{ donc} \\
&(O-B).(O-A) = 0 \text{ et } (O-B).(C-O) = 0\text{)}
\end{aligned}$$

4.3.2.6 Exemple 6

Soit $OABC$ un tétraèdre dont les trois bases OAB, OBC et OAC sont rectangles en O. Les points M, N, P sont les milieux respectifs de AB, BC et CA. Prouver que $OMNP$ est un tétraèdre équifacial (c'est-à-dire que ses arêtes opposées ont même longueur).

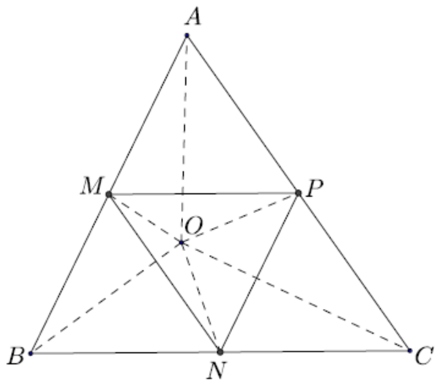


FIGURE *4.59*

On va prouver que $OM^2 = NP^2$. Pour les deux autres couples d'arêtes, la preuve est la même.

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OM}^2 = \overrightarrow{NP}^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{AB}^2 \\
\Leftrightarrow \quad & OA^2 + OB^2 = AB^2 \text{ (car } OB \perp OA \text{ donc } \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0\text{).}
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité est évidente car OAB est rectangle en O.

Dans le formalisme bipoint cela devient :

$$\begin{aligned}
OM^2 = NP^2 & \\
& \Leftrightarrow (M-0)^2 = (P-N)^2 \\
& \Leftrightarrow (\frac{A+B}{2} - O)^2 = (\frac{A+C}{2} - \frac{B+C}{2})^2 \\
& \Leftrightarrow O^2 - A.O - B.O + AB = 0 \\
& \Leftrightarrow (A-O).(B-O) = 0.
\end{aligned}$$

Cette égalité est évidente car OAB est rectangle en O.

4.3.2.7 Exemple 7

Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que $AB \perp AC$ et $AB \perp BD$. Les points P et Q sont les milieux de AB et CD respectivement. Prouver que $AB \perp PQ$.

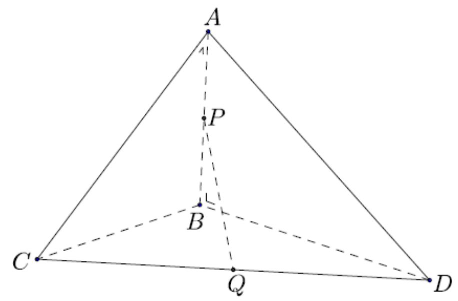


FIGURE 4.60

On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right) \quad \text{(car } Q \text{ est le milieu de } CD\text{)}\\
&= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}\right) \quad \text{(car } P \text{ est le milieu de } AB\text{)}\\
&= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right) \quad \text{(car } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \text{ et } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=0\text{)}\\
&= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)\\
&= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)\\
&= 0 \quad \text{(car } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \text{ et } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=0\text{).}
\end{aligned}$$

En utilisant la notation bipoint, on obtient :

$$\begin{aligned}
AB\perp PQ &\Leftrightarrow (B-A).(Q-P)=0\\
&\Leftrightarrow (B-A)\cdot\left(\frac{C+D}{2}-\frac{A+B}{2}\right)=0\\
&\quad\ \text{(car } P,Q \text{ sont les milieux respectifs de } AB \text{ et } CD\text{)}\\
&\Leftrightarrow B\cdot C+B\cdot D-B^2-A\cdot C-A\cdot D+A^2=0. \quad (1)
\end{aligned}$$

De plus, puisque $AB\perp AC$ et $AB\perp BD$, on a

$$\begin{aligned}
(B-A)\cdot(C-A) &= 0 \Leftrightarrow B\cdot C-B\cdot A-A\cdot C+A^2=0 \qquad (2)\\
(B-A)\cdot(D-B) &= 0 \Leftrightarrow B\cdot D-B^2-A\cdot D+A\cdot B=0. \qquad (3)
\end{aligned}$$

En additionnant les deux équations (2) et (3), on obtient (1). Par conséquent, $AB\perp PQ$.

4.3.2.8 Exemple 8

Soit $ABCD$ un tétraèdre équifacial. Soient d_1, d_2, d_3 les trois droites passant par B, C, D et parallèles à CD, BD, BC respectivement. Ces trois droites se coupent en B', C', D'. Prouver que AB', AC', AD' sont perpendiculaires deux à deux.

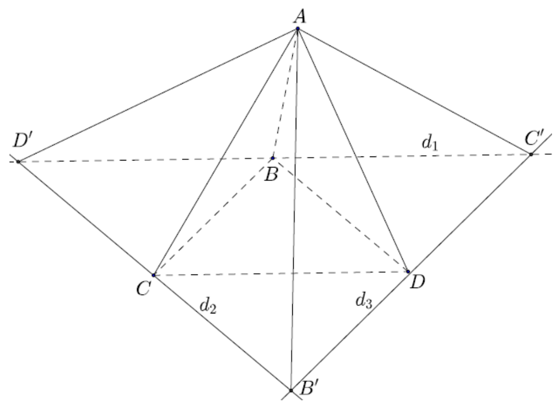


FIGURE *4.61*

On va prouver que $AB' \perp AC'$. Les autres relations sont démontrées de la même façon.

En utilisant le calcul vectoriel, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC'} &= \left((\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB'} \right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} \right) \\
&= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \right) \\
& \text{(car } BCB'D \text{ et } BC'DC \text{ sont deux parallélogrammes)} \\
&= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} \\
&= \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \right) \cdot \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \right) \cdot \overrightarrow{CD} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \right) \cdot \overrightarrow{AB} \\
& + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \right) \cdot \overrightarrow{CD} \\
&= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} \\
& + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}^2 \\
&= \overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \right) + \overrightarrow{BC} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \right) \\
&= \overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \right) + \overrightarrow{BC} \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} \right. \\
& \left. + \overrightarrow{BD} \right) \\
&= \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Notons ici que la preuve par le calcul vectoriel n'est pas évidente. La preuve s'appuyant sur la notation bipoint nous paraît plus facile.

$$\begin{array}{rcl} AB' \perp AC' & \Leftrightarrow & (B'-A)\cdot(C'-A)=0 \\ & \Leftrightarrow & ((D+C-B)-A)\cdot((B+D-C)-A)=0 \\ & & \text{(car } D-B'=B-C \text{ et } C'-B=D-C \\ & & \text{en utilisant la caractérisation d'un parallélogramme)} \\ & \Leftrightarrow & D^2-D\cdot A-A\cdot D+C\cdot B-C^2-B^2+B\cdot C+A^2=0 \\ & \Leftrightarrow & A^2-D\cdot A-A\cdot D+D^2=B^2-B\cdot C-C\cdot B+C^2 \\ & \Leftrightarrow & (D-A)^2=(C-B)^2 \\ & \Leftrightarrow & BC^2=AD^2 \end{array}$$

Cette dernière égalité est évidente car $ABCD$ est un tétraèdre équifacial dont les arêtes opposées ont même longueur.

4.3.2.9 Exemple 9

Soit $ABCD$ un tétraèdre équifacial. Prouver que MN est la perpendiculaire commune de AB et CD.

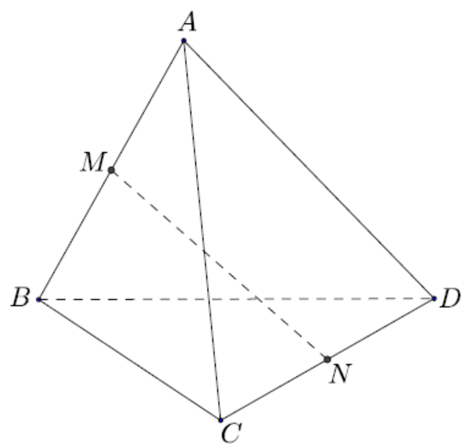


FIGURE *4.62*

On va prouver que MN et AB sont perpendiculaires. Dans cet exemple, nous optons pour une preuve utilisant le formalisme bipoint.

Puisque $ABCD$ est un tétraèdre équifacial, on a :

$$\begin{array}{rcll} (B-A)^2 & = & (D-C)^2 \Leftrightarrow B^2-2B\cdot A+A^2=D^2-2D\cdot C+C^2 & (1) \\ (C-B)^2 & = & (D-A)^2 \Leftrightarrow C^2-2C\cdot B+B^2=D^2-2D\cdot A+A^2 & (2) \\ (D-B)^2 & = & (C-A)^2 \Leftrightarrow D^2-2D\cdot B+B^2=C^2-2C\cdot A+A^2. & (3) \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
(2)+(3) \quad \Rightarrow \quad & 2B^2 - 2C\cdot B - 2B\cdot D + C^2 + D^2 = 2A^2 - 2D\cdot A - 2C\cdot A \\
& + C^2 + D^2 \\
\Leftrightarrow \quad & A^2 - B^2 - C\cdot A + C\cdot B - D\cdot A + D\cdot B = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (C + D - A - B)\cdot(B - A) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 2\left(\frac{C+D}{2} - \frac{A+B}{2}\right)\cdot(B-A) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 2(N - M)\cdot(B - A) = 0.
\end{aligned}
$$

Cette dernière égalité montre que MN et AB sont perpendiculaires. De même, on peut prouver que MN et CD sont perpendiculaires et ainsi que MN est la perpendiculaire commune de AB et de CD.

4.3.2.10 Exemple 10

On considère le tétraèdre $ABCD$ tel que le triangle BCD est équilatéral et les autres faces sont des triangles isocèles de sommet principal A.

a) Démontrer que deux arêtes gauches sont orthogonales.

b) Si H désigne l'orthocentre du triangle BCD, démontrer que la droite AH est perpendiculaire au plan BCD.

Là aussi, nous optons pour le formalisme bipoint.

a)

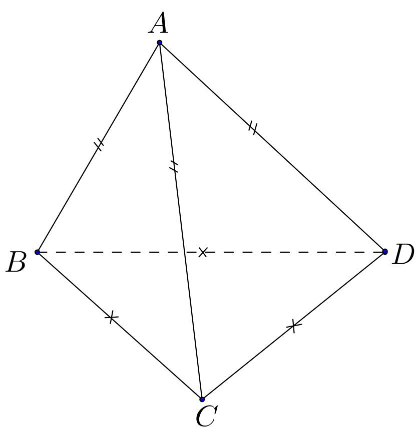


FIGURE *4.63*

On va prouver que AB et CD sont orthogonales.

On a $AB = AC = AD$ et $BC = CD = BD$, ou :

$$(B - A)^2 = (C - A)^2 = (D - A)^2, \quad (C - B)^2 = (D - C)^2 = (D - B)^2.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} B^2 - 2A \cdot B & = & C^2 - 2A \cdot C = D^2 - 2A \cdot D & (1) \\ B^2 - 2B \cdot D & = & C^2 - 2C \cdot D & (2) \\ C^2 - 2B \cdot C & = & D^2 - 2B \cdot D & (3) \end{array} \right.$$

De (1), on tire que $C^2 - D^2 = 2A \cdot C - 2A \cdot D$; de (3), on a $C^2 - D^2 = 2B \cdot C - 2B \cdot D$. Par conséquent,

$$2A \cdot C - 2A \cdot D = 2B \cdot C - 2B \cdot D \Leftrightarrow (B - A) \cdot (D - C) = 0$$

d'où $AB \perp CD$.

b)

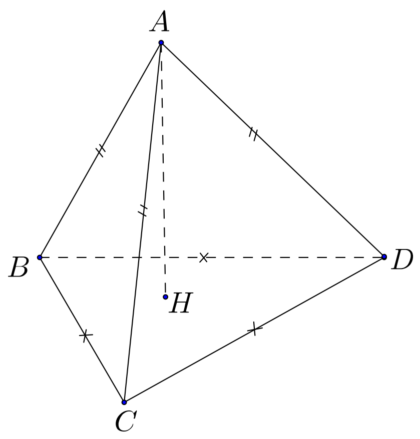


FIGURE *4.64*

Pour prouver que la droite AH est perpendiculaire au plan BCD, on va prouver que $AH \perp CD$ et $AH \perp BC$. On va démontrer la première relation, la deuxième pouvant être prouvée de la même façon.

Puisque le triangle BCD est équilatéral, son orthocentre H est aussi son centre de gravité, ce qui se traduit par l'égalité $H = \frac{B+C+D}{3}$.

$$\begin{aligned}
& AH \perp CD \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{B+C+D}{3} - A\right) \cdot (D-C) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & B \cdot D - B \cdot C - C^2 + D^2 - 3A \cdot D + 3A \cdot C = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & B \cdot D - B \cdot C + 2A \cdot D - 2A \cdot C - 3A \cdot D + 3A \cdot C = 0 \\
& (\text{car } (D-A)^2 = (C-A)^2 \text{ donc } -C^2 + D^2 = 2A \cdot D - 2A \cdot C) \\
\Leftrightarrow \quad & B \cdot D - B \cdot C - A \cdot D + A \cdot C = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (B-A) \cdot (D-C) = 0.
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité a été démontrée en a), donc on a $AH \perp CD$.

4.3.3 Valence instrumentale du formalisme bipoint et du formalisme vectoriel en géométrie métrique

4.3.3.1 Analyse comparative de l'instrumentalité du formalisme bipoint et de celle du formalisme vectoriel

On ne peut analyser l'instrumentalité d'un formalisme en géométrie métrique sans se référer à son instrumentalité en géométrie affine. En effet, comme l'illustre notre relevé de propriétés de la section 4.3.2, plusieurs d'entre elles mêlent la perpendicularité, l'orthogonalité ou les longueurs de segments à des notions affines telles que le parallélisme, le milieu d'un segment ou le centre de gravité. La présente analyse doit donc prendre en compte des éléments de l'analyse faite pour la géométrie affine et dans laquelle nous avons pointé l'efficacité du formalisme bipoint en ce qu'il évite l'usage de la relation de Chasles ou du vecteur nul et ce, grâce au fait qu'il se prête à des simplifications algébriques standard. On a vu en effet que ce formalisme lie directement les points-clés d'une configuration géométrique par le biais de leurs coordonnées génériques dans un repère affin quelconque, ce qui permet de n'utiliser qu'une seule expression bipoint du milieu M d'un segment AB ou d'un centre de gravité G d'un triangle ABC :

$$M = \frac{A+B}{2} \quad \text{et} \quad G = \frac{A+B+C}{3}$$

au lieu de plusieurs expressions vectorielles, en particulier celles où l'on fait intervenir un point P quelconque :

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}).$$

Nous allons voir si l'on conserve ces avantages du formalisme bipoint en géométrie métrique.

Le formalisme bipoint se prête aux calculs algébriques standard

L'usage du formalisme bipoint est facilité par certaines simplifications algébriques que permet l'égalité

$$(B-A)\cdot(D-C) = B\cdot D - B\cdot C - A\cdot D + A\cdot C.$$

Cette égalité est évidente par calcul : en effet,

$$\begin{aligned}
&(B-A)\cdot(D-C)\\
&\quad= (x_B-x_A)(x_D-x_C)+(y_B-y_A)(y_D-y_C)+(z_B-z_A)(z_D-z_C)\\
&\quad= \underline{x_Bx_D}\ \underline{\underline{-x_Bx_C}}\ \underline{\underline{\underline{-x_Ax_D}}}+\boxed{x_Ax_C}+\underline{y_By_D}\ \underline{\underline{-y_By_C}}\\
&\qquad \underline{\underline{\underline{-y_Ay_D}}}+\boxed{y_Ay_C}+\underline{z_Bz_D}-\underline{\underline{z_Bz_C}}\ \underline{\underline{\underline{-z_Az_D}}}+\boxed{z_Az_C}\\
&\quad= B\cdot D - B\cdot C - A\cdot D + A\cdot C.
\end{aligned}$$

Elle permet ainsi d'exprimer le produit scalaire de deux vecteurs quelconques comme somme de produits scalaires entre vecteurs représentés à partir de l'origine O : $B\cdot D$, par exemple, égale

$$(B-O)\cdot(D-O) = \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}.$$

Le formalisme bipoint permet donc de gérer des égalités "conviviales" pourvu qu'on en maîtrise la signification. Par exemple, l'égalité

$$(B-A)^2 = B^2 - 2B\cdot A + A^2$$

exprime l'équivalence entre deux expressions du carré de la longueur du segment AB.

La relation de Chasles versus le pilotage raisonné des calculs algébriques

L'examen des preuves vectorielles et bipoint des propriétés répertoriées à la section 4.3.2 permet de comprendre que la traduction, dans le formalisme bipoint, d'une preuve vectorielle déplace souvent la difficulté mais ne la supprime pas.

Prenons les relations dans un cube démontrées à la section 4.3.2.1, à commencer par l'orthogonalité de la diagonale de face AF et du côté BC du cube (figure 4.65)

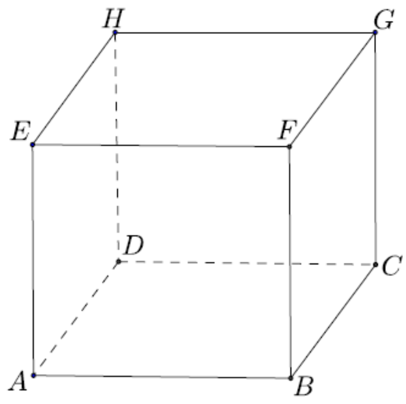


FIGURE 4.65

Afin de pouvoir exploiter la perpendicularité des côtés d'une face (ici AB et BC ainsi que BF et BC), on utilise la relation de Chasles pour décomposer $\overrightarrow{AF}$ en $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$. Il s'ensuit alors que

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

Or, on a vu, à la section 4.2.2.3, que certaines démonstrations de propriétés affines, dans le formalisme bipoint, permettaient l'économie de la relation de Chasles incluse d'office dans les simplifications algébriques telles que

$$B - A + A - C = B - C,$$

sans que l'on ait à décider d'aucune stratégie. Ce n'est pas le cas ici, la preuve de l'orthogonalité de AF et de BC dans le formalisme bipoint étant tributaire d'un pilotage du calcul algébrique où l'on décide d'écrire $F - A$ sous la forme $F - B + B - A$ de telle sorte de pouvoir faire intervenir les produits $(F - B) \cdot (C - B)$ et $(B - A) \cdot (C - B)$ dont l'annulation est liée aux hypothèses, à savoir que les faces du cube sont des carrés. En somme, on a la même difficulté technique exprimée de manières différentes en fonction du formalisme.

En ce qui concerne la propriété 2 concernant le tétraèdre orthocentrique, la difficulté technique se corse mais est bien présente dans les deux formalismes même si elle s'exprime différemment dans l'un et l'autre.

Rappelons qu'il s'agit de prouver que la troisième paire d'arêtes opposées AC et BD d'un tétraèdre $ABCD$ (figure 4.66) sont orthogonales dès que les deux autres paires d'arêtes opposées (AB et CD, BC et AD) le sont.

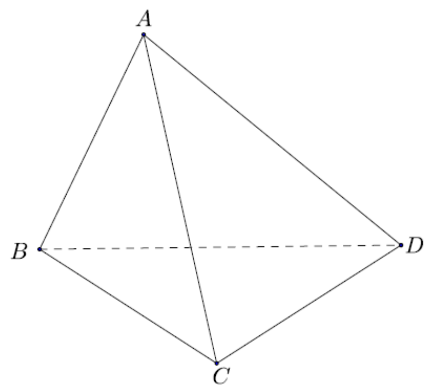


FIGURE *4.66*

Dans le calcul vectoriel, on décompose $\overrightarrow{AC}$ sous la forme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sous la forme $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$, pour recomposer ensuite $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ en $\overrightarrow{AD}$. Dans le formalisme bipoint, on additionne les égalités (1) et (2) :

$$B \cdot D - B \cdot C - A \cdot D + A \cdot C = 0 \quad (1),$$
$$C \cdot D - C \cdot A - B \cdot D + B \cdot A = 0 \quad (2),$$

puis on fait les simplifications algébriques qui se présentent et on réorganise le calcul pour faire apparaître le produit $(C - A) \cdot (D - B)$ par des mises en évidence imaginées à cette fin.

De même, pour prouver que AB et CD sont orthogonales dans le tétraèdre de la figure 4.67 où les faces ABD et ABC sont des triangles rectangles (l'exemple 3 à la section 4.3.2.3), on décompose $\overrightarrow{CD}$ en $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$ dans la preuve vectorielle alors que la preuve bipoint se règle en retranchant une égalité d'une autre et en factorisant judicieusement la nouvelle égalité ainsi obtenue.

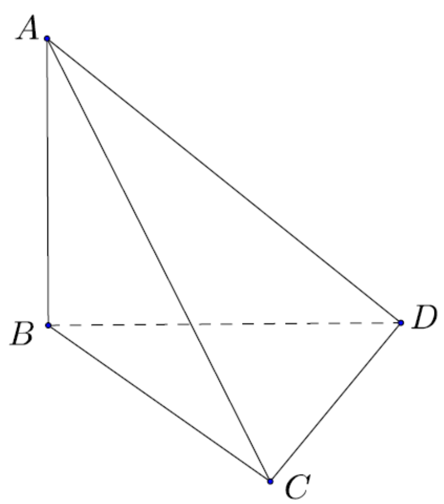


FIGURE *4.67*

A chaque fois l'enjeu est de pouvoir exploiter les hypothèses en ayant bien la thèse en vue. Dans le formalisme vectoriel, cela se traduit par l'usage de la relation de Chasles et, dans le formalisme bipoint, par l'exploitation des propriétés algébriques. Mais d'un côté comme de l'autre, rien ne se fait tout seul et il faut savoir piloter les calculs de manière délibérée et pertinente.

Un avantage pour le formalisme bipoint là où interviennent le milieu d'un segment et/ou le centre de gravité d'un triangle ?

Examinons de près les preuves de la propriété qui sert d'exemple 4 à la section 4.3.2.4 : dans la figure 4.68, il faut prouver que AG et CD sont orthogonales, G étant le centre de gravité d'une face d'un tétraèdre dont deux autres faces sont isocèles rectangles.

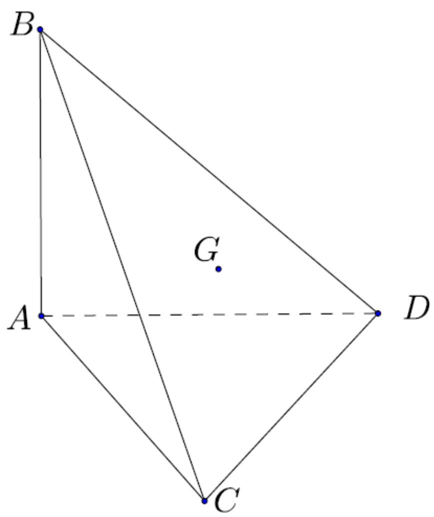


FIGURE *4.68*

La démonstration vectorielle est assez astucieuse car on s'y sert d'un point intermédiaire qui est le milieu M de CD. En effet, on veut démontrer que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ alors que A n'intervient pas comme sommet de la face dont G est centre de gravité. Il faut donc utiliser l'expression de ce dernier à partir de la caractérisation

$$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$$

en prenant $P = A$. Puis faire de même avec la caractérisation du milieu M de CD : $\overrightarrow{PM} = \frac{\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}}{2}$ de nouveau avec $P = A$ ce qui permet d'écrire $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

Il restera alors à décomposer $\overrightarrow{CD}$ en $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$ pour pouvoir exploiter les hypothèses.

La preuve bipoint semble aller plus de soi : à partir de l'expression des hypothèses, on ramène la thèse $(G - A) \cdot (D - C) = 0$ à $(B - A) \cdot (D - C) = 0$ et on exploite les hypothèses tout en exprimant G sous la forme $G = \frac{B+C+D}{3}$.

Pas d'intervention de M donc. Sans doute en raison de l'analyse faite à la section 4.2.2.3 : tous les points de la configuration étudiée sont tous rapportés de manière directe à un repère quelconque et la relation qui lie G directement aux sommets B, C et D du triangle dont il est le centre de gravité contient toute l'information utile.

Regardons de plus près ce qui se passe pour le milieu d'un segment dans le cas d'une propriété de la géométrie 2D. Voici un énoncé proposé sur internet à titre d'exercice :

Soit MAB est un triangle isocèle en M. C est le symétrique de B par rapport à M. Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.

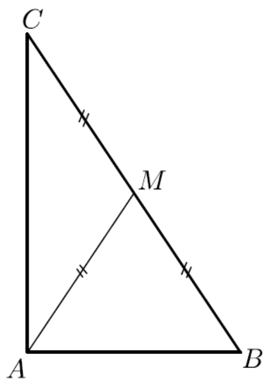


FIGURE 4.69

Le lecteur y reconnaitra, déguisée ici, une propriété classique des figures inscriptibles dans un cercle qui reprend, en partie, la propriété impliquée ici :

Le lieu du sommet A de l'angle droit d'un triangle rectangle d'hypoténuse BC est le cercle de diamètre BC.

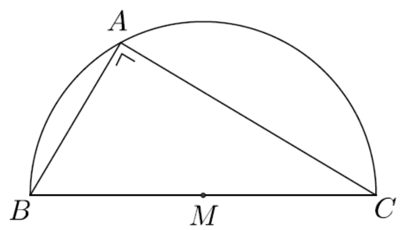


FIGURE 4.70

On peut rapprocher aussi la propriété initiale de celle que voici :

Dans un triangle, la longueur d'une médiane est égale à la moitié de la longueur du côté correspondant si et seulement s'il est un triangle rectangle.

Au delà de démonstrations par la méthode synthétique, possibles et multiples, nous souhaitons ici comparer deux preuves de la propriété énoncée plus haut, l'une par la méthode vectorielle, l'autre se basant sur le formalisme bipoint.

Preuve 1. (En utilisant le calcul vectoriel)

On a, par hypothèse, que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2}$:

$$\begin{aligned}
AM^2 &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} \\
&= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}) \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{BC^2}{4} \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \frac{BC^2}{4} \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{BC^2}{4} \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{BC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{BC^2}{4}
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$AM = \frac{BC}{2} \Leftrightarrow AM^2 = \frac{BC^2}{4} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Preuve 2. (En utilisant la notation bipoint)

Le point M est le milieu de BC donc

$$M = \frac{B + C}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
(M-B)^2=(M-A)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{B+C}{2}-B\right)^2=\left(\frac{B+C}{2}-A\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (C-B)^2=(B+C-2A)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad A^2+B\cdot C-B\cdot A-A\cdot C=0 \\
&\Leftrightarrow \quad (C-A)\cdot(B-A)=0.
\end{aligned}$$

On en déduit que $AB \perp AC$ (c'est-à-dire que le triangle BCD est un triangle rectangle) si et seulement si $MB = MA$ (ou $MA = \frac{BC}{2}$).

La preuve exploitant le calcul vectoriel nous paraît plus ingénieuse que celle utilisant la formalisme bipoint. En effet, il faut penser à faire intervenir le vecteur $\overrightarrow{AM}$ et surtout le décomposer deux fois par la relation de Chasles, d'abord pour faire intervenir B, puis pour faire apparaitre C, ensuite faire plusieurs regroupements et développements judicieux mais pas faciles à imaginer pour arriver, en fin de parcours, à déduire la thèse. Et nous tenons à souligner ici que ces calculs exploitent trois caractérisations pas si évidentes que cela pour exprimer que M est milieu de CB : $\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CM} = -\frac{BC^2}{4}$, $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{BC^2}{2}$.

Pour ce qui est de la preuve bipoint, la chaîne des calculs semble se dérouler de manière plus automatique car l'écriture bipoint des hypothèses rejoint assez naturellement celle de la thèse, même s'il y a intérêt à combiner analyse et synthèse pour transformer $A^2 + B\cdot C - B\cdot A - A\cdot C$ en $(C-A)\cdot(B-A)$.

Évidemment ce point de vue reste essentiellement subjectif car quelqu'un pourrait toujours imaginer une démonstration vectorielle plus “naturelle” et/ou une démonstration bipoint plus “alambiquée”.

Il n'empêche qu'il demeure avantageux d'exprimer que M est le milieu d'un segment BC d'une unique manière : $M = \frac{B+C}{2}$ dans le calcul bipoint plutôt que d'avoir à utiliser plusieurs caractérisations vectorielles. Et c'est bien ce dernier calcul qui permet de le faire en exprimant un lien direct entre B, C et M, invariant d'un repère à l'autre, alors que les preuves dans le formalisme vectoriel, en géométrie métrique, nécessite d'exploiter plusieurs caractérisations du milieu ou du centre de gravité.

De même, en ce qui concerne les deux derniers problèmes repris en 4.3.2.9 et 4.3.2.10, nous n'avons pas trouvé de preuve vectorielle, mais seulement une preuve bipoint alors que notre expérience personnelle comme étudiante et enseignante nous prédisposait à maîtriser davantage les techniques de preuves dans le formalisme vectoriel que dans le formalisme bipoint.

Jusqu'à preuve du contraire, nous faisons donc l'hypothèse d'une plus grande instrumentalité en faveur du formalisme bipoint, y compris en géométrie métrique.

Et pourtant, on aurait pu croire que le formalisme vectoriel était *a priori* le candidat favori en géométrie métrique car il permet une écriture particulièrement synthétique du produit scalaire, sous la forme

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

à partir des composantes des vecteurs $\vec{u}\,(u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$.

Cependant, si cette écriture vectorielle est très compacte, son exploitation en géométrie élémentaire suppose sa traduction en termes de points, ceux de la figure étudiée. On perd alors une concision d'écriture, ce qui rend le formalisme bipoint tout aussi performant que le formalisme vectoriel.

4.3.3.2 Du formalisme bipoint aux nombres complexes

Les nombres complexes permettent également des preuves calculatoires de propriétés en géométrie métrique ou en géométrie affine. Rosseel et Schneider (2011) détaillent et illustrent ce point de vue.

Nous nous intéressons ici au rapprochement que l'on peut faire avec le formalisme bipoint.

Aux points du plan de Gauss sont associés des nombres complexes qui sont leurs affixes. Ainsi, à A, on fait correspondre le nombre complexe $a = x_A + iy_A$ qui peut être défini comme le couple de réels (x_A, y_A). L'ensemble des complexes est muni d'une addition et d'une multiplication par un réel qui rapprochent le formalisme bipoint de ce qui peut être exprimé par ces nombres. Ainsi, les écritures

$$(x_A, y_A) + (x_B, y_B) = (x_A + x_B, y_A + y_B),$$
$$r(x_A, y_A) = (rx_A, ry_A)$$

permettent de modéliser le fait que $ABCD$ est un parallélogramme par $b - a = c - d$ où a, b, c et d sont les affixes respectives de A, B, C et D ou que M est le milieu, par exemple, du segment AB par $m = \frac{a+b}{2}$, relation qui lie les affixes a, b et m des points concernés.

Ces relations sont, en tout point comparables aux relations correspondantes en termes de bipoints : d'une part, $B - A = C - D$ et, d'autre part, $M = \frac{A+B}{2}$. En effet, que ce soit dans un des deux formalismes ou l'autre, ces relations signifient que

$$\begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C \\ y_B - y_A = y_D - y_C \end{cases}$$

dans le cas du parallélogramme et

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

dans celui du milieu.

Là s'arrête la comparaison : le produit scalaire $A \cdot B = x_A x_B + y_A y_B$ qui est un réel n'a évidemment rien à voir avec le produit de deux complexes :

$$(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

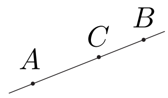
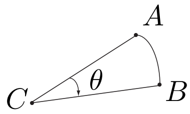
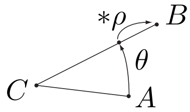
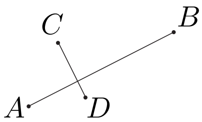
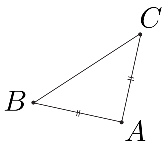
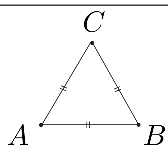
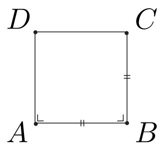
qui est un complexe.

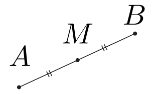
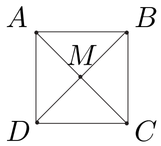
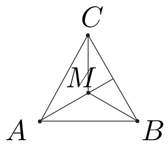
Mais, au-delà, c'est la capacité des complexes à "coder" les transformations du plan qui leur permet de rendre compte de certaines propriétés géométriques, en particulier,

1. Multiplier un nombre complexe z, affixe de $\mathbb{Z}$ par $a = \cos\alpha + i\sin\alpha$ revient à faire subir à $\mathbb{Z}$ une rotation de centre O et d'angle α.
2. Multiplier un nombre complexe z, affixe de $\mathbb{Z}$ par $u = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ revient à faire subir à $\mathbb{Z}$ une similitude de centre O, de rapport r et d'argument α.

Cette prise en compte des rotations par le formalisme des nombres complexes ne vaut évidemment que pour la géométrie $2D$ puisque seuls les quaternions permettent de modéliser, dans l'espace, les rotations autour d'un axe. Le formalisme bipoint garde donc tout son avantage pour traiter de propriétés de géométrie 3D.

Il n'empêche que, en géométrie 2D, l'écriture trigonométrique des nombres complexes autorise d'autres caractérisations de figures géométriques telles que le carré, le triangle rectangle, ... ainsi qu'en témoigne le tableau récapitulatif des stratégies de démonstrations par les nombres complexes que font Rosseel et Schneider (2011). Voici une partie ce tableau dont nous laissons juge le lecteur :

	Dessin	**Traduction dans $\mathbb{C}$**
Points alignés A, B et C		$c-a=r(b-a)$ avec r réel ou $\frac{c-a}{b-a}\in\mathbb{R}$
B est l'image de A par $r_{c,\theta}$		$b-c=(a-c)\text{ cis }\theta$ ou $\frac{b-c}{a-c}=\text{cis }\theta$
B est image de A par la similitude de centre C, de module ρ et d'argument θ		$b-c=(a-c)\rho\text{ cis }\theta$ ou $\frac{b-c}{a-c}=\rho\text{ cis }\theta$
$AB\perp CD$		$\frac{d-c}{b-a}$ est un imaginaire pur, soit $k\cdot i$, tel que $\lvert k\rvert$ est le rapport entre $\overline{CD}$ et $\overline{AB}$
ABC est un triangle rectangle et isocèle de sommet A		$\frac{c-a}{b-a}=\pm i$ ou $\frac{c-b}{a-b}=\sqrt{2}\text{ cis }\frac{\pi}{4}$(pour le dessin)
ABC est un triangle équilatéral		$\frac{c-a}{b-a}=\text{cis }\frac{\pi}{3}$
$ABCD$ est un carré		$\frac{d-a}{b-a}=i$ et $\frac{c-b}{a-b}=-i$ ou ...

	Dessin	**Traduction dans $\mathbb{C}$**
M est milieu de $[AB]$		$m = \dfrac{a+b}{2}$
M est le centre du carré $ABCD$		$\dfrac{m-d}{c-d} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ cis } \dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{c-m}{d-m} = i$
M est le centre de gravité du triangle équilatéral ABC		$\dfrac{a-m}{c-m} = \text{cis } \dfrac{2\pi}{3}$ ou $\dfrac{m-b}{c-b} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \text{ cis } \dfrac{\pi}{6}$

Cet élargissement des méthodes de preuve qu'autorisent les nombres complexes par leur capacité à modéliser les rotations d'angle quelconque dans le plan permet de traiter de nouvelles propriétés telles que la suivante :

Sur la figure 4.71, OAB et OA_1B_1 sont deux triangles équilatéraux de sens direct ayant un sommet commun O. On construit le parallélogramme $OBCA_1$. Montrez que le triangle ACB_1 est équilatéral et direct.

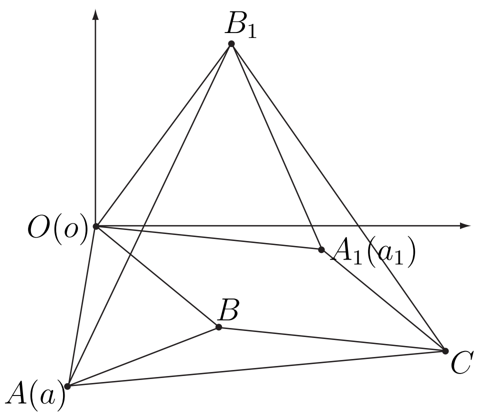


FIGURE 4.71

Hypothèses : $b = a \text{ cis } \dfrac{\pi}{3}$,

$b_1 = a_1 \text{ cis } \dfrac{\pi}{3}$,

$b + a_1 = c$.

Thèse : $b_1 - a = (c-a) \text{ cis } \dfrac{\pi}{3}\cdot$

<u>Démonstration</u> :

$$\begin{aligned}
(c-a)\text{cis}\,\frac{\pi}{3} &= (b+a_1-a)\ \text{cis}\,\frac{\pi}{3} \\
&= \left(a\ \text{cis}\,\frac{\pi}{3}+a_1-a\right)\ \text{cis}\,\frac{\pi}{3} && \text{par hypothèse} \\
&= a\ \text{cis}\,\frac{2\pi}{3}-a\ \text{cis}\,\frac{\pi}{3}+a_1\ \text{cis}\,\frac{\pi}{3} && \text{en distribuant}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c-a)\text{cis}\,\frac{\pi}{3} &= a\left(\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}-\ \text{cis}\,\frac{\pi}{3}\right)+b_1 \quad \text{par hypothèse} \\
&= -a+b_1 \quad \text{ou} \quad b_1-a.
\end{aligned}$$

Comme cette démonstration l'illustre, la caractérisation d'un triangle équilatéral exploitant la forme trigonométrique d'un nombre complexe permet d'éviter la manipulation parfois malaisée de l'expression de la distance entre deux points.

Cependant, il nous semble que les problèmes qui sont avantageusement prouvés de la sorte sont artificiels et qu'ils sont créés seulement pour utiliser les relations entre nombres complexes. Alors que pour de nombreux autres problèmes plus connus et fondamentaux, l'utilisation les nombres complexes n'est pas un choix performant.

Quant aux problèmes de géométrie 3D, nous avons vu ce qu'il en était.

CONCLUSION DU CHAPITRE 4

Dans ce chapitre, nous avons étudié les valences sémiotique et instrumentale du formalisme bipoint tant en géométrie métrique qu'en géométrie affine.

La valence sémiotique est relative ici au MER construit précédemment et à l'ingénierie didactique qui le décline. Nous pensons en effet que ce sens est fortement induit par l'enseignement lui-même, la relativité institutionnelle du savoir concernant autant la construction de ce savoir que les pratiques qui lui sont liées.

Dans le cas présent, on construit un nouveau cadre mathématique en considérant un autre cadre comme soubassement. La géométrie synthétique euclidienne permet en effet de valider des relations algébriques comme modèles de configurations géométriques de base :

- le parallélogramme (éventuellement aplati)
- les configurations particulières de points alignés

en géométrie affine et :

- la perpendicularité de droites
- la distance entre deux points

en géométrie métrique.

Ces relations “bipoint” résument des relations homologues entre coordonnées des points-clés de la configuration :

$B - A = C - D$, par exemple pour le parallélogramme

mais sont invariantes par changement de repère et préfigurent donc les propriétés intrinsèques des vecteurs. Pour les élèves, le caractère générique des calculs dans un repère quelconque assure ce caractère intrinsèque.

L'amarrage de cette géométrie calculatoire à la géométrie euclidienne, même en ce qui concerne la géométrie affine à laquelle la première est subordonnée, est assumé dans un parcours heuristique replaçant les élèves dans la position des mathématiciens qui, dans l'histoire, cherchaient à modéliser la géométrie euclidienne (entre autres) par un formalisme indépendant du choix du repère. Il faut d'ailleurs souligner qu'il faut peu de résultats de géométrie élémentaire pour valider le calcul bipoint : cas d'isométrie et de similitude des triangles, théorèmes de Thalès et de Pythagore. Nous avons d'ailleurs montré qu'une économie substantielle peut être réalisée pour démontrer ces résultats, en montrant que, somme toute, le théorème de Pythagore relève d'une certaine façon de la similitude des figures et que le théorème de Thalès suffit pour fonder la géométrie affine.

La valence instrumentale de ce formalisme bipoint est étudiée, quant à elle, à la lumière des démonstrations de propriétés géométriques que ce formalisme permet. Elle est aussi comparée à la valence instrumentale du calcul vectoriel, dans les mêmes conditions.

En ce qui concerne la géométrie affine, le calcul bipoint remplace avantageusement le calcul vectoriel et les stratégies classiques de preuve que suppose l'usage de ce dernier. En effet, le calcul bipoint lie directement les points-clés d'une configuration géométrique en les mettant sur pied d'égalité car tous sont implicitement référés à une origine et un repère lesquels peuvent être changés sans altérer la forme des relations bipoint. Ce calcul exprime de ce fait les propriétés des figures en exploitant directement le modèle algébrique des configurations de base sans devoir systématiquement passer par des points intermédiaires. De la sorte, l'usage de la relation de Chasles, lié à des compositions et décompositions successives de vecteurs est inutile. De même, l'usage du vecteur nul, seul vecteur parallèle à deux autres vecteurs non nuls et non parallèles est inutile pour prouver que deux points sont confondus : il suffit de prouver qu'ils ont la même écriture "bipoint". Quant au milieu M d'un segment AB ou au centre de gravité G d'un triangle ABC, une seule relation bipoint suffit à les caractériser :

$$M = \frac{A+B}{2} \quad \text{et} \quad G = \frac{A+B+C}{3}$$

là où le calcul vectoriel doit jouer sur une multitude de caractérisations adaptées à telle ou telle preuve, y compris celles où l'on fait intervenir un point P quelconque. On perd ici une sorte de congruence, non pas entre registres au sens de Duval, mais entre les ensembles de stratégies associés respectivement au calcul bipoint et au calcul vectoriel.

A cela s'ajoute que le calcul bipoint jouit de règles équivalentes à celles de l'algèbre élémentaire dans $\mathbb{R}$. Pour autant bien sûr que l'on sache piloter les calculs.

Selon ce dernier point de vue, nous avons montré une différence entre géométrie affine et géométrie métrique. Dans les preuves relevant de la première, il faut peu d'ingéniosité pour mener les calculs dans le formalisme bipoint. Ce n'est plus le cas en géométrie métrique où il faut savoir décider d'une stratégie de calcul comme celle qui consiste à additionner, membre à membre, deux identités algébriques. Dans cette géométrie, le choix d'un formalisme ou d'un autre peut se traduire par un déplacement de la difficulté technique sans éviter un recours à l'ingéniosité.

Quant aux nombres complexes, ils complètent les calculs bipoint pour exprimer des rotations en géométrie 2D mais leur apport est parfois illustré par des applications fort artificielles.

CHAPITRE 5

ÉCOLOGIE DU CALCUL BIPOINT SUR LE TERRAIN

L'écologie du calcul bipoint, dans le contexte particulier du MER construit dans les chapitres précédents, se doit d'être étudiée en référence aux publics concernés : celui des élèves d'une part, celui des enseignants d'autre part.

Nous avons, jusqu'à présent, considéré le concept d'écologie en un sens commun faisant ainsi appel à une métaphore importée d'une science appelée "écologie". A la section 5.1, nous revenons sur ce concept nomade emprunté à une autre science pour être utilisé en didactique. Les sections 5.2 et 5.3, quant à elles, concernent respectivement deux expérimentations qui apportent des éléments de réponse à la question étudiée dans cette thèse, du côté des élèves, d'une part, et, du côté du milieu enseignant, d'autre part.

5.1 Sur l'écologie didactique des savoirs

5.1.1 Sur l'origine des mots "écologie", "niche écologique"

Nous nous contenterons ici d'une définition sommaire et simple de l'écologie empruntée à `www.toupie.org/Dictionnaire/Ecologie.htm` :

> *Définition de* **l'écologie**. *Étymologie : du grec "oikos", maison et "logos", science, connaissance.* **L'écologie** *est la science qui étudie les milieux et les conditions d'existence des êtres vivants et les rapports qui s'établissent entre eux et leur environnement, ou plus généralement avec la nature.*

Le concept de "niche écologique", quant à lui, traduit à la fois, selon `https:`

//fr.wikipedia.org/wiki :

> *1. la "position" occupée par un organisme, une population ou plus généralement une espèce dans un écosystème,*
>
> *2. la somme des conditions nécessaires à une population viable de cet organisme.*

Mais, il convient de distinguer "niche écologique" et "habitat", ainsi qu'expliqué dans www.biodiversite-poitou-charentes.org :

> *Dans tout écosystème, il est fréquent que de nombreuses espèces puissent se rencontrer dans le même habitat, en revanche, en les observant attentivement on remarque qu'elles occupent chacune une niche écologique bien distincte.*
>
> *La niche écologique peut se définir comme le rôle de l'espèce (proies, prédateurs) dans le fonctionnement de l'écosystème.*
>
> *Selon la célèbre analogie d'Odum (1959) : "la niche écologique, c'est la profession de l'espèce alors que l'habitat en est l'adresse".*
>
> *Deux espèces ayant la même niche écologique sont donc en "compétition".*
>
> *Le principe de la sélection naturelle tend à favoriser celle qui est la plus "adaptée" à la niche écologique, c'est-à-dire celle qui se reproduit et y survit le plus efficacement.*

Nous nous contenterons ici de ce quelques références pour nous attacher plus particulièrement à l'usage du concept d'écologie en didactique.

5.1.2 Le concept d'écologie en didactique

Comme l'explique Konstantinos Grivopoulos (2014) [117], la problématique écologique du savoir, chez Chevallard, interroge son arrivée (depuis d'autres institutions) dans l'enseignement, son interrelation avec d'autres objets de savoir, ainsi que les conditions et contraintes pesant sur son fonctionnement, sa survie ou son obsolescence, etc. Comme dit Chevallard :

> *D'où viennent ces nouveaux objets enseignés ? Comment sont-ils arrivés là ? Quelles interrelations avec quels autres objets, y nouent-ils ? Et, aussi, surtout : pourquoi sont-ils arrivés jusque-là ? (Chevallard, 1994, pp. 142).*

Comme le précise Artaud (1997), le concept d'écologie s'applique au "possible" aussi bien qu'à "l'existant" :

117. GRIVOPOULOS 2014, p. 123.

> *La problématique écologique se présente d'emblée comme un moyen de questionner le réel. Qu'est-ce qui existe, et pourquoi ? Mais aussi qu'est-ce qui n'existe pas et pourquoi ? Et qu'est-ce qui pourrait exister ? Sous quelles conditions ? Inversement, étant donné un ensemble de conditions, quels objets sont-ils poussés à vivre, ou au contraire sont-ils empêchés de vivre dans ces conditions ?* [118]

De plus, comme dans la science nommée "écologie", l'écologie de savoir est basée sur les notions d'*habitat* et de *niche* des objets de savoir. L'habitat est défini comme le lieu de vie et l'environnement conceptuel d'un objet de savoir tandis que la niche décrit la place fonctionnelle occupée par l'objet de savoir dans le système ou praxéologie des objets avec lequel il interagit. Comme le montre Rajoson (1988), un objet d'enseignement doit - pour être *"viable"* - se trouve l'équivalent d'une niche écologique, c'est-à-dire faire partie d'une organisation d'objets beaucoup plus vaste que le simple problème qu'il résout : un *"tout-structuré"*.

Mais, comme le souligne Schneider (2008), les contraintes pesant sur la transposition didactique peuvent se situer à des *"niveaux de co-détermination didactique"* (Chevallard, 2004) très variés, correspondant à des échelons de plus en plus élevés qui vont d'un *"sujet"* mathématique précis comme la primitive d'une fonction rationnelle à la *"civilisation"* en passant entre autres par la *"discipline"*, la *"pédagogie"*, *"l'école"* ou la *"société"*. Ainsi, l'organisation du temps scolaire en *"cours"* d'une heure peut-elle influencer le choix des sujets traitables.

Dans notre thèse, l'écologie du calcul bipoint sera étudiée à un niveau élevé de l'échelle de co-détermination car, dans la section 5.4, nous articulerons l'ensemble des analyses faites ici, y compris celles portant sur la transposition didactique ainsi que sur les valences sémiotique et instrumentale de ce calcul. Mais, comme nous l'avons annoncé au début de ce chapitre 5, nous investiguerons ici d'abord du côté des élèves, ensuite du côté des enseignants. La section 5.2 concerne l'expérimentation avec les élèves.

5.2 L'expérimentation avec les élèves

5.2.1 Les enjeux et le contexte de l'expérimentation

Les enjeux peuvent être décrits à la lumière des analyses précédentes :

- D'abord, l'analyse d'un MER, au chapitre 3, que concrétise un projet d'enseignement dont quelques extraits ont servi d'ingénierie pour l'expérimentation menée. Ce MER fait du formalisme bipoint un marchepied vers la

118. Artaud, M., 1997, *Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. Dans M. Bailleul (dir.)*, Actes de l'11$^{\text{ème}}$ École d'été de didactique des mathématiques, Rennes, pp. 101.

géométrie vectorielle, au départ de la géométrie analytique, tout en étant validé sur base de théorèmes de la géométrie euclidienne.

- Ensuite, l'analyse, menée au chapitre 4, de la valence sémiotique du calcul bipoint telle que travaillée dans cette ingénierie.

Seule la géométrie affine 2D est concernée dans l'expérimentation. A la section 4.2.1 et dans le projet d'enseignement, nous avons expliqué que les invariants majeurs de cette géométrie, le parallélisme de droites et le rapport de section formé par trois points alignés, découlaient de l'étude de configurations géométriques de base : le parallélogramme, d'une part, et un faisceau de parallèles coupée par deux sécantes, d'autre part. En réalité, comme nous l'avons montré, la deuxième configuration permet de traiter celle du parallélogramme via sa propriété des diagonales mais ce n'est pas le choix retenu en géométrie 2D. Et ce, pour permettre de faire travailler les élèves sur la signification d'une première implication entre relations bipoint :

$$B - A = C - D \Leftrightarrow \frac{B + D}{2} = \frac{A + C}{2}.$$

Nous avons également montré, au chapitre 4, que le formalisme bipoint était propre à modéliser algébriquement ces configurations de base tout en exprimant les propriétés intrinsèques des vecteurs.

Les analyses *a priori* des tâches proposées aux élèves sont donc ici largement entamées. En particulier, elles étayent le **caractère fondamental** des tâches dévolues aux élèves. Comme Brousseau (1998) le définit, une tâche, une question ou un problème ont un caractère fondamental par rapport au savoir visé par un enseignement lorsque ce savoir apporte la réponse optimale - parfois exclusive - à cette question ou ce problème qui relève ainsi de **"vraies raisons d'être"** de ce savoir, comme l'exprime Chevallard (1999). Ici il s'agit, en gros, de déterminer les coordonnées du quatrième sommet d'un parallélogramme et celles d'un point dont la position est spécifiée sur une droite déterminée par deux points, connaissant les coordonnées des autres points concernés.

Mais la dévolution aux élèves d'une tâche ou d'un problème doit respecter des conditions nécessaires sans lesquelles on peut craindre des **effets pervers du contrat didactique**, l'élève s'attachant surtout à deviner les attentes du professeur plutôt que de considérer vraiment le problème, l'enseignant se faisant des illusions sur la part réelle des élèves dans la construction du savoir.

La première de ces conditions est le caractère fondamental de la tâche et nous venons d'en parler. La seconde est l'existence d'un **milieu**, soit un ensemble de référents objectifs sur lesquels les élèves peuvent se baser pour évaluer leurs propres idées sans devoir chercher l'approbation ou la désapprobation du professeur. Ce milieu est relatif au stade de développement intellectuel des élèves mais est aussi constitué des expériences que chacun d'entre eux peut avoir vécu à un certain âge et aussi des connaissances déjà acquises dans sa scolarité.

Nous en venons aux élèves concernés. Notre expérimentation a été proposée à une classe de quatrième année du secondaire de l'Athénée Royal Charles Rogier à Liège. Ils ont donc le calcul vectoriel dans leur programme de mathématique mais n'ont pas encore reçu d'enseignement à ce sujet au moment de l'expérimentation, du moins en mathématique. Cependant nous verrons, à la section 5.2.2, qu'ils peuvent puiser, dans leurs connaissances scolaires, pour s'approprier les problèmes posés et progresser dans leur résolution. Comme tous les élèves de quatrième, ils ont 5 heures de mathématiques par semaine.

Il nous a été difficile de trouver un enseignant qui nous accepte dans sa classe en raison sans doute du "décalage" proposé par le projet par rapport aux programmes et pratiques enseignantes liées. De plus, les professeurs d'une même école sont plus ou moins obligés de proposer le même parcours à leurs élèves respectifs. Par conséquent, nous n'avons pu disposer que de cinq heures de cours, en réalité 5 fois 45 minutes environ et, de ce fait, nous avons dû faire quelques adaptations. En gros, nous avons pu proposer à tous les élèves la tâche liée au parallélogramme et celle relative à une configuration particulière de points alignés. Par contre, la réflexion proprement dite sur le calcul bipoint et sa signification n'a pu être menée plus loin que dans un seul groupe d'élèves.

La classe concernée comportait 27 élèves et ceux-ci ont été regroupés en 7 groupes de 3-4 élèves. Le professeur de la classe et un expérimentateur allaient d'un groupe à l'autre et leurs interventions sont reprises dans ce qui suit. L'expérimentateur a pris ensuite en charge le groupe d'élèves auxquels on a proposé de réfléchir davantage aux relations bipoint.

Aux dires de l'enseignant, les élèves étaient assez faibles et étaient peu motivés par leurs études. Le taux d'échec fin juin était assez élevé. Il précise :

"Quant à leurs savoirs antérieurs :

- Ils ont entendu parler de la notion de vecteur en sciences (forces) et en mathématique (translation)
- En troisième année : ils ont étudié la fonction du premier degré et les équations de droites. En ce qui concerne le parallélisme, ils regardent la pente (ou coefficient directeur) de la droite. Je ne suis pas sûre que la condition de parallélisme soit démontrée. Je crois qu'ils ont observé que le graphique d'une fonction du premier degré est une droite en dessinant beaucoup de points.
- Les enseignants mélangent souvent des écritures du type $f(x) = ax + b$ et $y = ax + b$."

Dans ce qui suit, nous faisons une analyse *a priori* prenant en compte ce qui serait possible *a priori* dans d'autres classes. Nous sommes en effet dans une période de transition car, comme le précise le professeur qui nous a accueillis dans sa classe :

"Cela dit, le référentiel des cours de troisième et quatrième a changé et le découpage des matières aussi ! Depuis l'an passé en troisième, on voit la fonction du premier degré, le graphique est une droite, mais on n'est pas censé parler d'équation de droite, de parallélisme, de perpendicularité ! Le nouveau programme est appliqué en quatrième année à partir de cette année. Nous devons parler de vecteurs, d'équation vectorielle paramétrique d'une droite, d'équations paramétriques cartésiennes et puis d'équation cartésienne et la condition de parallélisme, de perpendicularité et d'intersection de droites..."

5.2.2 Analyse *a priori* des problèmes dévolus

Cette analyse *a priori*, largement entamée depuis le chapitre 3 ainsi que nous l'avons expliqué plus haut s'enrichit ici de l'inventaire des stratégies que les élèves sont susceptibles d'engager à leur niveau de scolarité :

Problème 1.

Soient A, B et C trois points non alignés qui, dans un système d'axes déterminé, sont donnés par les coordonnées $A(-2; 2,6), B(4; 4)$ et $C(2,5; 1,2)$. Calculez les coordonnées du point D qui forme, avec ces points, le parallélogramme $ABCD$.

A cet énoncé s'ajoute ensuite une exigence de généralisation où les coordonnées des points sont génériques. L'enjeu est évidemment de se focaliser sur les relations dont la forme est invariante par changement de repère même si un tel changement ne fait pas partie du programme scolaire.

Il s'agit ici de repères affins mais on tolère l'usage de repères orthonormés auxquels les élèves sont habitués sans insister à ce stade sur la distinction entre les deux types de repères.

Les stratégies potentielles que les élèves peuvent engager, à partir de leurs connaissances, sont multiples.

1. Puisque les élèves ont appris la formule de la distance entre deux points donnés dans un repère orthonormé et qu'ils sont habitués à la notion de longueur d'un segment, ils peuvent calculer AB et BC. Puis, en utilisant $AB = DC$ et $AD = BC$, ils peuvent trouver les coordonnées de D. Cependant, ici, pour éviter que les élèves ne s'en tiennent aux mesures en utilisant une règle, nous avons choisi des nombres décimaux comme coordonnées des points. Par conséquent, le calcul de la distance entre deux points n'est pas très évident. Par exemple, ici, on a :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{[4 - (-2)]^2 + (4 - 2,6)^2} = \sqrt{37,96}$$

et

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(2,5 - 4)^2 + (1,2 - 4)^2} = \sqrt{10,09}.$$

De plus, avec les deux égalités $AB = DC$ et $AD = BC$, les élèves vont avoir deux équations du deuxième degré avec deux inconnues x_D, y_D qui sont les coordonnées de D. En détail, on a :

$$AB = DC \Leftrightarrow \sqrt{37,96} = \sqrt{(2,5 - x_D)^2 + (1,2 - y_D)^2}$$

et

$$AD = BC \Leftrightarrow \sqrt{10,09} = \sqrt{(x_D + 2)^2 + (y_D - 2,6)^2}.$$

On a donc le système de deux équations suivant :

$$\begin{cases} (2,5 - x_D)^2 + (1,2 - y_D)^2 = 37,96 \\ (x_D + 2)^2 + (y_D - 2,6)^2 = 10,09 \end{cases}$$

La résolution de ce système est possible sauf qu'elle est très lourde au niveau du calcul. Il faut remarquer aussi que le système de deux équations du deuxième degré avec deux inconnues n'existe pas dans le programme scolaire et qu'on n'y voit pas une technique générale pour résoudre ce type du système. Les élèves doivent donc faire preuve d'une certaine ingéniosité et, avec les nombres décimaux dans le calcul, ça devient trop compliqué pour donner le résultat final.

2. Les élèves ont peut-être étudié aussi l'équation d'une droite donc ils peuvent aussi trouver le point D comme l'intersection de deux droites sécantes. Cependant, cette possibilité dépend du professeur car, en fait, l'équation d'une droite est dans le programme de quatrième année avec le calcul vectoriel mais le professeur peut choisir d'enseigner l'équation d'une droite avant ou après le calcul vectoriel. Si les élèves ont déjà étudié l'équation d'une droite, ils peuvent d'abord trouver l'équation de la droite passant par A et B :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow 1,4x - 6y + 18,4 = 0.$$

Ensuite, ils peuvent assumer que la droite passant par C et D a l'équation $1,4x - 6y + a = 0$ car elle est parallèle à AB. En utilisant le fait que les coordonnées de C satisfont cette équation, ils peuvent trouver a :

$$1,4.2,5 - 6.1,2 + a = 0 \Leftrightarrow a = 3,7.$$

Puisque les coordonnées de D satisfaisaient cette équation aussi, on a :

$$1,4x_D - 6y_D + 3,7 = 0.$$

On a donc une équation du premier degré avec deux inconnues x_D et y_D.
On fait la même chose pour l'équation de la droite AD qui est parallèle à la droite BC et on a une autre équation avec deux inconnus x_D et y_D.
Ensuite, on peut résoudre un système de deux équations du premier degré avec deux inconnues pour trouver les coordonnées de D.

Cette approche est plus facile au niveau du calcul en comparaison avec la première approche précédente, mais ce n'est pas sûr que les élèves ont déjà toutes les connaissances nécessaires concernant les équations de droites pour arriver à cette stratégie.

3. Les élèves peuvent aussi utiliser l'équation d'un cercle : D est à l'intersection du cercle de centre A et de rayon BC et du cercle de centre C et de rayon AB. Cependant, cette approche est presque la même que la première car on arrive exactement à deux équations du deuxième degré avec deux inconnues comme la première approche.
4. En utilisant soit la formule du milieu d'un segment, soit les triangles isométries, soit la translation "horizontale" et "verticale", on peut aussi attendre que les élèves nous donnent les deux équations suivantes :

$$x_A - x_B = x_D - x_C;\ y_A - y_B = y_D - y_C$$

ou

$$\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2};\ \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2}.$$

Par contre, il est peu probable que les élèves en apportent une preuve car, comme expliqué dans la partie épistémologique, il y a, par exemple, de moins en moins de démonstrations liées aux cas d'isométrie des triangles ou d'autres démonstrations dans les pratiques enseignantes. Par conséquent, les élèves n'ont pas d'habitude de faire une preuve. De plus, quand on parle d'un parallélogramme, les élèves pensent plutôt au quadrilatère avec des côtés opposés parallèles ou égaux au lieu d'un quadrilatère dont les deux diagonales se coupent en leur milieu donc cette approche est peut-être moins connue chez les élèves.

En fait, on attend au premier problème une modélisation algébrique de la configuration géométrique (ici c'est un parallélogramme) qui ne change pas au choix du repère et puis amener à l'écriture $A - B = D - C$, donc on attend la quatrième réponse. L'enjeu mathématique ici est de passer de la géométrie analytique à la géométrie intrinsèque. De plus, c'est la réponse optimale pour ce problème, autrement dit c'est une situation fondamentale qu'on donne aux élèves.

Continuons avec le deuxième problème donné aux élèves :

Problème 2.

Soient, par exemple, les points de coordonnées $A(1, 1)$ et $B((2, 3)$. Déterminez les coordonnées d'un point $P(x_P, y_P)$ situé sur la droite AB et deux fois plus éloigné de A que de B.

Le deuxième problème renvoie à la "distance" donc la plupart des élèves pourraient penser à utiliser la formule de la distance pour trouver P. Ils vont peut-être arriver à l'égalité

$$(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 = (x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2$$

$$\Leftrightarrow (x_P - 1)^2 + (y_P - 1)^2 = (x_P - 2)^2 + (y_P - 3)^2.$$

Pour ceux qui pensent que le point P est d'office à l'extérieur de AB, il peuvent calculer la distance AB et puis arriver à l'égalité $PB = AB$.

Cependant, avec seulement la formule de la distance, on ne peut pas obtenir les coordonnées de P car on a bien un cercle pour tous les points qui ont la même distance avec un point fixé. Il faut ici donc le critère de l'alignement que les élèves ne connaissent pas en avance ou faire l'intersection d'une droite et d'un cercle.

On peut attendre que les élèves donnent une autre relation entre x_P et y_P en utilisant l'équation de la droite AB. Cependant, comme expliqué dans le premier problème, l'équation de la droite est peut-être enseignée après le calcul vectoriel et dans ce cas, les élèves n'arrivent pas à trouver une autre relation entre deux coordonnées de P pour résoudre ce problème. Par conséquent, une sorte de "translation" est plus raisonnable dans ce cas.

5.2.3 Les données empiriques

5.2.3.1 Expérimentation I : Le critère d'un parallélogramme

Comme dit auparavant, nous donnons aux élèves le problème suivant :

Problème 1.

Soient A, B et C trois points non alignés qui, dans un système d'axes déterminé, sont donnés par les coordonnées $A(-2; 2,6), B(4; 4)$ et $C(2,5; 1,2)$. Calculez les coordonnées du point D qui forme, avec ces points, le parallélogramme $ABCD$.

Après avoir posé le problème, les expérimentateurs précisent qu'ils attendent des élèves une piste de résolution du problème, sans forcément aller jusqu'à son terme. Les élèves travaillent en groupe, chaque groupe comprend 3-4 élèves. Les expérimentateurs rappellent certaines formules comme la formule de la distance si les élèves le leur demandent pour laisser plus de temps à la suite de l'expérimentation. De plus, les élèves ont des incertitudes concernant la définition du parallélogramme. Ils savent bien qu'un parallélogramme ont deux côtés opposés parallèles et égaux mais concernant les positions respectives des points, ils sont confus car ils ne semblent pas connaitre la convention liée à l'ordre des sommets dans l'énonciation du parallélogramme. Les expérimentateurs prennent à leur charge cette confusion aussi car ce n'est pas ce qui est prioritairement visé dans notre expérimentation. Et l'occasion en est donnée par un élève qui envisage deux positions possibles de D.

01. Prof. : Est-ce que parmi vous, il y a un groupe qui a trouvé plusieurs parallélogrammes ? Est-ce que vous êtes tous d'accord avec le fait qu'il y aurait un, deux ou plusieurs parallélogrammes ?

02. Élève 1 : Deux, oui. Le D est soit là soit là (il a montré les deux positions possibles pour le point D sur la figure 5.1.)

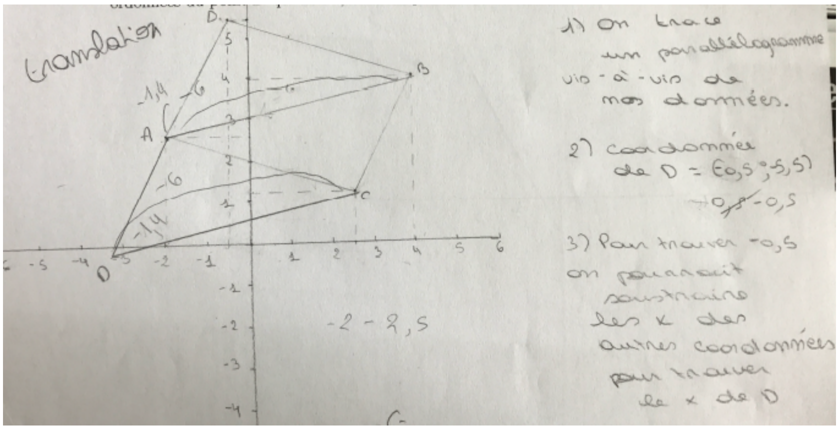


FIGURE *5.1*

03. Élève 2 : On n'en a qu'un.

04. Prof. : Alors, pourquoi tu n'es pas d'accord avec ça ?

05. Élève 2 : Avec l'ordre de points... nom du parallélogramme...

06. Prof. : Ici, regardez ... (Le prof. montre sur les figures dessinées sur le tableau). Il y a un problème avec le nom, quand on tourne, ça ne va pas avec les lettres donc on a qu'un parallélogramme.

Ensuite, les élèves se concentrent sur la recherche des coordonnées de D. Parmi les choix des élèves, nous trouvons plusieurs élèves qui considèrent que "dessiner", c'est "démontrer".

Une investigation liée totalement à la lecture des figures et aux mesures

Plusieurs élèves ont essayé de dessiner "exactement" le parallélogramme dans un repère orthonormé, puis ils ont mesuré les coordonnées de D pour obtenir la conclusion.

07. Élève 1 : Il faut un calcul ou on peut déterminer par dessin ?

08. Élève 2 : Par dessin.... On a déjà trois coordonnées sur les quatre, on peut recevoir le quatrième sur le dessin...

09. Élève 3 : Est-ce qu'on a une fonction de parallélogramme ?

10. Élève 1 : Mais il y a des virgules, on fait comment avec ça ?

11. Élève 2 : C'est pas grave, on mesurera...

(Après avoir mis tous les trois points sur un repère)

12. Élève 2 : Maintenant, c'est super facile, on relie, puis on fait le quatrième point...

13. Élève 1 : Et c'est tout ce qu'on doit faire ? (Après avoir fini le dessin)

14. Élève 2 : On mesurera et on donne les coordonnées de D. Regarde, ce n'est pas très parallèle mais c'est pas grave. On trouve les coordonnées, c'est $3,6; 0,25$.

15. Élève 3 : Je vois pas qu'on peut faire d'autre...

16. Élève 2 : Oui, c'est parfait !

(Le professeur vient...)

17. Prof. : Vous avez déjà les coordonnées de D ? Vous avez deviné ?

18. Élève 2 : Non, on les calcule...

19. Prof. : Ah, donc ça sera intéressant d'expliquer : comment avez vous calculé ? et c'est ça nous intéresse. Quel type de calcul vous avez faits ? Le D là, comment as tu tracé ?

20. Élève 2 : On fait les droites parallèles à ça (AB) et à ça (BC) et on mesure le D.

21. Prof. : Ah, donc tu a lu sur ton dessin ?

22. Élève 2 : Oui mais de toute façon il est vrai car, voyons, c'est bien un parallélogramme.

23. Prof. : Mais il faudrait une technique qui permettrait de trouver les coordonnées des points avec les exactitudes. Parce que ici, est-ce que c'est bien vrai... ?

24. Élève 1 : ... Donc il faut des calculs, et des propriétés d'un parallélogramme...

25. Prof. : Oui, et quelles sont les propriétés d'un parallélogramme ?

26. Élève 2 : Les deux côtés sont parallèles et égaux, deux diagonales se coupent en leur milieu, les angles sont égaux aussi ...

27. Prof. : Si vous avez besoin un outil mathématique ou une formule qui vous manque, je vous donne...

28. Élève 2 : Je veux donc ce côté là égal à ce côté là... Mais c'est juste avec l'équerre on peut le recevoir...

29. Prof. : Oui...mais quand je te donne des coordonnées avec 5700, par exemple, tu n'arrive pas à calculer comme ça...

En résumé, les élèves ne font pas de différence entre la preuve de type mathématique utilisant les raisonnements avec un résultat lu par le dessin. Ici joue le fait que nous ne choisissons pas des nombres naturels comme coordonnées de A, B et C pour que les élèves ne puissent pas dessiner "exactement" les points dans un repère et donc éviter les preuves "descriptives". En réalité, il y a trois groupes qui ont choisi d'abord de mesurer sur le dessin mais les trois donnent trois résultats différents. De plus, il y a aussi des élèves qui pensent au parallélogramme comme à une figure à laquelle une équation serait associée (comme le cercle) et donc ils pensent à une "fonction du parallélogramme" (propos 09).

A part de cette preuve descriptive, il y a trois autres approches de ce problème.

Une stratégie exploitant les longueurs de segments

Un parallélogramme est connu de certains élèves comme un quadrilatère ayant des côtés opposés égaux, de plus on connait les coordonnées de trois points A, B, C. Par conséquent, il y a certains élèves qui veulent utiliser la formule de la distance entre deux points pour trouver le point D. Cependant, les élèves ne se souviennent plus de la formule de la longueur d'un segment étudiée l'année dernière et les expérimentateurs la leur donnent pour éviter le gaspillage de temps. De plus, ils s'embrouillent dans le choix de notations pour les coordonnées des points et les expérimentateurs leur conseillent d'utiliser x_A, y_A pour noter les coordonnées de A et de même avec les autres points.

30. Élève 1 : Je veux calculer AB et puis on a $AB = CD$.

31. Élève 2 : Moins entre parenthèse, tu fais le A moins le B... (Les élèves ont des idées confuses et parlent tous en même temps avec des données différentes.)

(Le professeur vient et leur donne la formule de la longueur d'un segment.)

32. Prof. : Tu veux une formule de la longueur ?

33. Élève 1 : Oui.

34. Prof. : Pour le calcul de la longueur d'un segment AB, c'est la racine carré de ... on fait la différence des abscisses ... vous appelez ça $(x_A - x_B)^2$ ...

35. Élève 1 : Ah oui, c'est ça ! $(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$. On a presque fini !

....

36. Prof. : Vous avez calculé la distance entre deux points. Et après qu'est-ce que vous faites ?

37. Élève 1 : Je vais calculer CD et obtenir les coordonnées de D.

38. Prof. : OK. Tu a le point C fixé et tu sais le distance entre C et D. Mais est-ce que ça suffit pour fixer le point D ?

39. Élève 1 : Ah ... non !Il faut une deuxième relation.

40. Prof. : C'est ça !

41. Élève 1 : Il faut une autre formule. On va donc calculer BC. On a aussi $AD = BC$. Ah oui, c'est trop facile !

....

42. Prof. : Ça va ?

43. Élèves : On a toutes les formules. On peut trouver D.

44. Prof. : Et tu a déjà fini le calcul ?

45. Élèves : Pas encore...

...

En résumé, au début les élèves ont l'idée d'utiliser la distance mais ils pensent que ça suffit avec la distance de CD pour trouver les coordonnées de D. Après, avec les indications de l'expérimentateur, ils réalisent qu'il faut une autre équation car on a deux inconnues. Cependant, tous les calculs sont lourds et les équations sont du deuxième degré, donc personne n'arrive à la fin pour donner les coordonnées de

D.

L'idée d'intersection de deux cercles

En fait, l'idée que D est l'intersection de deux cercles : le cercle de centre A et de rayon BC et le cercle de centre C et de rayon AB est presque identique avec l'idée précédente d'utiliser la longueur du segment car le fait que D appartient au cercle de centre A et de rayon BC signifie aussi que $DA = BC$ et donc, avec cette idée, on obtient aussi deux équations de degré 2 et par conséquent, avec des calculs lourds comme expliqué plus haut, les élèves n'arrivent pas à la réponse finale. De plus, il y a aussi des difficultés de préciser l'équation du cercle chez les élèves. Certains élèves ne peuvent pas donner des explications utilisant le concept du cercle, ils ont montré "en utilisant le compas".

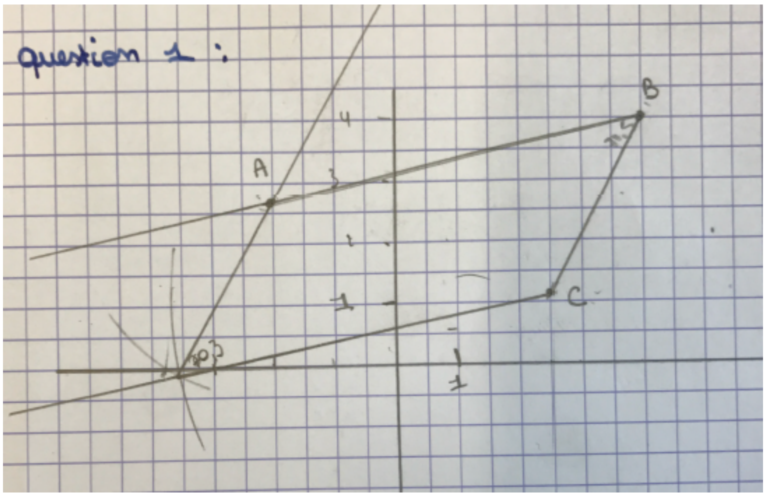


FIGURE 5.2

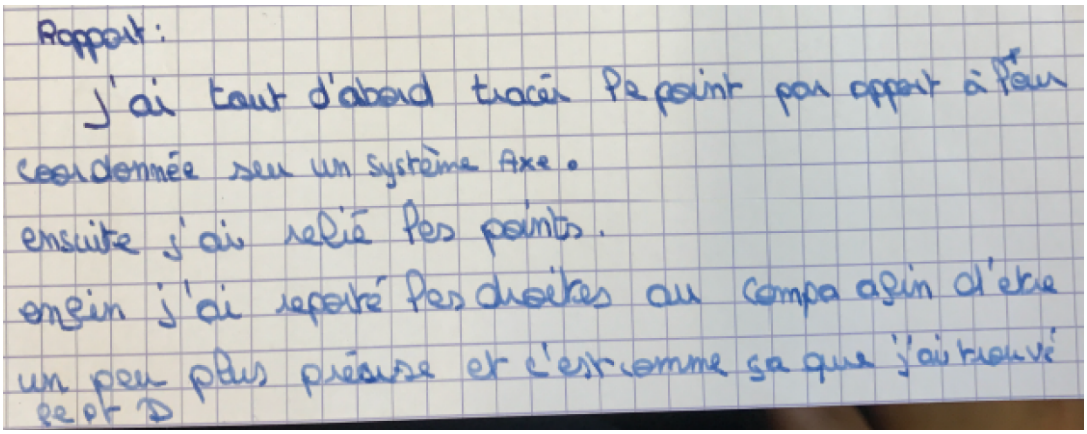

Rapport :
J'ai tout d'abord tracer le point par rapport à leur coordonnée sur un système Axe.
ensuite j'ai relié les points.
enfin j'ai reporté les droites au compa afin d'être un peu plus précise et c'est comme ça que j'ai trouvé le pt D

FIGURE 5.3

Il y a aussi un autre groupe qui a la même idée d'expliquer la construction du point D et puis qui termine la démonstration sans calculer les coordonnées de D.

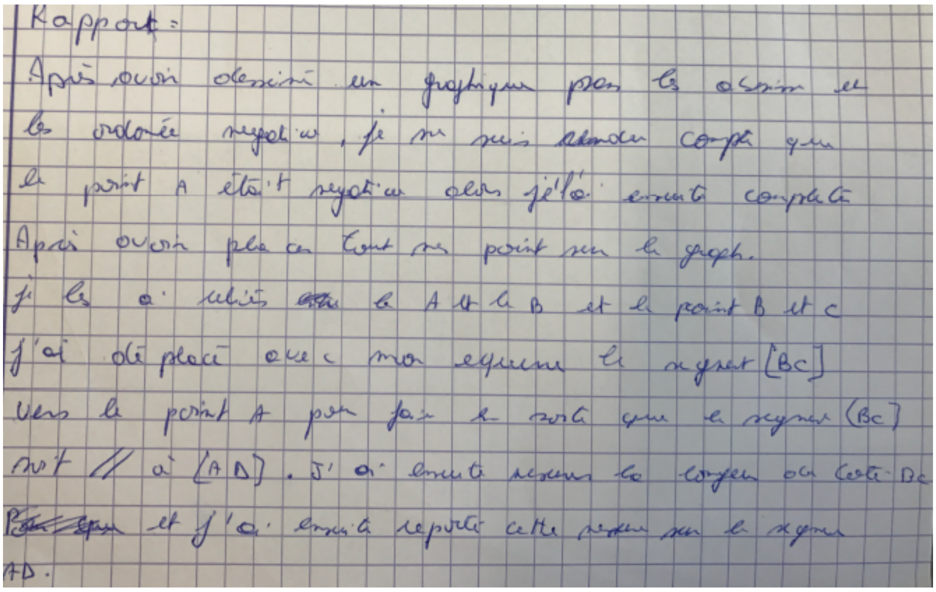

Rapport :
Après avoir dessiné un graphique pour les abscisses et
les ordonnées respectives, je me suis rendu compte que
le point A était respectif alors j'ai ensuite complété.
Après avoir placé tout mes point sur le graph.
je les ai reliés ~~le~~ le A et le B et le point B et C
j'ai déplacé avec mon equerre le segment [BC]
vers le point A pour faire en sorte que le segment (BC)
soit // à [AD]. J'ai ensuite mesuré la longueur du Coté DC
~~Pour~~ et j'ai ensuite reporté cette mesure sur le segment
AD.

FIGURE 5.4

En fait, dans leur rapport, les élèves ont utilisé le "déplacement", comme ils l'ont expliqué : "J'ai déplacé avec mon équerre le segment $[BC]$ vers le point A pour faire le sorte que le segment $[BC]$ soit parallèle à $[AD]$" et c'est exactement l'idée de translation. Cependant, ils restent seulement dans la construction avec leur intuition plutôt qu'essayer d'utiliser leurs connaissances pour donner une démonstration mathématique. De plus, à part de cette idée, il existe aussi des idées concernant l'aire et l'angle comme décrit ci-dessous.

L'idée d'utilisation de l'aire, de l'angle...

Les élèves ont l'idée d'utiliser l'aire ou l'angle mais l'expérimentateur intervient dans ce cas pour les décourager.

46. Élève : D'abord on va calculer les longueurs de deux côtés... et la diagonale aussi, puis on calcule l'aire du triangle ABC, puis on a l'aire de ACD... et on trouve le point D...

47. Prof. : Ce qui est embêtant, c'est que... il y a beaucoup de triangles qui ont la même aire. Sur la base AC, tu trouve beaucoup de triangles qui ont la même aire avec ABC, c'est le problème de l'aire, c'est pas unique...

L'idée d'utiliser la caractéristique du parallélogramme liée aux diagonales

Certains élèves pensent à une autre propriété d'un parallélogramme, c'est que les deux diagonales se coupent en leur milieu. Cependant, ils ne se souviennent pas de la formule du milieu d'un segment et de plus, même s'ils disposent après de la formule du milieu donné par l'expérimentateur, ils ont mal à utiliser cette formule et ils reviennent à la fin à la longueur de la diagonale.

48. Élève 1 : On peut utiliser la fonction d'une droite... On va trouver la fonction d'une diagonale.

49. Prof. : Pourquoi tu veux trouver la fonction d'une diagonale ?

50. Élève 1 : Parce que je veux trouver le point O qui est le milieu, puis je mesure BO, puis je trouve les coordonnées de D.

51. Prof. : Il y a une moyenne pour trouver les coordonnées du milieu d'un segment sans lire sur le dessin ?

52. Élève 1 : Oui, c'est l'intersection de deux diagonales... Il faut trouver les fonctions de deux diagonales...

53. Élève 2 : J'ai une idée. On a la fonction de BC, on peut calculer le milieu M de AB. On peut donc trouver la fonction de la droite qui passe par M et parallèle à BC. Cette droite passe par O. Puis on faire le même avec la droite qui passe par le milieu N de BC et parallèle à AB. Puis on a O comme l'intersection. Puis on peut calculer BO, puis DO et on trouve D.

54. Élève 3 : Non, on va calculer AC, puis tu prends le milieu O, puis on calcule BO et on a DO. On a donc la distance de D à O et puis tu as les coordonnées de D.

55. Élève 2 : On a fini ! (après avoir dessiné)

56. Élève 1 : Mais Madame a dit qu'il faut un calcul ?

57. Élève 2 : Oui, on a calculé la distance ! Quand on a la distance, on obtient le point !

58. Élève 1 : Mais on n'a pas les coordonnées de D ?

59. Élève 2 : Il faut mesurer !

60. Élève 1 : Non, on doit trouver une formule.

61. Prof. (intervient) : Est-ce qu'avec la formule de distance, tu peux trouver la formule des coordonnées du point ?

62. Élève 1 : Mais non, on n'a pas le point. On a juste la distance....

63. Prof. : ... et il y a beaucoup de points qui ont la même distance avec O..

64. Élève 1 : Oui, c'est un cercle....

65. Prof. : Et les coordonnées du milieu d'un segment, ça ne vous dit rien du tout ?

66. Élève 1 : Et.. si... l'année passée... on a fait des trucs comme ça....

67. Prof. : (donne la formule du milieu d'un segment)

68. Élève 2 : Je n'ai jamais vu ça !

69. Élève 3 : Mais c'est logique !

70. Prof. : Allez ! Continuez ! N'oubliez pas l'objectif, c'est calculer les coordonnées de D ... par raisonnement, pas deviner.

71. Élève 2 : Maintenant on trouve le milieu de AC. On a déjà A et C. Puis ... qu'est-ce qu'on fait ?

72. Élève 3 : Il faut calculer BD alors.

73. Élève 1 : Mais on n'a pas D.

74. Élève 3 : Mais on peut calculer BO. Et on a $BO = DO$...

(Ces élèves ont du mal à utiliser la formule du milieu O de BD quand on a déjà B et O.)

75. Élèves : Le problème, c'est qu'on a BO, et DO, mais on ne peut pas trouver D...

L'idée liée à la translation

Il y a aussi certains élèves qui veulent utiliser la translation pour la démonstration :

76. Élève 1 : Voyons, la différence entre le point A et C, c'est la même avec B et D.

77. Élève 2 : Le point C par rapport à A, on fait une translation autant vers la gauche et autant vers la droite.

78. Élève 3 : Normalement, D devrait avoir le même type de point, deux fois le même point.

79. Élève 1 : J'ai deux fois le même point. Regarde ici le C à 2.5, le A à 2.6, sauf que tu as un en x et un en y, je pense qu'il y a un moyen de faire un petit truc comme ça.

80. Élève 2 : Tu fais la même chose dans l'autre sens. C'est translation quoi.

81. Élève 2 : Tu fais plus autant en x et moins autant en y.

82. Élève 2 : Sur l'abscisse tu fais +3.2 et sur l'ordonnée...

Ici les élèves ont des idées concernant la translation mais comme ils ne connaissent pas exactement le concept de translation, ils le font avec leur intuition. Ils pensent à la translation "en deux sens", vers la gauche et vers la droite, de plus ils veulent mélanger les abscisses et les ordonnées :"Regarde ici le C à 2.5, le A à 2.6, sauf que tu as un en x et un en y...". Ils se trompent bien sûr s'ils concluent que "la différence entre le point A et C, c'est la même avec B et D" mais ils ont idée de "plus" ou "moins" par rapport à deux points dans un repère. Ici avec deux points $A(-2; -2,6)$ et $C(2,5; 1,2)$, ils veulent "faire plus en x et moins en y" uniquement parce que, sur la figure initiale, pour aller de A à C, ils **voient** qu'on va vers la droite (donc plus pour x) et qu'on descend vers le bas (donc moins pour y). Ils parlent aussi de vecteur dans leur discussion mais pour certains, on ne parle de vecteur que quand on a des forces.

83. Élève 1 : On peut utiliser le vecteur parce que pour les vecteurs, on peut les translater.

84. Élève 2 : Mais tu ne peux pas utiliser les vecteurs ici, ce ne sont pas des forces....

...

85. Élève 3 : Il faut réfléchir si l'on monte ou l'on descend, si l'on monte on fait “plus”, si l'on descend on fait “moins”

86. Élève 1 : Mec, tu peux faire deux parallélogrammes, soit tu montes, soit tu descends. Si tu prends ce point là et tu montes ou si tu prends ce point là et tu descends.

87. Élève 2 : Lui, il n'a pas fait par calcul, il a fait par translation mais il obtient le même résultat.

Il y a un groupe qui donne le bon résultat pour les coordonnées de D en utilisant l'idée de translation sauf qu'ils pensent à deux positions pour le point D (voir les points D et D' sur la figure 5.1). Cependant, ils l'utilisent comme si c'est une “longueur” même s'ils ont l'idée de “faire moins vers la gauche” et “moins vers le bas”.

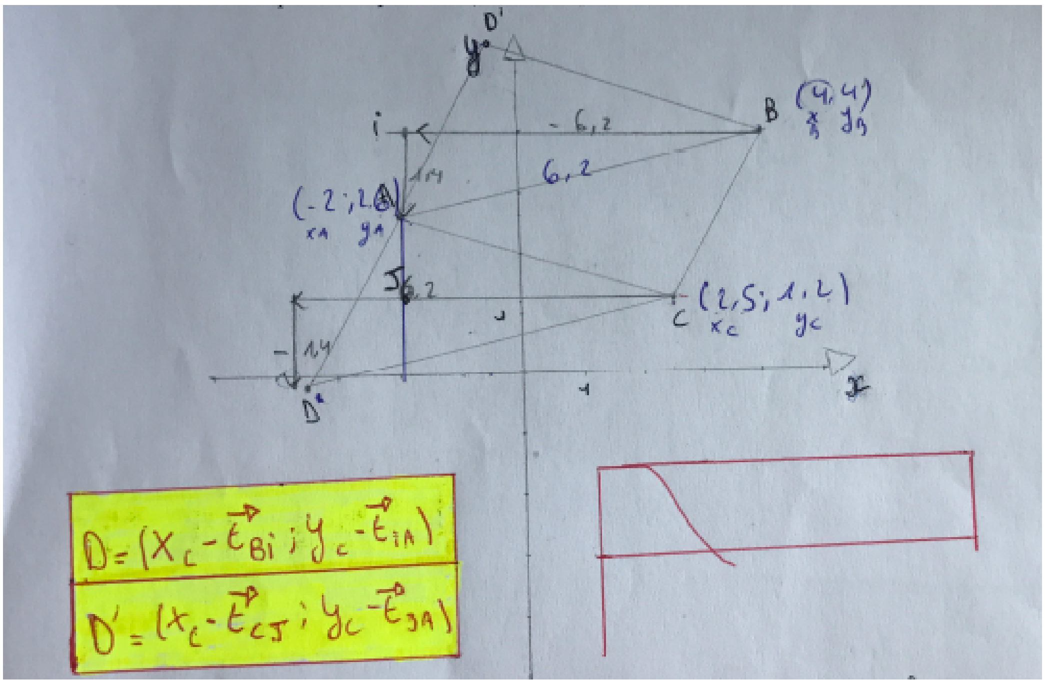


FIGURE 5.5

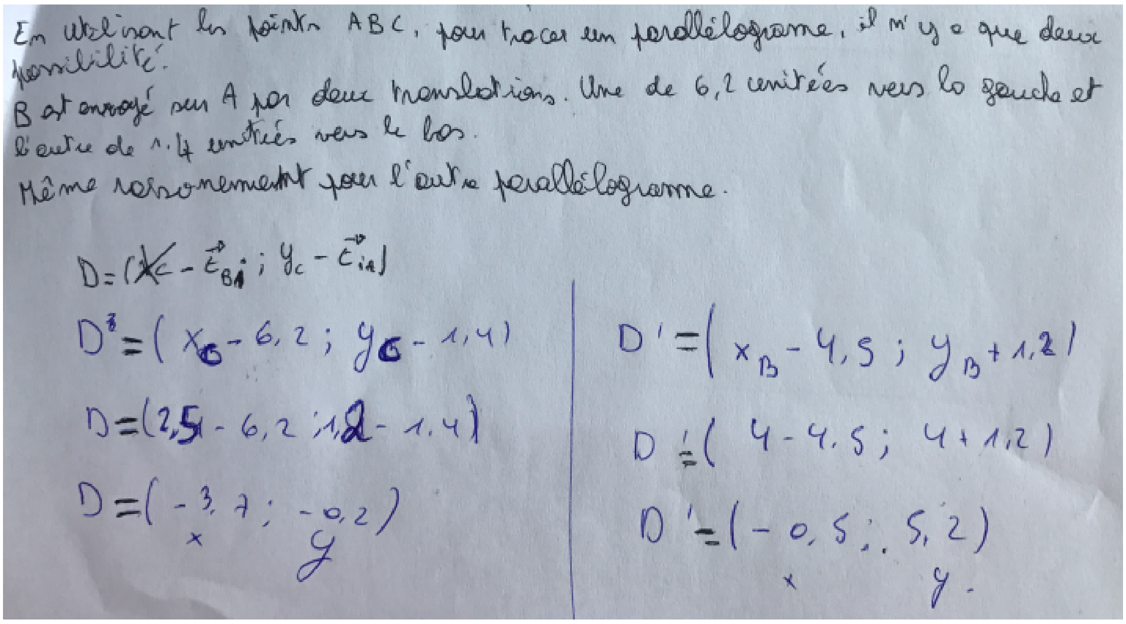


FIGURE 5.6

En fait, ils comprennent qu'il faut "faire moins vers la gauche", "faire plus vers la droite", "faire moins vers le bas" et "faire plus vers le haut", c'est-à-dire ils ajoutent le "sens" dans leur calcul. Cependant, avec l'écriture

$$x_D = x_C - \overrightarrow{t}_{BI},$$

ils considèrent la translation $\overrightarrow{t}_{BI}$ comme la longueur du segment BI en se fiant au dessin pour voir dans quel sens on va : si "on va vers la gauche", ils font "moins" sur le calcul. Il y a donc une confusion de la définition de translation chez les élèves et ce problème peut être expliqué par le fait que la définition rigoureuse de translation n'est jamais enseignée au secondaire. On donne des figures et des exemples pour **montrer** les translations et on utilise le mot "vecteur" pour expliquer la translation, puis on enseigne le vecteur en utilisant l'idée de translation. De plus, comme étudié dans la partie épistémologique, les élèves ont des difficultés avec les caractéristiques comme "sens" et "direction" et ils utilisent souvent un segment orienté comme une longueur d'un segment. Cependant, avec leur idée de "sens" vers la gauche, vers le bas..., ils arrivent à formuler les deux formules pour trouver les coordonnées de D en utilisant les notations x_A, x_B, y_A, y_B... comme suit :

$$x_D = x_A + (x_C - x_B)$$

$$y_D = y_A + (y_C - y_B)$$

et par conséquent, ce problème est faisable pour les élèves malgré toutes les difficultés concernant les critères d'orientation.

5.2.3.2 Expérimentation II : Situer un point sur une droite

Le problème suivant est proposé aux élèves :

Problème 2.

Soient, par exemple, les points de coordonnées $A(1, 1)$ et $B(2, 3)$. Déterminez les coordonnées d'un point $P(x_P, y_P)$ situé sur la droite AB et deux fois plus éloigné de A que de B.

Concernant ce problème, il y a beaucoup d'élèves qui trouvent seulement un point P qui est situé à l'extérieur du segment AB comme solution et puis, suite à l'intervention de l'expérimentateur, les élèves trouvent assez facilement l'autre position pour le point P.

88. Prof. : Qu'est-ce que vous faites ici ?

89. Élève 1 : En fait, Madame, on est en train de se mettre ... parce qu'il faut dessiner le point P plus loin de A que de B. Et Madame, parce que P est sur la droite AB donc P doit être entre A et B, c'est ça ?

90. Prof. : Vous mettez P où alors ?

91. Élève 2 : On prend cette distance là, puis on met là...

92. Prof. : Oui, c'est une possibilité. Est-ce qu'on a d'autre possibilité ou pas ?

93. Élève 1 : Ben, oui, à l'intérieur des deux....

94. Prof. : Donc il y a deux possibilités pour le point P. Voilà, vous avez la position P_1 et P_2, c'est tout. Maintenant il faut déterminer les coordonnées de ces points.

Ce problème est donné aux élèves après des commentaires faits par le professeur sur les diverses solutions du problème du parallélogramme : l'insuffisance des mesures, la difficulté d'utiliser la longueur et il explique aussi la méthode basée sur la translation. Cependant, malgré les mises en garde, les élèves recourent ici de nouveau aux mesures et constructions. Voyons, par exemple, cette réponse où l'élève parle explicitement de mesure.

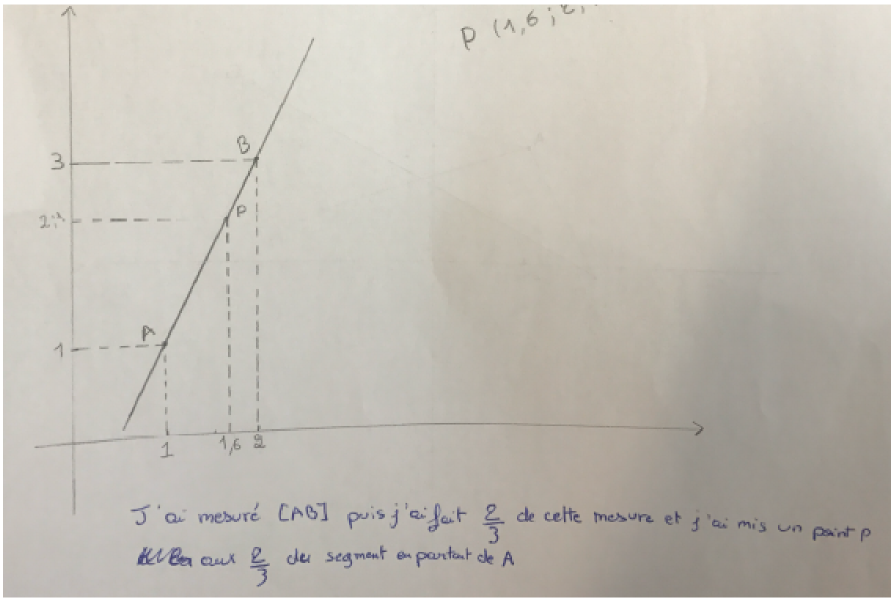


FIGURE 5.7

Ou encore *"Après avoir placé les points A et B, j'ai rapporté le point A de l'autre côté de B. Ensuite, étant donné qu'il y avait une deuxième possibilité, j'ai coupé la droite AB en deux puis j'ai recoupé la demi droite en trois."*

De plus, même si l'on a déjà expliqué l'enjeu pour le premier problème, les élèves ont du mal à distinguer entre la consigne "trouver les coordonnées de P" et la consigne "trouver la longueur du segment AD". Par conséquent, ils ont tendance à utiliser le théorème de Pythagore pour trouver AP et puis ils se contentent de cette réponse finale.

L'utilisation du théorème de Pythagore et celui de Thalès

Ainsi, cet élève qui calcule AB par le théorème de Pythagore puis en prend les $\frac{2}{3}$ pour situer le point cherché.

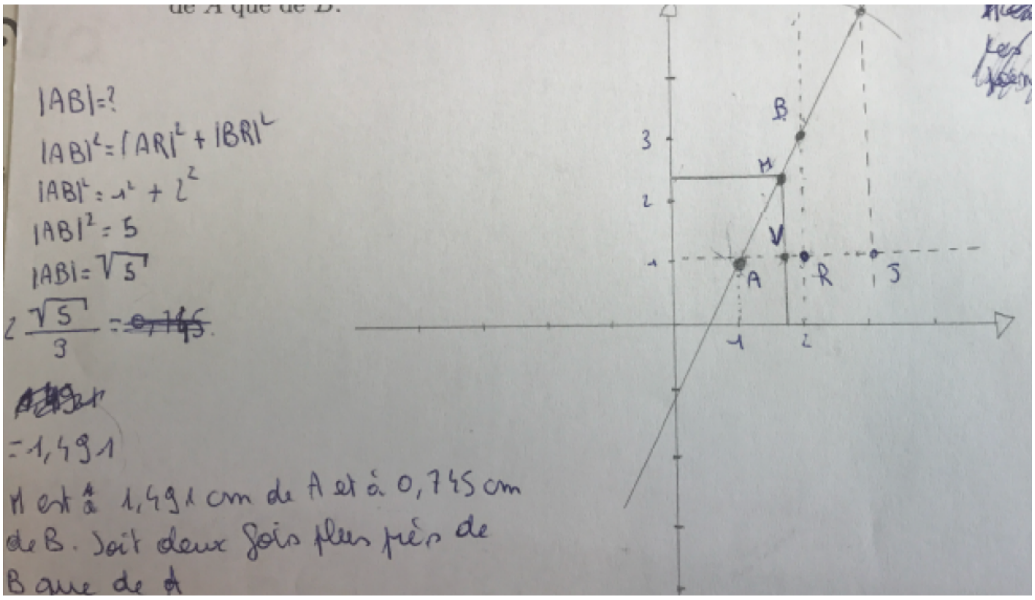


FIGURE 5.8

Ensuite, suite à la réaction de l'expérimentateur, les élèves poursuivent en utilisant le théorème de Thalès pour trouver les coordonnées de P :

95. Élève 1 : Pour M, celui à l'intérieur, on a trouvé comme formule plus ou moins : à partir de B c'est $\frac{AB}{3}$ et, à partir de A on fait $\frac{2AB}{3}$.

96. Prof. : Oui, mais avec cette longueur là, tu veux ajouter, c'est ça ?

97. Élève 2 : On fait une égalité entre eux.

98. Élève 1 : Ben, parce que c'est bien $\frac{AB}{3}$ et $\frac{2AB}{3}$.

99. Prof. : Oui, mais comment avez vous fait pour trouver les coordonnées de M ?

100. Élève 2 : Ah... c'est vrai... Ce n'est pas encore fini...

101. Prof. : Tu vois, ici, on peut calculer la longueur de AB, ça je suis d'accord. Mais quant à la longueur de AB, comment on peut réagir sur les coordonnées quoi ?

102. Élève 1 : Oui j'ai pensé à des trucs comme ça... sans graphiquement.

103. Prof. : Oui, on fait la géométrie donc il y a des trucs qu'on va voir et on va préciser après. Et qu'est-ce que t'as vu là ? Le point M, il est où ?

104. Élève 1 : Il est à un tiers de B et deux tiers de A.

105. Prof. : Et qu'est ce qui se passe au niveau de l'axe Ox alors ?

106. Élève 1 : C'est deux tiers alors... le point V est en deux tiers de AR... C'est ça !

107. Prof. : Et pourquoi est-ce que c'est ça ?

108. Élève 2 : Parce que deux tiers c'est deux fois un tiers.

109. Prof. : Et pourquoi est-ce que tu est sûr que tu dois voir que ça c'est deux

tiers de ça ? Quelle est la construction qui permet de dire ça ?

110. Élève 1 : En gros, il y a trois points, donc ça fait A, B, M. Donc si on divise AB par 3 et on dit que M est deux fois plus loin de A que de B, donc la distance là...

111. Prof. : Au niveau de longueur, ça, c'est deux tiers de ça (sur la droite AR : $AV = \frac{2AR}{3}$). Mais est-ce que vous pouvez évoquer un propriété de la géométrie qui dirait que vous avez raison ?

112. Élèves : ...

113. Prof. : Le deux tiers, c'est deux tiers de ça (sur la droite AB : $AM = \frac{2AB}{3}$), pourquoi c'est deux tiers de ça (sur la droite AR : $AV = \frac{2AR}{3}$; voir extrait précédent) ? Quelle est la raison géométrique ?

114. Élève 1 : Ah oui... Je comprends, mais je ne sais pas comment expliquer...

115. Prof. : Il faut chercher des connaissances que vous avez en troisième...

...

116. Élève 1 : Je sais qu'est-ce que c'est comme propriété. Voyons, on a deux droites parallèles ici, et si un côté perpendiculaire à ces deux droites parallèles, alors les proportions sont les mêmes. Mais je ne sais pas qu'est-ce que c'est exactement comme propriété.

117. Élève 2 : Oui, c'est la logique qu'on a utilisée.

Puis l'expérimentateur donne le nom de la propriété (Thalès) et les élèves terminent avec les calculs précis (voir figure 5.9) :

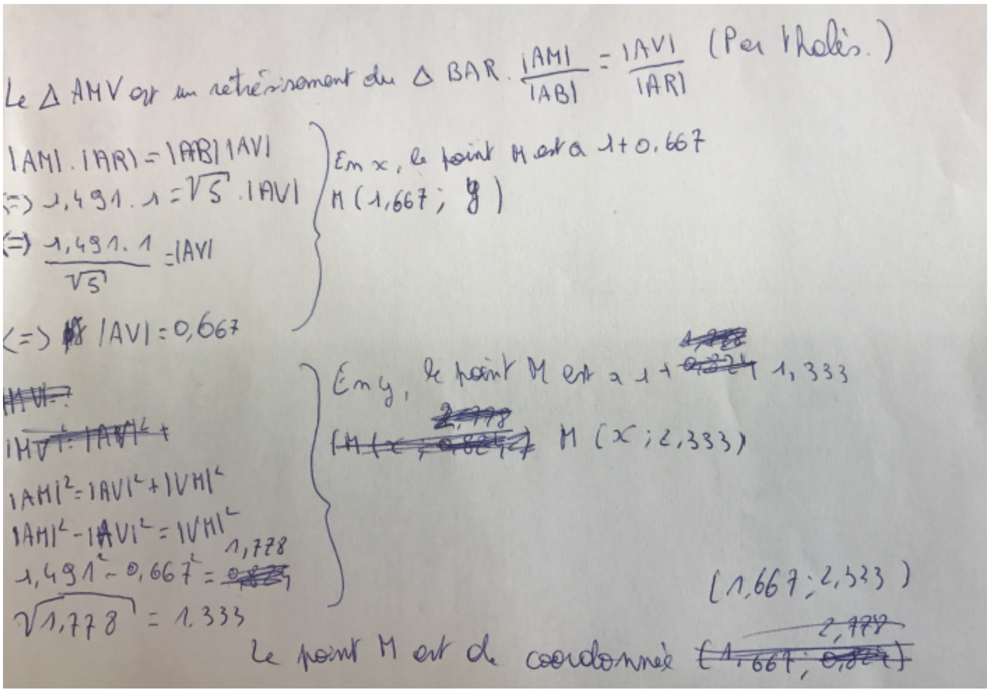


FIGURE 5.9

L'idée de la projection sur les deux axes

Pour le point P qui est à l'extérieur du segment AB, certains élèves utilisent la translation comme fait avec le premier problème et ils trouvent facilement les coordonnées de P.

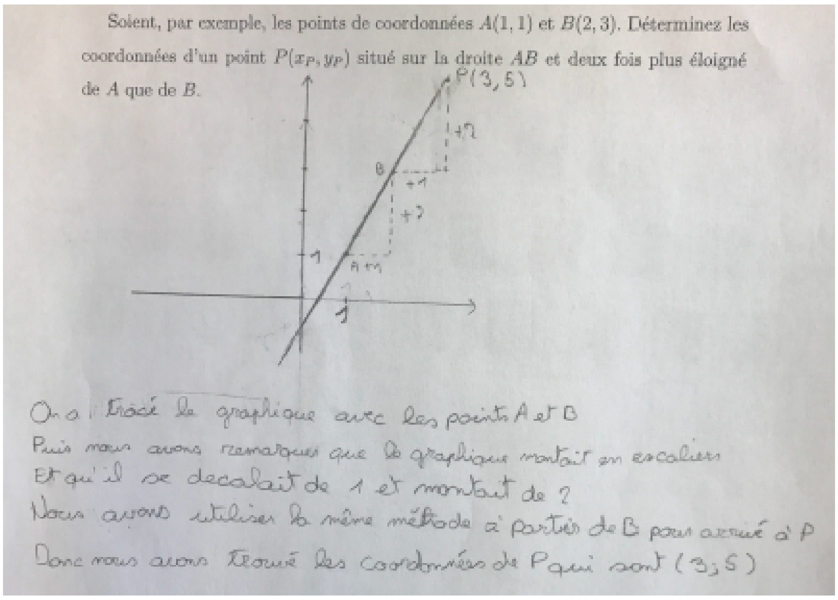


FIGURE 5.10

Mais pour le P qui est à l'intérieur du segment AB, les élèves ont du mal à adapter l'idée de translation et projettent sur les deux axes en utilisant le théorème de Thalès. Même si l'utilisation du théorème de Thalès est passée sous silence, les élèves ont l'idée de calculer les différences d'ordonnées et d'abscisses pour trouver les coordonnées du point P. Ils donnent d'abord la formule pour un point P' qui est à l'extérieur et puis avec l'intervention de l'expérimentateur, ils arrivent à formuler les deux formules pour deux positions possibles du point cherché :

118. Prof. : Est-ce que tout le monde est convaincu de ce que vous avez fait ?

119. Élève : Oui...

120. Prof. : Tu peux expliquer aux autres ta formule ?

121. Élève : Deux tiers de la différence de A et de B et donc pour x, c'est $2 - 1$ et pour y, c'est $3 - 1$, et plus les coordonnées de A parce que la différence, ça représente AB, il me semble...

122. Prof. : Ça représente AB, tu veux dire le segment ?

123. Élève : Oui, parce que j'ai fait $2 - 1$....

124. Prof. : Attend, tu as deux différences : tu fais $2 - 1$ et $3 - 1$, c'est ça ?

125. Élève : Je ne sais pas comment expliquer mais on a deux différences, c'est la différence des coordonnées.

126. Prof. : Mais regarde, tu as deux différences différentes...

127. Élève : Oui, ici c'est $3 - 1$ et ici c'est $2 - 1$.

128. Prof. : Oui, ici c'est la différence d'ordonnées, ici c'est la différence d'abscisses...

129. Élève : Oui, en gros c'est ça, c'est deux côtés d'un triangle rectangle.

130. Prof. : Maintenant, le fait qu'il cherche un point 2 fois plus éloigné de A que de B, donc il donne deux possibilités, un point qui se trouve entre les deux aux deux tiers du chemin de AB et un deuxième qui, lui, se trouve, vous prenez la longueur de AB, vous l'apportez à partir du point B. Voilà, il y a ces deux possibilités là, effectivement. Et par contre, pour l'écriture ici, elle te permet de déterminer ces deux points là ?

131. Élève : Non, seulement le point là ...

132. Prof. : Donc est-ce que tu peux donner une formule pour ce point là ?

133. Élève : C'est deux tiers les coordonnées...

134. Prof. : Oui, et on écrit ça comment ?

135. Élève : Ben, on fait la différence de deux points, on prend juste la longueur de AB, on divise par 3, et puis à partir de A, on prend le nombre qu'on a trouvé et on ajoute les coordonnées de A...

Et voici ce que les élèves arrivent à trouver au final comme formule :

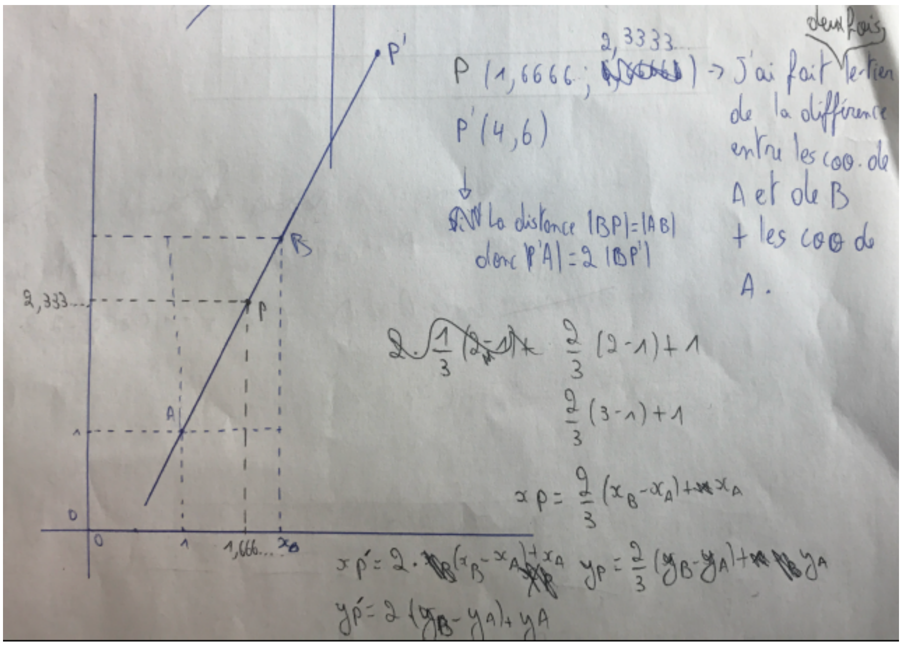


FIGURE *5.11*

En résumé, les élèves ont d'habitude de travailler avec les longueurs donc ils ont mal à traiter un problème d'orientation et l'ordre des points. Ils éprouvent des difficultés à contrôler la proportionnalité des différences de coordonnées et quand ils doivent le faire, ils utilisent le théorème de Thalès mais parfois en lisant la figure plutôt que de considérer ce théorème dans le cadre d'un raisonnement déductif.

5.2.3.3 Expérimentation III : L'introduction du formalisme bipoint et les réactions des élèves

Cette expérimentation concerne un seul groupe composé des élèves qui ont précédemment misé sur la translation. Le travail de ce groupe est animé par l'expérimentateur pendant 1 heure de cours.

Après avoir obtenu les formules concernant les deux problèmes précédents, nous demandons aux élèves de généraliser ces formules :

136. Prof. : Pour le problème du parallélogramme, qu'est-ce que vous avez trouvé comme solution ? Vous avez regardé la différence d'abscisses et d'ordonnées en disant qu'elle devrait être les mêmes, du point A au point B et du point D au point C. Et donc vous avez comme écritures : $x_D - x_A = x_C - x_B$ et la même pour y. De l'autre côté, pour celui de l'alignement de points, vous avez, pour le point situé entre A et B : $x_P = \frac{2}{3}(x_B - x_A) + x_A$, même chose pour y. Et pour le point 2 fois plus éloigné à l'extérieur de AB, vous avez comme écriture $x_P = 2(x_B - x_A) + x_A$, même chose pour y. Vous pouvez imaginer que ça fait beaucoup d'équations dans la façon qu'on a fait. Est-ce que vous pourriez imaginer résumer ces écritures là ?

137. Élève 2 : Donc une équation pour les deux problèmes ?

138. Prof. : Déjà pour un problème, puis pour l'autre et on verra si l'on pourrait faire pour les deux... Parce que en fait, les mathématiciens essayent toujours d'avoir le moins de formules possible, ça veut dire de rassembler, le tout en une seule écriture pour couvrir tous les cas de figures. Donc ça fait beaucoup d'équations. Est-ce qu'il y a une moyenne pour mettre ça en commun ? Est-ce qu'il y a une formule qui résumes les formules qui sont là ?

139. Élèves : ....

140. Prof. : Voyons, cette écriture là ne parle que de x. Et l'autre pour y.

141. Élève 1 : Est-ce qu'il y a un truc qui marche pour les deux, le x et le y ?

142. Prof. : De plus, une fois que tu essaies de trouver une écriture la plus simple, ça te permet de donner le maximum d'information possible.

143. Élève 1 : Et je mets ce que je veux ?

144. Prof. : Oui mais il faut être clair dans la convention.

L'utilisation d'une extension praxémique chez les élèves

Suite à la conversation reprise ci-dessus, un des élèves utilise C_A pour rassembler x_A et y_A en donnant l'écriture $C_D - C_A = C_C - C_B$ qui résume les deux équations.

145. Prof. : C'est pas mal ce que tu as écrit déjà. Ton "C_P", ça présente quoi, en fait ?

146. Élève 1 : Ben, ... les coordonnées de P.

147. Prof. : Voilà, à la fois pour le x et pour le y. OK. Et puis pour l'autre problème ça donnerait quoi ?

148. Élève 1 : C'est pareil.

149. Prof. : Oui, ... pareil, pas tout à fait...

(Les élèves arrivent à écrire $C_P = 2(C_B - C_A) + C_A$ et $C_P = \frac{2}{3}(C_B - C_A) + C_A$ pour le deuxième problème.)

En résumé, avec l'intervention de l'expérimentateur, les élèves arrivent à rassembler les deux équations dans une seule équation avec la notation C_A qui présente les coordonnées du point A où la lettre "C" signifie "coordonnées". Autrement dit, les élèves font ici une extension praxémique en utilisant la notation C_A. Ensuite, l'expérimentateur essaye d'emmener les élèves à remplacer C_A par A mais avec cette notation, les élèves ont du mal au départ car, pour eux, une seule lettre A signifie un point et pas les coordonnées de point.

Une autre extension praxémique sujette à débat

150. Prof. : Voyez, on a déjà ramené ces deux là à une seule, ces deux là à une seule et ces deux là à une seule, et comme tu disais très bien que concernant la question de convention, il faut juste s'accorder sur ce que ça signifie, et tu as dit que, "C" est pour les coordonnées, j'ai écrit pour les deux. OK. Sauf on a parfois des choses douteuses ici parce qu'on a "C" à la fois pour les coordonnées et "C" à la fois pour le point donc on a la même lettre... C'est la même lettre pour les deux objets différents, c'est déjà un peu dangereux. Mais, écoutez, un élève l'année passée m'a proposé ceci comme écriture. Tu va voir que ça rejoint ton idée. Je me permet d'écrire ceci :

$$D - A = C - B, \qquad P = 2(B - A) + A \qquad P = \frac{2}{3}(B - A) + A$$

Voilà, ça marche, et il faut juste être clair pour ce qu'on a écrit. Et donc ici le P, ça désigne quoi ?

151. Élèves : Le y et le x.

152. Prof. : Voilà...

153. Élève 1 : Mais ça désigne un point également...

154. Prof. : Oui, à la fois ça pourrait désigner un point mais alors, on n'écrit jamais l'égalité entre les points : un point moins un point, etc.,

155. Élèves : Oui, oui, je suis d'accord.

156. Prof. : Donc, à la fois, quand on a des présentations de la figure, on peut

écrire P à côté un point avec les coordonnées, etc. et ici dans les conventions qui sont pris des écritures établies ici, on écrit par contre la même lettre dans des égalités, mais par rapport à ce que tu as fait, là, juste avant, ça correspond à ton C_P, le A correspond à ton C_A, etc., c'est la même chose. Le tout est effectivement clair, ...

157. Élève 2 : Mais comment on peut savoir qu'on parle de coordonnées ?

158. Prof. : Il faut juste l'avoir précisé au départ.

159. Élève 1 : Il n'y a rien dans les règles mathématiques qui désignent si ça parle de coordonnées dans une fonction ?

160. Prof. : Si, effectivement, il y a des écritures qui permettent de faire la distinction vous verrez après. On est bien d'accord qu'il faut être prudent, ici la lettre représente à la fois les abscisses et les coordonnées. Est-ce que vous pourriez imaginer : qu'est-ce qu'on peut faire avec cette écriture là ?

161. Élèves : ...

162. Prof. : Est-ce que vous voyez un avantage, une économie avec ce type d'écriture ?

163. Élève 2 : Ben, ça évite de faire le calcul en plus... Ah non, non ...

164. Élève 2 : C'est un type de formule, c'est plus facile de retenir.

Ensuite, on demande aux élèves de ce groupe de considérer le sens géométrique donné par l'écriture $\frac{D+B}{2} = \frac{A+C}{2}$ et on leur demande d'énoncer ce que signifie l'implication : "$D - A = C - B \Rightarrow \frac{D+B}{2} = \frac{A+C}{2}$" géométriquement, puis de considérer la réciproque :

165. Prof. : Voilà, ok. Une deuxième chose sur laquelle je voudrais vous interpeler : si vous écrivez ceci : "$D - A = C - B$ implique que $\frac{D+B}{2} = \frac{A+C}{2}$". Qu'est-ce que ça signifie ? Géométriquement, qu'est-ce que ça traduit ?

166. Élève 3 : C'est un truc bizarre...

167. Prof. : On est bien sur un parallélogramme. Et l'écriture "$D - A = C - B$", ça indique simplement que les différences d'ordonnées et les différence d'abscisses entre D et A et C et B doivent être la même chose. Ça va ? OK, mais ceci alors, "$\frac{D+B}{2} = \frac{A+C}{2}$" qu'est-ce que ça signifie ?

168. Élève 3 : Chaque fois est divisé par deux... La somme divisée par deux... Pourquoi sur deux ?

169. Prof. : C'est moi qui le balance comme ça. La question est bonne, pourquoi sur deux ?

170. Élèves : ...

171. Prof. : Ça, ça veut dire quoi ?

172. Élève 1 : Les coordonnées de B plus telles de D sur 2 est égale à les coordonnées de A plus celles de C sur 2.

173. Prof. : Oui, ... L'abscisse de B plus l'abscisse de D sur 2 est égale à l'abs-

cisse de A plus l'abscisse de C sur 2 et c'est vrai pour les ordonnées. Et ... l'abscisse de B plus celle de D sur 2, l'abscisse de A plus celle de C sur 2, ça donne quoi ? Géométriquement ?

174. Élèves : Mais c'est un parallélogramme...

175. Prof. : De toute façon, vous avez des valeurs pour tester. Allez-y, faites des calculs et voyez ce que vous obtenez.

(Les élèves font les calculs)

176. Élèves : On a un point (0.5, 1.9). Il est là.

(Les élèves dessinent le point sur la figure)

177. Élève 2 : Quel point ? Un autre que A,B,C et D ? Bizarre...

(L'expérimentateur revient)

178. Prof. : Ce point là est quel point par rapport au parallélogramme ?

179. Élève 1 : Il est le centre ! Le centre de gravité !

180. Élève 2 : Il est l'intersection de deux diagonales.

181. Prof. : Ça parait très intéressant !

182. Élève 1 : Ah, diviser par deux parce que c'est la moitié de la longueur.

183. Prof. : Ah, donc cette écriture là, ça signifie quoi ? Ça signifie que si vous avez un parallélogramme, donc les deux diagonales se couplent en leur milieu. On retrouve une propriété que vous avez observée. Bien. Est-ce que la réciproque sera vraie ?

184. Élève 1 : Normalement oui...

185. Prof. : Par exemple je voudrais écrire que $\frac{D+B}{2} = \frac{C+A}{2}$ implique que $D - A = C - B$.

186. Élève 2 : Oui, ... mais non... Il n'y a pas que dans un parallélogramme que les diagonales se coupent en leur milieu.

187. Prof. : Il y a d'autre figure géométrique ?

188. Élève 1 : Oui, un carré.

189. Prof. : Mais un carré est un parallélogramme, non ?

190. Élève 1 : Ah oui, c'est vrai.

191. Prof. : Et le rectangle aussi...

192. Élèves : Oui, oui, c'est juste.

193. Prof. : OK, Je reviens un peu sur l'idée de l'alignement des points, mais ... dans cette configuration là, que représenterait ? (L'expérimentateur dessine un parallélogramme aplati). Je vous donne 4 points A, B, C, D avec les coordonnées, et selon les coordonnées, vous calculez le milieu de BD et de AC : les coordonnées de B plus celles de D sur 2, les coordonnées de A plus celles de C sur 2...

194. Élèves : Ah oui, on a un même point.

195. Prof. : Oui, ce point là sera le milieu de BD et ce point là sera le milieu de AC aussi. Donc en fait, il n'y a pas que pour le parallélogramme qu'on aura ceci... et donc, en fait, si ceci permet de caractériser un parallélogramme, soit dire que, effectivement, ça couvre le cas de parallélogramme mais le cas aussi où le parallélogramme sera aplati.

En résumé, ces élèves acceptent assez bien le formalisme proposé. Cependant, ils ont l'habitude de travailler dans un repère orthonormé avec les valeurs exactes des coordonnées données numériquement et, de ce fait, ont du mal à imaginer ce type d'écriture comme une formule générale de ce qu'ils ont l'habitude de faire. Quand l'expérimentateur leur demande d'utiliser les coordonnées numériques pour tester, ils comprennent tout de suite le sens de la formule. Ensuite, on leur donne un exemple pour appliquer cette écriture :

196. Prof. : Maintenant, prenez un quadrilatère quelconque $ABCD$, considérez le milieu de chaque côté M, N, O, P. Ces 4 points forme un quadrilatère et c'est un parallélogramme. Est-ce que vous pouvez me le démontrer ?

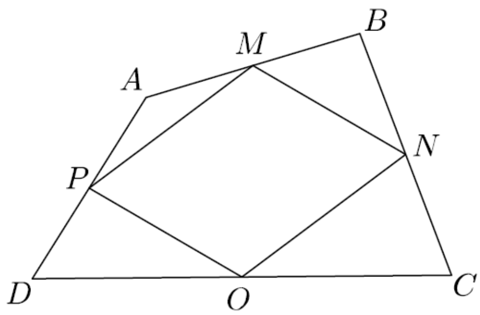


FIGURE 5.12

197. Élève 1 : C'est logique parce que les médianes, je ne sais pas si ça s'appelle la médiane... mais on joint les milieux de deux côtés opposés dans un quadrilatère et les deux segments se coupent en leur milieu. Ce sont aussi les diagonales du parallélogramme $MNOP$.

198. Prof. : Écris-le moi un peu...

199. Élève 1 : Je ne sais pas comment écrire, c'est long...

200. Prof. : Est-ce que tu peux servir du formalisme qu'on a établi... ce type d'écriture pour me démontrer ?

201. Élève 1 : Mais est-ce que les médianes dans un quadrilatère se coupent en leur milieu ? Si on a ça, donc on a $MNPQ$ est un parallélogramme.

202. Prof. : Mais quel est le point de départ ?

203. Élève 1 : Je prends le point de départ que les médianes dans un quadrilatère se coupent en leur milieu.

204. Prof. : Ah oui, mais tu es sûr de ça ? Et quelles sont les hypothèses de départ ?

205. Élève 2 : On n'a qu'un quadrilatère et un parallélogramme.

206. Prof. : Mais au départ tu n'as pas de parallélogramme. Tu dois le construire. Et tu le construis à partir de quoi ?

207. Élève 1 : De 4 points...

208. Prof. : De 4 points milieux...

209. Élève 2 : Oui, voilà.

210. Prof. : Donc des hypothèses sont portées sur des points milieux.

211. Élève 1 : Oui, c'est juste, mais on n'a que ce sont des milieux dans un quadrilatère...

212. Élève 2 : Dans ce cas, je calcule avec les coordonnées des points. Si ça satisfait $M - N = P - O$ donc on a un parallélogramme.

213. Prof. : Mais je donne le problème de façon tout à faire générale, on n'a pas de coordonnées des points.

214. Élèves : ...

215. Prof. : Tu ne traduis pas les hypothèses ?

216. Élève 2 : Oui, mais... on n'a aucune mesure à la base... Normalement on a des longueurs, des angles... pour calculer...

217. Prof. : Mais on ne demande pas de donner les calculs de façon numérique, on vous demande de prouver que $MNOP$ est un parallélogramme.

218. Élève 1 : Oui, mais...

219. Prof. : Ou si tu veux, tu peux utiliser x_A, y_A, etc., ça présente des nombres... Et notre écriture ici présente aussi des nombres...

(On laisse les élèves réfléchir un peu avant de continuer)

Comme expliqué plus haut, ici on ne donne pas un repère avec les coordonnées des points donc les élèves ont mal à comprendre l'enjeu ici. Après l'explication de l'expérimentateur, ils arrivent à utiliser la formule du milieu comme hypothèse pour démontrer la thèse.

220. Prof. : OK, dites-moi, quels est le fruit de votre réflexion ?

221. Élève 1 : ... Juste déjà commencé avec des trucs qu'on sait, $\frac{A+B}{2} = M$. .. et je pense qu'avec les transformations des formules, il y a un moyen d'arriver à ça.

222. Prof. : D'accord. Donc en fait tu ramènes la démonstration de la propriété à des règles d'algèbre. Et effectivement, petite remarque que je peux faire alors. Donc ton idée, c'est d'exprimer avec des formalismes qu'on a établis les hypothèses qu'on a. Voilà. Réfléchissez un peu un plus...

(Puis un élève écrit dans sa feuille la formule $\frac{P+N}{2} = \frac{O+M}{2}$.)

223. Prof. : C'est ce que tu dois arriver. Tu a parti d'où ?

224. Élève 1 : En fait, je me suis dit que là, on a $\frac{A+B}{2} = M$, $\frac{C+D}{2} = O$, ça plus ça, c'est égale à M plus O et j'ai fait diviser par 2 pour avoir la diagonale divisée

par 2, donc ça fait $\frac{A+B+C+D}{4}$.

225. Prof. : Alors quand tu as dit tu faisais diviser par deux, tu n'as pas de diagonale, tu as le point milieu de la diagonale.

226. Élève 1 : Ah oui, c'est vrai.

227. Prof. : Donc tu as passé de là ($\frac{A+B}{2} = M, \frac{C+D}{2} = O$) à là ($\frac{A+B+C+D}{4} = \frac{M+O}{2}$), c'est bien ça ? Et ensuite ?

228. Prof. : Dites-vous aussi que vous avez deux conditions qui permet de montrer qu'on a un parallélogramme : si les diagonales se coupent en leur milieu, mais on a aussi cette relation là entre les différences de coordonnées (l'expérimentateur donne la formule $D - A = C - B$).

En suite les élèves arrivent à écrire de deux façons différentes pour prouver que $MNOP$ est un parallélogramme.

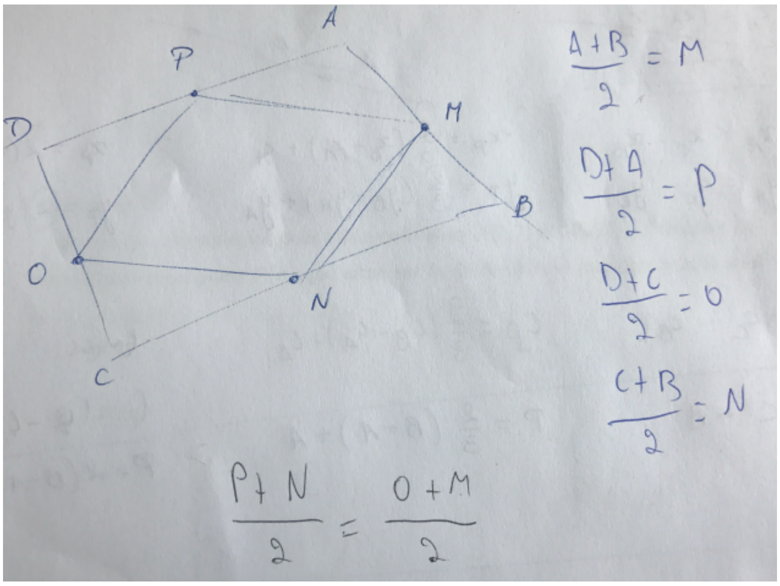


FIGURE *5.13*

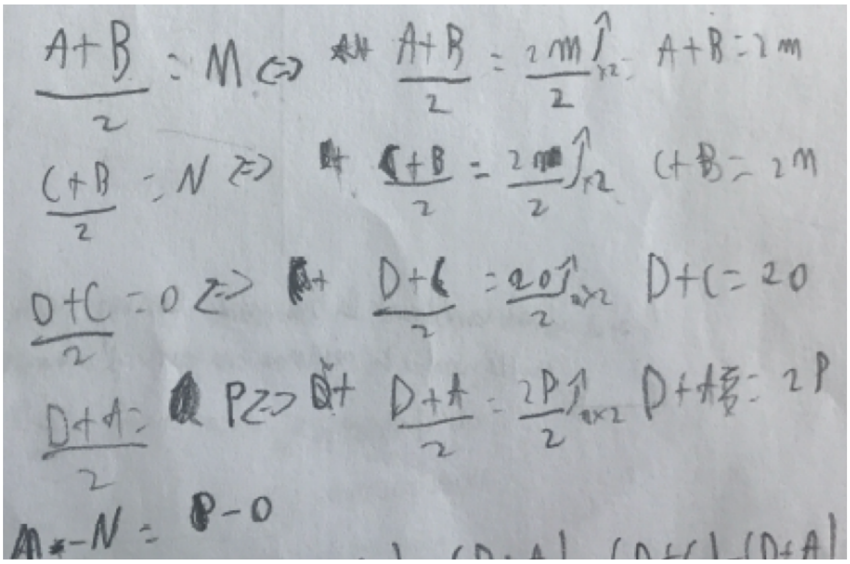


FIGURE 5.14

En conclusion, il faut un milieu où l'intervention du professeur est importante pour faire vivre ce parcours en classe car les élèves n'ont pas d'habitude de ce type d'ostensif. Mais le formalisme bipoint est accepté par les élèves malgré tout et ils sont capables aussi de l'utiliser en traitant les exercices proposés.

5.2.4 Analyse globale des données

Notre analyse est structurée selon trois axes qui interfèrent : nous parlerons d'abord de la difficulté éprouvée par les élèves, dans le cadre de l'expérimentation, à se situer dans le bon paradigme géométrique. Nous verrons ensuite en quoi l'amarrage à la géométrie analytique qui est envisagé dans notre MER est incertain. Et, enfin, nous regarderons de plus près l'extension praxémique telle que vécue par les élèves dans un accès progressif aux concepts de bipoint et de vecteur.

Une difficulté à changer de paradigme géométrique

Comme prévu dans l'analyse *a priori*, on voit toutes les difficultés qu'éprouvent les élèves de ce niveau à entrer dans un nouveau paradigme géométrique. En effet, lors de leur expérience scolaire antérieure, ils ont été souvent sollicités pour construire des figures et y mesurer des longueurs et des amplitudes d'angles afin de conjecturer des propriétés de figures. C'est le **contrat d'ostension** (au sens de Berthelot et Salin, 1992) [119] où il s'agit de constater de telles propriétés : la somme des angles d'un triangle vaut 180^o, les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, on peut construire à la forme et aux dimensions près un triangle dès que l'on connait les longueurs de ses côtés, etc.

119. BERTHELOT et SALIN 1992.

On voit de moins en moins, dans les manuels et pratiques enseignantes, de propriétés faire l'objet d'une "preuve" où l'on articule plusieurs autres propriétés, comme par exemple celle que nous avons proposée au début de notre projet où la propriété des diagonales d'un parallélogramme est prouvée à partir d'un cas d'isométrie de triangles et de propriétés d'angles opposés par le sommet et d'angles alternes-internes et, bien sûr, d'une définition de base choisie pour le parallélogramme. Dans les trois premières du secondaire, on va plutôt récolter un ensemble de propriétés d'une figure donnée et, tout au plus, montrer un "emboitement" des ensembles de figures basé sur le nombre de propriétés : comme le reconnait un élève dans une remarque du professeur (propos 187-192), "un carré est un parallélogramme".

Les élèves concernés ont donc été baignés dans ce que Houdement et Kuzniak (2006) appellent la "géométrie naturelle" et on doit donc les **acculturer ici à la "géométrie axiomatique naturelle"**. C'est une entreprise délicate qui suppose ce que Schneider (2008) appelle une **situation fondamentale au sens large** en référence à la fois à la TSD de Brousseau (1998) et à la TAD de Chevallard (1991 et 1992) :

> *Les concepts de rapport institutionnel et de rapport personnel m'incitent à élargir celui de situation fondamentale. Il se peut en effet que l'enjeu d'une telle situation ne soit pas la construction d'un savoir particulier mais plutôt l'entrée des élèves dans une nouvelle institution en ce sens qu'on cherche à rendre adéquat au rapport institutionnel leur rapport personnel à certains objets identifiés par cette institution. Et, dans un tel cas de figure, je parlerai de "situation fondamentale au sens large* [120].

Et c'est bien par un exemple de ce passage d'un paradigme géométrique à un autre que cet auteur illustre le concept de situation fondamentale au sens large :

> *La situation des médiatrices de Brousseau est de ce type, me semble-t-il. Voici ce dont il s'agit. "Le professeur demande "sérieusement" à ses élèves débutants de tracer les trois médiatrices d'un triangle ABC très aplati et prétend donner des noms appropriés A', B', C' aux sommets du petit "co-triangle" [Fig. 3] qu'ils "doivent" ainsi obtenir. Devant la trop petite taille de ce triangle le professer prétend avoir choisi un triangle ABC particulier et incommode. Il demande aux élèves de trouver un triangle dont le co-triangle sera le plus grand possible. Les élèves s'acharnent et doivent finalement émettre l'hypothèse que ces trois points pourraient n'en représenter qu'un seul et en apporter la preuve contre "l'évidence" de la figure et non pas avec. Pour cela il faut s'accorder sur la définition de la médiatrice comme lieu. Le professeur explique alors la différence entre "voir" et "démontrer". La*

120. SCHNEIDER 2008, p. 53.

> *géométrie ne consiste pas à décrire ce qu'on voit mais à établir ce qui "doit" être "vu". (Brousseau, 2000).*

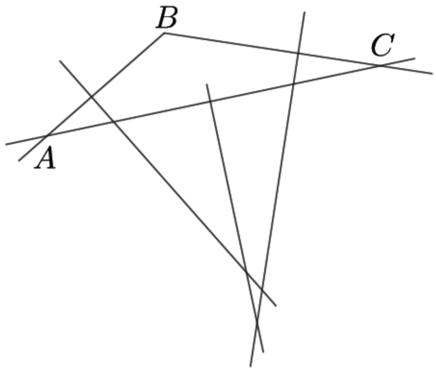


Fig. 3

> *Cette situation n'est pas à proprement parler une situation fondamentale d'un savoir donné, au sens strict du terme. Car, que serait ce savoir, sinon la propriété de concourance des médiatrices d'un triangle. Mais, on sent bien que l'enjeu majeur n'est pas là mais plutôt dans l'évolution souhaitée du rapport des élèves à de mêmes objets qui, ayant le statut de simples dessins dans l'institution "collège", deviennent de véritables figures géométriques dont les propriétés donnent prise au raisonnement déductif dans l'institution "lycée"* [121].

Nous n'avons pas créé ici une telle situation fondamentale au sens large pour faire passer les élèves à ce paradigme "géométrie axiomatique naturelle" mais estimons que le professeur peut s'expliquer sur ce nouveau contrat à propos des tâches proposées dans notre ingénierie. Les occasions n'y manquent évidemment pas. Ainsi voit-on des élèves chercher à lire sur un dessin les coordonnées du quatrième sommet du parallélogramme (propos 08) ou se contenter de constructions de points ou de droites : par exemple, à la figure 5.2, construire le quatrième sommet D du parallélogramme à l'intersection de deux arcs de cercles ou encore construire des droites parallèles à une autre en "reportant les droites au compas" (propos repris à la figure 5.3) ou en "déplaçant l'équerre" (propos repris à la figure 5.4).

Bien sûr, le professeur précise au fur et à mesure le contrat attendu qui est calculer à partir de propriétés des figures géométriques et l'on voit des élèves en prendre conscience peu à peu (échange des propos 21 à 24). Avec des résistances cependant et la difficulté des élèves de lâcher le paradigme de géométrie naturelle. Ainsi le propos 28 où, dans le même groupe, un élève repropose d'utiliser l'équerre pour s'assurer de l'égalité de deux longueurs. Ou encore ces élèves qui, tout en pensant à exploiter la propriété des diagonales d'un parallélogramme, cherchent à "mesurer" la moitié d'une diagonale (propos 50) et un autre déclarer "Il faut mesurer !" (propos 59).

121. SCHNEIDER 2008, p. 54.

Malgré une évolution très progressive, ressurgit de manière récurrente cette tentation de s'appuyer fortement sur le dessin, de lire les coordonnées d'un point sur un dessin et de construire les points au moyen d'un compas. Ainsi, les élèves qui identifient la translation à exploiter en "traçant le graphique" pour y "remarquer" les décalages appropriés (voir figure 5.10 et propos 87 où un élève oppose calcul et utilisation d'une translation). Ou encore, à propos de la deuxième tâche, ces élèves qui tentent de positionner un point P aux $\frac{2}{3}$ du segment à partir de A en mesurant ou en reportant, au compas parfois, des longueurs mesurées ou calculées par Pythagore (voir figures 5.7 et 5.8 sur lesquelles nous reviendrons, voir aussi propos 89 d'un élève qui parle de "dessiner").

Dans ce changement de paradigme jouent deux variables didactiques propres à ces deux premières tâches. D'une part, lorsque les coordonnées des points sont précisées numériquement, les valeurs ne sont pas entières et les mesures prises par les élèves peu précises. D'autre part, il s'agit d'élargir les relations aux coordonnées génériques : c'est ce qui assure ici le caractère indépendant de ces relations par rapport au choix du repère mais c'est aussi un passage qui va soulager de calculs fastidieux sur des nombres décimaux et mieux faire voir que c'est la structure de ces relations qui est constitutive de la définition qui sera retenue pour le parallélogramme :

$$B - A = C - D$$

avec, en sus, l'accident du parallélogramme aplati, pour faire comprendre qu'une définition est une condition nécessaire et suffisante et que la relation ci-dessus ne peut caractériser l'ensemble de tous les parallélogrammes que si celui-ci comprend aussi ceux qui sont aplatis.

On s'éloigne ici d'une approche "descriptive" des définitions pour s'approcher d'une vision plus lakatosienne où les définitions se doivent, non pas de décrire des objets pour faire comprendre à un interlocuteur ce que l'on en perçoit en faisant appel à sa complicité, mais plutôt d'être des outils de preuve qui donnent prise au raisonnement déductif. Job (2011) montre que cette évolution ne va pas de soi pour les élèves et ce, loin dans leurs cursus scolaire, puisqu'il s'est intéressé aux apprentissages que suppose l'entrée dans l'analyse formalisée.

Cette difficulté à changer de paradigme géométrique chapeaute en quelque sorte l'analyse des données recueillies auprès d'élèves à l'entrée du lycée mais nous verrons plus loin que les (futurs) enseignants ne sont pas toujours au clair avec ce paradigme géométrique que leurs pratiques induisent dans la tête des élèves.

Un amarrage incertain à la géométrie analytique

Comme prévu dans notre MER, le calcul bipoint se présente comme une méthode analytique "compacte" dans laquelle les relations bipoint résument des relations homologues entre coordonnées respectives des points concernés dont la forme reste invariante d'un repère à l'autre. C'est dire évidemment que notre projet d'enseignement table sur les connaissances des élèves en géométrie analytique.

Nous savons ce qu'il en est au sein de la classe concernée et dans l'évolution des programmes scolaires. En fait, les élèves auxquels le projet est supposé s'adresser ne sont pas très avancés du point de vue de la géométrie analytique. L'examen du programme montre qu'ils ont cependant appris quelques éléments qui sont exploitables ici : d'une part, la translation et la manière dont elle affecte les coordonnées d'un point avec un travail de type numérique dans un repère orthonormé exclusivement; d'autre part, l'expression de la distance entre deux points dans un tel repère déduite du théorème de Pythagore et, dans la foulée, l'équation d'un cercle dont on connaît le centre et le rayon. Et ce sont bien là des éléments que les élèves utilisent tout en restant fort proches de l'idée de mesure de longueurs ainsi que nous l'avons développé ci-dessus.

Les formules exprimant les coordonnées du milieu M d'un segment AB ont également été enseignées mais sont peu disponibles chez les élèves (propos 65 à 69) et on peut rapprocher ce constat de l'observation suivante faite à plusieurs reprises dans un autre contexte. Il arrive que des élèves trouvent plus logique de déterminer M par les formules $x_M = \frac{x_B - x_A}{2}$ et $y_M = \frac{y_B - y_A}{2}$. Sans doute, les uns et les autres restent-ils très attachés à l'idée de longueur, comme nous l'avons vu supra : on divise donc $|AB|$ en 2 pour obtenir M et, sans réfléchir ni à la direction de AB ni au fait qu'une coordonnée peut être négative, on calculerait $|AB|$ par des différences de coordonnées comme on retranche $|OA|$ de $|OB|$ pour avoir $|AB|$ dans une configuration particulière des points O, A et B alignés. C'est là une hypothèse qui pourrait faire craindre une mauvaise interprétation de $B - A$ comme longueur du segment AB, analogue à la confusion entre vecteur $\overrightarrow{AB}$ et segment AB.

Par ailleurs, il est une autre partie du programme dans laquelle les élèves ont rencontré une expression analytique de courbes que sont les graphiques de fonctions en particulier à propos de droites mais aussi d'autres fonctions de référence :

$$k(x) = kx^2,\ f(x) = \sqrt{x},\ f(x) = \frac{1}{x},\ \cdots$$

Ça, c'est dans l'année précédente. Au cours de celle dans laquelle cette expérimentation se déroule, les élèves auraient pu étudier ou non, selon la période, l'ensemble des fonctions du second degré.

Cette familiarisation des élèves avec les fonctions interfère à plusieurs reprises dans les suggestions qu'ils font sans qu'ils parviennent à distinguer, d'une part, les graphiques de fonctions et, d'autre part, les courbes ou figures auxquelles on pourrait associer une relation entre x et y sans que ce soit l'expression analytique d'une fonction unique. Par exemple, les élèves se demandent quelle est la "fonction de parallélogramme" (propos 09) ou, plus judicieusement, "la fonction d'une droite" ou, sans que ce soit d'aucune utilité pour résoudre le problème, "la fonction d'une diagonale" (propos 48 à 53).

Notre analyse *a priori* montre plusieurs stratégies exploitant la géométrie analytique et on retrouve cette pluralité chez les élèves. Sans doute leur choix est-il déterminé par le contrat qui les pousse à exploiter les éléments enseignés plus récemment, comme l'équation d'un cercle ou le théorème de Pythagore enseigné l'année précédente.

En effet, la stratégie exploitant la translation n'était pas majoritaire et cela peut s'expliquer par effet de contrat, les élèves s'imaginant peu souvent de devoir retourner en arrière de plusieurs années dans leur scolarité. Les effets de contrat sont ici plutôt porteurs car les stratégies privilégiées sont techniquement difficiles ou infaisables pour des élèves de cet âge. La translation apparaitra donc comme la stratégie optimale pour effectuer les tâches proposées ce qui donne bien à celles-ci un caractère fondamental par rapport au savoir visé. On peut cependant supposer que l'idée de recourir à la translation viendra du groupe, éventuellement en un temps plus long et pourquoi pas être suggérée par l'enseignant, la dévolution portant alors sur le débat entre élèves à propos du choix d'une stratégie parmi plusieurs : les situations (adidactiques) dévolues aux élèves se vivent, la plupart du temps, dans ce collectif qu'est la classe que l'on considère comme une petite communauté scientifique.

Dans le cadre de cette expérimentation, le débat collectif n'a guère pu être mené faute de temps.

Quant à la mise en œuvre elle-même des stratégies proposées par les élèves, elle s'est heurtée à deux obstacles :

- Le premier est que l'enseignement en général, trop axé sur les procédures algébriques, est peu propre à faire comprendre aux élèves que l'algèbre est ici un outil au service de la géométrie et ce que cela suppose. Ainsi, les élèves donnent l'impression d'expérimenter sur le tas qu'un point du plan se détermine à l'intersection de deux lieux : deux cercles dans le cas d'une stratégie (propos 35 à 39 et propos 54 à 65), un cercle et une droite pour une autre (propos 57 à 64). On peut ici évoquer toutes les difficultés observées par Lebeau (2009) et Dunia (2013) faisant écran à la signification géométrique des calculs algébriques : les équations perçues comme "étiquettes" des courbes géométriques plutôt que comme contraintes portant sur les coordonnées de points formant ces courbes; l'absence de distinction entre deux univers : d'une part, les fonctions du premier degré et les droites qui en sont les graphiques et, d'autre part, l'équation générique $ax + by + c = 0$ d'une droite quelconque dans un repère quel qu'il soit et enfin une certaine méconnaissance sur les systèmes linéaires, leur compatibilité et le "degré de liberté" de leur solution.
- Le deuxième obstacle a déjà été évoqué : les élèves sont dans le paradigme de la géométrie naturelle. Ce qui fait que leurs stratégies mêlent du calcul et des mesures ou de simples lectures de figures. Plusieurs des propos repris ci-dessus en témoignent. Mais cela entraîne aussi que les élèves n'éprouvent aucunement le besoin de procéder à des preuves au sens mathématique du terme. Ainsi la première réponse utilisant les translations (figure 5.5) donne,

comme justification, non pas une démonstration basée, par exemple, sur des cas d'isométrie mais une lecture d'un dessin (figure 5.10) où les élèves remarquent “que le graphique montait en escalier. Et qu'il se décalait de 1 et montait de 2”.

Dans la section suivante nous approfondirons la stratégie de translation et son caractère potentiellement porteur des concepts de bipoint et donc de vecteur pourvu que les élèves exploitent les projections parallèles à la base même de la définition des coordonnées et donc de la géométrie analytique. C'est objet de la section suivante.

Des coordonnées aux bipoints et/ou vecteurs via une extension praxémique

Rappelons que, dans notre MER et l'ingénierie associée, le vecteur est défini comme ensemble de couples équipollents, deux tels couples $(A, B), (C, D)$ vérifiant la relation $B - A = D - C$. Or celle-ci résume deux relations homologues sur les coordonnées des points, dont la forme ne dépend pas du choix du repère. La notion de vecteur émerge donc ici à partir de ses composantes génériques.

Mais cette remontée de la géométrie analytique à la géométrie vectorielle en passant par le formalisme bipoint suppose, de la part des élèves, de changer leur regard sur les figures étudiées. Pour comprendre en quoi consiste ce changement, nous repartirons de deux procédures d'élèves pour résoudre le problème 2.

La première de ces procédures est inspirée d'une géométrie naturelle où les mesures sont permises pour construire des points. Ainsi, à la figure 5.7, on voit un élève construire un point P sur la droite AB, deux fois plus éloigné de A que de B, en mesurant le segment AB et en reportant les $\frac{2}{3}$ de cette mesure sur la droite “en partant de A”. On a déjà parlé de la prégnance des mesures chez les élèves. Mais ce que nous voulons souligner ici c'est que cet élève se passe complètement des coordonnées des points concernés même s'il dessine leur projections sur chacun des axes parallèlement à l'autre.

A la figure 5.8, on voit que c'est également par report de longueurs qu'un autre élève trouve un premier point satisfaisant les conditions à l'extérieur de AB, en utilisant un compas comme le montrent les arcs de cercle tracés. Et un deuxième point entre A et B non pas en mesurant la longueur AB mais en la calculant sur base des coordonnées des points A et B et en utilisant le théorème de Pythagore. Cependant, il ne va pas jusqu'à déterminer les coordonnées de M et encore moins à faire le chemin inverse à savoir déterminer ces coordonnées d'abord en exploitant les rapports voulus entre AM et MB sur les projections de ces points et trouver ensuite M sur AB à partir de ses coordonnées.

D'ailleurs, sur base de la sollicitation du professeur, l'élève formule cette idée *a posteriori* sans identifier toutefois le théorème de Thalès en jeu (propos 105 à 115). Il faudra l'intervention du professeur pour que les élèves de ce groupe terminent dans le sens attendu (propos 116-117).

Ce que montre cette analyse c'est que les élèves ont tendance à se polariser sur la figure elle-même, ici la droite contenant les points A, B et P (ou M), avant de s'occuper des coordonnées de ces points s'y croyant sans doute obligés en raison de la consigne du problème. Et ce, même chez des élèves qui ont conscience de devoir se référer à des théorèmes et pas uniquement à des mesures.

C'est *a fortiori* vrai pour les autres élèves lesquels auront d'ailleurs plus souvent tendance à trouver un seul point P, celui à l'extérieur du segment AB, par simple report de la longueur AB à partir de B. Ce qui n'empêche, comme on vient de le voir, l'un ou l'autre d'entre eux de déterminer un point P à l'intérieur du segment AB par report, à partir de A, des $\frac{2}{3}$ de AB.

De ce point de vue, l'idée de la translation est assez intéressante à regarder de près. Elle est effectivement utilisée par certains élèves, pour chacun des deux problèmes dévolus, peu à vrai dire, car cela leur demande de remonter plus en amont dans leur cursus scolaire. Comme déjà dit, la translation a effectivement été vue au tout début de l'enseignement secondaire, sans forcément avoir été associée au mot "vecteur", lequel, par contre, a été étudié en physique à propos des forces principalement. D'ailleurs, à propos du problème relatif au quatrième sommet du parallélogramme, des élèves rapprochent vecteur et le fait de translater mais évacuent assez vite le mot "vecteur" avec l'argument qu'on n'a pas affaire à des forces (propos 83, 84).

Revenons à la translation telle qu'utilisée dans chacun des problèmes 1 et 2. On la voit utilisée dans le problème du parallélogramme par des élèves qui perçoivent qu'il faut articuler deux directions ("horizontale" ou la direction de Ox et "verticale", celle de Oy) et indiquer un sens de parcours par un signe pour chacune : $+$ en x vers la droite, $-$ vers la gauche, $+$ en y vers le haut, $-$ vers le bas (propos 76 à 87). Cependant on observe leur difficulté à exprimer cela par les différences adéquates des coordonnées (la plus grande valeur moins la plus petite), respectives et indépendantes pour les abscisses, d'une part et pour les ordonnées, d'autre part.

Il semble que ces élèves s'attachent à des directions et à des sens qu'ils associent à des déplacements sur la figure initiale : de A vers C par exemple, sans toutefois discerner facilement les déplacements pertinents et encore moins les traduire efficacement en termes de différences de coordonnées.

En ce qui concerne le problème 2 des points A, B et P alignés, on voit des élèves s'emparer correctement de l'idée de translation pour trouver le point P' extérieur au segment AB (voit figure 5.10) : ils écrivent $+1, +2$ de A vers B et $+1, +2$ de B vers P' en dessinant en trait pointillé des segments parallèles aux axes. Par contre, ils éprouvent plus de difficultés à trouver d'une manière analogue, les coordonnées du point P satisfaisant les conditions tout en étant à l'intérieur du segment AB. Comme le montre l'échange entre un élève et le professeur (propos 120 à 135 et la figure 5.11), l'élève doit se "détacher" de la figure afin d'abord de ne pas interpréter une différence de coordonnées comme "représentant" le segment AB, ensuite de considérer deux différences distinctes, celle des abscisses et celle des ordonnées, et enfin les envisager comme “deux côtés d’un triangle rectangle”, ce qui suppose de prendre les coordonnées dans le bon ordre. En même temps, cette prise de conscience constitue un tremplin vers une validation ultérieure via, par exemple, un cas d’isométrie.

De tels apprentissages sont requis pour établir les premières relations bipoint mais, qu’on ne s’y trompe pas, un démarrage par les vecteurs, courant dans les pratiques enseignantes ne les évite pas et c’est ce qui explique les difficultés observées par Le Thi Hoai Chau (2001) après un enseignement sur les vecteurs, les élèves continuant à avoir des difficultés à articuler longueur, sens et direction. On peut également évoquer plusieurs témoignages de professeurs sur les erreurs de leurs élèves liées à une certaine confusion entre coordonnées de points et composantes de vecteurs ainsi que les travaux de Lebeau (2009) sur le délicat passage du vectoriel au paramétrique et du paramétrique au cartésien. Le travail fait, à la section 1.2.2 du projet d’enseignement associé à cette thèse, sur le lien entre la longueur d’un segment AB parallèle à un axe et les coordonnées de ses extrémités, s’avère ici bien utile.

Par contre, ces apprentissages, bien intégrés, donnent accès aux relations bipoints via une extension praxémique dont nous allons parler à présent. Rappelons ce qu’est une telle extension au sens de Matheron (2010) : elle concerne “l’exportation”, d’une pratique à l’autre, de praxèmes tels que la technique consistant à “poser une opération en colonnes” pour additionner des nombres ou le praxème “de la potence” propre à la division d’un nombre par un autre que Newton n’hésite pas à transposer à toute expression algébrique pour en obtenir son développement en série entière. Encore faut-il payer le prix de cette exportation, par exemple en termes de questions liées à la convergence de telles séries...

Ici, on exporte des praxèmes liés à l’algèbre élémentaire et à ses propriétés de commutativité, distributivité, etc... En effet, le calcul bipoint résume deux ou trois identités algébriques homologues liant respectivement les abscisses, ordonnées (et cotes) des points concernés. Il brasse et résume donc plusieurs relations où les lettres représentent des réels.

Encore faut-il, comme nous l’avons développé aux sections 4.2 et 4.3, que ces relations expriment des configurations géométriques intéressantes et porteuses. Il faut aussi que ces relations aient une forme invariante quel que soit le choix du repère. Et c’est cela qu’il faut valider. C’est à ce double prix que le calcul bipoint est performant pour traiter de problèmes géométriques et pour préfigurer le calcul vectoriel et ses propriétés intrinsèques.

Le passage des relations homologues entre coordonnées aux relations bipoint constitue donc une extension praxémique au sens d’une exportation des praxèmes de l’algèbre élémentaire à ce que nous avons appelé une géométrie calculatoire.

Nous pensons que les élèves sont capables de comprendre une telle extension, voire de la créer, pourvu cependant qu’ils y soient “contractuellement” invités, c’est-à-dire autorisés par l’enseignant et que celui-ci soit très explicite sur sa signification.

C'est ce qu'illustre la partie de notre expérimentation où l'expérimentateur a judicieusement "poussé le bouchon plus loin" avec un groupe formé des élèves ayant eu l'idée d'exploiter les translations : c'est l'expérimentation III.

Lors de celle-ci, l'expérimentateur, devenu professeur, explique les enjeux visés en soulignant plusieurs fois la similitude de forme d'une relation en x et d'une autre en y et en insistant sur la volonté du mathématicien à rassembler plusieurs formules en une seule (propos 136 à 144). La réponse d'un élève est de résumer par l'écriture $C_D - C_A = C_C - C_B$ les égalités $x_D - x_A = x_C - x_B$ et $y_D - y_A = y_C - y_B$, en spécifiant bien que C_P représente les coordonnées de P, la lettre C renvoyant à la première lettre du mot coordonnées et illustrant ce que l'on appelle une "lettre objet" dans la didactique de l'algèbre élémentaire. Le groupe arrive ensuite à reformuler tous les résultats obtenus précédemment par ce qui est effectivement une extension praxémique.

On pourrait s'en tenir là et tabler sur le fait que, à force de faire des calculs sur de tels symboles $C_A, C_B, C_P, ...$ on pourrait percevoir à la longue "qu'oublier" le C ne prête à conséquences : par exemple,

$$C_P = \frac{2}{3}(C_B - C_A) + C_A$$

deviendrait

$$P = \frac{2}{3}(B - A) + A$$

avec la même signification et les mêmes règles de calcul.

C'est une option mais ce ne pouvait pas être celle retenue lors de cette expérimentation de courte durée. L'expérimentateur a alors judicieusement parlé d'un élève (fictif) qui aurait proposé, l'année précédente, de telles écritures encore plus simplifiées, telles que $D-A = C-B$, et a évoqué l'embarras d'avoir une même lettre (C) pour évoquer le mot Coordonnée et pour désigner le point C. Le deuxième argument est fort lié au choix d'une "lettre-objet" car l'élève aurait pu utiliser la lettre X, au lieu de C, par exemple, comme il arrive que ce soit le cas dans certains manuels d'algèbre linéaire où l'on écrit X pour $(x_1, x_2, ..., x_n)$, Y pour $(y_1, y_2, ..., y_n)$.

Au total, cette invitation de l'expérimentateur à remplacer C_P par P se solde par des données de grand intérêt pour notre thèse (voir propos 150 à 164) :

- les élèves éprouvent un malaise à utiliser une même lettre pour deux choses distinctes : un point, d'une part et ses coordonnées, d'autre part.
- ils acceptent ensuite de l'adopter pour des raisons de simplicité de calcul et après avoir reconnu que les égalités travaillées et les opérations qu'elles contiennent ne pouvaient s'appliquer qu'à des coordonnées et non pas directement à des points.

L'expérimentateur termine alors en demandant aux élèves d'interpréter géométriquement l'implication :

$$D - A = C - B \Rightarrow \frac{D + B}{2} = \frac{A + C}{2}.$$

Malgré une certaine confusion entre ce qui est hypothèses et ce qui est thèse, les élèves arrivent à comprendre le sens géométrique des écritures mais c'est l'expérimentateur qui conclut par l'énoncé en français de la propriété concernée (propos 165 à 185). Les choses s'accélèrent alors, faute de temps. Successivement, l'expérimentateur introduit le parallélogramme aplati (propos 185-195) et propose aux élèves de prouver, grâce au nouveau calcul, le théorème de Varignon (propos 196-228). Le temps presse mais, aidés par l'expérimentateur, les élèves arrivent à traduire hypothèses et thèse et boucler la démonstration de deux façons résumées par les figures 5.13 et 5.14.

CONCLUSION DE LA SECTION 5.2

Nous conclurons cette partie 5.2 en articulant trois aspects complémentaires.

Tout d'abord, l'expérimentation d'une partie de notre ingénierie dans une classe nous a permis d'identifier plusieurs difficultés d'apprentissage des élèves qui se renforcent l'une, l'autre.

- Une prégnance du paradigme de "géométrie naturelle" qui fait écran à celui de "géométrie axiomatique naturelle" : les élèves sortant du collège restent très attachés aux mesures faites sur des dessins tracés avec précision et aux constructions de points ou de droites réalisées avec des instruments. De ce fait ils peinent à rentrer dans un contrat de validation au départ de propriétés caractériques des figures géométriques.
- Une difficulté à exploiter leurs quelques connaissances en géométrie analytique pour traduire des propriétés de figures ou de transformations géométriques. Les élèves peinent en effet à se détacher des figures et des mesures de longueurs et ainsi à travailler avec les projections parallèles sur les axes : expressions, en termes de coordonnées, du milieu d'un segment, de la longueur d'un segment parallèle à un axe ou de la translation amenant un point sur un autre,... Ils ne distinguent pas les équations associées aux courbes (ou figures) géométriques des expressions analytiques de fonctions et, plus que probablement comme déjà observé par Lebeau et Schneider (2009), ne conçoivent pas non plus ces équations comme des contraintes portant sur les coordonnées.

Ensuite, cette partie de l'ingénierie a produit des effets en termes d'apprentissage. Par leur caractère fondamental, les questions dévolues ont permis de mettre en évidence l'intérêt d'une technique basée sur des différences de coordonnées, en évitant d'autres calculs pénibles comme celui de la distance entre deux points. Ces questions n'avaient pas de caractère fondamental au sens large par rapport à l'entrée dans un nouveau paradigme géométrique mais elles ont toutefois offert à l'enseignant de multiples occasions d'expliquer aux élèves l'évolution attendue d'eux de ce point de vue laquelle a pu être observée ensuite. Le choix de coordonnées décimales pour les points donnés et celui ultérieur de coordonnées génériques ont joué ici le rôle de variables didactiques tout en favorisant, chez certains élèves, une extension praxémique des relations entre coordonnées, proche du formalisme bipoint. Ce fonctionnement doit à la conduite éclairée des situations adidactiques concernées, de la part du professeur et de l'expérimentateur. Une telle conduite est indispensable dans la plupart des cas car, contrairement à certaines idées reçues au sujet de la dévolution, l'efficacité de situations adidactiques tient non seulement au choix de celles-ci mais aussi aux échanges des élèves entre eux et avec le professeur.

Enfin, des recoupements faits avec certaines observations ou encore d'autres travaux de recherche indiquent que les difficultés d'apprentissage relevées ici ne sont pas propres à la transposition didactique que notre MER réalise et ne sont donc pas provoquées par l'ingénierie elle-même. En ce sens, notre ingénierie permet de pointer des aspects fragiles du curriculum actuel basé sur une naturalisation de certaines pratiques enseignantes et des illusions trompeuses sur ce que les élèves apprennent vraiment. La section 5.3 traite précisément des pratiques enseignantes.

Par tous ces aspects, l'ingénierie joue ici un rôle phénoménotechnique.

5.3 L'expérimentation avec les élèves-professeurs

On ne peut effectivement pas parler de l'écologie du formalisme bipoint sans se pencher sur les pratiques enseignantes.

Celles-ci sont relatives à une transposition didactique telle qu'induite par les programmes scolaires et les manuels conformes à ces programmes. De cela, nous avons déjà parlé, dans les grandes lignes, aux sections 2.2.3 et 2.2.4. Pour aller plus loin, nous aurions dû avoir accès au public des enseignants ce qui n'a pas été le cas. Nous aurions dû également entamer une investigation qui faisait, à elle seule, l'objet de toute une thèse.

Pour toutes ces raisons, nous nous contenterons ici de données "opportunistes" récoltées dans le cadre d'un cours de didactique. Ces données concernent des tâches qui ont été soumises aux futurs professeurs de mathématique au niveau du Lycée, ici en formation initiale et appelés de ce fait, des élèves-professeurs. M. Schneider, titulaire de ce cours à l'époque, a orienté certaines de ces tâches autour de mon sujet de thèse et du projet d'enseignement associé. Mais sans perdre de vue, toutefois, que l'objectif premier était de former les futurs professeurs à gérer des questions didactiques et, en particulier, l'analyse de la transposition didactique. Les données recueillies dans cette section 5.3 doivent donc être rapportées aux objectifs de cette formation : c'est ce que nous faisons à la section 5.3.1 tout en précisant le contexte concret de la formation ainsi que le public concerné.

Dans cette expérimentation nous faisons l'hypothèse que les choix des élèves-professeurs reflètent assez bien les pratiques des professeurs en fonction. Parmi ces derniers, il y a ceux qui sont "maîtres de stages" en ce sens qu'ils encadrent les élèves-professeurs lors de leurs stages devant les élèves. Et l'on observe que les stagiaires adoptent les choix pédagogiques et didactiques des enseignants qui les encadrent, soit par obligation, soit par mimétisme. Quand ce n'est pas le cas, les élèves-professeurs préparent leurs leçons de stages soit à partir des manuels existants ou en retournant aux livres et cahiers de mathématiques de leur propre scolarité secondaire ou encore à leurs cours d'université. Dans tous les cas, les choix des élèves-professeurs reflètent bien la transposition didactique en vigueur.

5.3.1 Attendus de la formation et analyse du milieu

Les élèves-professeurs concernés sont inscrits au cours de didactique spéciale des mathématiques dans le programme de l'agrégation AESS [122] en sciences mathématiques à l'Université de Liège (en 2014, 2015 et 2016). Ces étudiants sont soit des professeurs déjà en charge d'un enseignement dans le secondaire sans avoir encore le diplôme d'AESS devenu obligatoire pour y enseigner, soit des étudiants en der-

122. Le diplôme d'agrégé de l'enseignement secondaire supérieur (AESS) est le titre pédagogique qui prépare à enseigner dans l'enseignement secondaire supérieur. Il complète le titre (Licence ou Master) acquis dans une discipline donnée qui identifie les matières que l'on peut enseigner.

nière année de master en mathématiques à finalité didactique, soit des ingénieurs qui veulent enseigner dans le secondaire, soit des étudiants étrangers qui possèdent l'équivalence de diplômes pour suivre l'agrégation.

Au cours de cette formation, les étudiants sont formés à la théorie des situations de Brousseau et à la théorie anthropologique de Chevallard et, bien que l'entrée dans ces théories reste modeste dans le cadre du cours, les élèves-professeurs y sont néanmoins initiés au regard praxéologique. Ils y ont donc rencontré le concept de praxéologie de Chevallard (1992), ainsi que celui de praxéologie "modélisation" et "déduction" de Schneider (2008).

Comme développé dans Schneider et Job (2016) [123], deux objectifs majeurs sont visés dans leur formation.

- Avant tout un objectif de "réflexivité" des élèves-professeurs sur leurs pratiques lors des stages et sur les pratiques enseignantes en général. Un obstacle majeur à cet objectif est ce que l'on appelle "l'imprégnation socialisante". En effet, comme le souligne Beckers (2007), les élèves-professeurs sont familiers avec le milieu professionnel dont ils vont faire partie et, bien qu'ils changeront de rôle, passant d'un statut d'"élève" à un statut d'"enseignant", les années passées dans l'institution scolaire ont façonné leur représentation *a priori* de cette institution et leur posture affective vis-à-vis de celle-ci. On peut ici convoquer non seulement le concept de "socialisation bibliographique" de Dubar (2000) mais aussi d'"assujettissement à une institution" de Chevallard (1992). Cet assujettissement se traduit par un sentiment de naturalité à l'égard des choix faits par les institutions qui rend ceux-ci transparents en tant que choix pour les sujets de ces institutions. En particulier, les futurs enseignants peinent à percevoir les transpositions didactiques, auxquelles ils ont été formés lorsqu'ils étaient élèves, comme des choix possibles parmi d'autres. C'est là le rôle d'une réflexion didactique en amont de leur pratique future. Car éviter une imprégnation socialisante des formés supposerait au minimum que les étudiants soient conscients de ces dysfonctionnements de l'enseignement actuel mais également, qu'ils aient ouvert leur champ de conscience à des pistes d'amélioration possibles avant leur entrée dans la profession.
- A ce premier objectif est directement liée une visée d'amélioration de l'enseignement actuel des mathématiques en Belgique francophone, les élèves-professeurs étant considérés ici, sans illusion excessive de notre part, comme des potentiels "vecteurs de changement" [124]. Car, en Belgique francophone comme en France, l'enseignement actuel souffre de semblables dysfonctionnements. En France, Chevallard (2000) fait le constat d'un enseignement des mathématiques s'inscrivant dans une perspective essentiellement "monumentaliste" : on fait "visiter" aux élèves les savoirs mathématiques,

123. Schneider et Job 2016.
124. Ibid.

> comme les pièces d'un musée sans leur parler des questions auxquelles ces savoirs apportent des réponses. Et ajoutons que nous observons un repli des enseignants de plus en plus marqué sur l'apprentissage de procédures de calculs, faute de pouvoir construire un discours rationnel, mathématiquement parlant, qui serait adapté pour les élèves de l'enseignement secondaire (Rouy, 2007 et 2009).

Le dispositif de formation en géométrie mis en place au cours de didactique des mathématiques s'inscrit dans cette perspective. Il s'est constitué petit à petit au fil des années sur base de certaines observations invariantes portant sur la construction, par les élèves-professeurs, de leçons sur les vecteurs destinées à des élèves de quatrième année de l'enseignement secondaire.

Comme décrit dans Balhan et al. (à paraître) [125], le volet "géométrie" de ce dispositif de formation initiale est basé sur l'analyse de la transposition didactique, celle d'obstacles d'apprentissage et de dysfonctionnements dans l'enseignement.

On y conjugue un enseignement frontal et la dévolution d'un travail aux étudiants.

Cet enseignement comporte plusieurs volets. Des éléments d'histoire de la géométrie y sont traités :

- Le modèle déductif tel que pratiqué par Euclide, son contexte historique, les conditions de son succès mais aussi ses particularités et ses faiblesses telles que critiquées aujourd'hui : principalement, une géométrie des grandeurs basée sur des constructions de figures géométriques et sur leur "superposabilité", les seuls nombres connus étant les entiers, des définitions descriptives autant qu'opératoires d'objets qui existent préalablement en tant que réalités physiques, des dessins qui jouent un rôle effectif dans le raisonnement déductif en attestant de l'existence et des positions respectives d'objets géométriques,...
- La reprise de la géométrie d'Euclide par Hilbert qui la fonde sur les axiomes de congruence, d'incidence, d'ordre et de continuité. L'évolution des notions de preuve et de rigueur, le critère de "vérité" ou d'adéquation d'un modèle mathématique à une supposée réalité est remplacé par le critère de "non contradiction" : les objets géométriques n'existent que par les axiomes qui régissent leurs relations, leur "nature" passant à l'arrière-plan.
- Le programme d'Erlangen qui structure tous les acquis géométriques en termes de groupes de transformations, auxquels sont associés des invariants spécifiques, dont les isométries permettant de définir la superposabilité des figures. On montre que ce programme permet une classification des propriétés en termes de géométries métrique, affine et projective.
- Le courant structuraliste qui débouche sur la subordination de la géométrie à l'algèbre linéaire, le concept de vecteur en géométrie émergeant lentement

125. BALHAN et al. 2017, p. 3.

d'une recherche de calcul absolu tel que le formalisme bipoint qui porte directement sur les objets géométriques et qui est supposé pallier la lourdeur des calculs propres à la géométrie analytique.

Mais cet enseignement prodigué aux élèves-professeurs comporte aussi des données relatives à la transposition didactique expliquée à travers l'histoire de l'enseignement de la géométrie parmi lesquelles :

- La réforme des mathématiques modernes par laquelle on souhaitait, en particulier, "dépoussiérer" l'enseignement de la géométrie dont les défauts étaient ceux de la géométrie euclidienne en l'inscrivant d'emblée dans le cadre rigoureux de l'algèbre linéaire. Cette approche "top down" des mathématiques elles-mêmes refondées par l'école bourbakiste vers leur enseignement s'est soldée par un échec dû surtout à des définitions et formulations absconses pour les élèves et par la relégation tardive, voire la suppression, d'aspects plus expérimentaux ou plus "concrets" comme l'étude de figures géométriques.
- Une après-réforme qui se cherche encore, les références au vectoriel demeurant surplombantes mais peu convaincantes, le passage du vectoriel à l'analytique étant de l'ordre du passe-passe, faute de disposer des théorèmes d'algèbre linéaires ad hoc. Ainsi l'enseignement des vecteurs peine à trouver une niche écologique satisfaisante, quelle soit liée à la géométrie élémentaire et à sa modélisation algébrique, aux preuves de propriétés de figures ou à la physique (voir e.a. Ba et Dorier, 2006).
- Quant au concept même de vecteur présenté comme un segment orienté avec les trois caractéristiques de longueur, direction et sens, il n'est pas vraiment défini, les notions de direction et de sens n'étant pas des invariants affins et étant pensés à la manière des géographes. Qui plus est, cette approche soulève des obstacles d'apprentissage, les élèves éprouvant des difficultés à s'affranchir du modèle métrique pour considérer les objets en jeu non seulement sous l'aspect de la mesure mais aussi sous celui de l'orientation dans l'espace ou encore, lorsque la notion de vecteur est liée à la translation, restant dans un modèle unidirectionnel orienté sans prendre en compte toutes les directions orientées (Le Thi Hoai Chau, 2001).
- De manière générale, l'enseignement actuel de la géométrie se situe malaisément entre le paradigme de "géométrie naturelle", celui de l'"axiomatique naturelle" et celui de l'"axiomatique formaliste", au sens de Houdement et Kuzniak (2006), de même qu'entre diverses approches méthodologiques en géométrie : synthétique, analytique et vectorielle, empruntant à chacune sans les articuler vraiment.

Sur base de ces données et de la distinction faite entre praxéologie "modélisation" et praxéologie "déduction", on présente alors un Modèle Epistémologique de Référence (MER) au sens de Gascon (1993) dans lequel des relations entre bipoints, telles que $B-A=C-D$ ou $P=A+k(B-A)$, sont construites comme modèles calculatoires de configurations géométriques, ici les parallélogrammes et les configurations équivalentes de points alignés déterminées par deux sécantes sur faisceau de parallèles. Comme développé plus haut, ce MER est concrétisé par une ingénierie didactique où les tâches fondamentales sont : déterminer, dans un cas numérique puis le cas général 2D, les coordonnées du 4ème sommet d'un parallélogramme ou celles d'un point P, situé sur la droite AB, deux fois plus éloigné de A que de B, connaissant les coordonnées des autres points. Le cadre de validation est celui de la géométrie synthétique élémentaire, ici un cas d'égalité de triangles et le théorème de Thalès relatif aux faisceaux. Et le caractère générique des preuves permet de mettre en évidence que les relations bipoints qui résument des relations analogues sur les abscisses et les ordonnées ont une forme invariante par rapport au choix du repère dans lequel on représente les configurations concernées.

Dans sa phase "modélisation", on ne prend donc pas appui ici uniquement sur des préconstruits et intuitions associées mais aussi sur les propriétés d'objets construits dans un cadre mathématique, celui de la géométrie d'Euclide. Une fois les modèles de base créés, on peut alors fonctionner dans un processus de "déduction" d'autres propriétés géométriques.

Nous détaillons ce dispositif de formation dans la section suivante.

5.3.2 Les tâches dévolues dans le dispositif de formation en géométrie

Dans le dispositif de formation initiale, les futurs enseignants sont, en partie, confrontés aux mêmes situations que celles prévues pour les élèves, dans une autre perspective cependant qui leur est précisée d'emblée : concevoir un enseignement dont le formalisme vectoriel est l'aboutissement et non le point de départ. Pour ces tâches, l'analyse *a priori* faite en référence aux élèves doit donc être modifiée ou complétée.

On dévolue aussi, à ces élèves-professeurs, des tâches supplémentaires, d'ordre mathématique : ainsi ils doivent aussi justifier que les modèles 2D s'étendent en 3D pour représenter les mêmes configurations géométriques, les relations "bipoint" résumant, cette fois, trois relations analogues entre abscisses, ordonnées et cotes des points. Mais aussi des tâches typiquement didactiques comme celle qui consiste à préparer une leçon sur les vecteurs.

Le dispositif a évolué d'une année à l'autre et nous n'avons pas toujours la mémoire précise du déroulement, année après année. Cependant, ce n'est pas tant cette évolution qui nous intéresse ici mais plutôt, comme on l'a dit, les données "opportunistes" que constituent certaines réactions des élèves-professeurs aux différentes tâches. Nous en chercherons une cohérence d'ensemble dans l'analyse globale faite à la section 5.3.3.

La première tâche demandée aux élèves-professeurs est la suivante :

Tâche 1.

Préparer une leçon sur les vecteurs et la présenter oralement, puis compléter les leçons par groupe.

Nous nous attendons à ce que les leçons imaginées par les élèves-professeurs soient proches de celles que l'on peut observer sur le terrain pour les raisons évoquées à la section précédente : les élèves-professeurs sont souvent dépendants de leurs maîtres de stages, voire contraints par eux ou par le manuel en vigueur dans la classe.

Dans ces leçons, le vecteur est "défini" par le biais de trois caractéristiques "sens", "direction" et "longueur", le sens à donné à chacun de ces mots étant ambiguë car non défini.

Ils s'agit alors d'amener les élèves-professeurs à prendre conscience de ces écueils dans l'enseignement des vecteurs au secondaire, et de les amener à envisager d'autres possibilités pour introduire le concept de vecteur en privilégiant un regard plus praxéologique que conceptuel.

Tâches liées à une approche heuristique du concept de vecteur

Nous injectons ensuite les tâches relatives à la configuration du parallélogramme (tâche 2) et à celle de l'alignement de points (tâche 3) comme celle proposées aux élèves lors de notre expérimentations décrite à la section 5.2. On leur donne aussi le problème concernant le centre de gravité d'un triangle (tâche 4).

Bien que les tâches proposées soient sensiblement les mêmes que celles que nous avons proposées aux élèves lors de notre expérimentation, l'enjeu qui se joue ici est bien sûr différent, comme expliqué supra. Les élèves-professeurs sont soit des futurs professeurs, soit déjà des professeurs au secondaire. Leurs connaissances des vecteurs sont celles d'un cours d'algèbre linéaire classique où le vecteur est présenté comme un élément d'un espace vectoriel. La difficulté réside, pour eux, à se mettre à la place des élèves en "déconstruisant" ce qu'il connaissent de leurs études universitaires pour reconstruire le vecteur dans ce cadre précis. Nous leur demandons donc d'expliquer en quoi ces tâches sont porteuses d'une introduction à venir sur les vecteurs et comment ils l'envisageraient.

Nous leur demandons également d'identifier les résultats de géométrie synthétique utiles pour prouver les calculs obtenus directement à partir de coordonnées génériques.

Voici en détail les différentes tâches proposées aux élèves-professeurs et des réponses possibles à ces tâches :

Tâche 2.

On donne, dans un plan muni d'un système d'axes, les coordonnées de trois points A, B, C quelconques non alignés. Calculer les cordonnées du quatrième sommet D du parallélogramme construit à partir des points initiaux.

En réponse à cette tâche, les élèves-professeurs peuvent utiliser plusieurs moyens pour arriver à la solution. Par exemple, en utilisant la formule de longueur ou de distance entre deux points pour traduire le fait qu'un parallélogramme a des côtés opposés égaux. Mais nous pensons plutôt qu'il vont déterminer les équations de deux droites pour trouver D à leur intersection : la droite d_1 passant par A et parallèle à BC et la droite d_2 passant par C et parallèle à AB. Cependant, nous attendons aussi à ce qu'ils sentent la relative complexité du calcul car il n'est pas si simple à réaliser lorsque les coordonnées ne le sont pas et *a fortiori* lorsqu'il s'agit de généraliser. C'est la raison pour laquelle nous ne précisons pas les points par des coordonnées numériques pour les élèves-professeurs.

Une autre approche possible est d'utiliser une sorte de "translation" verticale et horizontale pour calculer la longueur d'un segment parallèle à un axe du repère et d'exploiter un cas d'isométrie de triangles dont deux côtés sont respectivement parallèles aux axes pour arriver à l'égalité $x_B - x_A = x_C - x_D$ et, de même, $y_B - y_A = y_C - y_D$.

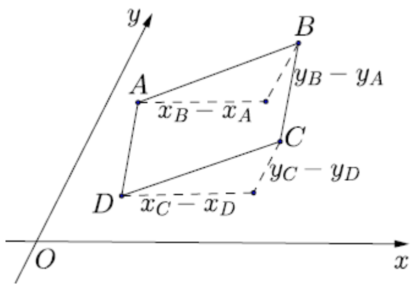


FIGURE 5.15

De plus, le choix du type de repère est à prendre en considération aussi, car les élèves-professeurs sont supposés connaître la différence entre la géométrie affine et la géométrie métrique. Ils peuvent donc situer ce problème en géométrie affine en choisissant un repère non orthonormé.

Enfin, nous pouvons aussi nous attendre ici à une autre approche basée sur une autre propriété du parallélogramme. Les élèves-professeurs ont des connaissances de base en géométrie synthétique et sont familiers avec la propriété des diagonales du parallélogramme. Ils connaissent aussi les formules conduisant aux coordonnées du milieu M du segment AB dans un repère choisi, soit $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$. Ils peuvent donc arriver ainsi à deux égalités qui sont équivalentes avec les deux égalités plus haut : $\dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{x_B + x_D}{2}$ et $\dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{y_B + y_D}{2}$.

On enchaîne alors avec les problèmes d'alignement de points et du centre de gravité :

Tâche 3.

Soient deux points A et B dans le plan. Trouver un point P appartenant à la droite AB qui est deux fois plus éloigné de A que de B.

La méthode la plus efficace qu'on peut attendre ici est l'utilisation du théorème de Thalès. Choisissons donc un repère Oxy et en projetons les points A, B et P sur l'axe Ox parallèlement à l'axe Oy, on a des droites parallèles qui déterminent sur deux droites sécantes des segments homologues dont les longueurs sont proportionnelles. Par conséquent, si P est aligné avec A et B et deux fois plus éloigné de A que de B, on en déduit que

$$x_P - x_A = 2(x_P - x_B)$$

dans les cas de la figure 5.18, ou que

$$x_P - x_A = -2(x_P - x_B)$$

dans le cas de la figure 5.19.

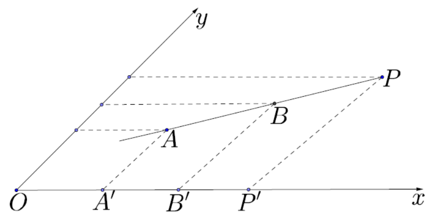


FIGURE *5.16*

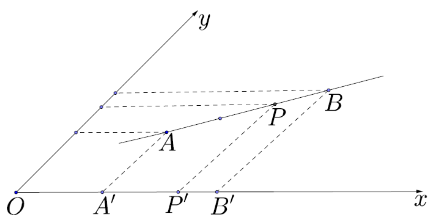


FIGURE *5.17*

De même, en projetant A, B et P sur l'axe Oy parallèlement à l'axe Ox, on arriverait aux relations respectives :

$$y_P - y_A = 2(y_P - y_B) \qquad \text{ou} \qquad y_P - y_A = -2(y_P - y_B).$$

On suppose que les élèves-professeurs sont conscients qu'il existe deux points P satisfaisant les conditions. La question du choix de repère est à considérer ici aussi car ce problème est bien situé en géométrie affine et nous attendons des élèves-professeurs qu'ils choisissent un repère non orthonormé au lieu d'un orthonormé.

Tâche 4.

Démontrer, par la méthode analytique, que les médianes d'un triangle ABC se coupent en un même point G situé aux $\frac{2}{3}$ de chacune d'elles à partir du sommet.

Ce problème est très connu en géométrie synthétique mais sa preuve y est difficile. Nous souhaitons tester ici entre autres l'opportunité du type de repère que les élèves-professeurs choisiraient. Cette propriété relève de la géométrie affine et donc un repère affin suffit tel que le suivant (voir figure 5.20) :

- l'axe Ox est la droite AB,
- l'axe Oy est la droite AC,
- le point A est l'origine du repère, le point B a pour coordonnées $(b, 0)$ et les coordonnées de C sont $(0, c)$.

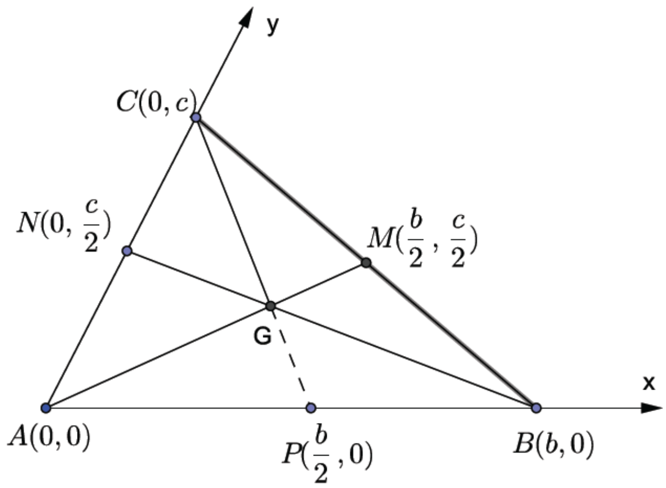


FIGURE *5.18*

Le lecteur imagine la suite et on peut penser que les élèves-professeurs n'éprouveront guère de difficulté à prouver la concourance des médianes au point G de coordonnées $(\frac{b}{3}, \frac{c}{3})$ dans le repère ci-dessus.

Nous souhaitons aussi observer comment ils gèrent, à partir de là, la position de G sur chaque médiane,

- soit en exploitant le calcul vectoriel, stratégie possible mais qui n'est pertinente ici que s'il s'agit de construire les vecteurs à partir de composantes et non d'y recourir comme s'ils étaient déjà là : on détermine des relations vectorielles à partir des composantes des vecteurs impliqués. Par exemple, dans le choix de repère précisé plus haut :

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$$

  avec $\overrightarrow{BG}(-\frac{2}{3}b, \frac{c}{3})$ et $\overrightarrow{BN}(-b, \frac{c}{2})$.
- soit en faisant des projections de points sur un axe parallèlement à l'autre, ainsi que suggéré par la figure 5.21. Les coordonnées des projections : A, G_1, C ;

A, G_2, B et A, G_2, P attestent des rapports des segments formés par ces triplets de points et le théorème de Thalès appliqué aux triangles appropriés transporte ces rapports sur les médianes.

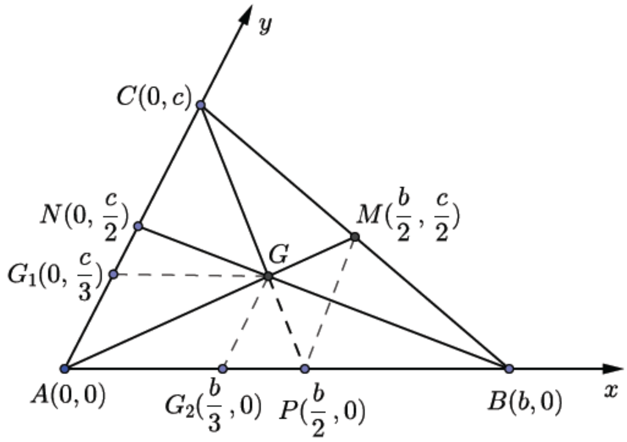


FIGURE *5.19*

En 2014 et 2015, suite à la dévolution, aux élèves-professeurs, des tâches 2,3 et 4, nous leur donnons à lire une partie concernant la géométrie 2D de notre projet d'enseignement sur la géométrie calculatoire (publié à ce jour, Nguyen et Schneider, 2017). Il s'agit pour nous d'observer comment ils s'emparent du formalisme bipoint en particulier pour construire, eux-mêmes, une géométrie affine 3D. Nous y reviendrons.

Avant cela, nous parlons d'une variante introduite en 2016, année au cours de laquelle nous avons proposé aux élèves-professeurs la lecture du chapitre 1 du projet, après les tâches 2 et 3, mais sans leur avoir proposé la tâche 4. Nous avons alors remplacé celle-ci par un test pour évaluer comment ils s'approprient le calcul bipoint. C'est ce que nous expliquons ci-après.

Test lié à l'appropriation du calcul bipoint

La lecture proposée aux élèves-professeurs était celle du chapitre 1 de Nguyen et Schneider, Ib. Le test reprend le relevé de ce qui est déjà établi dans ce chapitre, soit, textuellement :

Rappel du cadre.

Sur base :

- *des axiomes ou théorèmes de la géométrie euclidienne (2D jusqu'à présent),*
- *de la bijection admise entre l'ensemble de réels et l'ensemble des points d'une droite graduée, on construit les règles de base d'un nouveau formalisme sur lesquelles s'appuyer pour prouver, par calcul, des propriétés de figures géométriques.*

On a déjà montré que :

- *Si $ABCD$ est un parallélogramme non croisé, alors $B - A = C - D$.*
- *Le point P appartient à la droite AB si et seulement si il existe un nombre k tel que*

$$P = A + k(B - A),$$

  la valeur de k permettant de positionner de manière univoque le point P par rapport à A et B. En particulier, si $k = \frac{1}{2}$, P est le milieu du segment AB.

Les questions que nous leur posons alors sont les suivantes :

1. *Comment s'exprime le parallélisme de droites dans ce formalisme ? Justifiez votre réponse.*
2. *Exploitez les résultats obtenus pour prouver le théorème de Varignon.*
3. *Que signifie l'implication $B - A = C - D \Rightarrow \frac{B + D}{2} = \frac{A + C}{2}$ en termes géométriques ?*
4. *Que signifie l'implication réciproque ?*
5. *Comment introduiriez-vous les vecteurs, par un texte adressé aux élèves, en prenant appui sur les résultats déjà prouvés dans le cadre de ce formalisme ?*

Nous voulions tester, par la question 1, la manière dont les élèves-professeurs s'emparent des relations bipoints déjà établies pour créer eux-mêmes celle exprimant le parallélisme de droites. Les questions 2,3 et 4 supposent, quant à elles, de maitriser la signification géométrique des relations bipoint et du calcul qu'elles autorisent. En particulier, la question 4 amène le parallélogramme aplati.

Au total, les questions 1 à 4 concernent la maîtrise des valences sémiotique et instrumentale du calcul bipoint. Quant à la question 5 du test, elle vise plutôt la manière dont les élèves-professeurs relient les bipoints, d'une part, et les vecteurs, d'autre part. Elle touche donc plus au "conceptuel" et devrait nous éclairer aussi sur ce qu'ils ont vraiment compris des vecteurs.

Venons-en à présent à l'extension en 3D des relations bipoint déjà établies en 2D.

Tâches d'extension en 3D de relations bipoint 2D

Quelle que soit l'année de l'expérimentation, les élèves-professeurs avaient reçu une institutionnalisation sur la relation entre bipoints équipollents et vecteurs et sur le parti qu'on pouvait en tirer en géométrie 2D (en bref, ce qui se trouve dans les chapitres 1 et 2 du projet d'enseignement).

Ils ont donc vu, illustrée en 2D, la perspective visée ici : s'appuyer sur les résultats de la géométrie euclidienne, telle qu'enseignée aux élèves de collège (12-15 ans), pour valider les caractérisations "bipoint" de configurations géométriques de base : le parallélogramme, d'une part, et des configurations particulières de trois points alignés, d'autre part.

Nous voulions observer ici si les élèves-professeurs sont capables de reconstruire le calcul bipoint, et à terme le calcul vectoriel, en les validant sur base de résultats géométriques prouvés par la méthode synthétique et potentiellement présents dans la scolarité antérieure des élèves.

La principale tâche d'extension à 3D de relation bipoint 2D concerne le parallélogramme. En voici l'énoncé :

Tâche 5.

L'implication suivante est-elle vraie ou fausse ?

Soient A, B, C et D quatre points distincts de l'espace usuel non tous alignés. Si $B - A = C - D$, alors le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Faites une preuve rigoureuse de votre réponse sans utiliser le formalisme vectoriel standard.

Établissez le relevé des propriétés sur lesquelles s'appuie cette preuve.

L'énoncé de cette tâche a été choisi à la lumière d'expérimentations précédentes au cours desquelles nous avions demandé aux élèves-professeurs de valider, via la géométrie synthétique, que la relation $B - A = C - D$ caractérise tous les parallélogrammes (dont les aplatis) en 3D comme en 2D. Qui dit "caractérisation" signifie Condition Nécessaire et Condition Suffisante. Nous avons alors observé que les élèves-professeurs se contentaient de traiter la CN en supposant que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme et en projetant ses sommets sur les plans fondamentaux du repère pour trouver les relations $x_B - x_A = x_C - x_D$, $y_B - y_A = y_C - y_D$ et $z_B - z_A = z_C - z_D$ grâce aux invariants, plus ou moins identifiés, des projections parallèles. C'est pourquoi nous les questionnons ici directement sur la CS, sous la forme de la tâche 5.

Deux options majeures peuvent être *a priori* envisagées pour réaliser cette tâche : traiter d'abord le cas du parallélogramme avant celui de l'alignement ou passer d'abord par ce dernier et s'en servir ensuite pour arriver au parallélogramme par la propriété de ses diagonales. Les deux possibilités pourraient venir à l'esprit des élèves-professeurs en raison de leur lecture préalable du traitement en 2D de ces deux configurations et de la relation entre elles.

Dans notre projet d'enseignement (Nguyen et Schneider, 2017), nous avons opté pour la première possibilité aux sections 7.1.1 et 7.1.2 et envisagé la seconde en tant qu'alternative à la section 7.1.3.

Quel que soit le choix, la condition suffisante soulève *a priori* la difficulté que voici. La remontée des projections des points dans les plans fondamentaux aux configurations dans l'espace suppose de prouver l'alignement des points A, B et P dans un cas et la coplanarité des points A, B, C et D dans l'autre. Ce n'est pas difficile mais encore faut-il y penser - et non pas seulement se fier à la figure - et aussi bien identifier les propriétés en jeu qui sont, un peu trop vite, considérées implicites. Par exemple, des points sont alignés dès qu'ils appartiennent à l'intersection de deux plans non parallèles, ou encore quatre points sont coplanaires dès qu'ils appartiennent à des droites sécantes car un plan peut être déterminé par deux telles droites. Sans forcément demander aux élèves-professeurs de construire un îlot déductif à partir des propriétés identifiées dont certaines seront choisies comme axiomes, on cherche à leur faire prendre conscience de toute la géométrie nécessaire pour établir les relations de base du calcul bipoint.

Dans notre projet nous avons exploité la CN pour prouver la CS grâce à une technique que nous illustrons ici à propos du parallélogramme : on suppose que A, B, C et D vérifient les hypothèses de la CS à savoir que $B - A = C - D$ et on considère un point B'', quatrième sommet du parallélogramme $AB''CD$ et qui vérifie donc, par la CN, la relation $B'' - A = C - D$. Il en découle que $B'' = B$ et que $ABCD$ est un parallélogramme, soit la thèse de la CS.

On peut utiliser le même procédé pour prouver la CS relative aux configurations équivalentes de points alignés.

Mais l'identité des points B'' et B découle de celle de leurs triplets respectifs de coordonnées et on touche là à la bijection entre $\mathbb{R}^3$ et l'ensemble des points de l'espace usuel. Or, cette bijection suppose elle-même d'être prouvée, ici grâce aux résultats connus de géométrie euclidienne. Nous en avons fait l'objet d'une tâche proposée aux élèves-professeurs. La voici sous sa dernière forme, une version antérieure plus ouverte s'étant soldée par le désarroi des élèves-professeurs.

Tâche 6

Supposons acquis un premier résultat : à tout point d'une droite graduée on peut associer une et une seule abscisse réelle.

En vous basant sur les axiomes et théorèmes de la géométrie synthétique, montrer :

1. *que, par exemple, le lieu des points de l'espace muni d'un repère affin vérifiant l'équation $y = b$ est un plan parallèle au plan Oxz passant par le point $(0, b, 0)$;*
2. *que, en conséquence, à un point de l'espace muni d'un repère affin est associé un et un seul triplet de réels.*

A chaque fois, précisez les énoncés des définitions et propriétés de géométrie utilisées.

Là aussi, de nombreuses propriétés d'incidence et de parallélisme sont impliquées.

Notre traitement des tâches 5 et 6 n'est pas exclusif car d'autres façons de faire sont possibles et toute liberté est donnée aux élèves-professeurs. Cependant, la bijection qui fait l'objet de la tâche 6 reste un incontournable.

Dans les tâches 5 et 6, il faut de plus prendre en compte des configurations particulières de par leur position dans un repère, par exemple des points situés sur une droite parallèle à un axe, et montrer que les relations bipoint prouvées les intègrent.

Il y va évidemment de l'invariance de ces relations quel que soit le choix du repère.

5.3.3 Analyse globale de quelques données empiriques

Rappelons que les données recueillies ici, sur les réactions des élèves-professeurs aux tâches analysées en 5.3.2, l'ont été dans le cadre d'un cours de didactique et d'évaluations associées. Il s'agit donc de données "opportunistes" à propos desquelles nous ne maîtrisons pas toute l'historique. C'est pourquoi, au lieu d'analyser les réactions à chaque tâche séparément, nous nous contenterons ici d'une analyse globale articulée autour de quelques aspects fondamentaux en prenant des illustrations au travers des multiples tâches. Une exception concerne la tâche 1, soit préparer une leçon sur les vecteurs et en présenter les grandes lignes à l'ensemble des élèves-professeurs et aux trois titulaires du cours de didactique lors de l'année 2016-2017 : un professeur d'algèbre linéaire, un professeur de géométrie et topologie, et une didacticienne des mathématiques.

Ces étudiants doivent ensuite mettre leurs idées en commun et en débattre par petits groupes, voire compléter leurs leçons.

Un malaise, tel qu'observé dans les préparations de leçons, à propos du concept de vecteur et de sa portée

Trois élèves-professeurs se prêtent à cet exercice d'exposé avec des approches distinctes : l'un s'appuie sur des connaissances antérieures des élèves développées au cours de physique, un autre s'appuie sur les translations, et le troisième définit d'emblée un vecteur comme un couple de points.

Voici le détail des échanges qui ont eu lieu. L'élève-professeur qui expose mime, pour les autres, ce qu'il dirait aux élèves et est donc appelé "professeur fictif". Les autres élèves-professeurs en formation sont supposés réagir comme s'ils étaient à la place des élèves : ils ont donc le rôle "d'élève fictif".

a) Introduction par les forces

Le premier étudiant mise sur le fait que les élèves ont déjà travaillé avec des vecteurs au cours de physique. Il commencerait par leur demander d'illustrer des forces qui s'appliquent à un corps :

L'étudiant (Professeur fictif) : "Comment tracez-vous une force ... à partir d'un point ?"

Réponse d'un autre étudiant (Élève fictif) : "Par une flèche !"

L'étudiant (Professeur fictif) : "Avec un sens comme ceci (Il dessine une flèche au tableau). Mais plutôt que de parler de force, on va parler de vecteur en mathématique."

Cet étudiant tâche alors de décrire ce qu'est un vecteur en mettant en avant ses caractéristiques : sens, direction, longueur. Il dessine deux flèches différentes (ne possédant pas même sens, ni même direction, ni même longueur) au tableau et demande ce qui va être différent, ce qui va "varier" pour ces deux forces.

Il souligne qu'on ne parlera pas d'intensité, comme en physique, mais de longueur. Il prend l'exemple de la force-poids, proportionnelle à la gravité, ce qui se traduit par la longueur des vecteurs.

Il définit ensuite l'égalité de deux vecteurs par le fait qu'ils doivent avoir les mêmes caractéristiques. Il trace un vecteur et demande aux élèves (fictifs) : "Comment doit être mon deuxième vecteur pour que celui-ci soit égal au premier ?". Il répond lui-même et dit que les deux vecteurs doivent avoir même longueur, sens et direction.

L'élève-professeur continue en disant qu'on ne s'occupe pas encore du point d'application pour l'instant. A partir de là, les titulaires du cours vont marquer peu à peu leur étonnement sur le fait que les vecteurs ne semblent pas situés dans le cours de mathématiques et que la leçon proposée soit à peu de choses près une redite du cours du physique des élèves.

Les titulaires du cours interviennent : "Ça veut dire qu'on y reviendra ?"

Réponse de l'étudiant (professeur fictif) : "Pour les exercices d'application, pour les exercices "transférer", le plus facile est de lier ça avec des forces que l'on applique au point d'application et on va calculer la résultante."

Les titulaires : "Le professeur de physique devrait refaire son cours si j'ai bien compris puisque le professeur de mathématique refait les choses pour que ce soit plus précis. On demande aux élèves ce qu'ils ont vu en physique, puis on y retourne après dans les exercices..."

Réponse de l'étudiant (professeur fictif) : "Au premier degré ; c'est le cours de science qui a introduit les premiers vecteurs, les premières forces. Ce n'est pas le cours de mathématiques. [...] Dans le programme, en deuxième année du secondaire, lorsqu'on voit les transformations du plan, de temps en temps on introduit les vecteurs sans dire vraiment ce que c'est. On dit que c'est quelque chose qui fait passer le point A sur le point B et on se comporte... en respectant la direction, le sens et la longueur. On ne définit pas toutes les propriétés sur les vecteurs. On fait déterminer aux élèves le vecteur qui décrit une translation."

Les titulaires : "En deuxième année, les élèves apprennent à se servir de vecteurs au cours de physique pour étudier une force. Et en math ? On en fait quelque chose ou on en fait quelque chose que pour la physique ? Les questions que l'on poserait dans le cadre du "transférer", ce ne serait que pour le cours de physique ? Alors pourquoi est-ce le matheux qui s'en occupe ?"

L'étudiant exprime son malaise par rapport à cette leçon et dit qu'il se sent démuni pour légitimer au yeux de ses élèves l'apprentissage des vecteurs dans le cadre du cours de mathématique : "Comment va-t-on justifier aux élèves de cet apprentissage dans le cadre du cours de mathématique ?".

Deux autres étudiants évoquent alors l'idée d'outil de démonstration, dont un a déjà suivi le cours de didactique et fait les expérimentations l'année passée. Un autre étudiant ajoute, qu'à part les problèmes liés à la physique et à l'outil de démonstration, il ne voit pas comment il peut exploiter les vecteurs.

Le professeur d'algèbre linéaire intervient et insiste alors sur l'importance de la structure d'espace vectoriel : "Le mathématicien apporte la structure d'espace vectoriel dont se fiche le physicien. Et donc le physicien y voit un déplacement ou l'action d'une force et le mathématicien peut apporter la structure qui est peut-être manquante. Je ne dis pas qu'il faut parler d'espace vectoriel dans le secondaire mais c'est quand même la structure qui est là derrière et qui va être utile à plein de choses : l'algèbre linéaire, pour sortir de la dimension 3... Y a plein d'applications réelles parce que derrière il y a la structure d'espace vectoriel."

Il profite de ce moment de parole pour revenir sur le problème qu'il y a à parler d'égalité de vecteurs et pour insister sur l'intérêt d'un enseignement portant sur la structure d'espace vectoriel : "Les vecteurs qui sont égaux... ils sont égaux ou équipollents ? Donc, comment ils sont vos vecteurs pour en faire un espace vectoriel ? Quelle est la structure à mettre pour en faire un espace vectoriel ? Comment fait-on l'addition ? En général, il va falloir des vecteurs liés en un point pour pouvoir faire l'addition. Parce qu'alors je suis d'accord pour dire que ce sont les vecteurs du physicien et autant ne pas faire de leçon."

Pour terminer cet échange, le professeur de didactique revient sur des points non éclaircis et demande aux élèves-professeurs comment on définit le sens. L'étudiant le définit comme allant d'un point origine à un point extrémité. Le professeur de didactique souligne qu'un élève peut très bien dire qu'on va toujours dans le même sens puisqu'il faut toujours aller "du point au départ de la flèche à son extrémité".

Ensuite, en discutant du sens à donner aux mots "sens" et "direction", l'étudiant propose de dire que la direction de $\overrightarrow{AB}$ est donnée par la droite passant par A et B : "Il y a une droite support du vecteur là derrière, qui possède un coefficient angulaire."

Un autre étudiant propose de dire que la direction est donnée par la droite passant par A et B, et le sens serait, lui, donné par la demi-droite. Le professeur de géométrie propose alors de dire que deux vecteurs ont même direction s'ils sont supportés par des droites parallèles.

Les échanges se poursuivent avec le deuxième étudiant.

b) Introduction par un ensemble de couples de points et par les translations

L'étudiant commence par une introduction où il demande aux élèves de représenter un vent qui souffle vers le nord à x km/h, un vent qui souffle vers le sud-est à y km/h et un vent qui souffle vers l'est à z km/h. Il laisse ensuite le temps à la discussion qui débouche sur la mise en évidence d'un scalaire : la vitesse, et l'importance de l'orientation qui différencient les trois flèches.

Il définit ensuite un vecteur par un ensemble de couples de points et par le biais des translations. Il définit la direction au moyen des droites et du parallélisme : "Tous les vecteurs parallèles à la droite d ont la même direction". Pour une direction donnée, il y a deux sens possibles, donnés par le sens de la flèche.

Le professeur d'algèbre linéaire réagit et fait remarquer à l'étudiant qu'il fait en fait référence au représentant d'un vecteur. : "Si je suis un élève... tu définis un vecteur comme un ensemble de couples. Donc, au tableau, il n'y a qu'un petit bout d'un vecteur en fait. Un vecteur est un ensemble donc (A, A') n'est pas un vecteur". Il reconnait toutefois que l'idée d'ensemble de couples de points associés à une translation est proche de celle de classe d'équivalence qui définit le concept de vecteur.

Après, le professeur de didactique souligne qu'"il y a une idée intéressante dans l'idée du vent qui renvoie à un champ de vecteur plutôt qu'à un vecteur qui s'applique en un point. On peut supposer qu'il souffle de la même manière partout où que l'on se situe." La remarque de ce professeur ne suscite aucune réaction.

c) Introduction par un couple de points avec une origine et une extrémité

Le troisième étudiant commence par définir un vecteur comme un couple de points, avec une origine et une extrémité avant de parler des caractéristiques des vecteurs : sens, direction, longueur du vecteur et de vecteurs égaux. Mais les titulaires interviennent rapidement tour à tour.

D'abord, le professeur de géométrie intervient pour mettre en évidence que, dans la caractérisation faite par l'élève, se cache "l'équipollence" : "Quand tu parles de direction... c'est la droite AB ou bien.... ? Quand tu dis qu'il a ces trois caractéristiques là, est-ce que tu peux commencer à les déplacer comme on le fait en physique ? Dans ta caractérisation, tu caches l'équipollence des vecteurs."

Ensuite, le professeur d'algèbre linéaire souligne qu'un tel choix de définition amène une difficulté lorsque l'on parle d'égalité de vecteurs : "Si tu dis que c'est un couple de points... Deux couples ne peuvent être égaux que s'ils ont mêmes composantes. Tu ne peux pas dire que tes vecteurs sont égaux, s'ils sont en fait équipollents."

Enfin, le professeur de didactique questionne la nécessité de parler d'égalité de vecteurs, pour autant que le concept de vecteur ait été défini "correctement" : "Et dans les leçons on va parler de vecteurs égaux... Est-ce qu'il y a d'autres circonstances en mathématiques, dans le secondaire, où l'on se pose la question de savoir quand deux objets sont égaux alors que je viens de les définir. Si je les ai bien définis, je ne devrais pas avoir à me poser la question... Ce n'est pas un peu surréaliste ?"

Il n'y a pas de réponse des étudiants.

Ensuite, le professeur interroge les étudiants sur l'existence d'un formalisme vectoriel qui permettrait une économie de pensée : "Peux-tu me parler de ces fameux problèmes de démonstrations que tu évoquais ? Y avait-il des propriétés où le formalisme vectoriel était particulièrement bien adapté et permettait une économie de pensée par rapport à la géométrie synthétique, par exemple ?"

L'étudiant : "Pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme par exemple..."

Un no man's land entre physique et mathématique

Ces trois présentations des vecteurs sont assez représentatives de ce que l'on peut observer dans les pratiques enseignantes. A ceci près que la deuxième nous paraît aller plus loin que ce que l'on voit d'habitude chez des stagiaires à la fois d'un point de vue conceptuel et de celui du rapprochement entre physique et mathématique.

Souvent, en effet, dans un cours de mathématique d'introduction aux vecteurs, on évoque le mot "vecteur" tel qu'utilisé à propos des forces ou, plus rarement, des vitesses. Et encore moins, par un champ de vecteurs comme le fait le deuxième élève-professeur. Mais, la plupart du temps, on ne fait que "surfer" sur la terminologie comme c'est le cas du premier élève-professeur qui, de la sorte, lie implicitement le vecteur à un point qui est celui où la force s'applique.

Suivent presque immédiatement la fameuse "flèche" et ses trois caractéristiques : direction, sens et longueur laquelle, parfois, est rapprochée de l'intensité de la force.

Rien n'est dit à propos de ce que devient, en mathématique, le point d'application de la force mais l'enseignant passe très vite à l'égalité de deux vecteurs, via les trois caractéristiques, en modélisant des vecteurs distincts par des flèches différant par au moins une de ces caractéristiques. La référence aux translations prend alors là place dans le discours du professeur telles qu'elles ont été enseignées lors de la deuxième année du secondaire, en termes de mouvement qui fait passer d'un point A à un point B.

Dans certaines préparations d'élèves-professeurs que l'on voit d'année en année, on voit aussi une absence de référence (ou presque) à la physique, le focus étant mis sur de tels "mouvements". On propose alors aux élèves des "activités" inspirées des jeux d'orientation pour scouts où il s'agit d'aller d'un endroit à un autre sur base de renseignements liés à la distance à parcourir, à la direction et au sens du parcours, précisés comme en géographie.

Dans cette tâche 1 de préparation et d'exposé de cours, les élèves-professeurs devaient aussi s'expliquer sur les exercices et problèmes qui devraient clôturer le chapitre sur les vecteurs en mathématiques.

Le premier élève-professeur envisage de revenir à la physique dans la rubrique "transférer" du référentiel de compétences qui correspond, en gros, à ce que l'on attend des élèves en matière de "résolution de problèmes". Un des professeurs de l'université lui reproche alors de faire le travail du professeur de physique, à juste titre nous semble-t-il. Il n'empêche que les autres élèves-professeurs ne proposent rien d'autre de probant car, en Belgique francophone aussi, la niche écologique qui fait des vecteurs un outil de démonstration peine vraiment à exister. Deux élèves-professeurs seulement en parlent dans les débats dont l'un évoque, comme unique exemple, celui qu'il avait vu travailler, l'année précédente au cours de didactique, à propos du parallélogramme. Quant aux "applications réelles" liées à la structure d'espace vectoriel que le professeur d'algèbre linéaire souhaiterait voir, elles brillent par leur absence...

Dans la plupart des préparations de leçons recueillies sur plusieurs années, on observe ce qui suit. L'activité ou le discours d'introduction qui servent à "accrocher" l'attention des élèves, que ce soit en référence à la physique ou à l'orientation dans la vie courante, sont vite oubliés et ne donnent lieu à aucun travail ultérieur relatif à des applications crédibles. Le reste du chapitre est alors constitué, en grande partie, d'exercices techniques sans intérêt qui auraient, sans doute, pour principale fonction de combler un vide conceptuel. C'est l'objet de la prochaine section. On peut terminer ici en concluant que l'enseignement des vecteurs se situe globalement entre mathématique et physique sans être pour autant peuplé ni "d'êtres" proprement physiques, ni "d'êtres" mathématiques : bref, un "no man's land".

Des définitions descriptives typiques de la géométrie naturelle

Comme décrit à la section 2.1, le paradigme de la "géométrie naturelle" au sens de Houdement et Kuzniak (2006) se caractérise par une référence forte à la perception et aux mesures. Les "définitions descriptives" en sont typiques, nous semble-t-il, en étant celles où l'on exprime ce que l'on perçoit des notions en comptant sur la complicité de l'interlocuteur, à l'opposé des définitions opératoires, les seules "vraies" définitions, qui donnent prise au raisonnement déductif.

Ici, c'est l'enseignant qui table sur la complicité des élèves pour faire passer ce qu'il faut percevoir des vecteurs. C'est typiquement le cas lorsqu'on caractérise le vecteur par les composantes "longueur", "direction" et "sens". En effet, la notion même de direction n'est pas à considérer ici en un sens commun que serait, par exemple, la direction d'une route rectiligne par rapport à l'axe Nord-Sud. Et la direction ne peut être ici la pente d'une droite dont la valeur change d'un repère à l'autre. Elle ne peut donc renvoyer qu'au parallélisme de droites, un ensemble de droites parallèles définissant une direction. Mais cette définition de la direction comme classe d'équivalence de droites parallèles est absente de la culture mathématique des élèves.

Pour le sens, on manque aussi de repères au sens du géographe qui dit, par exemple, qu'on se dirige sur la route vers le Nord ou vers le Sud. D'où la difficulté, en géométrie, de définir le sens sans être obligé *a priori* de se fier à ce que l'on voit sur le dessin or que, démontrer en géométrie, c'est bien plus qu'observer une figure. Quant à la longueur de AB, on pourrait la déterminer dans un repère orthonormé via le théorème de Pythagore. Mais que devient ce calcul et même la longueur de segments non parallèles aux axes lorsque le repère est affin et donc, entre autres, que les unités de longueur sur les axes ne sont pas forcément les mêmes ?

On comprend dès lors le rôle des dessins de flèches que le professeur est obligé de multiplier pour se se faire comprendre des élèves.

Les références à la translation sont faites, elles aussi, sur le mode descriptif, en exploitant d'ailleurs les mêmes caractéristiques de longueur, sens et direction. Ces références sont souvent introduites, comme on l'a vu, par des activités liées à l'orientation au sens, à nouveau, du géographe. Les mots "déplacement", "mouvement" sont utilisées de même que les qualificatifs "horizontal" et "vertical", étrangers aux mathématiques, pour décrire les déplacements parallèles aux axes qui composent le déplacement global. On évoque aussi, dans certains manuels, l'idée de "changement de position" qui peut être le même ou non pour aller d'un point A à un point B ou de C vers D. Là aussi, les dessins sont indispensables au professeur pour se faire comprendre des élèves et, d'ailleurs, on voit difficilement comme il pourrait s'en passer dans ce contexte.

Cependant, comme le souligne Lebeau [126] :

> *Ce langage intuitif, où l'idée de mouvement a de l'importance, nous éloigne d'un point de vue proprement mathématique qui définit une translation d'un espace affine, associée à un vecteur $\overrightarrow{v}$ de l'espace vectoriel correspondant, comme application de l'espace affine dans lui-même qui, à tout point M, associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{v}$. D'un point de vue plus géométrique, on peut définir les translations comme des dilatations sans points fixes, les dilatations étant des bijections du plan (ou de l'espace) préservant le parallélisme. Dans ces définitions mathématiques, toute référence à un quelconque mouvement est évacuée et cela détermine un saut épistémologique entre discours intuitif et discours mathématique, saut qu'il n'est pas facile de gérer.*

Mais le cap sans doute le plus difficile à franchir est celui des définitions créées sur base d'une relation d'équivalence et des classes d'équivalence que celle-ci détermine. Comme nous l'avons décrit à la section 2.2.2, ce "procédé" de définition était d'actualité dans la réforme des mathématiques modernes inspirée de la refonte de l'ensemble des mathématiques par l'école bourbakiste. Et cette façon de produire des définitions soulevait de gros problèmes d'apprentissage chez les élèves.

Sans doute est-ce aussi ce qui peut expliquer une certaine ambiguïté, dans les propos des enseignants, entre l'équipollence et l'égalité de vecteurs, ainsi que le note le professeur d'algèbre linéaire dans les propos du premier élève-professeur : "Les vecteurs qui sont égaux... ils sont égaux ou équipollents ?" Quant au professeur de géométrie, il critique la présentation du troisième élève-professeur, mêlant un couple de points avec les caractéristiques : sens, direction et longueur en lui disant : "Dans ta caractérisation, tu caches l'équipollence des vecteurs". De ce point de vue, c'est l'introduction du deuxième élève-professeur qui est la plus acceptable, lequel parle d'un ensemble de couples en lien avec la notion de translation supportée par

126. LEBEAU 2009, p. 229.

le champ de flèches modélisant le vent soufflant dans une “direction” donnée.

Peut-être, d’ailleurs, est-il symptomatique de devoir recourir à l’égalité de deux objets pour pallier la difficulté de définir leur nature commune. Car, c’est systématiquement ce que l’on peut observer dans les cours sur les vecteurs : on donne une supposée “définition” du vecteur qui n’en n’est pas une et aussitôt après on précise ce que l’on entend par l’égalité de deux vecteurs ainsi que la non égalité. C’est également ce qui se passe, à peu de choses près, par exemple à propos du concept de couple de réels (x, y). Faute de pouvoir le définir pour les élèves de manière ensembliste comme l’ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ ou comme une application f de $I = \{1, 2\}$ dans $\mathbb{R}$, on se contente de dire que les couples (x, y) et (x', y') sont égaux si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$ et que le couple (x, y) n’est pas le couple (y, x). C’est là une forme d’ostension.

L’égalité des vecteurs (et l’équipollence des vecteurs, notion plus standard) est susceptible, nous semble-t-il, d’induire une difficulté d’apprentissage. En effet, déclarer que des vecteurs sont égaux ou équipollents laisse supposer qu’il existe une propriété commune à des vecteurs distincts car, s’il s’agit d’un seul vecteur, pourquoi parler de cela ? N’est-ce pas risquer dès lors d’aggraver la tentation des élèves à distinguer des vecteurs dès qu’ils ne s’appliquent pas au même point (comme des forces) ?

Un mélange de preuves et de “monstrations”

Le paradigme de la “géométrie naturelle” s’exprime aussi dans les pratiques des élèves-professeurs, par un mélange non conscient, et tout cas non explicité, entre des preuves au sens mathématique et des évidences lues sur une figure. Dans ce dernier cas, nous parlerons de monstrations qui relèvent, elles aussi, des pratiques ostensives.

Nous les avons observées à l’occasion de notre expérimentation avec les élèves-professeurs, en particulier mais pas uniquement à propos des tâches 5 et 6 concernant l’extension en 3D des relations bipoint établies en géométrie 2D : $B - A = C - D$ qui caractérise les parallélogrammes et $P = A + k(B - A)$ qui modélise une configuration particulière de points alignés A, B et P.

L’écueil majeur dont la plupart des élèves-professeurs sont victimes est de ne pas considérer ces caractérisations comme des conditions à la fois nécessaires et suffisantes, ainsi que nous l’avons observé pendant deux ans avant de formuler l’énoncé de la tâche 5. En effet, plusieurs pensent à projeter, parallèlement à un axe du repère, les points de l’espace sur les plans fondamentaux pour traiter la condition nécessaire. Mais aucun ne pense à traiter la condition suffisante en “reconstituant” la configuration “parallélogramme” ou celle de “trois points alignés” à partir des projections, ce qui suppose de prouver la coplanarité de quatre points dans un cas et l’alignement de trois points dans l’autre. Mais, pour eux, cela va de soi parce que cela s’observe sur le dessin.

Le problème perdure lorsqu'on propose aux élèves-professeurs la tâche 5 pourtant très explicite sur la commande de travailler la condition suffisante. Ainsi cet étudiant qui se contente d'un dessin en 3D et qui affirme, sans autre justification, qu'on a une CN et CS parce que “on a cette condition pour chaque paire de composantes $(x, y), (x, z), (y, z)$” (voir figure 5.20). On remarque, au passage, qu'il parle de la “projection sur un plan parallèlement à un autre”.

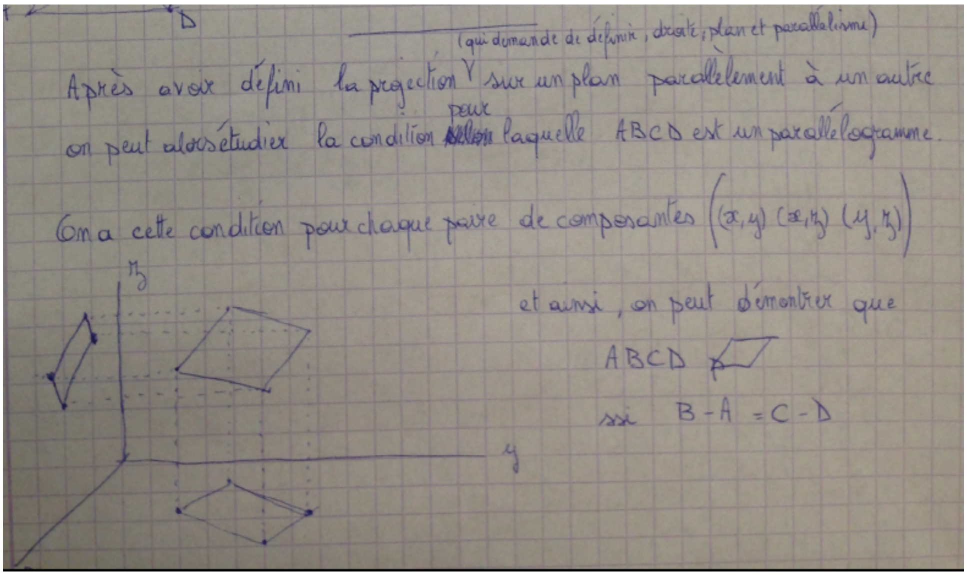


FIGURE 5.20

D'autre élèves-professeurs, assez nombreux, veulent absolument "plaquer" le calcul vectoriel comme s'il avait le pouvoir de tout régler alors que nous avions été très clairs, en précisant la consigne, sur le fait qu'il s'agissait à terme de constituer ce calcul sur base de propriétés géométriques supposées déjà prouvées dans le cadre de la géométrie synthétique.

Voici une réponse (figure 5.21) pour le moins ambiguë où un élève-professeur mêle géométrie analytique et géométrie vectorielle de manière assez confuse à propos des longueurs et des vecteurs :

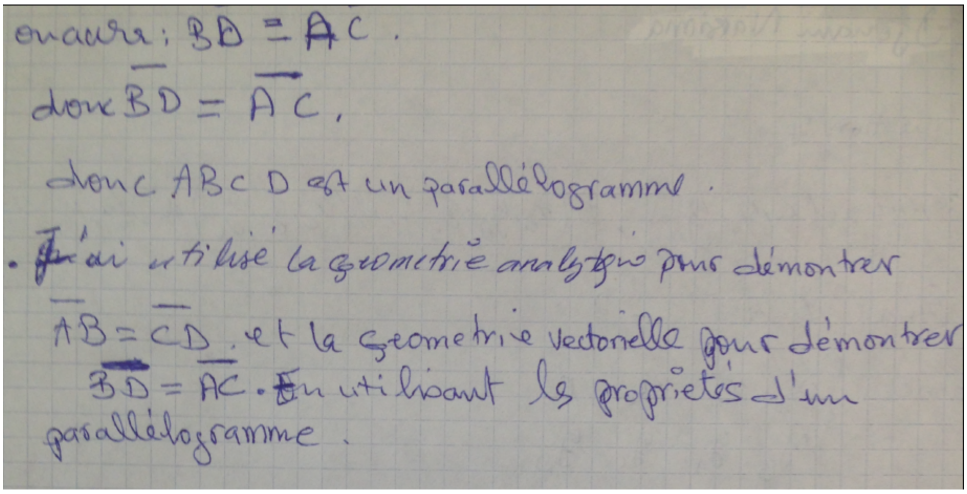
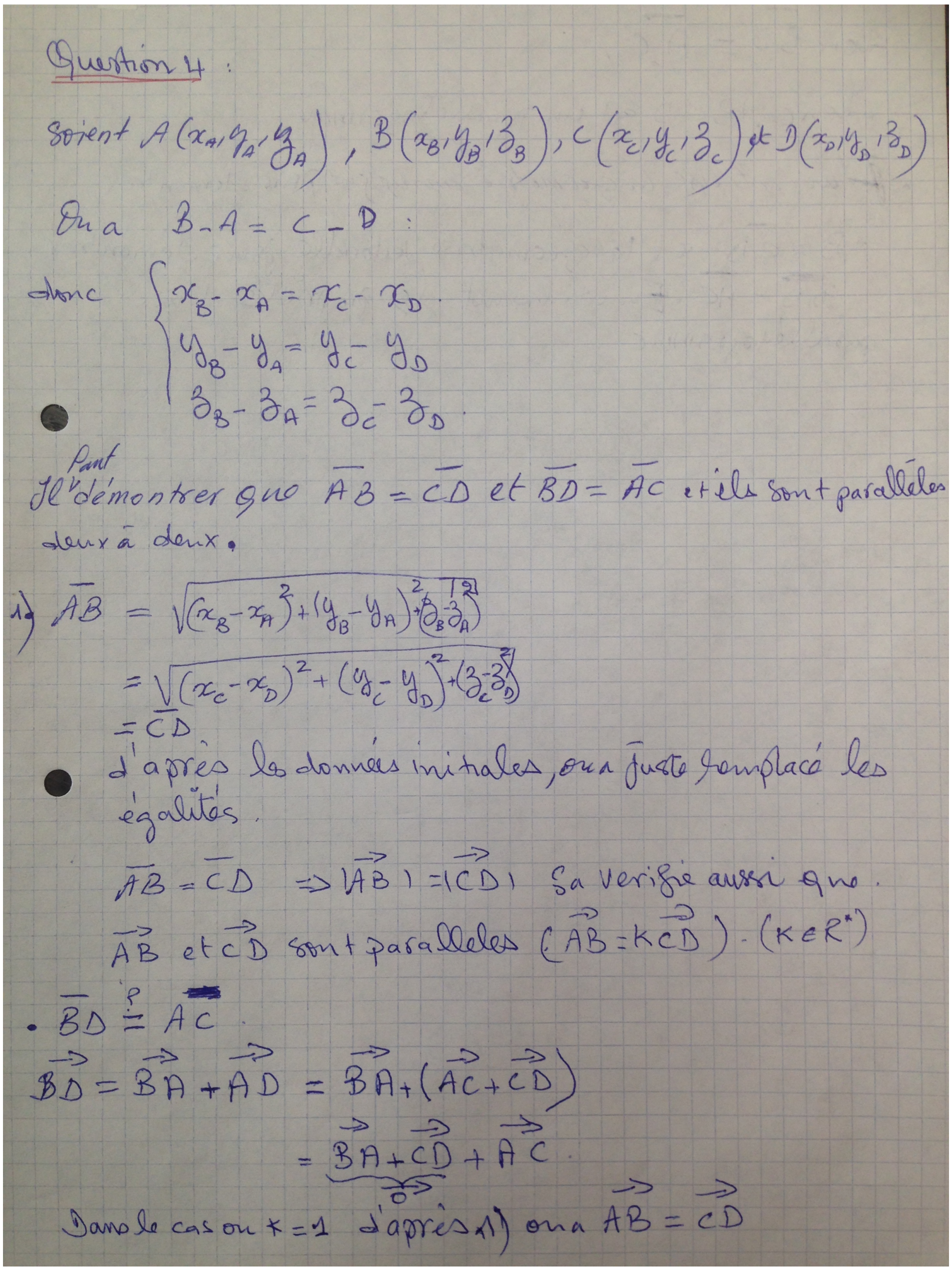

on a aussi : BD = AC.
donc $\overline{BD} = \overrightarrow{AC}$,
donc ABCD est un parallélogramme.
• J'ai utilisé la géométrie analytique pour démontrer
$\overline{AB} = \overline{CD}$, et la géométrie vectorielle pour démontrer
$\overrightarrow{BD} = \overline{AC}$. En utilisant les propriétés d'un
parallélogramme.

FIGURE 5.21

Et aussi, cette autre copie où des écritures vectorielles sont imbriquées, de manière douteuse, aux coordonnées.



Question 4 :

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$ et $D(x_D, y_D, z_D)$

On a $B - A = C - D$:

donc $\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \\ z_B - z_A = z_C - z_D \end{cases}$

Il faut démontrer que $\overline{AB} = \overline{CD}$ et $\overline{BD} = \overline{AC}$ et ils sont parallèles deux à deux.

1) $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

$= \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 + (z_C - z_D)^2}$

$= \overline{CD}$

d'après les données initiales, on a juste remplacé les égalités.

$\overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow |\vec{AB}| = |\vec{CD}|$ Ça vérifie aussi que $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont parallèles $(\vec{AB} = k\vec{CD})$. $(k \in \mathbb{R}^*)$

• $\overline{BD} \stackrel{?}{=} \overline{AC}$.

$\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} = \vec{BA} + (\vec{AC} + \vec{CD})$

$= \underbrace{\vec{BA} + \vec{CD}}_{\vec{0}} + \vec{AC}$.

Dans le cas où $k = 1$ d'après 1) on a $\vec{AB} = \vec{CD}$

FIGURE 5.22

On remarque aussi, dans la figure 5.22, que l'étudiant recourt à la formule analytique de la distance entre deux points alors que, lors du travail en 2D, nous avions bien précisé que les relations à prouver se situent en géométrie affine. Nous y reviendrons plus loin.

D'autres propriétés semblent "aller de soi", pour les élèves-professeurs, comme la bijection entre l'ensemble des points de l'espace usuel et l'ensemble des triplets de réels. La tâche 6 leur demande précisément de prouver cette bijection en s'appuyant sur un axiome propre à la “continuité” de $\mathbb{R}$ et sur le travail déjà réalisé en 2D, dans le contexte que voici. Dans ce qui précède, on a défini la projection d'un point sur un plan fondamental déterminé par deux axes, parallèlement au troisième axe : cette projection permet de se ramener à la bijection entre les points d'un plan fondamental et les couples de réels.

On constate que l'entreprise est vraiment très difficile pour les élèves-professeurs et ce, même dans la version finale qui leur donne une marche à suivre dont une étape consiste à prouver que le lieu des points de l'espace vérifiant l'équation $y = b$ est un plan parallèle au plan Oxz passant par le point $(0, b, 0)$. Qui dit lieu dit aussi, évidemment, condition nécessaire et suffisante. Plusieurs élèves-professeurs l'oublient en se contentant de traiter une seule de ces conditions.

On observe également que, comme pour la tâche 5, ils n'identifient pas tous les théorèmes de géométrie utilisés, loin d'en faut. Par exemple, la transitivité du parallélisme des plans est passée sous silence, en raison sans doute de son évidence supposée. De même que la propriété qui s'énonce :

Soient π et π' deux plans parallèles, d une droite de π et A un point de π'. Toute parallèle à d par A est contenue dans π'.

et qui permet de prouver, par exemple, que la projection P' d'un point P parallèlement à Oz sur Oxy appartient bien à la droite d'équation $y = b$ dans ce plan.

De manière générale, on observe une place de plus en plus réduite faite au raisonnement déductif par la méthode synthétique, dans les pratiques des enseignants. Il semble que l'on privilégie désormais les procédures et, tout au plus, des démonstrations “calculatoires”. Cela commence dès le cycle inférieur du secondaire. Il est bon de rappeler ici, comme nous l'avons développé à la section 2.2.2, que la réforme des mathématiques modernes a imposé des preuves - assez difficiles et très tôt abandonnées - basées sur les invariants des isométries et similitudes en jetant le discrédit sur les cas d'isométrie et de similitude des triangles. Ces critères ont été réintroduits dans les programmes actuels mais, à la lecture des derniers manuels sortis, on ne s'en sert aucunement comme outil de démonstration. Or que l'utilisation de ces cas est plus aisée et que, comme le souligne Schneider (2008) :

> *Plus que d'autres propriétés mathématiques, les cas d'isométrie de triangles sont, nous semble-t-il, susceptibles de marquer, aux yeux des élèves, la différence de contrat entre une géométrie d'observation basée sur des constats à partir de “dessins” et une géométrie raisonnée sur des figures géométriques dotées de propriétés : il ne s'agit plus de superposer physiquement un triangle découpé dans un papier sur un autre dessiné pour constater leur “coïncidence”, mais d'énoncer les conditions minimales assurant a priori cette possibilité de les superposer*[127].

Il est symptomatique, de ce point de vue, qu'un seul élève-professeur exploite

127. SCHNEIDER 2008, p. 117.

un cas d'isométrie pour justifier la relation bipoint relative au parallélogramme, à l'occasion de la tâche 2. Mais peut-être les autres avaient-ils quelque objection à utiliser une propriété de géométrie métrique pour établir une relation propre à la géométrie affine, conformément à notre choix assumé d'amarrer la seconde à la seule géométrie induite par notre rapport "naturel" au monde qui nous entoure, soit la géométrie d'Euclide. C'est supposer là évidemment, de la part de ces élèves-professeurs, une connaissance des différents types de géométries structurées par les groupes de transformations. Comme nous allons le voir, cette connaissance n'est pas évidente à observer.

Revenir au $B - A - BA$ de la géométrie analytique pour comprendre les enjeux du calcul bipoint

Pour comprendre les enjeux du calcul bipoint, un élève-professeur ou un enseignant en fonction doit remonter aux sources de la géométrie analytique et de ce qui fait son efficacité comme outil de preuve de propriétés géométriques.

A commencer par l'identification de la géométrie à laquelle appartient la propriété à démontrer et par le choix d'un type de repère approprié. La tâche 4 est éclairante à cet égard. Il s'agit en effet de

Démontrer, par la méthode analytique, que les médianes d'un triangle ABC se coupent en un même point G situé aux $\frac{2}{3}$ de chacune d'elles à partir du sommet.

Cette tâche a été formulée et proposée sans faire référence au travail relatif aux bipoints et, certaines années, avant même d'avoir entamé une quelconque réflexion sur la géométrie dans le cadre de la formation. L'énoncé était proposé à titre de résolution de problème.

Ce qui nous a frappé, d'une année l'autre, est que la majorité des élèves-professeurs choisissaient un repère orthonormé sans le positionner de manière privilégiée par rapport aux sommets du triangle. Beaucoup envisageaient aussi le calcul de longueurs pour prouver la position particulière du centre de gravité sur chacune des médianes.

Ces choix conduisent à des calculs laborieux que, souvent, les élèves-professeurs ne faisaient pas se contentant de préciser le programme de calcul dans les grandes lignes. Voici un exemple de telle réponse :

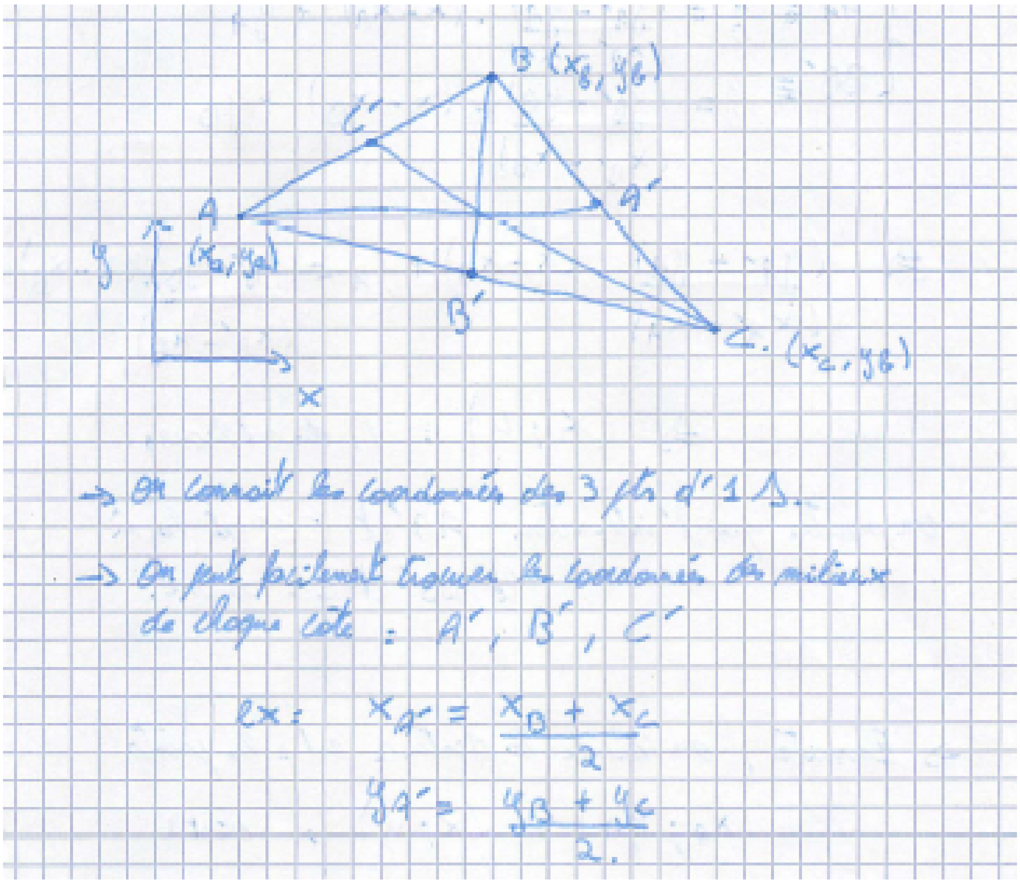


FIGURE *5.23*

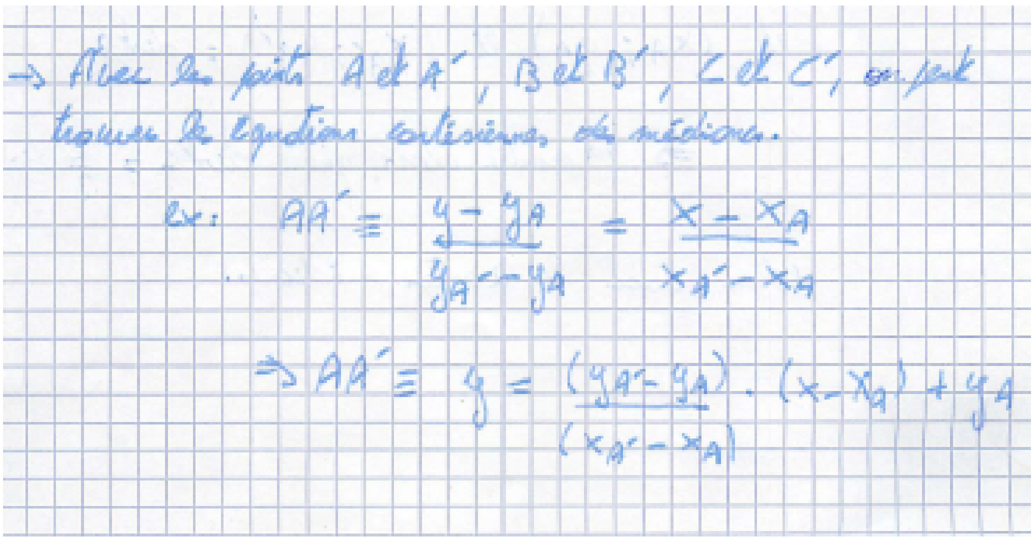
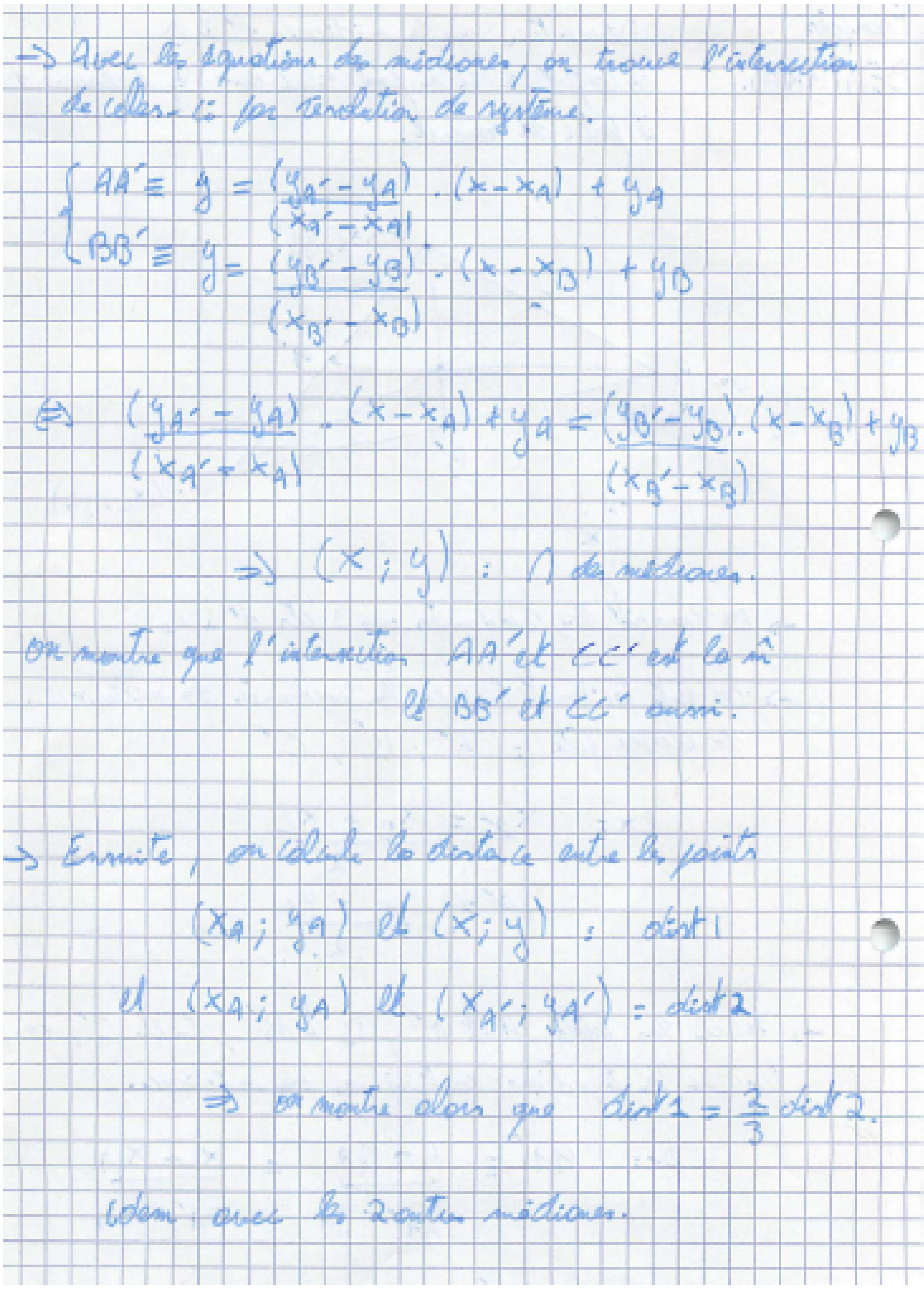


FIGURE *5.24*



→ Avec les équations des médianes, on trouve l'intersection de celles-ci par résolution de système.

$$\begin{cases} AA' \equiv y = \dfrac{(y_{A'} - y_A)}{(x_{A'} - x_A)} \cdot (x - x_A) + y_A \\ BB' \equiv y = \dfrac{(y_{B'} - y_B)}{(x_{B'} - x_B)} \cdot (x - x_B) + y_B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y_{A'} - y_A)}{(x_{A'} - x_A)} \cdot (x - x_A) + y_A = \frac{(y_{B'} - y_B)}{(x_{B'} - x_B)} \cdot (x - x_B) + y_B$$

$\Rightarrow (x ; y)$: $\cap$ des médianes.

On montre que l'intersection AA' et CC' est la m̂ et BB' et CC' aussi.

→ Ensuite, on calcule la distance entre les points $(x_A ; y_A)$ et $(x ; y)$: dist1

et $(x_A ; y_A)$ et $(x_{A'} ; y_{A'})$ = dist2

$\Rightarrow$ on montre alors que dist1 $= \frac{2}{3}$ dist2.

Idem avec les 2 autres médianes.

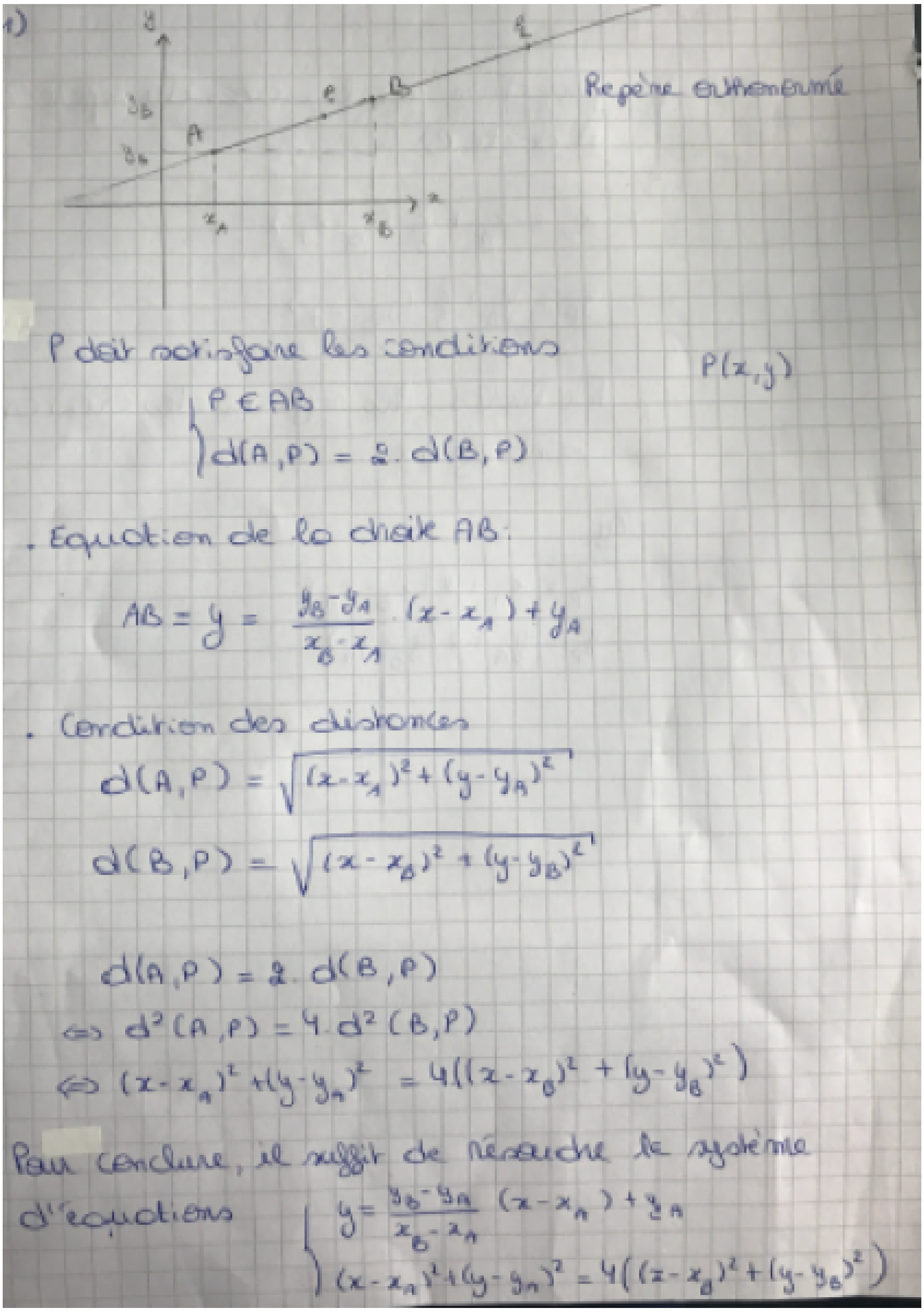
FIGURE 5.25

Un autre étudiant travaille situe les sommets A, B, C du triangle dans un repère orthonormé avec des coordonnées numériques $A(0,0)$, $B(2,5;5)$ et $C(4,5;2)$. A part la position de A, sa procédure illustre un autre choix discutable. Malgré le choix de coordonnées numériques qui devrait lui faciliter la vie, il se contente d'un plan de calcul (le même que celui de l'étudiant précédent avec le calcul des distances) sans réaliser ces calculs.

Évidemment, ces élèves-professeurs auraient pu se faciliter le vie en comprenant :

– qu'il s'agit d'une propriété affine,
– que le choix d'un repère affin est donc possible et même plus qu'utile étant donné sa "souplesse" à s'adapter à la figure étudiée, ainsi que nous l'avons illustré dans notre analyse *a priori* de cette tâche.
– qu'une configuration particulière de trois points alignés tels les points A, A', G de sa figure peut s'exprimer autrement que par un calcul de distances.

On observe la même difficulté lors de la réalisation par les élèves-professeurs des tâches 1 et 2. Évidemment ces tâches étaient inscrites dans l'exploration des relations bipoint comme modèles algébriques invariants d'un repère à l'autre. De ce fait, on demandait aux élèves-professeurs de travailler avec des coordonnées génériques, ce qui les empêchait de faire un choix optimal de repère. Quoi qu'il en soit, les deux procédures suivantes illustrent parfaitement les conséquences, en termes de calculs et de leur portée dans les tâches proposées, du fait qu'ils identifient ou non la géométrie à laquelle appartient la propriété étudiée et choisissent le type de repère en conséquence. Ici, il s'agit de la tâche 2 qui consiste à déterminer les coordonnées d'un point P aligné avec deux points A et B donnés et deux fois plus éloigné de A que de B. Le premier élève-professeur choisit un repère orthonormé dans lequel il exprime l'alignement par l'équation d'une droite et la deuxième condition par l'expression des distances AB et BP et leur rapport :


1)

y, x, y_B, y_A, A, B, P, x_A, x_B

Repère orthonormé

P doit satisfaire les conditions

$P(x,y)$

$$\begin{cases} P \in AB \\ d(A,P) = 2 \cdot d(B,P) \end{cases}$$

. Equation de la droite AB:

$$AB = y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A) + y_A$$

. Condition des distances

$$d(A,P) = \sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2}$$

$$d(B,P) = \sqrt{(x-x_B)^2 + (y-y_B)^2}$$

$$d(A,P) = 2 \cdot d(B,P)$$

$$\Leftrightarrow d^2(A,P) = 4 \cdot d^2(B,P)$$

$$\Leftrightarrow (x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 = 4((x-x_B)^2 + (y-y_B)^2)$$

Pour conclure, il suffit de résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A) + y_A \\ (x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 = 4((x-x_B)^2 + (y-y_B)^2) \end{cases}$$

FIGURE 5.26

Il n'arrive pas à réaliser les calculs et encore moins à terminer la tâche avec succès. Le deuxième élève-professeur choisit d'emblée un repère affin mais surtout exprime les rapports de distances grâce aux projections parallèles sur les axes et à l'usage explicite du théorème de Thalès. Il arrive aux relations voulues mais notons toutefois qu'il ne détermine qu'un seul des deux points satisfaisant les conditions de départ et qu'il ne traite pas la condition suffisante vu qu'il s'appuie d'emblée sur l'alignement de A, B et P avant de faire leurs projections :

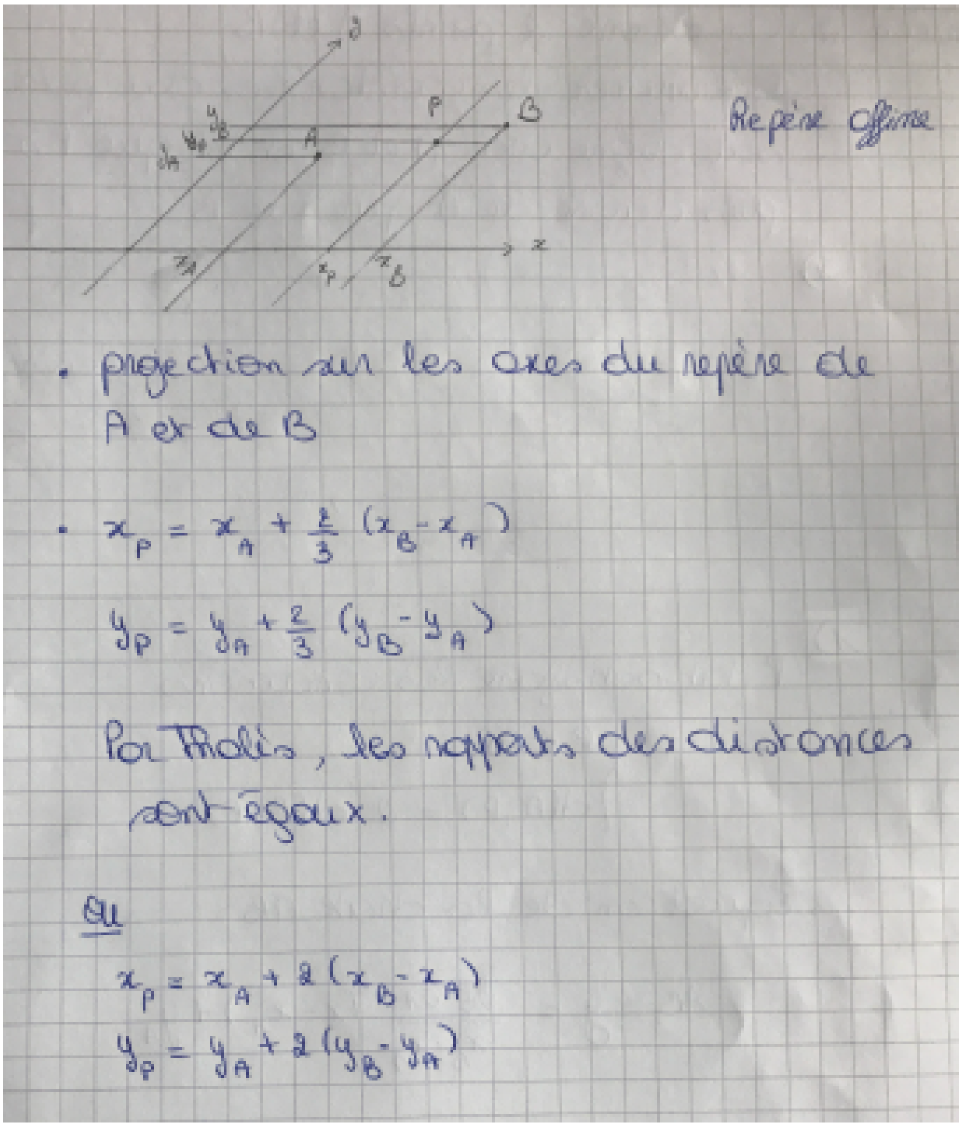


FIGURE *5.27*

On voit donc ici, chez la plupart des élèves-professeurs, un manque de pratique de la géométrie analytique, éclairée par l'identification de la géométrie en jeu et par le choix subséquent d'un repère approprié. L'étude des groupes de transformations et de leurs invariants serait ici utile dans une formation initiale d'enseignants lesquels devraient comprendre que, par exemple, une transformation affine envoie un triangle sur un autre en préservant la propriété du centre de gravité et qu'il n'y a donc aucune perte de généralité à choisir un repère affin dans lequel on exprime les sommets du triangle par les coordonnées $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(0,1)$ pour prouver facilement cette propriété. A ceci près que des coordonnées paramétrées, telles que celles choisies dans notre analyse *a priori*, rendent plus facile l'interprétation géométrique des calculs, ici à propos de la position du centre de gravité.

De manière générale, les élèves-professeurs ne sont guère performants en géométrie analytique. Ainsi, en ce qui concerne la tâche 1 à propos de laquelle nous avons rapporté peu de renseignements sur l'expérimentation, nous notons que les élèves-professeurs, dans leur ensemble, ne sont pas plus habiles que les élèves de quatrième année du secondaire à la réaliser. On peut cependant supposer que les premiers se comportent en se mettant à la place des seconds, dans le contexte d'une analyse *a priori*. Mais cela n'explique pas tout et nous renvoie sans doute au peu de fréquentation que les (futurs) enseignants ont eu des problèmes de géométrie analytique dans l'ensemble de leur cursus.

Un rapport balbutiant au calcul bipoint

Rappelons que nous voulons tester ici comment des élèves-professeurs s'emparent du calcul bipoint pour faire de la géométrie. Nous en arrivons bien sûr au test que nous leur avons proposé lors de cette expérimentation.

Mais auparavant, nous souhaitons partir d'une preuve de la propriété du centre de gravité d'un triangle (tâche 4) que propose un élève-professeur. Elle nous éclaire en effet sur le chemin que les élèves-professeurs doivent faire pour accéder à la sémioticité et à l'instrumentalité du calcul bipoint.

Cette preuve a été proposée par un élève-professeur qui n'avait pas encore lu la partie de notre projet relative à la géométrie 2D. Cependant, de mémoire, il était arrivé, avec les élèves-professeurs de son groupe, à formuler les conditions nécessaires du parallélogramme sous la forme

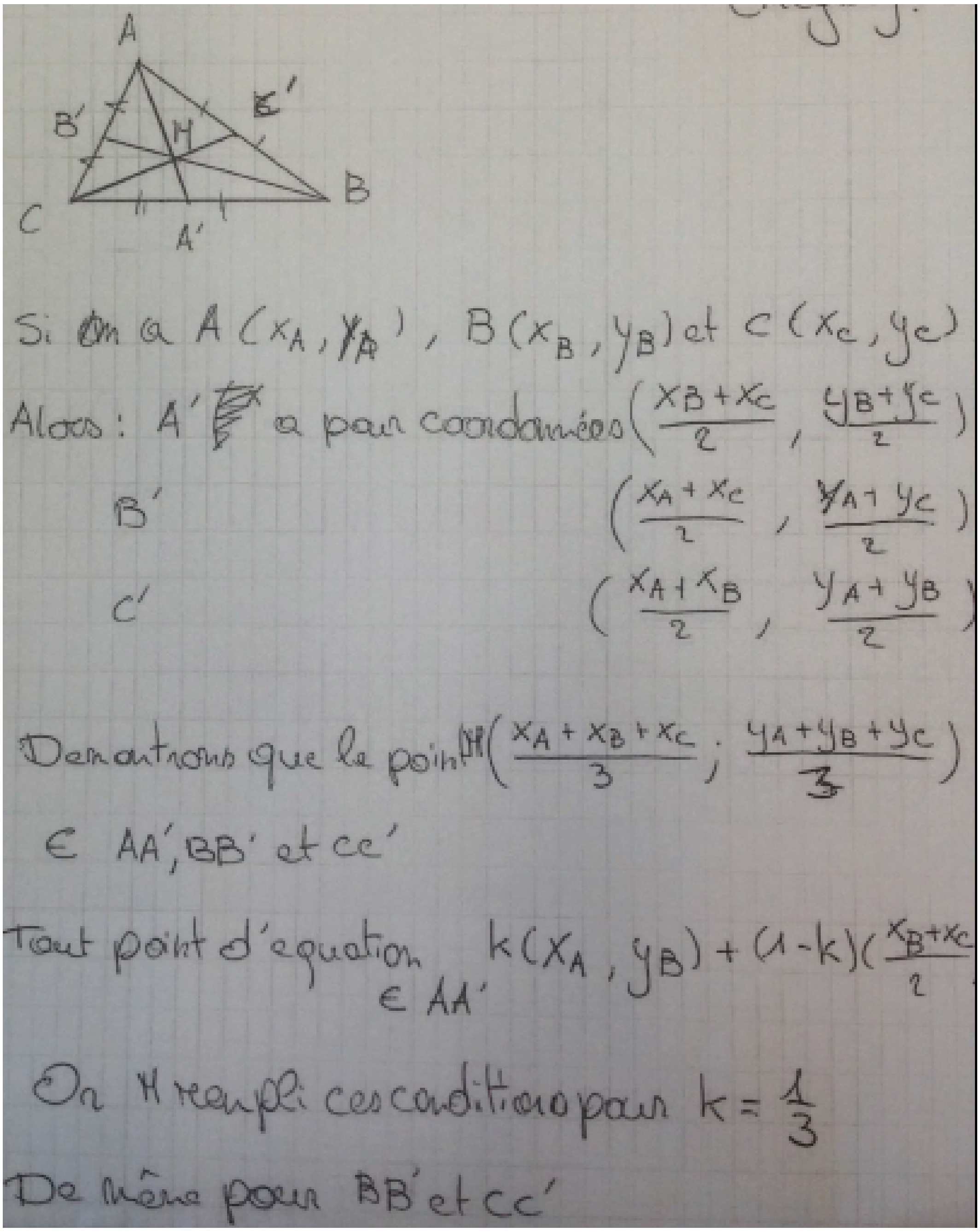
$$\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D, \\ y_B - y_A = y_C - y_D, \end{cases}$$

et celles de configurations particulières de points alignés, sous la forme

$$\begin{cases} x_P = kx_A + (1-k)x_B, \\ y_P = ky_A + (1-k)y_B. \end{cases}$$

Il n'est pas exclu non plus que cet élève-professeur, ingénieur de formation, avait été initié à des relations de type bipoint qui résument les précédentes ayant probablement reçu un enseignement de M. Lecomte, professeur de géométrie au département de mathématique.

Voici ses calculs :



Si on a $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$

Alors : A' a pour coordonnées $\left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right)$

B' $\left(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}\right)$

C' $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

Demontrons que le point $M\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3} ; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$

$\in AA', BB'$ et CC'

Tout point d'équation $k(x_A, y_B) + (1-k)\left(\frac{x_B+x_C}{2}\right.$
$\in AA'$

On M rempli ces conditions pour $k = \frac{1}{3}$

De même pour BB' et CC'

FIGURE *5.28*

Aucun repère n'y est dessiné, ce qui peut indiquer que l'élève-professeur a une certaine idée de l'existence d'un calcul intrinsèque au sens que lui donnait Leibniz (voir section 1.5.2). Cependant, il détaille les coordonnées des pieds A', B' et C' respectifs des trois médianes et celles du centre de gravité G au lieu de les résumer par les écritures $A' = \frac{C+B}{2}, B' = \frac{A+C}{2}, C' = \frac{A+B}{2}$ et $G = \frac{A+B+C}{3}$. Comme s'il ne voyait pas ou ne souhaitait pas faire l'extension praxémique en jeu (section 4.1.5).

On peut également observer sa curieuse écriture d'un point quelconque de la droite AA' sous la forme

$$k(x_A, y_B) + (1-k)(\frac{x_B + x_C}{2})$$

là où on aurait espéré voir, soit

$$kA + (1-k)\frac{B+C}{2}$$

soit, avec quelques libertés d'écriture,

$$k(x_A, y_A) + (1-k)(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2})$$

égale à (x_P, y_P). Mais il n'utilise pas pour autant l'équation cartésienne standard d'une droite formulée sur base des coordonnées de deux de ses points.

De toute évidence, cet élève-professeur est proche du calcul bipoint et l'on voit, dans ses écritures, le gain réalisé en jouant directement sur les coordonnées génériques des points, dans un repère quelconque non précisé, ainsi que sur les relations directes entre les points majeurs de la configuration sans s'encombrer de points intermédiaires. Comme nous l'avons montré à la section 4.2.2, c'est ce qui fait la grande instrumentalité du calcul bipoint et nous concluons ceci en citant Lebeau (2009) :

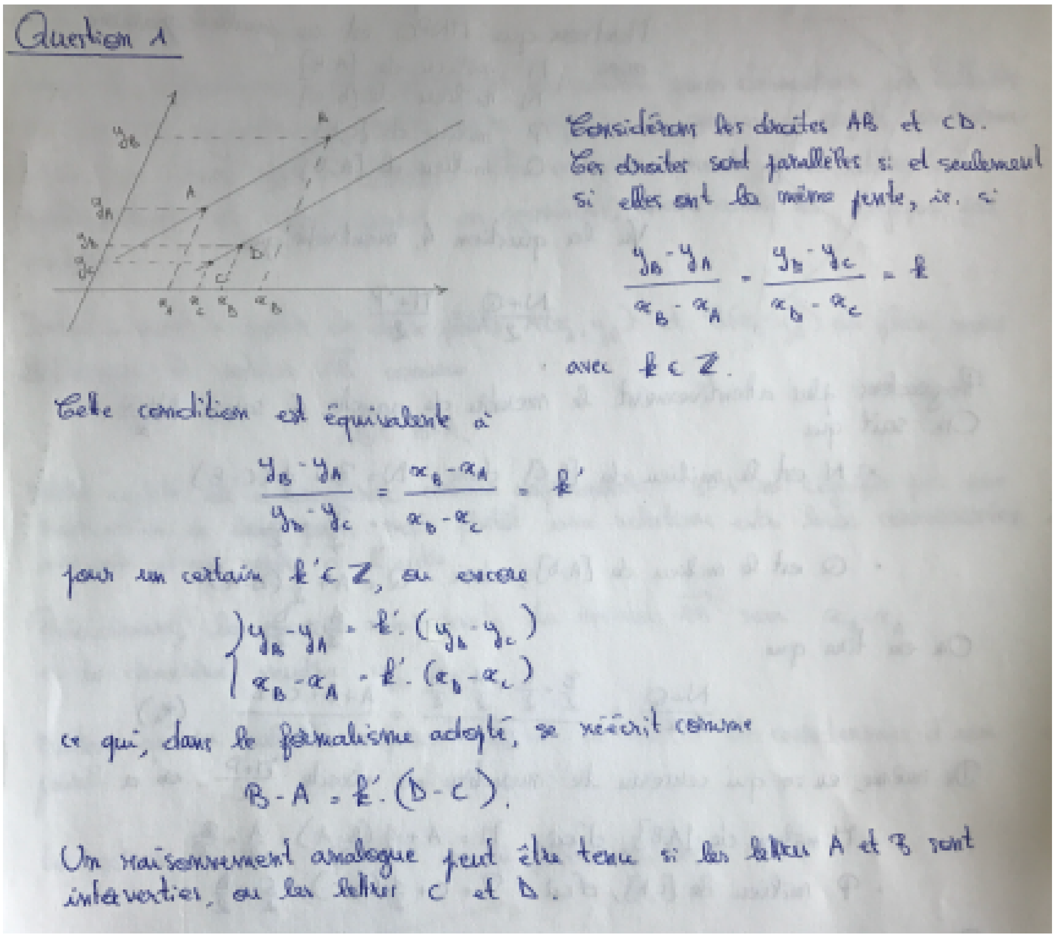
> *Ces écritures [...] sont semblables d'un point de vue ostensif à l'écriture de vecteurs bipoints, mais il ne s'agit pas ici de faire un déni du changement de cadre associé au changement de registre que ces écritures impliquent si elles étaient directement associées à des non ostensifs tels que des vecteurs libres ou encore si elles étaient associées au concept de barycentre, permettant de situer un point par rapport à d'autres sans devoir privilégier une origine.*
>
> *[...] Même si, au départ de notre ingénierie elles ne sont pas adjointes directement aux mêmes non ostensifs que les écritures vectorielles, elles ont cependant une instrumentalité intéressante puisqu'elles permettent de gérer des démonstrations de manière calculatoire [...] et elles peuvent au fur et à mesure acquérir une nouvelle sémioticité* [128] .

Revenons au "test lié à l'appropriation du calcul bipoint" que nous avons décrit et analysé à la section 5.3.2. Nous y distinguons deux types de questions : les quatre premières évaluent l'appropriation mathématique, par les élèves-professeurs, du calcul bipoint, à la fois dans sa valence sémiotique et dans sa valence instrumentale. La question 5, quant à elle, leur demande de se positionner comme enseignants

128. LEBEAU 2009, p. 237–238.

car ils doivent, pour y répondre, imaginer une suite au chapitre 1 du projet dans laquelle le concept de vecteur sera introduit sur base des bipoints.

Dans la question 1, les élèves-professeurs doivent créer une nouvelle relation bipoint, celle qui exprime le parallélisme des droites AB et CD. Dans l'ensemble, ils répondent soit $B - A = C - D$, soit $B - A = k(C - D)$. La première réponse suppose évidemment que AB et CD aient même longueur et nous ne doutons pas qu'elle serait vite invalidée dans un débat. La seconde est la relation attendue mais est donnée par tous sans justification sauf un élève-professeur qui retourne au calcul de coordonnées en exprimant l'égalité des pentes de ces droites, comme illustré ci-dessous :



Question 1

Considérons les droites AB et CD. Ces droites sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente, i.e. si

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = k$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

Cette condition est équivalente à

$$\frac{y_B - y_A}{y_D - y_C} = \frac{x_B - x_A}{x_D - x_C} = k'$$

pour un certain $k' \in \mathbb{Z}$, ou encore

$$\begin{cases} y_B - y_A = k'.(y_D - y_C) \\ x_B - x_A = k'.(x_D - x_C) \end{cases}$$

ce qui, dans le formalisme adopté, se réécrit comme

$$B - A = k'.(D - C).$$

Un raisonnement analogue peut être tenu si les lettres A et B sont interverties, ou les lettres C et D.

FIGURE 5.29

C'est acceptable comme justification étant donné que le parallélisme est un invariant affin et que, d'un repère à l'autre, ces pentes respectives peuvent varier tout en restant égales si les droites sont parallèles. Il n'y a que le cas de droites parallèles à Oy qui poserait problème.

Évidemment, il y a plus court si l'on pense à faire intervenir un point E sur CD tel que $ABEC$ soit un parallélogramme (figure 5.30) :

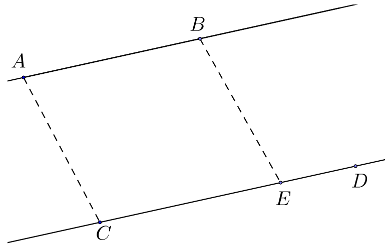
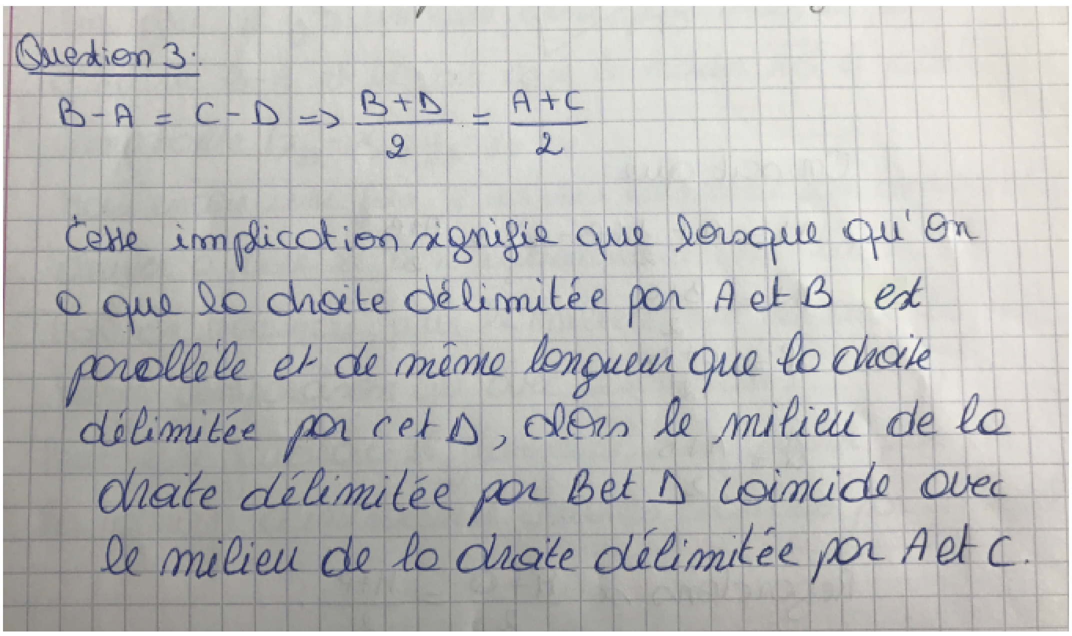


FIGURE 5.30

En effet, des relations $E - C = B - A$ et $E = C = k(D - C), k \in \mathbb{R}$, on déduit facilement que $B - A = k(D - C)$ pour ce k. Il est à noter, ici qu'aucun élève-professeur ne tente un tel calcul à partir de l'extension praxémique.

Dans l'ensemble, les élèves-professeurs répondent de manière satisfaisante à la question 2 qui demande de prouver le théorème de Varignon.

Quant aux questions 3 et 4, les performances des élèves-professeurs sont plus inégales. Plusieurs identifient bien les propriétés géométriques en jeu. D'autres interprètent partiellement les relations bipoint comme $B - A = C - D$ en faisant référence au parallélisme et à la longueur sans prendre en compte l'ordre des points. Par exemple, la réponse suivante :


Question 3:

$B - A = C - D \Rightarrow \frac{B+D}{2} = \frac{A+C}{2}$

Cette implication signifie que lorsque qu'on a que la droite délimitée par A et B est parallèle et de même longueur que la droite délimitée par c et D, alors le milieu de la droite délimitée par B et D coincide avec le milieu de la droite délimitée par A et C.

FIGURE 5.31

Il est à noter que, de plus, cet élève-professeur formule un énoncé pour le moins particulier en parlant de “deux droites délimitées par des points, parallèles et de même longueur”. De plus, il ne reconnait pas, dans l’implication double, un critère qui fait d’un quadrilatère un parallélogramme, il ne parle même pas de quadrilatère mais de droites. Cet élève-professeur est donc fort peu familier d’une géométrie <u>dans</u> l’espace qui étudie des figures et, encore moins, des énoncés de base de la géométrie euclidienne.

Quant à la question 5 qui leur demande : “Comment introduiriez-vous les vecteurs, par un texte adressé aux élèves, en prenant appui sur les résultats déjà prouvés dans le cadre de ce formalisme ?”, quelques élèves-professeurs rapprochent les écritures $B - A$, d’une part, et $\overrightarrow{AB}$, d’autre part, par le biais des composantes, comme illustré ci-dessous :

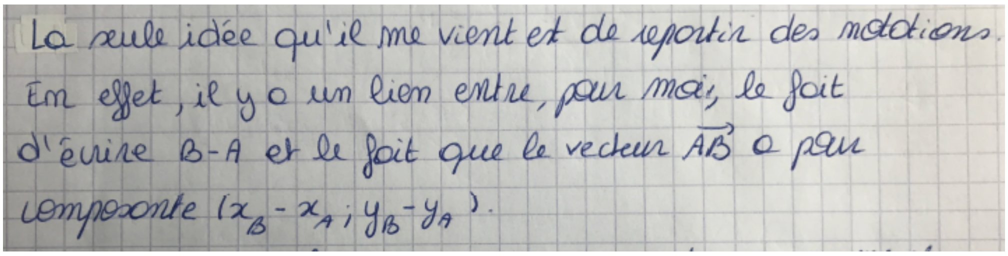
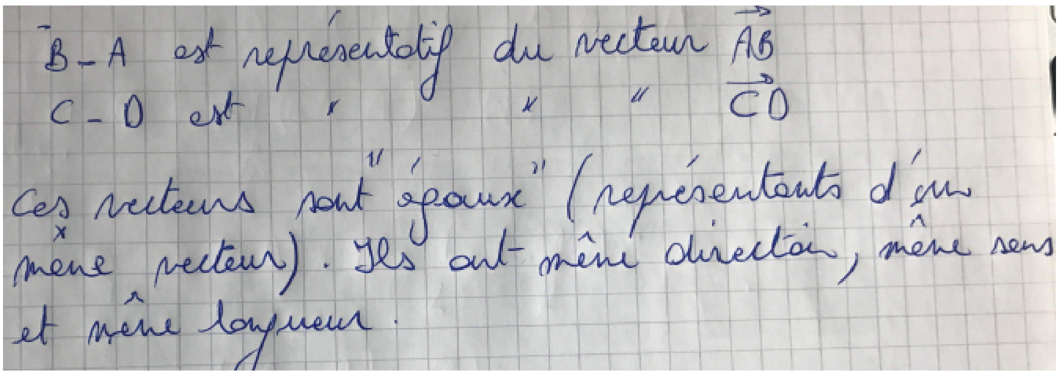

La seule idée qu'il me vient est de reporter des notations. En effet, il y a un lien entre, pour moi, le fait d'écrire B-A et le fait que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composante $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.

FIGURE *5.32*

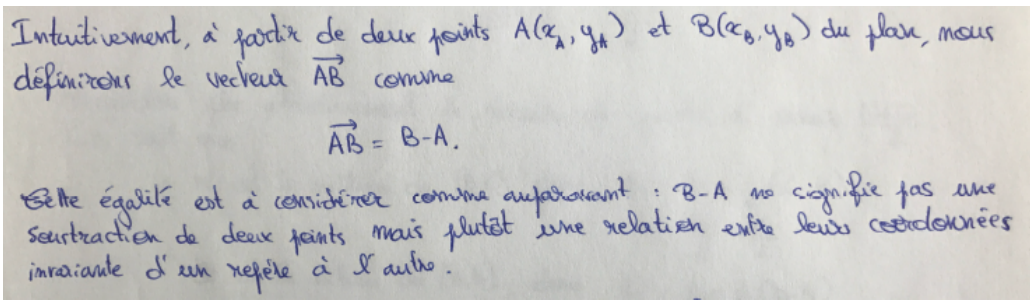
Mais certains semblent conscients qu’un bipoint <u>**représente**</u> un vecteur :


B − A est représentatif du vecteur $\overrightarrow{AB}$
C − D est " " " $\overrightarrow{CD}$

Ces vecteurs sont "égaux" (représentants d'un même vecteur). Ils ont même direction, même sens et même longueur.

FIGURE *5.33*

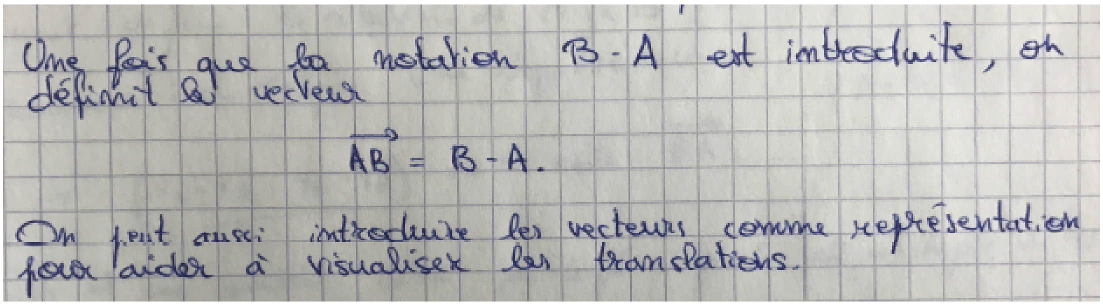
alors que d’autres se risquent à une égalité plus contestable :


Intuitivement, à partir de deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ du plan, nous définirons le vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme

$$\overrightarrow{AB} = B - A.$$

Cette égalité est à considérer comme auparavant : B-A ne signifie pas une soustraction de deux points mais plutôt une relation entre leurs coordonnées invariante d'un repère à l'autre.

FIGURE 5.34



Une fois que la notation B - A est introduite, on définit le vecteur

$$\overrightarrow{AB} = B - A.$$

On peut aussi introduire les vecteurs comme représentation pour aider à visualiser les translations.

FIGURE 5.35

Cependant, l'un d'eux a bien conscience que "$B - A$ [est...] une relation entre leurs coordonnées invariante d'un repère à l'autre" mais ne fait aucune allusion à l'isomorphisme entre l'ensemble des vecteurs et $\mathbb{R}^2$.

Nous avons également observé que plusieurs élèves-professeurs reviennent systématiquement aux trois caractéristiques : "direction", "sens" et "longueur" et qu'aucun n'évoque une quelconque idée de relation d'équivalence et de classes d'équivalences au principe de nombreuses définitions en mathématiques dont celle de vecteur. C'est là un savoir épistémologique qu'aucun élève-professeur se semble connaître à savoir que la relation d'équivalence offre souvent, en mathématiques, un "procédé" générique de définition même s'ils en ont rencontré de nombreux exemples dans leur cursus universitaire.

CONCLUSION DE LA SECTION 5.3

Les données recueillies dans le cadre d'une formation initiale de futurs professeurs tendent à montrer que l'enseignement des vecteurs se situe malaisément entre physique et mathématique, d'une part, et entre géométrie naturelle et géométrie axiomatique, d'autre part. En effet, le concept de vecteur lui-même n'est pas vraiment défini mais seulement introduit sur base d'une analogie avec les vecteurs-forces ou les vecteurs-vitesses ou, que ce soit ou non en référence aux translations, par les caractéristiques "sens", "direction" et "longueur" considérées en un sens commun. Ce sont là, dans tous les cas, des définitions descriptives typiques d'une géométrie naturelle aux antipodes de définitions qui donnent prise au raisonnement déductif. Il est à souligner, de ce point de vue, que les élèves-professeurs n'identifient aucune relation ni classe d'équivalence comme fondement à la définition du vecteur en raison probablement d'un manque de recul épistémologique sur un tel procédé de définition pourtant maintes fois rencontré lors de leurs études universitaires. Et ce, de manière résistante, même lorsqu'une lecture préalable d'un premier travail sur les bipoints aurait pu leur mettre "la puce à l'oreille".

Au-delà de la définition du concept de vecteur, les élèves-professeurs éprouvent des difficultés à sortir eux-mêmes du paradigme de géométrie naturelle auquel les lie un mélange de preuves et de recours aux dessins faute d'expliciter, voire même d'identifier, certaines propriétés géométriques en jeu.

Leurs performances en géométrie analytique sont également caduques car leurs compétences techniques butent sur le manque de reconnaissance du type de géométrie à laquelle appartient la propriété étudiée et, en conséquence, sur leur difficulté à choisir un repère approprié.

Ce manque de connaissances d'ordre épistémologique est, pour eux, un frein à comprendre les enjeux du formalisme bipoint, son amarrage à la géométrie analytique ainsi que sa sémioticité et son instrumentalité par rapport à la géométrie affine et la géométrie métrique. En effet, ils doivent appréhender ici quelles sont les configurations géométriques typiques de chacune de ces géométries dont les modèles analytiques ont une forme invariante sous l'effet des transformations associées ou lors d'un changement de repère tout en préfigurant les propriétés intrinsèques des vecteurs. Et l'on observe que les élèves-professeurs s'approprient globalement le sens des relations bipoints et des implications entre elles tout en restant tributaires parfois d'une lecture de dessins sur lesquels ils repèrent l'ordre des points. Ils évitent aussi de travailler directement sur l'extension praxémique que permet le formalisme bipoint dès qu'il s'agit de créer une nouvelle relation bipoint à partir d'autres, ici celle concernant le parallélisme de droites. En tout cas, si leur réponse est correcte dans l'ensemble, la plupart ne la justifie pas et le seul étudiant qui le fait revient au calcul des coordonnées au lieu d'exploiter des écritures bipoint.

C'est tout ce que l'on peut dire ici de ces données "opportunistes" concernant le public de ces élèves-professeurs sauf qu'elles paraissent rejoindre ce que l'on peut observer chez les professeurs en fonction lorsque ceux-ci participent à des formations continues.

CONCLUSION GLOBALE ET PERSPECTIVES

Comme son titre l'indique, notre thèse étudie l'écologie du calcul bipoint dans l'enseignement de la géométrie au niveau du secondaire. Nous nous plaçons donc ici dans la problématique écologique telle que l'envisage la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard (1991 et 1992). La métaphore de l'écologie y concerne la question de l'existence ou de la non existence ou encore celle de la possible existence de savoirs mathématiques comme objets d'enseignement dans certaines institutions didactiques. Ici, le savoir est le calcul "bipoint" envisagé comme un formalisme algébrique permettant des démonstrations calculatoires de propriétés géométriques affines et métriques, en dimension deux et trois. Et l'institution est le degré supérieur de l'enseignement secondaire de transition (élèves de 15-18 ans).

Sans prétendre avoir cerné tous les aspects de notre question, nous en avons envisagé plusieurs angles d'étude, structurés en cinq chapitres. Cette conclusion globale reprend l'essentiel des conclusions respectives de ces chapitres, puis les articule afin de formuler quelques propositions et perspectives.

Le chapitre 1 dresse un panorama historique de la géométrie en plusieurs points :

- Les critiques portées sur la géométrie d'Euclide.
- La reprise de cette géométrie par Hilbert et l'évolution de ce qu'on appelle le raisonnement déductif et de ses critères d'exigence.
- Le programme d'Erlangen restructurant les résultats établis jusque là en différentes géométries subordonnées et définies en termes de groupes de transformations et de leurs invariants.
- Le courant structuraliste en mathématiques mettant l'accent sur les relations entre objets mathématiques, les axiomes qui les définissent et les structures qu'ils forment plutôt que sur leur "nature" intrinsèque.
- L'émergence de l'algèbre linéaire comme théorie "multi-sens" représentative du structuralisme. Sa construction, en géométrie, à partir de la géométrie analytique et du souhait de s'affranchir de la lourdeur des calculs sur

les coordonnées par la recherche d'un formalisme intrinsèque qui prend, en particulier, la forme du calcul bipoint chez Burali-Forti et Marcolongo.

- La subordination de la géométrie à l'algèbre linéaire et la géométrisation du linéaire, la première offrant un cadre symbolique rigoureux pour l'étude de la seconde laquelle nourrit la première d'intuitions fécondes.

Au delà de ce panorama historique, nous avons mis en évidence de nombreux rapports dialectiques entre les entités reprises dans le schéma 1. L'expression "rapport dialectique" est à prendre au sens de son étymologie qui renvoie à un "échange se discours". Évidemment, ces échanges supposent un saut dans le temps mais avec effet de rétroaction. Ces différents rapports dialectiques sont ici exprimées par des flèches à double sens.

Ainsi les fondements de la géométrie de Hilbert corrigent les faiblesses de la géométrie euclidienne au prix d'une axiomatique ... laquelle est construite de manière à pouvoir prouver des résultats ... de la géométrie euclidienne. De même, le programme d'Erlangen s'est constitué en réponse à la question de l'indépendance des axiomes d'Euclide pour intégrer de nouvelles géométries dont les géométries "non euclidiennes" mais permet, en retour, de revisiter la géométrie euclidienne à la lumière et en termes, par exemple du groupe des isométries affines de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et de leurs invariants. Le rapport dialectique entre géométrie euclidienne et algèbre linéaire se traduit par la locution "linéarisation de la géométrie et géométrisation du linéaire". Quant à la linéarisation de la géométrie, on sait ce qu'elle doit à la géométrie analytique, celle-ci étant in fine subordonnée à l'algèbre linéaire, tout en offrant un mode de preuves de propriétés de la géométrie euclidienne ...

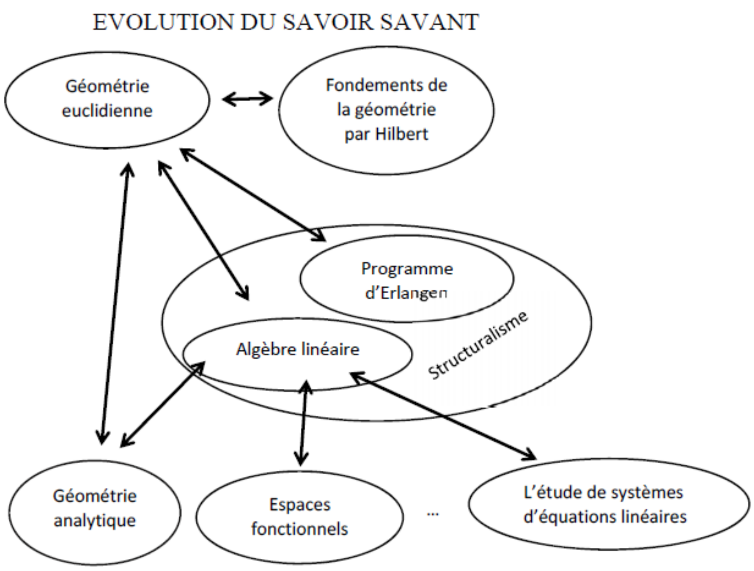


Schéma 1

Le chapitre 2 étudie l'évolution de l'enseignement de la géométrie au secondaire dans les pays ou régions fortement marqués par la réforme dite des Mathématiques Modernes : la France, le Vietnam, la Belgique francophone.

Jusqu'à la réforme des Mathématiques Modernes, la géométrie enseignée dans le secondaire était en gros, celle d'Euclide et souffrait des mêmes faiblesses, soit une absence d'axiomes (ceux que Hilbert formulera ultérieurement) permettant un raisonnement déductif rigoureux affranchi de toute information donnée par les figures.

Cette réforme et les contre-réformes qui lui ont succédé peuvent se résumer au moyen des schémas 2 et 3 que voici entre lesquels il est intéressant d'établir un parallèle. Lors de la réforme des mathématiques modernes (schéma 2), l'algèbre linéaire et le programme d'Erlangen, emblématiques du courant structuraliste, dominent l'enseignement de la géométrie. On étudie la structure d'ensembles formés de transformations munis de la loi de composition et d'une multiplication scalaire. Parmi ces transformations, les translations ou vecteurs constituent la base de la définition des droites et des plans. De la sorte, l'algèbre linéaire surplombe la géométrie euclidienne dont il s'agit d'étudier les structures vectorielle et affine au détriment des propriétés de figures géométriques remarquables, ce que nous avons exprimé par des flèches à sens unique. Quant à la géométrie analytique, elle devient un produit dérivé de l'algèbre linéaire, le focus étant mis sur le travail de traduction des équations vectorielles en déclinaisons paramétriques et cartésiennes ainsi que sur des exercices techniques plus que sur les preuves algébriques de propriétés de figures géométriques.

Le schéma 3 illustre la transposition actuelle, pas très claire à vrai dire, ce que nous exprimons par des traits pointillés entre divers pôles. On revient aux propriétés de figures en géométrie synthétique mais on en démontre peu. Les références à l'algèbre linéaire demeurent très présentes dans les pratiques enseignantes et ce sont elles qui déterminent les objets de la géométrie analytique. Dès lors, faute de temps et malgré les injonctions institutionnelles, on peine à donner une place consistante aux démonstrations de propriétés géométriques que ce soit à travers la méthode synthétique, la méthode analytique ou la méthode vectorielle. Il n'existe donc pas de niche écologique permettant de faire vivre les vecteurs d'autant que ceux-ci ne sont pas vraiment définis mais plutôt suggérés intuitivement par des dessins, ce qui n'est satisfaisant ni pour le mathématicien, ni pour leur apprentissage alors tributaire de conceptions erronées.

Réforme des maths modernes

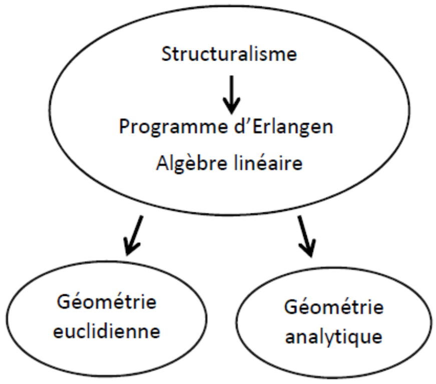


Schéma 2

Contre-réforme

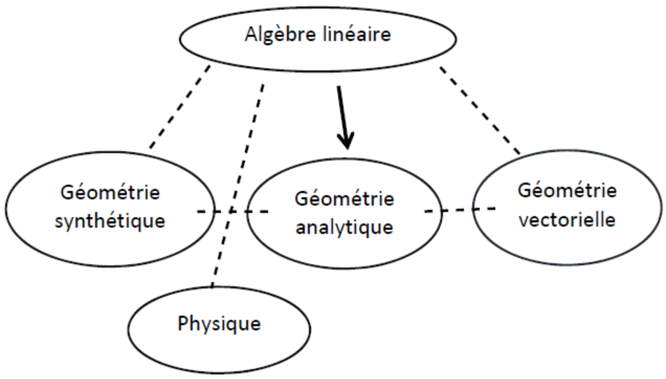


Schéma 3

Nous avons analysé ces différentes transpositions didactiques à la lumière des trois paradigmes d'enseignement de la géométrie que distinguent Houdement et Kuzniak (2006) : la “géométrie naturelle” basée sur la perception et les mesures, la “géométrie axiomatique naturelle” où l'axiomatique demeure partielle comme dans les Eléments d'Euclide et la “géométrie axiomatique formaliste”. Notre analyse de l'histoire de l'enseignement de la géométrie, en Belgique aussi bien qu'en France et au Vietnam, illustre que :

- Avant la réforme des maths modernes, la géométrie au secondaire relève du paradigme de l'axiomatique naturelle où les dessins jouent un rôle effectif dans les démonstrations géométriques, en précisant, par exemple, les positions relatives des points et droites.
- Pendant la réforme, le paradigme devient celui d'une géométrie axiomatique formaliste où le rôle des dessins était réduit à celui d'un outil heuristique, assez rarement toutefois, les figures géométriques étant reléguées à l'arrière plan. Cette réforme a occasionné de nombreuses difficultés d'apprentissage

répertoriées dans ce chapitre dont celles étudiées par Le Thi Hoai Chau (1997 et 2001) relatives au concept de vecteur.

- Enfin les contre-réformes, supposées corriger les excès de l'époque des mathématiques modernes, se situent malaisément entre géométrie axiomatique formaliste, géométrie axiomatique naturelle voire géométrie naturelle : d'une part, on garde des mathématiques modernes des aspects d'une structuration du curriculum de l'époque, par exemple un point de départ vectoriel pour définir les objets droite et plan et, d'autre part, une définition du vecteur par des attributs renvoyant au monde sensible et à la perception, comme la notion de sens. En outre, une géométrie axiomatique naturelle est timidement présente dans l'étude de la géométrie euclidienne, à travers quelques théorèmes.

Cet état des lieux nous a inspiré un autre Modèle Epistémologique de Référence (MER) au sens de Gascon (1993) dans lequel un formalisme particulier basé sur des "bipoints" joue le rôle d'intermédiaire entre l'étude de figures géométriques et leur modélisation vectorielle en guise d'entrée dans l'algèbre linéaire.

Le chapitre 3 décrit ce MER et ses enjeux. Celui-ci se situe à un niveau élevé de l'échelle de co-détermination didactique de Chevallard (2004) en articulant, à un large niveau curriculaire, l'apprentissage de l'algèbre élémentaire et des apprentissages géométriques multiples prévus dans un curriculum assez standard de la géométrie pour l'enseignement secondaire. D'une part, l'approche de l'algèbre élémentaire y est finalisée tant par la modélisation fonctionnelle que par la géométrie analytique. D'autre part, on y étudie d'abord la géométrie **dans** l'espace (au sens de Bkouche, 1982), c'est-à-dire les propriétés de figures planes et de solides avant d'arriver à l'étude de la géométrie **de** l'espace, soit celle de la structure vectorielle et affine qui lie les objets "simples" que sont le point, la droite et le plan.

Ce MER s'inscrit dans une visée heuristique au sens de Lakatos (1984) et induit un parcours qui commence par une praxéologie "modélisation" au sens de Schneider (2008) : on cherche à créer un modèle algébrique de configurations géométriques "de base" de la géométrie affine d'abord et de la géométrie métrique ensuite.

Ce modèle algébrique relève d'une géométrie analytique "compacte", soit du formalisme bipoint qui résume en une seule relation deux ou trois relations homologues entre les coordonnées respectives des points concernés, relations qui demeurent invariantes quel que soit le choix du repère. Le modèle algébrique rend compte alors des propriétés intrinsèques des vecteurs respectivement propres aux géométries affine et métrique. Ce modèle est lui-même validé, même pour la géométrie affine, par les théorèmes d'une géométrie qui est lui subordonnée, la géométrie euclidienne laquelle, pour les élèves concernés, a déjà permis de structurer quelque peu leur rapport naturel au monde physique.

Ce mode de validation, assumé ici dans le cadre d'une praxéologie "modélisation", conduit à la construction des relations de base du modèle algébrique qui peuvent ensuite constituer les "axiomes" d'une praxéologie "déduction" (au sens de Schneider, 2008), amorce de la géométrie vectorielle, même si les choses ne sont pas forcément présentées ainsi aux élèves et qu'on insiste surtout sur l'instrumentalité des formalismes bipoint et vectoriel pour prouver de nouvelles propriétés géométriques.

Le MER ainsi constitué va donc de la géométrie euclidienne à la géométrie vectorielle en passant par une géométrie analytique "compacte". Il peut être résumé par le schéma que voici :

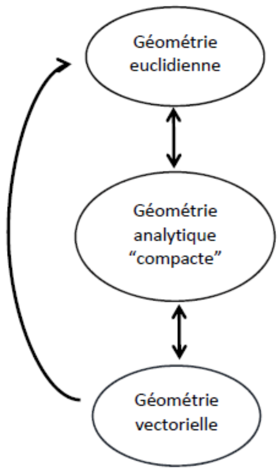


Schéma 4

Ce MER a été décliné en ingénierie didactique (Nguyen et Schneider, 2017), d'une part, et a inspiré un dispositif de formation de futurs professeurs, d'autre part.

Le chapitre 4 étudie les valences sémiotique et instrumentale du formalisme bipoint, en comparaison avec le formalisme vectoriel, d'abord en géométrie affine, puis en géométrie métrique.

La valence sémiotique est relative ici au MER construit précédemment et à l'ingénierie didactique qui le concrétise. Nous pensons en effet que ce sens est fortement induit par l'enseignement lui-même, la relativité institutionnelle du savoir concernant autant la construction de ce savoir que les pratiques qui lui sont liées.

L'étude de cette valence sémiotique participe donc à l'analyse a priori, au sens de Brousseau (1998), des tâches dévolues aux élèves, en termes de caractère fondamental. Dans le cas présent, on construit un nouveau cadre mathématique en considérant un autre cadre comme soubassement puisque, comme déjà dit, c'est la géométrie synthétique euclidienne qui permet de valider des relations algébriques comme modèles de configurations géométriques de base. Par exemple, en géométrie affine, la relation $B - A = C - D$ caractérise le parallélogramme (non croisé mais éventuellement aplati) et la relation $P = A + k(B - A)$ modélise les configurations particulières de points alignés et, à terme, la première relation lui sera subordonnée. Rappelons aussi que ces relations "bipoint" résument des relations homologues entre coordonnées des points-clés de la configuration : $B - A = C - D$qui résume $x_B - x_A = x_C - x_D$ et $y_B - y_A = y_C - y_D$, par exemple pour le parallélogramme.

Pour les élèves qui ne connaissant ni les transformations affines, ni les formules de changement de repères affins, le caractère invariant de ces relations, d'un repère à l'autre, est géré par l'exigence d'un travail générique dans un repère quelconque où les points - précisés d'abord par des coordonnées numériques – le sont ensuite par des coordonnées génériques. Ce travail consiste en des tâches fondamentales telles que "Trouver les coordonnées d'un point D qui est le 4ème sommet d'un parallélogramme dont on donne les autres sommets, A, B et C" ou "Trouver celles d'un point P aligné avec les points A et B et deux fois plus éloigné de A que de B", l'article indéfini devant amener deux possibilités et donc les élèves à considérer l'ordre des points.

L'amarrage de cette géométrie calculatoire à la géométrie euclidienne s'inscrit dans un parcours heuristique replaçant les élèves dans la position des mathématiciens qui, dans l'histoire, cherchaient à modéliser la géométrie euclidienne (entre autres) par un formalisme indépendant du choix du repère. Il faut d'ailleurs souligner qu'il faut peu de résultats de géométrie élémentaire pour valider le calcul bipoint : principalement les théorèmes de Thalès et de Pythagore et, éventuellement, les cas d'isométrie et de similitude des triangles. Ils font partie des connaissances des élèves concernés.

La valence instrumentale de ce formalisme bipoint est étudiée, quant à elle, à la lumière des démonstrations de propriétés géométriques que ce formalisme permet. Elle est aussi comparée à la valence instrumentale du calcul vectoriel, dans les mêmes conditions.

En ce qui concerne la géométrie affine, le calcul bipoint remplace avantageusement le calcul vectoriel et les stratégies classiques de preuve que suppose l'usage de ce dernier. En effet, le calcul bipoint lie directement les points-clés d'une configuration géométrique en les mettant sur pied d'égalité. Ce calcul exprime de ce fait les propriétés des figures en exploitant directement le modèle algébrique des configurations de base sans devoir systématiquement passer par des points intermédiaires. De la sorte, les stratégies de démonstrations sont moins nombreuses et plus simples que celles exploitées classiquement dans les démonstrations vectorielles. Par exemple, l'usage de la relation de Chasles, lié à des compositions et décompositions successives de vecteurs devient inutile. De même, on n'a plus besoin de l'usage du vecteur nul, seul vecteur parallèle à deux autres vecteurs non nuls et non parallèles, pour prouver que deux points sont confondus : il suffit de prouver qu'ils ont la même écriture "bipoint". Quant au milieu M d'un segment AB ou au centre de gravité G d'un triangle ABC, une seule relation bipoint suffit à les caractériser :

$$M = \frac{A+B}{2} \qquad \text{ou} \qquad G = \frac{A+B+C}{3}$$

là où le calcul vectoriel doit jouer sur une multitude de caractérisations adaptées à telle ou telle preuve, y compris celles où l'on fait intervenir un point P quelconque.

A cela s'ajoute que le calcul bipoint jouit de règles équivalentes à celles de l'algèbre élémentaire dans $\mathbb{R}$. Pour autant bien sûr que l'on sache piloter les calculs.

Selon ce dernier point de vue, nous avons montré une différence entre géométrie affine et géométrie métrique. Dans les preuves relevant de la première, il faut peu d'ingéniosité pour mener les calculs dans le formalisme bipoint. Ce n'est plus le cas en géométrie métrique où il faut savoir décider d'une stratégie de calcul comme celle qui consiste à additionner, membre à membre, deux identités algébriques. Dans cette géométrie, le choix d'un formalisme ou d'un autre peut se traduire par un déplacement de la difficulté technique sans éviter un recours à l'ingéniosité.

Quant aux nombres complexes, ils complètent les calculs bipoint pour exprimer des rotations en géométrie 2D mais leur apport est parfois illustré par des applications fort artificielles.

Le chapitre 5 traite de deux expérimentations.

La première expérimentation est celle d'une partie de notre ingénierie dans une classe de quatrième secondaire. Elle nous a permis d'identifier plusieurs difficultés d'apprentissage des élèves qui se renforcent l'une, l'autre.

- Une prégnance du paradigme de "géométrie naturelle" qui fait écran à celui de "géométrie axiomatique naturelle" : les élèves sortant du collège restent très attachés aux mesures faites sur des dessins tracés avec précision et aux constructions de points ou de droites réalisées avec des instruments. De ce fait ils peinent à rentrer dans un contrat de validation au départ de propriétés caractériques des figures géométriques.
- Une difficulté à exploiter leurs quelques connaissances en géométrie analytique pour traduire des propriétés de figures ou de transformations géométriques. Les élèves peinent en effet à se détacher des figures et des mesures de longueurs et ainsi à travailler avec les projections parallèles sur les axes : expressions, en termes de coordonnées, du milieu d'un segment, de la longueur d'un segment parallèle à un axe ou de la translation amenant un point sur un autre,... Ils ne distinguent pas les équations associées aux courbes (ou figures) géométriques des expressions analytiques de fonctions et, plus que probablement comme déjà observé par Lebeau et Schneider (2009), ne conçoivent pas non plus ces équations comme des contraintes portant sur les coordonnées.

En outre, cette partie de l'ingénierie a produit des effets en termes d'apprentissage. Par leur caractère fondamental, les questions dévolues ont permis de mettre en évidence l'intérêt d'une technique basée sur des différences de coordonnées, en évitant d'autres calculs pénibles comme celui de la distance entre deux points. Ces questions ont également offert à l'enseignant de multiples occasions d'expliquer aux élèves l'évolution attendue d'eux du point de vue du paradigme géométrique, laquelle évolution a pu être observée ensuite. Le choix de coordonnées décimales pour les points donnés dans les tâches et celui ultérieur de coordonnées génériques ont joué ici le rôle de variables didactiques tout en favorisant, chez certains élèves, une extension praxémique des relations entre coordonnées, proche du formalisme bipoint. Ce fonctionnement doit à la conduite éclairée des situations adidactiques concernées, de la part du professeur et de l'expérimentateur.

La deuxième expérimentation s'inscrit dans un dispositif de formation initiale d'élèves-professeurs lequel se donne comme objectif de les initier quelque peu à la réflexion menée dans cette thèse.

Le dispositif comporte de multiples dimensions dont des enseignements ex cathedra et des tâches dévolues aux étudiants.

La récolte de données a été ici plus aléatoire et on peut parler de données "opportunistes". Pour autant, ces données nous semblent significatives des pratiques enseignantes. C'est assez normal, somme toute : les élèves-professeurs alimentent leur cours dans les manuels existants, dans les cours qu'eux-mêmes ont reçu lorsqu'ils étaient élèves dans le secondaire et dans ceux que donnent leurs maîtres de stages. En outre, ces données rejoignent ce que l'on peut observer chez les professeurs en fonction lorsque ceux-ci participent à des formations continues.

Les données recueillies dans cette expérimentation avec les élèves-professeurs tendent à montrer que l'enseignement des vecteurs se situe malaisément entre physique et mathématique, d'une part, et entre géométrie naturelle et géométrie axiomatique, d'autre part. En effet, le concept de vecteur lui-même n'est pas vraiment défini mais seulement introduit sur base d'une analogie avec les vecteurs-forces ou les vecteurs-vitesses ou, que ce soit ou non en référence aux translations, par les caractéristiques "sens", "direction" et "longueur" considérées en un sens commun. Ce sont là, dans tous les cas, des définitions descriptives typiques d'une géométrie naturelle aux antipodes de définitions qui donnent prise au raisonnement déductif. Il est à souligner, de ce point de vue, que les élèves-professeurs n'identifient aucune relation ni classe d'équivalence comme fondement à la définition du vecteur en raison probablement d'un manque de recul épistémologique sur un tel procédé de définition pourtant maintes fois rencontré lors de leurs études universitaires. Et ce, de manière résistante, même lorsqu'une lecture préalable d'un premier travail sur les bipoints aurait pu leur mettre "la puce à l'oreille".

Au-delà de la définition du concept de vecteur, les élèves-professeurs éprouvent des difficultés à sortir eux-mêmes du paradigme de géométrie naturelle, au mieux de celui de géométrie axiomatique naturelle auquel les lie un mélange de preuves et de recours aux dessins faute d'expliciter, voire même d'identifier, certaines propriétés géométriques en jeu.

Leurs performances en géométrie analytique sont également caduques car leurs compétences techniques butent sur le manque de reconnaissance du type de géométrie à laquelle appartient la propriété étudiée et, en conséquence, sur leur difficulté à choisir un repère approprié.

Ce manque de connaissances d'ordre épistémologique est, pour eux, un frein à comprendre les enjeux du formalisme bipoint, son amarrage à la géométrie analytique ainsi que sa sémioticité et son instrumentalité par rapport à la géométrie affine et la géométrie métrique. En effet, ils doivent appréhender ici quelles sont les configurations géométriques typiques de chacune de ces géométries dont les modèles analytiques ont une forme invariante sous l'effet des transformations associées ou lors d'un changement de repère tout en préfigurant les propriétés intrinsèques des vecteurs. Et l'on observe que les élèves-professeurs s'approprient globalement le sens des relations bipoints et des implications entre elles tout en restant tributaires parfois d'une lecture de dessins sur lesquels ils repèrent, par exemple, l'ordre des points. Ils évitent aussi de travailler directement sur l'extension praxémique que permet le formalisme bipoint dès qu'il s'agit de créer une nouvelle relation bipoint à partir d'autres, ici celle concernant le parallélisme de droites. En tout cas, si leur réponse est correcte dans l'ensemble, la plupart ne la justifie pas et le seul étudiant qui le fait revient au calcul des coordonnées au lieu d'exploiter des écritures bipoint.

Apports phénoménotechniques du MER

Le MER et l'ingénierie associée construits ici ont donc joué un rôle phénoménotechnique à plus d'un égard. Ils ont d'abord permis d'identifier des obstacles d'apprentissage que ce soit chez les élèves du secondaire ou chez les futurs professeurs en formation initiale. Mais il ont aussi favorisé l'identification d'occasions, pour les élèves, d'en prendre conscience et, pour les enseignants ou formateurs d'enseignants concernés, de les traiter. Enfin, il a permis de pointer des aspects fragiles du curriculum actuel basé sur une naturalisation de certaines pratiques enseignantes et des illusions trompeuses sur ce que les élèves apprennent vraiment.

Au delà donc des obstacles d'apprentissage, le rôle "phénoménotechnique" de ce MER tient au fait qu'il représente un "modèle alternatif" permettant d'interpréter le modèle dominant dans l'enseignement de la géométrie aujourd'hui. Il nous permet ainsi de "dénaturaliser" la transposition didactique actuelle qui est toujours sous l'influence de la réforme des mathématiques modernes mais qui a été édulcorée d'éléments théoriques jugés trop difficiles pour les élèves et, par conséquent, a été réduite à un ensemble de "recettes". Cet état des lieux avait déjà été dressé par Schneider (2008) qui dénonçait, en substance, un passage des écritures vectorielles aux égalités correspondantes sur les composantes relevant du tour de passe-passe : "on barre les flèches et on déploie les égalités sur les composantes" qui supplée l'absence, dans le secondaire, d'un théorème d'algèbre linéaire qui gère ce passage : "Tout espace vectoriel E sur un champ K est isomorphe à l'espace K^n des coordonnées (par rapport à une base donnée de E, n un naturel". Elle relève également toutes les incompréhensions et questions des élèves sur les différents modèles cartésien, paramétrique et vectoriel, des élèves se demandant, par exemple, si la somme de deux vecteurs, dans l'espace, ne pouvait pas conduire à un "parallélogramme gauche".

Enfin, ce MER et les expérimentations auxquelles il a conduit, que ce soit la partie de l'ingénierie dans une classe de 4ème ou le dispositif de formation destiné aux futurs professeurs, nous a permis d'éclairer la question majeure de cette thèse relative à l'écologie du formalisme bipoint.

L'écologie du calcul bipoint dans le secondaire

Le moment est venu d'articuler l'ensemble des données recueillies et analysées dans cette thèse.

Plaçons-nous d'abord sur un plan mathématique où là la niche écologique privilégiée du calcul bipoint est la démonstration de propriétés affines et métriques de figures planes et spatiales. En effet, nous avons montré que, en ce domaine, le calcul bipoint possède une valence instrumentale supérieure à celle du calcul vectoriel tout en évitant la lourdeur des calculs propres à la méthode analytique [129].

Encore faut-il que l'existence de cette niche puisse être négociée dans l'ensemble du curriculum et ce pourrait être, nous semble-t-il, à cheval sur le programme de géométrie pensé ici comme une géométrie **dans** l'espace et non **de** l'espace et sur le programme d'algèbre dont les apprentissages trouvent une finalité dans la preuve calculatoire de propriétés géométriques, son autre finalité se situant dans la modélisation fonctionnelle et l'étude des modèles fonctionnels paramétrés.

En outre, la valence sémiotique du calcul bipoint en fait un marchepied privilégié vers la conceptualisation du vecteur défini ici comme ensemble de bipoints équipollents. Cette définition revient à la définition des mathématiciens à ceci près que les mots "relation d'équivalence" et "classe d'équivalence" sous-jacents implicitement ne sont pas utilisés.

Cependant cette option se doit être évaluée à l'aune d'une transposition didactique déjà à l'œuvre, telle qu'elle s'exprime dans les programmes, les manuels et les pratiques enseignantes. En la matière, il nous faut souligner une sorte de paradoxe lié au concept de vecteur. Dans la réforme des mathématiques modernes, le vecteur devait "dépoussiérer" l'enseignement de la géométrie, inspiré de la géométrie euclidienne où l'axiomatique est incomplète, les axiomes d'incidence d'ordre et de continuité d'Hilbert, en particulier, en étant absents et "remplacés" par une lecture de figures dessinées avec soin. Mais, suite aux vicissitudes de cette réforme, on en revient aujourd'hui à une présentation du vecteur qui relève plus de la géométrie naturelle que d'une géométrie raisonnée.

Pour autant, le concept de vecteur ne "passe pas" si bien que cela si l'on en juge par les nombreux exercices techniques qui, sans doute, sont supposés "faire passer la pilule", par exemple, calculer l'extrémité d'un vecteur dont les composantes ainsi que l'origine sont précisées numériquement. Il en découle une absence de temps

129. Signalons, au passage, que le calcul bipoint a également un champ d'opérationnalité en géométrie projective, ainsi que nous l'avons étudié quelque peu.

pour démontrer, grâce au calcul vectoriel, des propriétés géométrique significatives. Cette transposition est assez paradoxale en regard des enjeux mathématiques.

Par ailleurs, la définition vectorielle des objets géométriques est donnée sans être accompagnée d'un quelconque discours technologique. Pas plus que les traductions paramétriques et cartésiennes ne sont travaillées pour elles-mêmes, comme nous l'avons dit plus haut. De plus, on passe de l'une à l'autre sans justification théorique car cet enseignement a l'allure d'une "praxéologie à trous" au sens de Rouy (2007) où l'on voir défiler des éléments empruntés à l'algèbre linéaire de laquelle on gomme ce qui est jugé trop difficile pour les élèves en remplaçant les "trous" par des gestes d'ostension.

Cette situation est source de nombreuses difficultés d'apprentissage non gérées et appelle des changements importants. Remplacer partiellement le calcul vectoriel par le calcul bipoint ne serait peut-être pas stupide, en raison d'une plus grande progressivité d'apprentissage et de plus nombreuses connexions entre diverses parties du programme.

Quant à une initiation à l'algèbre linéaire que l'on souhaiterait proposer aux bons élèves de mathématiques, il nous semble que l'étude des systèmes linéaires est un meilleur créneau. En effet, comme développé dans Nguyen et Schneider (2017), cette étude soutenue par un contexte géométrique, permet de mettre au niveau des élèves la discussion des systèmes au delà de leur résolution et des notions essentielles de ce domaine mathématique dont la dépendance linéaire et le rang d'un système.

Mais ce serait là des changements importants que les enseignants ne sont sans doute pas prêts à accepter.

Nous en arrivons ici aux <u>acteurs de terrain</u>, en ce compris les membres de la noosphère et les élèves, en plus des enseignants.

Pour ce qui est des élèves, notre expérimentation laisse entrevoir des potentialités d'appropriation du calcul bipoint, au prix d'une guidance éclairée de l'enseignant. Mais cela reste une hypothèse à étayer plus amplement : c'est là une perspective ouverte par notre travail.

En ce qui concerne les autres acteurs de terrain, on peut s'attendre à des obstacles de taille en matière d'épistémologie spontanée. Comme nous avons pu le tester avec un public d'élèves-professeurs, ceux-ci ont un rapport assez rigide aux savoirs mathématiques brandis un peu comme étendards de l'orthodoxie mathématique : c'est ce qui explique, par exemple, qu'ils ont tendance à "plaquer" d'emblée le calcul vectoriel pour réaliser les tâches dévolues lors de notre expérimentations, alors qu'on leur demande, au contraire, de le construire. Felix Klein, cité par Freudenthal (1973) [130], parle du phénomène de "double forgetting" pour suggérer qu'un élève doit "oublier" les mathématiques élémentaires pour apprendre celles enseignées à l'université mais que l'élève-professeur doit "oublier" ces dernières pour

130. FREUDENTHAL 1973.

enseigner au niveau secondaire par exemple. Le verbe "oublier" se traduit, pour nous, par "prendre du recul". Et c'est bien là un problème, notre expérimentation laissant supposer que, pour ce faire, les élèves-professeurs manquent de connaissances épistémologiques relatives, par exemple, au procédé générique de définition que permet une relation d'équivalence ou à la catégorisation des problèmes géométriques en termes de géométries subordonnées les unes aux autres.

Il n'y a pas lieu d'incriminer ici leur formation disciplinaire mais plutôt de mettre le doigt sur des éléments qui devraient alimenter la formation initiale des élèves-professeurs.

En ce qui concerne les membres de la noosphère et les enseignants en fonction, nous pouvons citer le "platonisme mathématique" comme obstacle hypothétique à toute approche heuristique et toute praxéologie "modélisation" qui souffrent ainsi d'une forme "d'invisibilité". Comme développé dans Job et Schneider (2007) [131] et Job (2011), les fervents d'une telle épistémologie forment une institution "cachée" en ce sens qu'ils ne sont pas forcément conscients de leur vision commune et qu'ils éprouvent ainsi d'autant plus de peine à s'en détacher, ayant un sentiment fort de naturalité à l'égard des définitions mathématiques stabilisées. C'est là une autre perspective de notre travail que de tester cette hypothèse.

Un dernier point enfin : l'instrumentalité du calcul bipoint sur le plan mathématique peut être une faiblesse écologique sur le terrain. On observe en effet (Schneider, 2006a) [132] que les professeurs sont tentés de taire, à leurs élèves, des techniques conviviales, soucieux de préserver le caractère inédit et complexe de la résolution de problèmes, devenue le phare de l'enseignement et qui pourrait bien être un mirage, en l'absence d'un enseignement approprié.

131. Job et Schneider 2007.
132. Schneider 2006a.

ANNEXE

En annexe de cette thèse, a été rédigé un projet d'enseignement ayant alimenté nos expérimentations. Ce projet est aujourd'hui publié et disponible aux Éditions de l'Université de Liège (http://www.presses.uliege.be/jcms/c_5009/accueil) :

Giang Ngan NGUYEN et Maggy SCHNEIDER, *Une approche heuristique d'une géométrie calculatoire*, Les Editions de L'Université de Liège, 2017. [133]

133. NGUYEN et SCHNEIDER 2017.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Cissé BA. “Étude épistémologique et didactique de l’utilisation du vecteur en mathématiques et en physique : lien entre mouvement de translation et translation mathématique”. Thèse de doctorat en Didactiques des mathématiques. Université de Lyon 1, en cotutelle avec l’Université Cheikh Anta Diop de Dakar, 2007.

[2] Cissé BA et Jean-Luc DORIER. “Aperçu historique de l’évolution de l’enseignement des vecteurs en France depuis la fin du XIXème siècle”. *L’Ouvert.* 113 (2006), p. 17–30.

[3] Kevin BALHAN. “Le théorème fondamental comme pierre de touche de l’enseignement et des apprentissages de l’analyse au secondaire”. Thèse de Doctorat en Sciences, orientation : Didactique des mathématiques. Liège, Belgique : Université de Liège, 2016.

[4] Kevin BALHAN et al. “Un dispositif de formation initiale des enseignants en didactique des mathématiques au niveau du secondaire supérieur en Belgique francophone”. *Les quinzièmes rencontres du réseau international de recherche en éducation et en formation (REF 2017)* (2017).

[5] Stella BARUK. *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*. Paris : Edition du Seuil, 1992.

[6] David BERLINSKI. *The King of Infinite Space : Euclid and His Elements*. Basics Book, 2014.

[7] P. BERNAYS. *Foundations of Geometry*. America, 1971.

[8] R. BERTHELOT et M.-H. SALIN. “L’enseignement de l’espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire”. Thèse présentée à L’Université de Bordeaux I. 1992.

[9] Rudolf BKOUCHE. “De l’enseignement de la géométrie”. *Colloque C.I.E.M sur l’enseignement de la géométrie* (1982).

[10] Rudolf BKOUCHE. "Quelques grandes problématiques de l'histoire de la géométrie". *IREM de Lille* (1988).

[11] Rudolph BKOUCHE, Bernard CHARLOT et Nicolas ROUCHE. *Faire des mathématique : le plaisir du sens*. Armand Colin, 1991.

[12] Dirk De BOCK et Geert VANPAEMEL. "A bas Euclide ! Mathématique moderne au Séminaire OECE de Royaumont". *Losanges* 30 (2015), p. 25–36.

[13] M. BOSCH et Y. CHEVALLARD. "La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, Objet d'étude et problématique". *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19-1 (1999), p. 77–123.

[14] M. BOSCH et J. GASCON. "Les praxéologies didactiques : Organiser l'étude. 2. Théories et empiries". *Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (2002). Sous la dir. de J-L DORIER et al.

[15] Nicolas BOURBAKI. *Eléments d'histoire des mathématiques*. Paris : Masson, 1984.

[16] Nicolas BOURBAKI. *L'architecture des mathématiques*. Cahiers du Sud, 1950.

[17] Jacques BOUVERESSE. "*Sur le sens du mot "platonisme" dans l'expression "platonisme mathématique""*. *Conférence du 19 novembre 1998 à L'Université de Genève* (1998).

[18] Alain BOUVIER et Michel GEORGE. *Dictionnaire des mathématiques*. 2nd. Paris : Presses Universitaires de France, 2005.

[19] C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO. *Eléments de calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la géométrie, à la mécanique et à la physique mathématique*. Trad. par S. LATTÈS. Paris : Librairie scientifique J. Hermann, 1910.

[20] C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO. *Transformations linéaires, tome I,* Cambridge : Bowes et Bowes, 1992.

[21] C. BURULI-FORTI et R. MARCOLONGO. *Invitation à la géométrie*. Louvain-la-Neuve : CIACO, 1986.

[22] Yves CHEVALLARD. "Notes sur la question de l'échec scolaire". *Publication n13 de l'IREM d'Aix-Marseille* (1988).

[23] Yves CHEVALLARD et Michel JULLIEN. "Autour de l'enseignement de la géométrie au college". *Petit x* (1990-91).

[24] COJEREM. *Géométrie en situations. 1er/4e Notions pour élèves*. De Boeck Wesmael, 1995a.

[25] Leo CORRY. *Nicolas Bourbaki and the concept of mathematical structure*. Springer, 1992.

[26] Antoine DALLE et C. De WAELE. *Géométrie Plane et Eléments de Topographie*. Namur, 1964.

[27] Jean-Marc DANEL et Vinciane DEMEZEL. *Astro-Math 4*. Belgique, 2009.

[28] Fearnley-Sander DESMOND. “Hermann Grassmann and the creation of Linear Algebra”. *The American mathematical monthly* 86.10 (1979), p. 814–817.

[29] J. DIEUDONNÉ. *Abrégé d’histoire des mathématiques*. Paris : Hermann Editeurs, 1986.

[30] J. DIEUDONNÉ. *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Paris : Hermann Editeurs, 1964.

[31] J. DIEUDONNÉ. *Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques, 1939*. in F. Le Lionnais, Les Grands Courants de la pensée mathématique, A. Blanchard, 1962.

[32] J.-L. DORIER et al. “L’algèbre linéaire : l’obstacle du formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995”. In : *L’enseignement de l’algèbre linéaire en quesiton*. Sous la dir. de J.-L. DORIER. Grenoble : La pensée Sauvage, 1997, p. 105–147.

[33] J.-L. DORIER et al. “The obstacle of formalism in linear algebra”. In : *On the teaching of linear algebra*. Sous la dir. de J.-L. DORIER. Dordrecht : Kluwer Academic Publisher, 2000, p. 85–124.

[34] Jean-Luc DORIER. *L’enseignement de l’algèbre linéaire en question*. Editions : La pensée Sauvage, 1997.

[35] R. DOUADY. “Jeux de cadre et dialectique outil-objet”. *Recherches en didactique des mathématiques* 7.2 (1986), p. 5–31.

[36] R. DOUADY. “Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l’algèbre linéaire - Perspective théorique sur leurs interactions”. *Université Joseph-Fourier - Grenoble I.* (1997).

[37] Adrien DUNIA MWATI. “De l’écologie d’un discours heuristique d’acculturation à l’algèbre linéaire”. Thèse de doctorat en Didactiques des mathématiques. Université de Liège, 2013.

[38] R. DUVAL. *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. 1993. URL : https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/\\IREM/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf.

[39] Ruhal FLORIS. *Qui a tué la géométrie à l’école*. Université de Genève, 1996.

[40] David FOWLER. *The mathematics of Plato’s academy : A new reconstruction*. 2e éd. Oxford : Clarendon Press, 1999.

[41] H. FREUDENTHAL. *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Pays-Bas : D. Reidel, 1973.

[42] Ivor GRATTAN-GUINNESS. "Numbers, Magnitudes, Ratios, and Proportions in Euclid's Elements : How did he handle them ?" *Historia Mathematica* 23 (1996), p. 355–375.

[43] Konstantinos GRIVOPOULOS. "Étude comparative des représentations sociales de l'atome en milieu scolaire, en France et en Grèce, en corrélation avec sa transposition didactique de 1945 à 2014". Thèse de Doctorat en Sciences, orientation : Didactique des mathématiques. France : L'Université d'Aix-Marseille, 2014.

[44] GROUPE ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUES (GEM). *Une géométrie pour tous les jours*. Louvain-La-Neuve, 1985.

[45] Robin HARTSHORNE. *Geometry : Euclid and Beyond*. Springer, 2000.

[46] Catherine HOUDEMENT et Alain KUZNIAK. "Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie". *Annales de didactique et de sciences cognitives* (2006).

[47] Christian HOUZEL. *Le rôle de Bourbaki dans les mathématiques du vingtième siècle*. SMF-Gazette-100, 2004.

[48] James J.MADDEN. *Ratio and proportion in Euclid*. Louisiana State University, 2008.

[49] Pierre JOB. "Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques". Thèse de Doctorat en Sciences, orientation : Didactique des mathématiques. Liège, Belgique : Université de Liège, 2011.

[50] Pierre JOB et Maggy SCHNEIDER. "Une Situation Fondamentale pour le Concept de Limite ? Question de Langage ou de Culture ? Comment la TAD permet-elle de problématiser cette question ?" *Actes du IIe congrès international sur la TAD : Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance* (2007).

[51] Jean-Pierre KAHANE. "Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement". *L'enseignement des sciences mathématiques : rapport au Ministre de l'Éducation nationale / Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques* (2002).

[52] Morris KLINE. *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York : Oxford University Press, 1972.

[53] Imre LAKATOS. *Preuves et réfutations, essai sur la logique de la découverte mathématique*. Trad. par Nicolas BALACHEFF et Jean-Marie LABORDE. Paris : Hermann, 1984.

[54] LE GROUPE INTER-I.R.E.M. ÉPISTÉMOLOGIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES. *Le rigueur et le calcul*. France : CEDIC, 1982.

[55] Hoai Chau LE THI. "Difficultés d'apprentissage de la notion de vecteur pour des élèves de première année de lycée en France et au Viet-nam". *Recherches en Didactique des Mathématiques* 21.1.2 (2001), p. 157–188.

[56] Hoai Chau LE THI. "Étude điactique et épistémologique sur l'enseignement du vecteur dans deux institutions : la classe de dixième au Viet-nam et la classe de seconde en France". Thèse de doctorat en Didactiques des mathématiques. Université Joseph Fourier - Grenoble I, 1997.

[57] Catherine LEBEAU. "Etude d'une genèse d'un modèle algébrique du système formé par les points, droites et plans de l'espace usuel". Thèse de Doctorat en Sciences, orientation : Didactique des mathématiques. Liège, Belgique : Université de Liège, 2009.

[58] Catherine LEBEAU et Maggy SCHNEIDER. "Equations incomplètes de plans et obstacles à la nécessité épistémique". *Recherches en Didactique des Mathématiques* 30/1 (2010).

[59] Maurice MASHAAL. *Bourbaki, A secret society of mathematicians*. American Mathematical Society, 2006.

[60] Yves MATHERON. *Mémoire et Etude des Mathématiques. Une approche didactique à caractère anthropologique*. France : Presses universitaires de Rennes, 2010.

[61] Giang Ngan NGUYEN et Maggy SCHNEIDER. *Une approche heuristique d'une géométrie calculatoire*. Les Editions de L'Université de Liège, 2017.

[62] PAPY. *Mathématique moderne 3*. Marcel Didier, 1967.

[63] Blaise PASCAL. *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*. Le Seuil, 1962.

[64] Dan PEDOE. *Geometry, a comprehensive course*. New York : Dover Publication, 1988.

[65] Daniel PERRIN et Christiane ZEHREN. "Quelques réflexions sur la géométrie et son enseignement". *Bulletin de l'APMEP* 480 (2009), p. 83–92.

[66] Davis PHILLIP et Hersch REUBEN. *The mathematical experience*. Birkhäuser, 1981.

[67] André PRESSIAT. "Aspect épistémologiques et didactiques de la liaisons "points-vecteurs"". Thèse de Doctorat en Sciences, orientation : Didactique des mathématiques. Paris, France : Université de Paris VII, 1999.

[68] François RIVENC. *Logique et fondement des mathématiques*. Paris : Payot, 1992.

[69] Hilda ROSSEEL et Maggy SCHNEIDER. *Des grandeurs inaccessibles à la géométrie du triangle*. Les Editions de l'Université de Liège, 2009.

[70] Nicolas ROUCHE. *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur*. Nivelles : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM), 2002.

[71] Nicolas ROUCHE. *Le sens de la mesure*. Bruxelles : Didier Hatier, 1992.

[72] Maggy SCHNEIDER. "Quand le courant pédagogique "des compétences" empêche une structuration des enseignements autour de l'étude et de la classification de questions parentes". *Revue Française de Pédagogie* 154 (2006a), p. 85–96.

[73] Maggy SCHNEIDER. "Quelle finalité pour l'algèbre, dans l'enseignement secondaire ?" *Conférence Nationale sur l'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole obligatoire* (le 13 mars 2012).

[74] Maggy SCHNEIDER. *Traité de didactique des mathématiques*. Les Editions de L'Université de Liège, 2008.

[75] Maggy SCHNEIDER et Pierre JOB. "Ingénierie entre recherche et formation. Elèves-professeurs en mathématiques aux prises avec des ingénieries issues de la recherche. Un dispositif de formation à portée phénoménotechnique." *Education et Didactique* 10.2 (2016), p. 91–121.

[76] Maggy SCHNEIDER et al. "Extensions praxémiques liées aux ensembles de nombres : des complexes aux relatifs". *Annales de didactique et de sciences cognitives. V. 20. Revue internationale de didactique des mathématiques.* (2015). Sous la dir. de "IREM de STRASBOURG", p. 9–46.

[77] Lena L. SERVERANCE. *The theory of equipollences : method of analytical geometry of Sig. Bellavitis*. Tribune Publishing Co., 1930.

[78] Leibniz Gottfried WILHELM. *History of vector analysis*. New York : Dover Publication, 1994.

[79] Leibniz Gottfried WILHELM. *Philosophical papers and letters*. Sous la dir. d'E. Leroy LOEMKER. London, 1989.

[80] Floriane WOZNIAK. "Conditions and constraints in the teaching of statistics : the scale of levels of determination". *In actes de CERME 5* (2007).

TABLE DES MATIÈRES